OPONENTSKÝ POSUDEK NA DISERTAČNÍ PRÁCI „TILTING THEORY OF COMMUTATIVE RINGS“

Anglicky psaná disertační práce RNDr. Michala Hrbka sestává z cca pětatřicetistránkového úvodu následovaného třemi články, jichž je doktorand (spolu)autorem. Dva z nich již byly publikovány v impaktovaných časopisech, třetí, nejrozsáhlejší, se aktuálně nachází v recenzním řízení.

V úvodní kapitole autor přehledně podává definice základních pojmů a dále představuje zásadní výsledky tří článků, jež následují v kapitolách 2–4. Kromě toho, v podkapitole 1.6, dokazuje velmi pěknou charakterizaci oborů integrity, nad nimiž jsou vychylující třídy modulů uzavřeny na plochá pokrytí.

Kapitolu 2 tvoří článek *One-tilting classes and modules over commutative rings*, který loni vyšel v Journal of Algebra a jehož je Michal Hrbek jediným autorem. Předmětem studia jsou zde 1-vychylující moduly, tj. takové moduly T, že $\mathrm{Gen}(T) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ext}^1(T, -)$. Posledně zmíněná třída modulů se pak rovněž nazývá 1-vychylující. Popis těchto tříd je umožněn velmi důležitým pozorováním, že k nim duální 1-kovychylující třídy jsou uzavřeny na injektivní obaly. Pro práci s nenoetherovskými okruhy musel navíc autor přijít s funkčním zobecněním klasického pojmu asociovaného prvoideálu k modulu. Jeden z hlavních výsledků této kapitoly představuje důkaz jednoznačné korespondence mezi 1-vychylujícími třídami modulů nad komutativním okruhem a tzv. věrnými Gabrielovými topologiemi konečného typu.

Kapitola 3 sestává z článku *Silting modules over commutative rings*, který vychází letos, konkrétně v 13. čísle prestižního časopisu International Mathematics Research Notices, a jehož spoluautorkou je Lidia Angeleri Hügel (Università degli Studi di Verona). Vzájemně jednoznačná korespondence z předchozí kapitoly je zde rozšířena: na jedné straně stojí *silting modules*, tj. přirozené zobecnění pojmu 1-vychylujícího modulu, a na straně druhé potom Gabrielovy topologie konečného typu (nyní již ne nutně věrné).

Nejdelší kapitolu 4 tvoří preprint (arXiv:1701.05534) *Tilting classes over commutative rings* se spoluautorem doc. Janem Šťovíčkem. Jedná se vlastně o (velmi netriviální) společné zobecnění článku z druhé kapitoly a výsledku kvarteta autorů Angeleri Hügel, Pospíšil, Šťovíček, Trlifaj z roku 2014, kteří charakterizovali obecně n-vychylující třídy nad komutativními noetherovskými okruhy. Za nepřítomnosti předpokladu noetherovskosti okruhu museli autoři představit bohatší rejstřík nástrojů a více koncepční důkazové techniky, z nichž mj. vyplynul popis n-vychylujících tříd za pomoci Čechovy homologie. Nadto nad okruhy, jež nejsou ani koherentní, bylo nutné využití Koszulových komplexů.

Lze konstatovat, že společným tématem ve všech částech práce, jak koneckonců napovídá její název, jsou vychylující moduly (a jejich zobecnění *silting modules*) nad komutativními okruhy. Za hlavní výsledek by se dal označit úplný popis vychylujících tříd, a korelativně kovychylujících tříd kokonečného typu, modulů nad libovolným komutativním okruhem, tj. významné zobecnění předchozího výsledku autorů Angeleri Hügel, Pospíšil, Šťovíček, Trlifaj pro noetherovské okruhy. V případě 1-vychylujících tříd je navíc explicitně zkonstruován i příslušný *Fuchsův–Salceho* 1-vychylující modul δ.

Celkově jde o aktuální téma (nejen) v teorii aproximací modulů. Zároveň se jedná o téma relativně rozsáhlé, na kterém Michal Hrbek s kolegy v Praze i v zahraničí několik let vytrvale pracoval a o němž také několikrát referoval: jak na katedrálním algebraickém semináři, tak — a to především — na četných mezinárodních konferencích. K dosažení nových vědeckých poznatků bylo třeba netriviálně zobecnit známé metody fungující pro speciální typy okruhů, ale často také vytvořit přístupy úplně nové, vycházející kupř. z hlubších vlastností různých (ko)homologií či z hutných prací L. Posicelského.

Formálně je text zpracován na vysoké úrovni. Jen některé části úvodu trpí menšími nedotaženostmi: např. se automaticky v definici 1.1.2 užívá značení ${}^{\perp}\mathcal{C}$, které nebylo zavedeno; nekonzistentně se značí posloupnosti, jednou jako $(M_\alpha \mid \alpha < \lambda)$, podruhé zase $(M_\alpha, \alpha < \lambda)$; v důsledku 1.3.10 se vyskytuje pojem, který se teprve na následující straně definuje apod. Obecně vzato se ale práce velmi dobře čte, výsledky jsou představeny jasně a srozumitelně, včetně motivace a historických souvislostí. Počet překlepů je vzhledem k rozsahu práce nízký. Z typografických prohřešků bych zmínil snad jen psaní spojovníku i na místech, kde mají být pomlčky. Seznam literatury úvodní části je v tomto směru ilustrativně nekonzistentní.

Jsem přesvědčen, že **autor jednoznačně prokázal předpoklady k samostatné tvořivé práci. Předloženou disertační práci bez výhrad doporučuji k obhajobě.**

Níže uvádím několik dotazů či podnětů k vlastní obhajobě:

1. Z textu práce není zřejmé, které části článků se spoluautory obsahují vlastní doktorandovy výsledky. Bylo by možné je nějak konkrétněji specifikovat?

2. Uveďte, prosím, na pravou míru poslední odstavec na straně 7. Bylo by smutné, kdyby logika prvního řádu umožňovala uchopovat pouze konečně generované volné moduly.

3. Věta 1.2.8 neplatí. Bod 2 není správně uveden. Korektní není ani argument pod definicí 1.2.9: vždyť pro $n > 1$ nejsou obecně f_S monomorfismy, do $\mathcal{T}$ by se potom nedostal injektivní kogenerátor.

4. Jaké Lemma 4.4 je myšleno v závorce u tvrzení 1.2.16?

5. V příkladu 1.3.3 je skutečně $\sigma = 0$?

6. Na konci důkazu v příkladu 1.4.9 není jasné, jaká injektivita se užije k tomu, aby se ukázalo, že ${}_RR$ je direktní sčítanec v $E({}_RR)$. Pro spor chceme dokázat, že ${}_RR$ je injektivní, takže jistě nemůže jít o injektivitu tohoto levého regulárního modulu, jak to na první pohled vypadá.

V Praze, 4. července 2017 Mgr. Jan Šaroch, Ph.D.