Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

2017 Veronika Tůmová

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Chápání pojmů obsah a objem u žáků základní školy

Conceptions of area and volume of pupils at the elementary school

Veronika Tůmová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program: Pedagogika
Studijní obor: Didaktika matematiky

2017

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma Chápání pojmů obsah a objem u žáků základní školy vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, 16. června 2017

....

podpis

Velmi děkuji své školitelce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za inspirativní a odborné vedení a velké množství času, který mi věnovala. Dále děkuji PhDr. Martinu Chválovi, Ph.D. za cenné rady v oblasti statistického zpracování dat. Tato práce by nikdy nevznikla bez všestranné podpory ze strany celé mé rodiny – vřele děkuji zejména svému manželovi a tatínkovi za velkou trpělivost i konkrétní pomoc.

Veronika Tůmová

ABSTRAKT

Cílem disertační práce je strukturovaně popsat uchopování pojmů obsah a objem žáky, identifikovat dovednosti, které jsou pro pochopení těchto pojmů nezbytné, a zjistit strategie a chyby žáků při řešení vybraných úloh z této oblasti. Jako nástroj jsem zvolila hypotetickou učební trajektorii, kterou jsem na základě analýzy dostupné literatury pro oba pojmy sestavila. Pomocí této trajektorie jsem identifikovala tři základní dovednosti, které se zdají pro uchopení pojmů obsah a objem nezbytné. Jedná se o geometrickou představivost, strukturaci prostoru do čtvercových či krychlových jednotek a multiplikativní uvažování. U všech těchto dovedností jsem navrhla způsob jejich měření pomocí úloh a nalezla slabou (u multiplikativního uvažování) až silnou a velmi silnou (u geometrické představivosti) souvislost s úspěchem žáka ve výpočetních úlohách na obsah a objem. Tato zjištění potvrzují oprávněnost zařazení rozvoje těchto dovedností do hypotetické učební trajektorie pro dané pojmy. Pro zkoumání strategií a chyb žáků jsem zvolila několik úloh zabývajících se strukturací prostoru do krychlových jednotek. Ukázalo se, že většina překážek pro správné řešení úlohy spadá do některé z následujících kategorií: nesprávná strukturace prostoru, chyby plynoucí z nepropojení výpočtu s geometrickou situací (ať již je příčinou kompartmentalizace či užívání pseudo-analytického myšlení) a chybná práce s matematickými konvencemi.

KLÍČOVÁ SLOVA

Obsah, objem, hypotetická učební trajektorie, geometrická představivost, strukturace prostoru, multiplikativní uvažování, reprezentace, chyby.

ABSTRACT
The aim of my thesis is to investigate how the conceptions of area and volume are built, what the major pitfalls and problems are, what skills and strategies are helpful for solving problems and what are the frequent unsuccessful strategies and pupils´ misconceptions. I used the concept of the hypothetical learning trajectory as a tool to describe this process. Based on existing research review, I compiled two hypothetical learning trajectories – one for area and one for volume. The crucial building blocks that were identified based on these trajectories are: space abilities, structuration of space into arrays of units and multiplicative thinking. A test was designed to measure these factors and the correlation of these factors with success in volume and area problems ranged from week (multiplicative thinking) to very strong (spatial abilities). These findings confirm that these factors constitute an important part of the hypothetical learning trajectory for both concepts. Several structuration tasks were selected to investigate pupils´ structuration skills and mistakes in more detail. Three main categories of problems were identified in the pupils´ solutions: incorrect space structuration, disconnection between calculation and a geometrical situation (compartmentalization and/ or pseudo-analytical reasoning were found as possible explanations) and using mathematical terms and conventions incorrectly.

KEYWORDS
Area, volume, hypothetical learning trajectory, spatial abilities, structuration of space, multiplicative thinking, representations, errors.

Obsah

1. Úvod

V letech 2013 a 2014 jsem spolupracovala na projektu GA ČR – *Kritická místa matematiky na základní škole* (GAČR P407/11/1740). Naše skupina zkoumala blíže řešitelské strategie a postupy žáků 2. stupně při řešení úloh na obsah a objem. Při analýze pořízených videozáznamů jsme zjistili, že žáci, které jsme ve výzkumu označili za méně úspěšné, mají často problémy už v samotném uchopení (konceptuálním pochopení, představě) základních pojmů (obsah, objem, jednotky obsahu a objemu apod.) (Tůmová, Janda, 2014). Problémy žáků při výpočtu obsahů, obvodů a objemů se velmi často objevovaly jako kritické místo v rozhovorech s učiteli, přičemž někteří z nich zdůrazňovali rovněž absenci základních geometrických představ u žáků (Vondrová, Žalská, 2013).

Konkrétní problémy českých žáků v oblasti úloh na obsah a objem na základě studie TIMSS 2007 rozebírají Rendl a Vondrová (2014). U více než poloviny úloh v této oblasti měli žáci výrazně horší výsledky než v ostatních úlohách (přitom devět z těchto úloh zahrnovalo práci s objemem a obsahem). Čeští žáci měli největší problémy s odvozením vlastností tělesa na základě jeho sítě či pomyslným rozčleněním složitějšího obrazce na jednodušší („umění vidět“) a objevovaly se chyby či záměny ve vzorcích pro výpočty obvodu, obsahu, objemu a povrchu apod. Kuřina (2011) v této souvislosti hovoří o tom, že žákům chybí „umění vidět“ – zmiňuje špatné výsledky žáků střední školy v jedné své výzkumné sondě u úlohy, v níž měli žáci „jen“ nahlédnout, že v daném útvaru musí mít dva trojúhelníky stejný obsah, i když mají různý tvar, a nemuseli přitom zjišťovat obsah číselně pomocí vzorce (s. 167–8).

Z výše uvedeného je patrné, že má význam podrobit problematiku uchopení pojmů obsah a objem žáky bližšímu zkoumání. Za klíčový považuji právě proces vzniku a vývoje uchopení pojmů obsah a objem v mysli žáka, jejich různé reprezentace a vzájemné propojení těchto reprezentací (viz Barmby, 2009). K popsání tohoto procesu jsem zvolila model hypotetické učební trajektorie[1] (HUT), který se v poslední době hojně využívá v didakticko-matematickém výzkumu zejména v zahraničí (Clements, Sarama, 2004; Baroody et al., 2004; Daro et al., 2011; Duschl et al., 2011).

Práce si klade za cíl strukturovaně popsat uchopování pojmů obsah a objem žáky pomocí hypotetické učební trajektorie (HUT) a identifikovat kritická místa na této trajektorii (tj. místa, která jsou pro žáky při osvojování pojmů obsah a objem obtížná nebo jejichž osvojení je pro uchopení pojmu klíčové). Dále se budu zajímat o strategie a dovednosti, které pomáhají žákům při řešení úloh na obsah a objem, a nejčastějšími chybami, které můžeme

[1] hypothetical learning trajectory

při řešení těchto úloh pozorovat. Cílovou skupinou pro můj výzkum jsou žáci základní školy 4. až 9. ročníku.

Pro řešení výzkumného záměru byly použity metody jak kvalitativní, tak kvantitativní. Nejprve jsem použila didaktický test sestavený tak, aby odpovídal jednotlivým úrovním hypotetické učební trajektorie, která tvoří teoretický základ mého výzkumu. Tento test si kladl jednak za cíl ověřit, zda klíčové dovednosti, které byly identifikovány v teoretické části práce, opravdu souvisí s úspěšnosti žáků ve výpočetních úlohách na obsah a objem (prostřednictvím korelační analýzy), a jednak identifikovat potenciální problémy a kritická místa na této učební trajektorii (analýzou pozorovaných kvalitativních jevů v řešení žáků). Abych mohla výsledky testu lépe interpretovat, případně objasnit některé klíčové jevy, které se během testování projevily, vybrala jsem z testových úloh dvě úlohy, které jsem předložila žákům prostřednictvím individuálních hloubkových rozhovorů. Data pořízená v jejich rámci jsem dále analyzovala metodami kvalitativní analýzy založenými na technikách zakotvené teorie.

V následující kapitole popíši teoretické základy, ze kterých práce vychází. Třetí kapitola je věnována metodologii výzkumu a v kapitole čtvrté představím výsledky výzkumu. Práci uzavírá diskuse výsledků a závěry. Práce je doplněna přílohami, v nichž uvádím mj. úplná zadání testů, přehled proměnných používaných v analýzách, podrobnější výsledky, ověření předpokladů použitých modelů apod.

2. Teoretická část

V této kapitole popíši teoretické ukotvení své práce. Budu se zabývat nejprve jedním z hlavních teoretických nástrojů, který v práci využívám, a to hypotetickou učební trajektorií. Dále představím hierarchickou teorii poznávání, o kterou se tento nástroj opírá, a dám ji do souvislosti s jedním z významných proudů v české didaktice – teorií generických modelů. Rovněž uvedu řadu konkrétních výzkumů, které se týkají oblasti míry v geometrii nebo přímo tvorby hypotetické učební trajektorie pro pojmy obsah a objem. Kapitolu doplňují ještě výzkumy týkající se multiplikativního uvažování a nenumerického uvažování (geometrické představivosti) a v závěru se nalézá přesná formulace výzkumných otázek.

Nejdříve považuji za nutné vymezit některé své předpoklady a důležité pojmy. Pokládám za důležité odlišit výraz „pojem“[2] obsahu a objemu od „porozumění“ (*conception*, *understanding*) obsahu a objemu. Pojmem rozumím souhrn encyklopedických znalostí, které lidstvo o dané oblasti má, a to v nejrůznějších kontextech (tj. sémantické pole obsahu a objemu). Já se budu zabývat porozuměním obsahu a objemu – tedy tím, co se tvoří v hlavě žáka při osvojování si pojmu obsah a objem (tj. vnitřní, subjektivní pojetí daného pojmu). Výrazy „poznání/poznatek“ (*knowledge*), „pochopení“ (*understanding*), a „pojetí“ či „koncept“ (*conception*) budu používat jako synonyma ve stejném významu k označení toho, jaký je stav daného pojmu u konkrétního žáka v určitém okamžiku. Lze jistě najít literaturu, která tyto pojmy odlišuje, ale pro mou práci není diferenciace těchto pojmů důležitá. Tomu, čím je toto porozumění tvořeno, je věnován oddíl 2.2.3 .

2.1. Hypotetická učební trajektorie

Jak už jsem zmínila, v poslední době je hojně využívaným nástrojem k popisu procesu osvojování si určitého pojmu hypotetická učební trajektorie. Jak uvádí Wright (2014) a Daro et al. (2011), byl pojem hypotetická učební trajektorie (HUT) poprvé navržen v roce 1995 v článku M. Simona. Podle něj hypotetická učební trajektorie zahrnuje tři části: cíl (co se mají žáci naučit), předpokládané úrovně rozvoje v dané oblasti a odpovídající činnosti. Jednou z často citovaných vymezení učební trajektorie (alespoň v USA) je definice Clementse a Saramové (2004, s. 83):

Učební trajektorie (pro určitou oblast matematiky) sestává ze tří provázaných složek:

a) cíl – tj. jaké cíle mají žáci v dané oblasti matematiky dosáhnout
b) popis uvažování a učení se u žáků v dané oblasti matematiky (vývojové úrovně)

[2] Pro tento termín je v angličtině používáno slovo „*concept*“, ale vzhledem k tomu, že budu v dalším textu ještě dělit mentální objekty na koncepty a procesy („*concepts*“ a „*processes*“), neuvádím zde žádný anglický ekvivalent.

c) tomu odpovídající série úloh, vytvořené s cílem reprezentovat mentální procesy na jednotlivých úrovních; či série činností, u kterých předpokládáme, že dětem pomohou při postupu mezi jednotlivými vývojovými úrovněmi

Velmi hrubě řečeno, HUT můžeme popsat jako cestu, kterou žák musí projít, aby daný pojem ovládl – cesta by měla mít jasně určený cíl, měla by sestávat z jednotlivých etap/úrovní a souvisejících činností, které pomáhají diagnostikovat žákovu úroveň či mají navodit u žáka posun z jedné úrovně do další. Tento nástroj tedy popisuje jak to, co by měl ovládat žák, tak i důsledky pro výuku (jaké činnosti či typy úloh by žákovi měly pomoci při posunu na další úroveň).

Myšlenka navazujících fází v učení je přirozeně historicky mnohem starší a lze ji najít ve vývojové a kognitivní psychologii a v pozdější době i ve vývojové neurologii. Mezi významnými zdroji je nutno uvést dílo J. Piageta (1960) a jeho charakteristická období či úrovně. Uchopování světa či konkrétně chápání geometrie u dětí prochází několika charakteristickými úrovněmi, které se liší tím, jak děti typicky jednají, co si myslí a jak uvažují. Jak uvádí Daro et al. (2011), další inspiraci ke vzniku HUT můžeme hledat i u Vygotského a jeho zóny nejbližšího vývoje (Vygotskij, 2004, s. 71–73). Zóna nejbližšího vývoje je popisována jako období, kdy se dítě blíží k nové vývojové etapě, ale ještě ji nedosáhlo, avšak za určitých podmínek (zejména za pomoci dospělého či jiného žáka) ji může dosáhnout snadněji, než by tomu bylo při spontánním vývoji. I zde se tedy setkáváme s myšlenkou vývojových etap a podpory žáka při přechodu na vyšší úroveň ve formě návodných otázek, příkladů či demonstrací.

Pro tvorbu HUT se využívá různých metod, např. výukových experimentů s omezeným (či naopak rozsáhlým) počtem účastníků, hloubkových rozhovorů a případových studií (Wright, 2014). HUT tedy není teoretickým konstruktem. Při konstrukci HUT je přitom nezbytné najít rovnováhu mezi obecností a konkrétností jejího popisu a vzít v úvahu to, do jaké míry je tato cesta „předepsaná“ a do jaké míry umožňuje individuální variace. Např. Confreyová (2015)[3] zdůrazňuje, že sled úrovní v HUT je pouze jedna z možných cest (způsobů osvojování si poznatku) a nikoliv něco, co je neměnné a musí probíhat vždy stejně. Konkrétní implementace závisí vždy na učiteli, žácích, volbě konkrétních úloh apod.

K pojmenování jednotlivých úrovní učební trajektorie autoři používají termín schémata (Wright, 2014), úrovně komplexnosti (*levels of sophistication*, Battista, 2004) či úrovně přemýšlení / vývojové úrovně (*levels of thinking*/ *developmental levels*, Sarama, 2011). V práci se budu přidržovat pojmenování autorů Clementse a Saramové, ale místo termínu vývojové úrovně budu používat pouze termín úrovně. Zejména u učebních trajektorií, které zasahují do období povinné školní docházky, je obtížné rozlišit, co by skutečně odpovídalo trajektorii přirozeného vývoje žáka, od toho, co je dáno kulturně-sociálními faktory (např. kurikulem v dané zemi) – přívlastek vývojové by tedy mohl být poněkud zavádějící.

[3] Jedna z hlavních autorů projektu North Carolina State University Turnonccmath, jehož základem jsou právě HUT (https://turnonccmath.net/).

HUT lze využít jako nástroj, který umožňuje diagnostikovat žáka a úroveň jeho porozumění látce, i jako nástroj, který pomáhá koncipovat výuku (Baroody et al., 2004; Clements, Sarama, 2004; Wright, 2014). Protože trajektorie vymezují určité klíčové body (cíle) v rozvoji znalostí a dovedností žáka v dané oblasti, mohou sloužit i k standardizovanému testování znalostí žáků (Battista, 2004) nebo tvorbě kurikula (Baroody, 2004). Učební trajektorie rovněž dávají učiteli mnohdy i velmi detailní návod, jak a co vyučovat a jaké reakce či chyby lze u žáků očekávat.

Zejména v USA existuje celá řada výzkumů využívajících HUT nebo jinou formu učební trajektorie jako nástroj pro zmapování žákova postupu v dané oblasti. V tabulce (tab. 2.1) uvádím stručný přehled výzkumů, v nichž jsou vytvářeny učební trajektorie v matematice – zdrojem je zpráva CPRE (Daro, 2011, s. 17–79), (Confrey, 2015), a přímo jednotlivé výzkumy. Několik výzkumů týkajících se míry v geometrii zde není výslovně uvedeno, protože jsou podrobně popsány v oddíle 2.4. Využití učebních trajektorií se však neomezuje pouze na matematiku – v přírodních vědách se používá např. pojmu učební dráha.[4] Výzkumy zabývající se učební dráhou v přírodních vědách jsou přehledně zpracovány v (Duschl, 2011, s. 140–147).

Tab. 2.1: Výzkumy zabývající se tvorbou hypotetické učební trajektorie

Zaměření učební trajektorie	**Věk žáků / ročník**	**Autoři / Vydavatel**
Přirozená čísla, dekadický systém Relace – větší, menší, rovná se Matematické operace (+/–) Tvary, prostorové uvažování, měření	2–7 let 2–5 let	NRC report (Cross, Woods, Schweingruber, 2009)
Čísla a kvantitativní uvažování (několik učebních trajektorií: rozpoznávání čísel, počítání, porovnávání a uspořádání čísel, sčítání a odčítání, sčítání a odčítání víceciferných čísel). Geometrické tvary – skládání a dekompozice, prostorové uvažování, geometrické měření	1–8 let	Sarama a Clements (2009) Viz též Sarama et al. (2011)
Strategie pro násobení	3. ročník	Sherin a Fuson (2005)
Multiplikativní uvažování, racionální čísla (*equipartitioning*).	5–15 let	Confrey et al. (2009, 2015)
Délka	3–12 let	Barrett et al. (2009, 2011, 2012)
Měření délky	Základní škola	Battista, M. T. (2007)
Racionální čísla	12–13 let	Wright, V. (2014)

[4] *Learning progressions*, viz též (Corcoran et al., 2009)

Zaměření učební trajektorie	Věk žáků / ročník	Autoři / Vydavatel
Statistické uvažování	Základní škola	Lehrer et al. (2014): modelingdata.org
Funkce		Kalchman a Koedinger (2005)
Měření obsahu	3.–4. ročník	Huang (2011)

Z tab. 2.1 je patrné, že učební trajektorie je – alespoň v zahraničí – poměrně široce využívaný nástroj, který je navíc dobře využitelný v praxi jako nástroj pro hodnocení, podklad k tvorbě kurikula a podobně. Rozhodla jsem se tedy využít tento nástroj k popisu procesu osvojování si pojmů obsah a objem a jako východisko pro hledání kritických míst v tomto procesu.

2.2. Teorie poznání

Pro tvorbu a využití HUT jsou nezbytné dva předpoklady: poznání se vytváří hierarchicky a lze jej popsat pomocí určitých mezníků či úrovní, přičemž každá následující úroveň navazuje na výsledky úrovní předchozích.

2.2.1. Hierarchický interakcionismus

Na základě předpokladu hierarchického poznání formulovali Saramová a Clements (2009, s. 20–25) teorii *hierarchického interakcionismu* (HI)[5]. Termín „interakcionismus" poukazuje na skutečnost, že se jedná o konstruktivistickou teorii, která předpokládá, že poznatky si děti/žáci aktivně konstruují. To, co si konstruují, je vždy ovlivněno již vybudovanými poznatkovými strukturami. Tedy neustále dochází k interakci mezi dosaženými kognitivními úrovněmi (úrovněmi porozumění), vlastními schopnostmi (pre-matematickými a kognitivními) a zkušenostmi, které jsou navíc ovlivněny kulturním a sociálním prostředím. Označení „hierarchický" má zdůraznit, že matematické poznatky jsou uchopovány nejprve intuitivně, pak pomocí jazyka a nakonec na metakognitivní úrovni (poznání samo se stává předmětem zkoumání; „proč to platí?"). Autoři (opírajíce se mj. i o Piagetovu teorii) popisují obvyklý postup vývoje od senzo-motorických úrovní, v nichž je potřebná manipulativní opora a uvažování je omezeno jen na několik konkrétních případů (např. na malá čísla), přes verbalizované zobecnění či abstrakci až ke zvnitřněné mentální reprezentaci, která umožňuje další aplikace/operace a zobecnění. Tento proces nazývají Saramová a Clements *cyklická konkretizace*[6]. Cyklická proto, že v rámci jedné matematické oblasti probíhá opakovaně. Například mluvíme-li o obsahu, žáci projdou tímto cyklem pro obsah obdélníku – pokrývání pomocí konkrétních materiálů, obsahy obdélníků ve čtvercové

[5] Význam teorie potvrzuje i zpráva National Mathematics Advisory Panel (NMAP). Tento panel sestávající z významných expertů z oblasti matematiky, didaktiky matematiky a kognitivní psychologie byl sestavený v USA s cílem analyzovat existující výzkumy v didaktice matematiky a vybrat z nich ty, které mohou být považovány za nejkvalitnější a průkazné – závěrečná zpráva byla publikována v roce 2008. NMAP považuje tuto teorii za významný krok k objasnění kognitivních procesů, které stojí v pozadí geometrického uvažování.
[6] Podle popisu by tomuto procesu měl být přiřazen spíše název „cyklické zobecňování", ale autoři skutečně používají termín *cyclic concretization* (s. 22).

síti, zakreslování jednotek, strukturace jednotek tvořena pouze v představě, obsah jako počet dlaždic na jedné straně krát počet dlaždic na druhé straně, obsah jako délka strany vynásobená délkou druhé strany. A podobný cyklus se bude opakovat i pro obsah trojúhelníku – obsahy trojúhelníků ve čtvercové síti, vztah trojúhelníku a obdélníku (manipulace s konkrétními materiály, nákresy), pravoúhlý trojúhelník jako polovina obdélníku, vztah základna krát výška děleno dvěma.

Tento systém tedy předpokládá, že kognitivní vývoj probíhá v jakési hierarchické posloupnosti dosažených úrovní porozumění. Úrovně jsou nahlíženy jako kvalitativně odlišné kognitivní struktury se zvyšující se sofistikovaností, komplexností, abstrakcí, silou a obecností. Tyto úrovně se podle autorů liší od vývojových stádií, tak jak je popisoval Piaget, zejména tím, že stádia charakterizují vývoj v mnoha oblastech, zatímco (vývojové) úrovně jsou příslušné určité oblasti (např. geometrickému uvažování, numerickému uvažování). Postup z jednoho stádia do druhého se děje podle Piageta v horizontu let, avšak postup mezi úrovněmi může být podstatně rychlejší (někdy i extrémně krátký). Nejedná se obvykle o významné či náhlé skoky, ale spíše o postupné přerůstání.

Každá úroveň je charakterizována určitými mentálními objekty (*concepts*[7]) a procesy (*actions-on-objects*, *processes*). Naše porozumění je pak tvořeno schématy, která se dynamicky mění. Čím více navazujících a prolínajících se schémat k danému schématu v mysli jedince existuje, tím méně jsme ochotni toto schéma změnit (způsobilo by to obrovské změny v našem myšlení). Struktura, kterou už jsme si v dané oblasti vybudovali, ovlivňuje naše další uvažování v této oblasti. Koncepty (*objects*) a procesy (*actions*) se vyvíjejí v neustálé interakci a není efektivní budovat jedno bez druhého. Vyučování by se mělo zaměřovat na budování propojení mezi koncepty a procesy uvnitř i napříč jednotlivými oblastmi[8].

Uspořádání jednotlivých úrovní je podle autorů určitým způsobem přirozené – úrovně jsou založeny na přirozených schopnostech člověka a ovlivněny jeho zkušenostmi, poznatky a kulturou. Kulturní prostředí určuje, jaký druh zkušeností děti obvykle získávají, a tak jsou HUT v dané kultuře přibližně stejné. Nicméně individuální učební trajektorie (tj. konkrétní realizace učební trajektorie popisující, jak rychle se žák učební trajektorií pohybuje, zda určité úrovně vůbec dosáhne atd.) se mohou velmi lišit v závislosti na individuálních schopnostech a zkušenostech daného žáka. Něco podobného tvrdí i Wright (2014, s. 637): velmi pravděpodobně nelze HUT zcela přesně podrobně popsat, aby byla univerzálně platná vždy a všude. Vývoj poznatků žáka bude v dlouhodobém horizontu v souladu s HUT, zatímco v krátkodobém horizontu se individuální trajektorie mohou odlišovat.

---

[7] Zde autoři v originále používají rovněž výraz „*concept*“ s tím, že odkazují na mentální objekt – to by bylo užití anglického slova „*concept*“ v jiném významu, než jak ho vymezuji na začátku kapitoly 2. V češtině se tomuto zmatení vyhnu tím, že budu používat pojem (pro souhrn znalostí lidstva) a koncept nebo objekt pro mentální objekty (součást porozumění danému pojmu).

[8] Sarama a Clements (2009, s. 21–22): zásada 5 Společný vývoj konceptů a dovedností a zásada 8 Progresivní hierarchizace.

Saramová a Clements (2009, s. 20–25) uvádějí na podporu své teorie a jednotlivých tvrzení i řadu empirických výzkumů, na které zde však vzhledem k rozsahu práce nebudu odkazovat.

2.2.2. Teorie generických modelů

Výše řečené má na první pohled některé společné rysy s teorií poznávacího procesu široce rozšířené v české didaktice matematiky, a to Hejného teorií generických modelů (TGM). TGM je zmiňována jako jedna ze dvou didaktických teorií, které nejvíce ovlivnily výzkum v české didaktice matematiky v posledních letech (viz Vondrová et al., 2015, s. 105[9]).

Poznávací proces je v teorii TGM popsán schématem na obr. 2.1.

<table>
<tr><td rowspan="2">motivace</td><td>→</td><td>izolované modely
(proto-schéma)</td><td>1→</td><td>generický model
procesuální
→konceptuální
(schéma)</td><td>2→</td><td>abstraktní
poznatek
(proto-struktura,
struktura)</td></tr>
<tr><td colspan="6">krystalizace</td></tr>
</table>

Obr. 2.1: Schéma TGM (Hejný, 2014, s. 73)

Znaky 1→ a 2→ označují kognitivní posuny, zvané zdvihy. Zdvih 1 je zobecněním a zdvih 2 abstrakcí (druhý zdvih je charakteristický tím, že při něm dochází ke změně jazyka).

Izolovaný model je konkrétní zkušenost či konkrétní model příští znalosti. Etapa izolovaných modelů není jen sbíráním konkrétních zkušeností, ale i pronikáním do podstaty problému (co do zkoumaného problému náleží a nenáleží; dochází k objevování toho, čím jsou modely „stejné“). Etapa izolovaných modelů obvykle probíhá ve čtyřech fázích. Po příchodu první konkrétní zkušenosti se postupně objevují další izolované modely. Nejdříve nejsou nijak propojeny, ale postupně na sebe některé modely začnou poukazovat, shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Žák si začíná uvědomovat podstatu oné stejnosti, až dojde k zobecnění tím způsobem, že jeden izolovaný model začne fungovat jako zástupný model pro ostatní modely. Ten pak nazýváme generickým modelem.

Generický model je poznáním toho, co všechny předchozí jednotlivé zkušenosti – izolované modely – spojuje. Vzniká procesem zobecnění z komunity izolovaných modelů. Generický model je jádrem skutečného poznání. Generické modely existují pro objekty – ty hrají zástupnou roli a reprezentují jeden nebo celou skupinu objektů (například 3 prsty jako zástupce pro skupinu tří objektů nebo prototyp nějakého geometrického tvaru). Může ale existovat i generický model určitého vztahu. Při objevování vztahů bývá tento generický model nejprve procesuální (např. objev u řady trojúhelníků s výškou 1 a prodlužující se příslušnou stranou: „obsah se zvětšuje vždy o půl čtverečku“). Z něj se potřebou formulovat hledanou vazbu stává generický model konceptuální (formulace vztahu mezi vstupem a výstupem např. „obsah je polovina spodní strany“).

[9] Tou druhou zmiňovanou teorií je Brousseauova Teorie didaktických situací (Brousseau, 1997).

Abstraktní poznatek si jedinec vytvoří abstraktním zdvihem, tedy formalizovaným popisem objevovaného jevu, například algebraicky popsanou vazbou, vzorcem (např. $S = \frac{b}{2}$). Dochází tedy k uchopení obecnosti, které je většinou doprovázeno i změnou jazyka; zpravidla je použit jazyk písmen a symbolů.

Krystalizace probíhá permanentně během celého poznávacího procesu; jde vlastně o napojování nového poznatku na struktury již vytvořené ve vědomí žáka (často ve dvou i více oblastech). Cílem krystalizace je vytvoření dostatečně hustých vazeb mezi jednotlivými poznatky, které již v poznatkové struktuře žáka jsou či které se tam teprve dostanou.

Ještě zmíním termín *formální poznatky*, který budu později v práci potřebovat. Za formální považuje Hejný poznatek vytvořený bez propedeutiky zaměřené na tvorbu izolovaných modelů. Takový poznatek není propojený na jiné znalosti či životní zkušenost, žák ho umí aplikovat pouze v kontextu, v jakém poznatek získal, a neumí ho aplikovat v situacích pro něj nestandardních.

Podobně jako v hierarchickém interakcionismu i v TGM můžeme pozorovat určitý hierarchický model a cyklickou konkretizaci (od izolovaných modelů, přes verbálně popisované generické modely až po abstraktní poznatek, který může být dále zkoumán či aplikován). Navíc Hejný (2014, s. 50) uvádí, že k přechodům mezi jednotlivými etapami může učitel žákům pomoct vhodnými úlohami, což koresponduje s HUT.

V dalších oddílech se podíváme na některé společné rysy a odlišnosti obou teorií.

2.2.3. Mentální reprezentace poznatku a schéma v obou teoriích

Saramová a Clements (2009, s. 21) hovoří o tom, že se v hlavě žáka vytváří mentální reprezentace, která je následně modifikována. Součástí této reprezentace se stávají koncepty a procesy, které si děti propojují a které přísluší k jednotlivým úrovním. Mentální reprezentace je tvořena schématy – nejedná se však o statickou strukturu, nýbrž o strukturu, která se dynamicky mění v závislosti na úloze, situaci či kontextu. Schémata (či podschémata), která jsou součástí mnoha dalších schémat, jsou velmi rezistentní vůči změnám, neboť jejich změna by vedla ke změnám v celém kognitivním systému. I když dochází ke změnám v mentální reprezentaci, předchozí reprezentace zůstávají uloženy a podle autorů mohou být použity, pokud se žák dostane do stresové či příliš obtížné situace. Za určitých podmínek tedy lze pozorovat regresi k předchozím modelům.

Pojem koncept není v knize blíže vymezen, tento výraz je používán ve spojení koncept čísla, koncept řádů (*place-value*), koncept kardinality, koncept úhlu, je zmiňováno osvojování si konceptu, porozumění konceptu, koncept je vyučován. Dále je koncept uváděn jako příklad mentálního objektu; úrovně jsou budovány na konceptech a dovednostech (*skills*) předchozích úrovní; koncept je považován za kognitivní nástroj[10]. Podle všeho jde tedy o mentální objekt – tedy to, co jsem v úvodu označila jako porozumění pojmu (*conception*). Dále je odlišen koncept od dovednosti (*skill*), tedy schopnosti aplikovat nějaký algoritmus, a autoři zdůrazňují, že koncepty a dovednosti jsou provázané a musí se vyvíjet paralelně. Nepředchází tedy nutně jedno druhému.

Přesné vymezení schématu rovněž není v knize uvedeno. Dále v textu (s. 208) je na příkladu trojúhelníku vysvětleno, co autoři rozumí pod pojmem schéma trojúhelníku: jedná se o síť kognitivních propojení mezi geometrickými koncepty a procesy ve specifických vzorech[11]. I když pojmy nejsou přesně definovány, je patrné, že pro pojem schématu jsou zásadní koncepty, procesy a jejich propojení.

V teorii TGM je popis obsahu vědomí žáka o dost podrobnější. Obecně je zde schéma chápáno jako obsah vědomí konkrétního člověka (někdy též označováno jako interní schéma). Hejný uvádí, že pojetí poznávání žáka v TGM je podobné pojetím teorie APOS (Akce, Proces, Objekt, Schéma[12]), a i pojem schéma v TGM je tedy této teorii blízký. TGM však přináší jemnější rozlišení úrovní, na kterých se žák nachází (Hejný, 2014, s. 82–93):

1. Proto-schéma = mentální prostor, kam se ukládají izolované modely, z nichž v budoucnu vznikne generický model (tím se stane proto-schéma schématem).
2. Schéma = prostor obsahující dynamickou organizaci konceptů, akcí, procesů, vztahů, situací a dílčích schémat. Schéma je nositelem intuitivního porozumění v žákově vědomí a vzniká až na úrovni generického modelu (jakmile dojde k zobecnění)[13]. Kvalitu schématu určuje bohatost a pestrost jeho podschémat případně generických modelů. Schémata se neustále dynamicky mění, přičemž pro změnu jsou důležité okamžiky objevení se vnitřního rozporu (obvykle nového izolovaného modelu).
3. Proto-struktura = upřesnění intuitivně poznaného schématu charakteristické zejména schopností odhalovat vztahy mezi schématy a tvořit tím obecnější schémata.
4. Struktura = nositel axiomatického porozumění; porozumění se zbavuje sémantického propojení, a tím mohou vznikat konstrukty, které nejsou smysly vnímatelné. Proces strukturace může trvat léta a je v různých oblastech různě rozvinutý. Posun ke strukturám je patrný obvykle až s přechodem na 2. stupeň, ale začíná již na 1. stupni.

[10] Strana 23: „children have a variety of cognitive tools—concepts, strategies, skills, utilization and situation knowledge — which coexist“

[11] Strana 208; vlastní překlad: „cognitive networks of relationships connecting geometric concepts and processes in specific patterns“

[12] Jedná se o teorii, která popisuje proces učení jako cestu (Dubinsky a McDonald, 2002): „Akce“ = transformace objektů vnímaných jako vnější; reflektovaným opakováním akce vzniká „proces“ (tedy akci lze realizovat pouze ve vědomí bez vnější opory); pokud člověk vnímá proces jako celek a je schopen na něm uskutečňovat transformace, stává se z něj „objekt“. „Schéma“ je pak soubor akcí, procesů, objektů a jiných schémat vázaných jistým obecným principem – je to rámec, jakési zastřešení pro předchozí úrovně.

[13] V APOS teorii k tomuto oddělení nedochází. Matematické schéma je totožné s matematickou kognitivní strukturou a jsou v něm zahrnuty již první akce a procesy – tedy izolované modely.

Mentální schémata v pojetí teorie M. Hejného jsou chápána jako nositelé intuitivního porozumění v žákově vědomí, jsou též hlavním nástrojem rozhodování a jsou charakterizována základní řadou tezí. Struktura je naproti tomu nositelem porozumění axiomatického (Hejný, 2014, s. 106). Jakmile žák začne zkoumat, proč to nebo ono pravidlo platí, posouvá se ke struktuře. Hlavní teze charakterizující schémata a struktury jsou tyto (Hejný, 2014, s. 90–93, přeformulováno):

1. Schémata pomáhají člověku orientovat se v životě.
2. Schémata se utvářejí většinou spontánně jako důsledek potřeb člověka (kde není potřeba, nevytvoří se schéma). Matematická mentální schémata si žák vytváří řešením úloh.
3. Schéma téhož výseku reality uložená ve vědomí různých lidí se liší. (Je třeba odhalit, na základě jakého schématu druhý dospěl k danému výsledku.)
4. Lidé, kteří společně řeší nějaký problém, mohou ve vzájemné interakci dospět k lepšímu řešení, než by došel každý sám. (Dochází ke vzájemnému obohacování mentálních schémat na základě diskuse a interakce.)
5. Prvky, které do schématu vstoupily s nízkým zvědoměním nebo nízkou frekvencí, zanikají rychle. Prvky, které vstoupily s vysokým zvědoměním a vysokou frekvencí, přetrvávají dlouho.
6. Upřesňování intuitivně poznaného schématu (tj. tvorba proto-struktury) přispívá k rozvoji intelektuálních potencí žáka ve více směrech: upřesňování pojmů, argumentační podpora odhalených vztahů, hledání vhodného jazyka k popisu procesů a situací, kritické přijímání informací, odhalování vztahů mezi schématy a tvorba obecnějších schémat.
7. Další posun od proto-struktury ke struktuře přispívá k rozvoji intelektuálních potencí žáka ve více směrech, a to zejména: abstrakce a s tím spojená práce s velkým kvantifikátorem, ujasnění rozdílu mezi axiomy a tvrzeními vyžadujícími důkazy, nalezení souladu mezi jednotlivými částmi struktury, odhalování izomorfizmů, hledání protipříkladů, hledání propojení na struktury příbuzné atd.

V další práci pro mne není důležité přesně diferencovat kvalitu matematické kognitivní struktury žáka, a proto se přidržím terminologie teorie APOS (a vlastně i teorie HI) a budu pojmem schéma označovat kognitivní struktury již od stadia prvních zkušeností.

2.2.4. Srovnání teorie generických modelů a hierarchického interakcionismu

Jak jsem už uvedla, teorie TGM a HI jsou si v mnohém podobné, což ukazuje tab. 2.2.

Tab. 2.2: Podobnost teorií Hierarchického Interakcionismu a Teorie generických modelů

HI	TGM	Poznámka
Cyklická konkretizace: Vývoj postupuje obvykle od senzo-motorických úrovní (je potřebná manipulativní opora a myšlení je omezeno jen na	Izolované modely → (*zobecnění*) → generický model → (*abstrakce*) → abstraktní poznatek	Obě teorie popisují poznávací proces žáka velmi podobně. HI zvlášť nepojmenovává zobecnění a abstraktní

HI	TGM	Poznámka
pár konkrétních případů) přes verbalizované zobecnění či abstrakci až ke zvnitřněné mentální reprezentaci, která umožňuje další aplikace/operace a zobecnění.		zdvih (jako dva významné kognitivní posuny) – v této teorii jsou změny spíše plynulé a autoři druh změn nijak nepojmenovávají.
Vývojová posloupnost: Každá úroveň je charakterizována určitými mentálními objekty (koncepty) a procesy (*actions-on-objects*). Provázanost konceptů a procesů: Koncepty a dovednosti (procesy) se vyvíjejí v neustálé interakci a není efektivní budovat jedno bez druhého.	Schéma = prostor obsahující dynamickou organizaci konceptů, akcí, procesů, vztahů, situací a dílčích schémat. Důležitost je přikládána flexibilnímu propojení konceptu s procesem[14]. Z didaktického hlediska je za klíčovou označována právě ta část, kdy se z opakovaných procesů tvoří koncept[15]. Setkáváme se však i s typy situací, kdy je východiskem koncept (objekt[16]) vedoucí k nějakému procesu (činnosti). Nicméně tento proces má opět za cíl obohatit původní koncept.	Obě teorie pracují s koncepty a procesy. TGM zdůrazňuje důležitost budování konceptů, protože ty častěji v žákovských schématech chybí. V HI nenalézáme takový důraz na tu část poznávacího procesu, kdy z procesu vzniká koncept. V obou teoriích je důležitá provázanost obou složek.
Progresivní hierarchizace: Pokud je vyučování vhodně vedené, budují si děti propojení mezi koncepty a procedurami uvnitř i napříč jednotlivými doménami.	Krystalizace probíhá permanentně během celého poznávacího procesu a jde vlastně o provázání nového poznatku ve vědomí žáka (často i ve více oblastech). Cílem krystalizace je vytvoření dostatečně hustých vazeb mezi poznatky.	Obě teorie zdůrazňují důležitost propojování a tvorby vazeb mezi schématy a prvky schémat jak uvnitř dané oblasti, tak napříč oblastmi.

[14] Vzniká tzv. amalgám (tedy mentální objekt, který umožňuje flexibilní propojení konceptu s procesem), pokud byl poznatek vložen do vědomí žáka pouze jako formální, k tomuto propojení nedošlo (Hejný, 2014, s. 36).
[15] Hejný, 2014, s. 33
[16] Např. rovnice vyzývající žáka k řešení.

HI	TGM	Poznámka
Mentální reprezentace poznatku je tvořena schématy, která se dynamicky mění.	Schéma je dynamický mentální objekt.[17]	Obě teorie zdůrazňují důležitost změn, k nimž ve schématu dochází.
Učební trajektorie: V rámci HUT jsou na sebe navázány jednotlivé úlohy takovým způsobem, aby co nejpřesněji odrážely hypotetické mentální konstrukce a způsoby myšlení dětí. Úlohy na sebe navazují a odpovídají jednotlivým úrovním vývojové posloupnosti.	K přechodům mezi jednotlivými etapami může učitel žákům pomoci vhodnými úlohami. Matematická mentální schémata si žák vytváří řešením úloh.	Gradované série úloh hrají ve vyučování v obou přístupech zásadní roli.

V určitých ohledech se však obě teorie odlišují. Například HI neodlišuje pojmy proto-schéma, schéma a struktura. V teorii HI se do schématu/reprezentace zahrnují již první akce a procesy (tedy první izolované modely). Drobný rozdíl můžeme nalézt i v přechodech mezi úrovněmi. Podle obou teorií se poznání vytváří hierarchicky, každá následující úroveň navazuje na koncepty a procesy předchozích úrovní. Podle HI však jde většinou o postupnou integraci než o velké skoky mezi ostře ohraničenými úrovněmi (i když autoři připouštějí, že nové zkušenosti mohou vyústit i ve změnu náhlou). Tedy přechody mezi jednotlivými úrovněmi v HI nejsou totožné s pojmem zdvih v TGM, který označuje jasný kognitivní posun (často doprovázený tzv. AHA-efektem – u zobecnění, či změnou jazyka – u abstrakce). Pro dynamiku změn jsou podle TGM důležité okamžiky objevení se vnitřního rozporu způsobené nejčastěji novým izolovaným modelem, který není v souladu se stávající mentální reprezentací poznatku. Změny úrovní v HI by svou postupnou integrací spíše odpovídaly etapám tvorby proto-schématu, či zpřesňování/ strukturaci existujícího schématu; případně tvorbě podschémat v rámci nějakého dalšího schématu.

TGM nepracuje s pojmy, jako jsou hypotetická učební trajektorie, ovšem schéma z obr. 2.1 dává návod, jak vést žáky k budování mentálních matematických schémat. Na TGM je založena edukační strategie známá pod termínem Výuka orientovaná na budování schémat (VOBS). Teoretický základ této metody popsal Kvasz (2016), který ho nazývá genetickým konstruktivismem. Metoda VOBS stojí na dvou pilířích: na učiteli a na učivu uchopeném do sítí úloh vložených do didaktických prostředí (Hejný, 2014, s. 13).

Učitel by měl zejména vytvářet optimální klima, dávat dostatečný prostor pro úvahy žáků, vést žáky ke vzájemným diskusím (a tím podporovat různost názorů a postupů), zadávat přiměřené úlohy, sám projevovat zvídavý přístup k matematice, promyšleně pracovat s chybou žáka a podobně (s. 127). Zejména práce s chybou je velmi důležitá; chyba by měla

[17] Hejný, 2014, s. 87

být pojímána jako přirozený jev. Pokud si ji člověk chybu uvědomí a zvědomí si její příčinu, zlepší to jeho schopnost provést danou činnost příště lépe.

Didaktickým prostředím rozumí Hejný takový soubor vzájemně propojených pojmů, vztahů, procesů a situací, který dovoluje tvořit úlohy, které umožňují odhalovat žákům hluboké matematické myšlenky, jsou obdařeny silným motivačním potenciálem, jsou přiměřené žákům 1. i 2. stupně a mají nastavitelnou obtížnost (s. 13). Tato didaktická prostředí slouží jako reprezentační nástroj a žákům jsou předkládány stejné nebo obdobné situace v různých prostředích/ reprezentacích (například číselná soustava o jiném základu – Biland) proto, aby žáci mohli odhalovat zákonitosti matematiky, a ne pouze zákonitosti práce v nějaké dané standardní reprezentaci (například pravidla sčítání či násobení v desítkové soustavě). Tím také dochází k propojování různých reprezentací daného problému, což je důležité zejména v případě propojování reprezentací ikonických či geometrických (např. pohyb po číselné ose) s reprezentacemi symbolickými (v tomto případě s přičítáním) (Kvasz, 2016, s. 24–25). Didaktická prostředí používaná v oblasti geometrie jsou například krychlová tělesa, dřívka, sítě krychle, prostředí čtverečkovaného papíru aj. I když HI hovoří o různých reprezentací a jejich propojování, nezdůrazňuje a nepracuje s pojmem didaktické prostředí. Pro HI je důležité (stejně jako je tomu i ve VOBS), aby úlohy byly v souladu s intuitivním poznáním dítěte a způsobem myšlení a učení na daném vývojovém stupni a zároveň napomáhaly k postupu na úroveň další.

Nalezené odlišnosti nepovažuji za nikterak zásadní, a proto budu v další práci využívat obou teorií. Pojem schéma budu v dalším textu konzistentně používat v jeho širším významu tak, jak ho používá hierarchický interakcionismus (tedy jako mentální model poznatku vznikající již od prvních izolovaných modelů).

Poznámka: Teorií zabývajících se pojmotvorným procesem v matematice je celá řada. V práci budu vyžívat zejména HI a TGM, z jiných teorií využiju pouze některé pojmy, pokud mi umožní nahlédnout na získaná data z jiné, nové perspektivy.

2.3. Výzkumy vztahující se k oblasti míry v geometrii (konkrétně obsahu a objemu)

K oblasti míry v geometrii lze nalézt celou řadu výzkumů. Omezím se na ty z nich, které se zabývají zejména pojmy obsah a objem a budu je strukturovat podle rámcového schématu pojmotvorného procesu míry v geometrii, který s oporou o další zdroje vytvořila Vondrová (2015, s. 255). Výzkumy týkající se přímo konstrukce HUT pro pojmy obsah a objem uvedu v oddíle 2.4.

Pro pochopení pojmu délka, obsah i objem je klíčový pojem zachování[18] (konzervace) míry (oddíl 2.3.1). Útvar je dále nutno strukturovat pomocí jednotek (úseček, čtverečků,

[18] Jak ukazuje řada autorů (Kospentaris, Spyrou, Lappas, 2011, s. 105; Piaget at al., 1960; Clements, Stephan, 2004; Kordaki, 2003). Bond a Parkinson (2010) dokonce zjistili, že úspěch v Piagetovských úlohách zaměřených na zachování obsahu predikuje úspěšnost ve standardním školském testu na obsah.

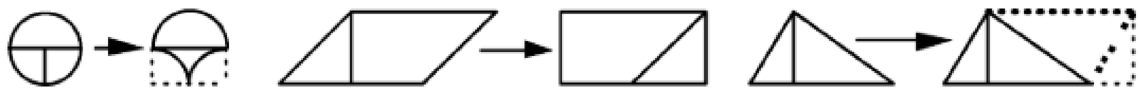
krychliček), jejichž opakovanou iterací zjistíme číselné vyjádření míry (oddíl 2.3.2). Pomocí uvědomění si atributů, na kterých míra záleží, a povahy vztahů mezi nimi dochází k propojení iterací jednotky a numerických procesů (výpočtů) a popisu těchto procesů jazykem algebry, vzorci (oddíl 2.3.3). Z podstaty věci je zřejmé, že uvedené tři oblasti se částečně překrývají, tedy ani příslušné výzkumy nejde zcela jednoznačně zařadit.

2.3.1. Nenumerické (geometrické) uvažování

Do této skupiny jsem zařadila výzkumy, které se zabývají pojmem obsah bez vazby na jeho vyčíslení (viz např. obr. 2.3 a obr. 2.4).

Kordakiová (2003) vymezuje koncept zachování obsahu (v souladu s Piagetovým pojetím) jako situaci, kdy měřitelný obsah útvaru (kvantita) zůstane zachován, i když se útvar kvalitativně změní (tj. změní se jeho tvar). Aby žák mohl zachování obsahu pochopit, musí nahlédnout: a) invarianci obsahu vůči transformacím, jako je posunutí, otočení a překlopení; b) tranzitivitu – pokud má útvar A stejný obsah jako B a útvar B stejný obsah jako C, mají i A a C stejné obsahy; c) princip kompenzace[19] – pokud na jedné straně uberu nějakou část, kterou na jiné straně přidám, obsah se nezmění; d) dekompozici a rekompozici částí – pokud útvar rozdělím na části a ty přeskládám, zůstane jeho obsah stejný (nezmění se obsah ani částí ani celku). Bez tohoto pochopení nemůže fungovat ani prostá iterace jednotek. Tyto principy je dále nutno nahlédnout u různých útvarů (obdélníků, čtverců, trojúhelníků, rovnoběžníků, lichoběžníků, nekonvexních útvarů apod.).

V této souvislosti hovoří Duval (2006) o důležitosti „vidění“ v geometrii a jako jednu z charakteristik tohoto „vidění“ uvádí rozpoznání možných dílčích konfigurací daného útvaru a výběr té dílčí konfigurace, která je relevantní pro řešení problému (například rozpoznání transformací, které vedou k přeměně jednoho útvaru na útvar jiný, viz obr. 2.2).

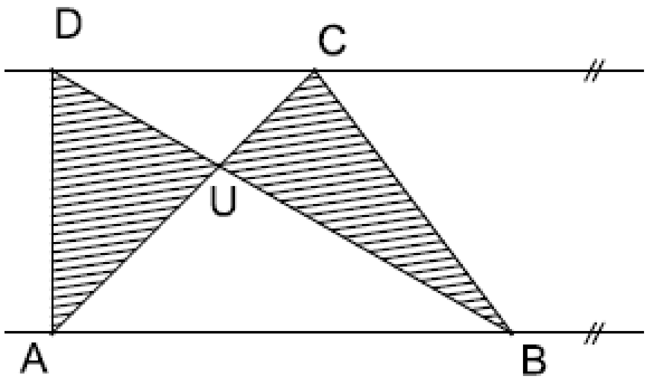


Obr. 2.2: Duval (2006, s. 112) – transformace útvarů

Kuřina opakovaně hovoří o „umění vidět“ jako o jednom ze základních umění, která historicky utvářela a stále tvoří matematiku (1989, 2006). Autor tento pojem bohužel blíže nevymezuje, uvádí jen různé aspekty „umění vidět“ (1989, s. 6) (geometrické vyjadřování, geometrická představivost a rozvíjení intuice při řešení úloh) či na konkrétních příkladech upozorňuje na to, že právě „umění vidět“ žákům chybí. Např. uvádí špatné výsledky žáků

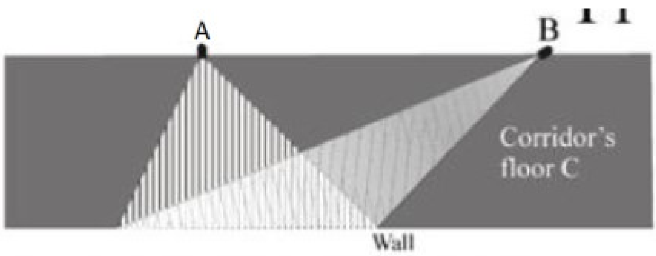
[19] Zde používá Piaget termín „princip kompenzace“, ale jedná se o kompenzaci v jiném smyslu, než jak tento termín používám v dalším textu. Zde se principem kompenzace rozumí to, že to, co na jedné straně uberu, je stejné jako to, co na druhé straně přidám, tedy délka, obsah či objem zůstává stejný. V popisu HUT však používám princip kompenzace ve smyslu: jsou-li jednotky menší, bude jich k vyplnění útvaru potřeba více.

střední školy v úloze, kde měli dokázat, že dva z trojúhelníků vzniklých v lichoběžníku, rozdělíme-li ho pomocí jeho úhlopříček, musí mít stejný obsah.



Obr. 2.3: Úloha o lichoběžníku (Kuřina, 2011)

74 % ze 140 žáků úlohu vůbec nevyřešilo a pouze 10 % mělo úplné a správné řešení. Těžiště úlohy nespočívá v užití vzorců, ale úlohu lze vyřešit geometrickou úvahou. Jako hlavní příčiny neúspěchu autor uvádí nízkou úroveň představivosti, neschopnost vidět souvislosti a nahlédnout situaci z nového pohledu. Vondrová (2015) upozorňuje na to, že problém mohl spočívat i v obecnosti zadání úlohy, s čímž naši žáci nemají dostatek zkušeností. Pokud jde v úloze o obsah, jsou zadána i čísla. To v této úloze není. K podobným závěrům dochází i Divišová (2012) v dizertační práci zaměřené na strategie řešení geometrických úloh, které lze řešit pouze pomocí geometrického vhledu s minimem výpočtů, u žáků ve věku 12–19 let. Upozorňuje jednak na to, že úlohy, které vyžadují geometrický vhled (rozpoznání určité konfigurace), jsou pro žáky náročné a že na rozvíjení tohoto vhledu je třeba kontinuálně pracovat. V jejím výzkumu se ukázalo, že značné procento žáků projevilo tendenci automaticky začít s výpočtovými strategiemi, aniž by provedlo prvotní rozbor úlohy na základě analýzy obrázků. Autorka uvádí jako možnou příčinu přílišný důraz na počítání na úkor konceptuálního porozumění míry v geometrii.



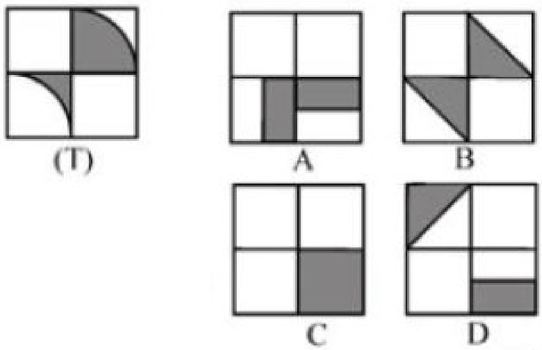
Obr. 2.4: Kospentaris et al. (2011) – úloha T1 Světla v chodbě

Specificky problematikou zachování obsahu u žáků posledního ročníku střední školy a u studentů oboru matematika na univerzitě se zabývá práce (Kospentaris, Spyrou, Lappas, 2011)[20]. Žákům a studentům zadali několik úloh, z nichž dvě podrobněji zmíním.

[20] Jednalo se o písemný test doplněný rozhovory. Úspěšnost ve vybraných úlohách byla u žáků střední školy 63,1 % u T1 a 73,6 % u T5 a u studentů university 66 % u T1 a 73,3 % u T5.

V úloze T1 mají respondenti určit, které ze světel A a B na obrázku (obr. 2.4) osvětluje větší plochu podlahy chodby C.

V úloze T5 mají žáci určit, ve kterém z případů A, B, C nebo D je šedě vybarvená plocha stejně velká jako šedě vybarvená plocha ve čtverci T (viz obr. 2.5).



Obr. 2.5: Kospentaris et al. (2011) – úloha T5 Vybarvené části čtverců

Provedený výzkum ukázal, že koncept zachování obsahu není u respondentů stejnoměrně rozvinut. Selhávají zejména v případech, kdy se situace jeví vizuálně jinak, než jak ve skutečnosti je, nebo kde přetrvávají intuitivní miskoncepce (aby měly útvary stejný obsah, musí být shodné; je-li větší obvod, bude větší i obsah). V prezentovaných výsledcích můžeme pozorovat, že i u starších studentů se projevují různé strategie řešení úloh, a to na všech úrovních, podobně jak je popsal Piaget (1960) – čistě vizuální porovnávání („vypadá to tak“, „zdá se mi to tak“), intuitivní zachování obsahu (přibližné srovnání pomocí dekompozice a rekompozice; intuitivní (mis)koncepce o obsahu), měření, až po deduktivní uvažování (formální operace – obsah je shodný proto, že jsou stejné délky stran a k nim příslušné výšky). Žáci a studenti používali u různých úloh různé strategie, a to v závislosti na obtížnosti úlohy. Neplatilo tedy, že pokud byli schopni deduktivního uvažování v jedné úloze, už tak řešili i většinu dalších úloh). Autoři uzavírají svůj článek konstatováním, že zachování obsahu je pro žáky stále problém a že by na ně měl být při výuce kladen větší důraz.

Výsledky výzkumů, podle kterých problémy s uchopením principu zachování obsahu přetrvávají často do dospělosti (Kordaki, 2003, s. 181), potvrzuje i naše dosavadní zkušenost s výukou budoucích učitelů 1. stupně. Jako jednu z příčin uvádí Kordakiová předčasnou algebraizaci. Ve svém výzkumu se zaměřila na možnosti překonání těchto problémů pomocí využití ITC ve výuce; sledovala různé strategie 14tiletých žáků při řešení úloh na transformaci nekonvexního mnohoúhelníku a porovnání obsahů nekonvexního mnohoúhelníku a čtverce ve speciálně vytvořeném prostředí dynamické geometrie. Díky němu mohou žáci využívat i jiné metody než manipulaci (tj. rozstřižení, otočení, přemístění atd.) a vidět souvislost s výsledky výpočtů. Jako velmi zajímavý a pro žáky přínosný se ukázal nástroj na zobrazení tříd ekvivalentních objektů (například třída trojúhelníků, které mají stejnou základnu a stejnou výšku – tedy i stejný obsah, ale různý tvar). Při rozhovorech vedených během experimentu byla velká část žáků velmi překvapená, že jednotlivé prvky třídy mají stejný obsah.

Již zmíněná miskoncepce, že útvary se stejným obvodem by měly mít i stejný obsah, je u žáků poměrně častá. Výše zmíněný NMAP panel (National Mathematics Advisory Panel, 2008) například uvádí výzkum (Dembo et al., 1997), který se týkal izraelských žáků ve věku 12–14 let. Výzkum je zajímavý tím, že srovnává žáky dvou typů škol: ultraortodoxních, kde nemají prakticky žádné vyučování matematiky a přírodních věd, a tradičních, kde se tyto předměty poměrně intenzivně vyučují. Žáci ultraortodoxních škol vykázali v úlohách zaměřených na tuto miskoncepci lepší výsledky. Jedním z možných vysvětlení je to, že tradiční způsob výuky může vést žáky k přesvědčení, že pokud některé transformace zachovávají obsah, mělo by totéž platit i pro obvod (pro výpočet obou se totiž používají stejné proměnné, a to délky stran).

Výše zmíněné výzkumy i řada dalších (např. Rahim, Olson, 1998; Rahim, Siddo, 2012; Battista, 2007) považují operace dekompozice a opětovné rekompozice[21] tvaru za základní pro pochopení pojmu obsah. Shodnost po částech je ekvivalentní rovnosti obsahů; prostá shodnost (tvaru) je jen jednou z možností, kdy jsou obsahy shodné. Nenumerické uvažování (tedy zjišťování míry bez nutnosti jejího vyčíslení) je nezbytnou součástí pojmotvorného procesu míry v geometrii. Tou další je schopnost strukturovat prostor a propojit tuto strukturaci s numerickými procesy.

2.3.2. Strukturace prostoru a její multiplikativní uchopení

Často jsou ve výzkumu zmiňovány problémy s představou obsahu jako iterace čtvercových jednotek uspořádaných do pravidelné struktury (Battista, 1998, 2004). Žáci jednak nechápou, že vynásobením dvou jednotek délky vznikne čtvercová/obdélníková jednotka obsahu, nebo nedokáží doplnit neúplnou strukturu/pole ze čtverečků stejné velikosti.

Podle Rendla a Vondrové (2014) byli naši žáci 8. ročníku v TIMSS 2007 vysoce nad mezinárodním průměrem u úloh na představivost v 2D i 3D prostoru strukturovaném čtverečky (resp. krychličkami) v prostředí, kde je tato strukturace vizuálně znázorněna („kolik krychliček v tělese chybí“, „nakresli v síti k danému trojúhelníku trojúhelník dvojnásobného obsahu“). Úlohy, kde si musí žáci tuto strukturaci představit či sami doplnit, řešili čeští žáci v rámci svého standardu (tj. cca 10 % nad mezinárodním průměrem). Podle zprávy ČŠI se výsledky českých žáků v TIMSS v geometrii letech 2011 a 2015 zlepšily[22], nicméně nenalezla jsem žádnou podrobnou sekundární analýzu dat, která by se zaměřovala na určení problémových typů úloh.

Ve výzkumu s průměrnými a podprůměrnými žáky 2. stupně se v rozhovorech ukázalo, že žáci často neumějí využít strukturaci obdélníku pro zjištění jeho obsahu a že i žáci na konci školní docházky neumějí využít strukturaci prostoru krychlemi pro zjištění objemu

[21] Rozložení tvaru na části a opětovné složení částí do (jiného) tvaru.

[22] Podle Tomáška et al. (2016) byl v roce 2007 průměrný bodový výsledek českých žáků 4. ročníku v geometrii 487 bodů, zatímco v roce 2011 už 513 bodů a v roce 2015 531 bodů. Body se vztahují k bodování TIMSS, které bylo nastaveno tak, že 500 bodů představovalo průměrný výsledek všech zúčastněných zemí v roce 1995 (směrodatná odchylka byla nastavena na 100 bodů).

(Vondrová, 2015). Kromě toho se ukázala zajímavá souvislost: úspěšnost žáků v úlohách na obsah a objem vysoce korelovala se způsobem, jak daný žák vyplňoval plochu kachličkami (Tůmová, Janda, 2014). Méně úspěšní žáci daleko častěji určovali počet kachliček skládáním (vytvářeli řádko-sloupcovou strukturu), zatímco úspěšní používali ke zjištění počtu kachliček násobení pro zjištění obsahu stěny i kachličky a následně dělení obsahů. Jak uvidíme v oddíle 2.4, tyto dva postupy přesně odpovídají dvěma různým úrovním v HUT, kde řádko-sloupcová strukturace předchází multiplikativnímu chápání obsahu a práci s nestandardní jednotkou.

Mnozí autoři poukazují na problém s chápáním jednotek obsahu či objemu – žáci pletou jednotky obsahu, délky a objemu (Vondrová, Žalská, 2013; Battista, 2004; Barrett et al., 2009; Tůmová, Janda, 2014), žáci sčítají obsahy s délkami, nevědí, jak jednotka obsahu či objemu vypadá (Vondrová, 2015), apod. Chyby v převodech jednotek jsou další poměrně častou chybou při řešení úloh na obsah a objem. Jako příčinu uvádějí čeští učitelé (Vondrová, Žalská, 2013) chybějící představu jednotek a jejich velikosti, nicméně zde pravděpodobně hraje roli rovněž správné pochopení řádů (desetinných čísel).

Huangová (2013, 2014) ve svých výzkumech s dětmi 3. a 4. ročníku poukázala na důležitost multiplikativního uchopení vztahu pro obsah. Nejlepší výsledky vykazovaly děti, které měly dobré pochopení jak pojmu obsah (ve smyslu velikosti plochy ohraničené křivkou), tak multiplikativní povahy výpočtu obsahu. Nicméně děti, kterým tato povaha unikala, měly horší výsledky, i když jejich pochopení pojmu obsah bylo dobré. Podobné výzkumy, které ukazují, že problémy žáků spočívají hlavně v tom, že u nich není propojena strukturace prostoru s numerickým uvažováním – strukturace situace v prostoru buď úplně chybí, anebo je nesprávná či nedostatečná – uvádí i Battista (2007, s. 892).

Porovnání účinnosti výuky zaměřené na numerické uvažování, na geometrické uvažování a na jejich kombinaci provedli Huangová a kolegové (2011). Na vzorku 120 taiwanských dětí ze 4. ročníku zkoumali účinnost různých druhů výuky tématu vzorec obsahu obdélníku a čtverce. Autoři vytvořili tři různá kurikula pro pojem obsah: a) kurikulum zdůrazňující numerické výpočty; b) kurikulum zaměřené na geometrické transformace (zcela bez numerických výpočtů); c) kurikulum, které propojuje oba tyto přístupy a spojuje geometrické transformace útvarů s numerickými výpočty obsahu. Výuka byla vedena metodami „řízeného vyučování“[23] (kdy je žák veden k pozorování, manipulaci, diskusi, řešení problémů a objevování). Skupiny vyučované podle kurikula a), b) a c) byly dále doplněny o kontrolní skupinu, která se zabývala ve výuce zcela jinou oblastí matematiky. Ve výzkumu se jasně prokázalo, že kurikulum složené z kombinace obou přístupů (c) nejvíce přispívá k úspěšnosti žáků při řešení problémů zaměřených na matematické usuzování a vysvětlování (tedy konceptuální pochopení). Čistě geometrické a čistě numerické kurikulum žádný takový efekt nevykázalo. I když se ukázalo, že geometrický pohled je velmi

[23] guided instruction

důležitý pro konceptuální pochopení obsahu, ukázalo se též, že ještě důležitější je propojení obou složek – numerické a geometrické.

2.3.3. Algebraický popis numerických procesů (vzorce)

Celá řada autorů poukazuje na problémy žáků se vzorci týkajícími se míry v geometrii, což potvrzují i sami učitelé (Vondrová a Žalská, 2013). Po zjištění, že se má počítat obsah či objem, mají žáci „snahu o okamžité použití vzorce, aniž by se [...] snažili nejdříve o situaci uvažovat a udělat si představu“ (Vondrová, 2015, s. 282; Divišová, 2012). Vondrová dále popisuje jev „kalkulativní oprava vzorce“, kdy se ani po použití nesprávného vzorce žáci nevracejí k situaci, ale pouze ke vzorci a ten se snaží upravit, nebo do něj dosazují jiná čísla, dokud nedostanou výsledek, který se jim jeví jako pravděpodobný.

Problémy českých žáků 8. ročníku se vzorci potvrzuje i TIMSS 2007 (Rendl, Vondrová, 2014). Špatná aplikace nebo záměny ve vzorcích pro výpočty obvodu, obsahu, objemu a povrchu byly velmi frekventovanou chybou. Autoři upozorňují, že záměny vzorců pro obvod, obsah, objem a povrch nejsou problémem pouhého zapamatování, ale že je třeba je „vidět také jako problém vztažení algebraického výrazu či rovnice ke geometrické situaci“ (s. 53), což může být způsobeno předčasnou algebraizací. To bylo jasně vidět u úloh v TIMSS 2007 zařazených v oblasti algebra, kde úspěšnost v úloze zaměřené na algebraický popis geometrické situace[24] byla dokonce –2,8 % vzhledem k mezinárodnímu průměru a úspěšnost úlohy na přiřazení geometrické interpretace aritmetickému výrazu byla +1,5 % vzhledem k mezinárodnímu průměru, přičemž standard českých žáků daný úspěšností v ostatních úlohách byl 9,4 % nad tímto průměrem.

Tendence k automatickému použití vzorců je zpravidla větší u starších žáků. Např. Herendiné-Kónya (2015) zjistila u maďarských žáků 2. stupně[25], že úspěšnost v úloze na výpočet obsahu trojúhelníku umístěného ve čtvercové síti byla větší u žáků 5. ročníku než u žáků z 6. a 7. ročníku. V úloze zaměřené na obvod nekonvexního pravoúhlého obrazce byli žáci 5. ročníku dokonce nejlepší ze všech testovaných ročníků. Nejenže se geometrické uchopení situace u žáků nezlepšilo, ale došlo dokonce k patrnému zhoršení – žáci nevyužili naznačenou čtvercovou síť, ale pokoušeli se o aplikaci vzorce, která byla navíc ve většině případů chybná. Nejčastěji pozorovanou chybou u výpočtu obsahu trojúhelníku bylo vynásobení délek dvou či všech jeho stran. Autorka soudí, že vzorec pro obsah obdélníku či čtverce (tj. násobení stran) je tak silným a frekventovaným modelem obsahu, že často nahrazuje koncept obsahu obecně (což potvrzují i další autoři, např. Vondrová, 2015; Kamii, Kysh, 2006). Herendiné-Kónya vidí jednu z příčin v tom, že na 1. stupni zkoumané školy je výuka pojmu obsah zaměřena do značné míry na nenumerické dovednosti (porovnávání obsahů, zachování obsahu, odhady a podobně), na 2. stupni se přístup soustřeďuje více na

[24] Viz s. 40-41: Určení obsahu obdélníku s délkami stran vyjádřenými pomocí proměnné *x* a přirozených čísel.
[25] 84 žáků z jazykové školy (26 z 5. ročníku; 29 z 6. ročníku; 19 ze 7. ročníku a 21 z 8. ročníku).

práci se vzorci. Výsledky úlohy na obsah trojúhelníku ukazují, že konceptuální pochopení obsahu bylo pravděpodobně překryto vzorcem (miskoncepcí) „obsah = násobek stran“.

Podobně Kamiiová a Kyshová (2006) popisují problémy s výpočty obsahu založené na chápání vzorce $S = a \cdot b$ (zejména pro nepravidelné tvary). Autorky v návaznosti na Piagetovy výzkumy ukazují, že mnoho žáků má problémy s chápáním čtverce (jako diskrétní a nedělitelné entity) jako jednotky pro obsah (což je spojitá entita). Frekvence výskytu těchto problémů klesá s věkem a autorky v souladu s Piagetovými výzkumy předpokládají, že by to mohlo souviset s chápáním kontinua – v určitém věku jsou žáci schopni nahlédnout čtverec jako nekonečný počet kolmých úseček vedených z jeho stran (jakousi síť), což by pak mělo ozřejmit výpočet obsahu jako $a \cdot a$. Podařilo se nám najít jeden navazující výzkum (Wilder, 2014), kde se ale korelace mezi chápáním úsečky jako kontinua (nekonečně dělitelné) a úspěšným vyřešením úloh na výpočet obsahu nepotvrdila.

Zacharos (2006) zkoumal problémy žáků s výpočtem obsahu. Mezi nejčastější chybné strategie objevující se v jeho výzkumu patří: užití vzorce $a \cdot b$, i když jde o jiný tvar než čtverec či obdélník (nevědí, co vypočtené číslo představuje); užití vzorce $a + b$; doplnění nekonvexního tvaru na čtverec/obdélník a určení obsahu tvaru opsaného namísto původního. I Zacharos uvádí předčasnou algebraizaci jako jednu z příčin problémů, které žáci mají. Pro srovnání je uvedena historická paralela: do 2. století př.n.l. byla řecká geometrie prakticky nearitmetizovaná, počátky měření obsahu jsou čistě kvalitativní – souvisí s porovnáváním obsahů položením útvarů na sebe („epithesis”), a to buď přímo (přímé porovnávání), nebo použitím třetího objektu, který sloužil jako poměřovadlo (nepřímé porovnávání, vyplnění útvaru jednotkami). Proto svůj výukový experiment postavil na využití dvou přístupů k výuce obsahu – jeden přístup byl tradiční, založený na vzorcích a druhý využívá v hojné míře porovnávání a pokrývání útvaru vhodnou jednotkou. Ukazuje se, že žáci, kteří měli možnost ve výuce pracovat s pokrýváním útvaru, měli významně lepší výsledky při určování obsahu, a to zejména u nestandardních (nekonvexních) útvarů.

Nakonec shrnu další relevantní výzkumy, které nelze zařadit do žádné z předchozích skupin.

2.3.4. Ostatní

<u>Různé významy pojmu objem</u>: Piaget (1960) rozlišuje ve svých experimentech různé významy pojmu objem: objem jako prostor pro nalití kapaliny (kapacita), objem jako prostor zabraný stavbou z kostek (vnitřní prostor), objem jako hmota tělesa (při ponoření kostek do vody). Výzkum (Potari, Spiliotopoulou, 1996) tato zjištění potvrzuje a poukazuje na velkou pluralitu představ žáků na přelomu 1. a 2. stupně základní školy o pojmu objem, které si musíme být vědomi, pokud chceme koncipovat výuku či tvořit diagnostické úlohy. Žáci mohou objem chápat například jako kapacitu, tedy objem kapaliny (sypkého materiálu), který se vejde do dané nádoby. Jiné pojetí objemu je hmota daného tělesa ve smyslu, jaký objem kapaliny by těleso vytlačilo, kdyby se do ní ponořilo, nebo jak velká by to byla kulička, kdyby bylo z modelíny a my z ní vytvarovali kouli. Třetí možnost je objem jako prostor, který dané těleso zabírá (sklenička s víčkem by měla větší objem než hmota skleničky i než je její kapacita).

Dalším úskalím v práci s pojmy obsah a objem je jejich používání v běžném jazyce. Jak popisují Jirotková a Kloboučková (2013, s. 46) slovo obsah se v hovorovém jazyce používá v řadě spojení – například „obsah lahve“, „obsah motoru“, z nichž žádné nepřipomíná geometrický význam slova obsah. Naopak tato spojení často odkazují spíše na objem. Záměny pojmů se objevily i v našem předchozím výzkumu (Vondrová, 2015; Tůmová, Janda, 2014), nicméně chybná terminologie nevedla nutně k neúspěšnému řešení (výskyt chyb v terminologii byl sice kladně korelován s úspěšností v úlohách, ale korelace nebyla příliš silná).

Kurikulární problémy: Na problémy související s předčasnou algebraizací obsahu a objemu bylo poukázáno už výše (dále např. Huang et al., 2011; Jirotková, Kloboučková, 2013). Autoři se shodují, že mezi příčiny patří i fakt, že vyučování je zaměřeno spíše procedurálně a nikoliv konceptuálně. Umístění učiva v učebnicích má rovněž značný vliv (i když využití učebnice závisí vždy na konkrétním učiteli). Např. Tarr a kolegové (2006) uvádějí, že prakticky všichni zkoumaní učitelé v USA neodučili poslední cca 1 % lekcí v učebnici, a i když umístění učiva nebylo jediným faktorem, který ovlivnil výběr vynechaných kapitol, zhruba polovina učitelů neodučila ani posledních cca 10 % lekcí v učebnici. V mnou analyzovaných učebnicích pro 2. stupeň je míra v geometrii často jednou z posledních kapitol: 6. a 7. ročník končí objemem, 8. konstrukčními úlohami a pouze 9. ročník končí finanční matematikou.

Iluze linearity: De Bock a kolegové (2007) zkoumali tendenci žáků používat předpoklad lineárního růstu i v případech, kdy tomu tak nemůže být (tedy např. u nárůstu obsahu a objemu v závislosti na nárůstu délky strany čí hrany). U žáků se projevuje silná tendence aproximovat nárůst obsahu či objemu lineárně. Velmi zajímavé byly například výsledky výzkumu, kdy autoři testovali tendenci linearizovat obsah u 93 žáků 6. ročníku. Žáci prošli nejprve pre-testem (s úlohou na obsah čtverce s dvojnásobnou stranou) a ti z nich, kteří obsah chybně linearizovali, absolvovali semistrukturovaný rozhovor, ve kterém řešili za pomoci tazatele analogickou úlohu ve třech různých formách: (S) pouze jako slovní zadání, (D) jako slovní zadání doplněné obrázkem a (P) pomocí manipulace s konkrétními předměty[26]. Po dvou dnech následoval post-test, který byl prakticky shodný s pre-testem. Většina žáků ze skupiny (D) (16 ze 24) a téměř všichni z (P) (20 ze 24) byli schopni úlohu vyřešit správně. U slovního zadání se to podařilo pouze jednomu žákovi. Nicméně v post-testu, v němž byla úloha zadána slovně bez obrázku, ji téměř všichni žáci řešili znovu lineárně, nezávisle na tom, co jednorázově „objevili“ během rozhovoru. Autoři jako jednu z možných příčin uvádějí skutečnost, že zadání úlohy asociuje školský kontext (tj. klasickou učebnicovou úlohu), přičemž v tomto kontextu je většina problémů, se kterými se žáci setkávají, proporcionálních (tj. vztah mezi proměnnými je lineární), což automaticky vede žáky k lineárnímu způsobu řešení. Jakmile se změní zadání (s obrázkem nebo s manipulativy a reálným kontextem), vede to žáky k jinému způsobu řešení. Je zde ovšem jasně patrné

[26] V dalším textu je budu označovat manipulativa. Manipulativa jsou konkrétní předměty, na které si žák může sáhnout (kachličky, korálky, krabičky, kostky, listy papíru k překládání; nikoliv však už objekty na papíře či v počítači).

nebezpečí toho, že žáci nepřenesou řešení takovéhoto problému (svůj „objev“) do jiného kontextu. K tomu je třeba, aby si žáci vybudovali propojení mezi různými problémovými situacemi a jakousi obecnou matematickou strukturu potřebnou k jejich řešení (s. 141); nestačí jednorázové setkání se situací, v němž jejich předpoklad linearity není potvrzen.

2.4. Zdroje zabývající se tvorbou HUT pro obsah a objem

Jedním z cílů práce je popsat uchopování pojmů obsah a objem žáky pomocí hypotetické učební trajektorie (HUT). Výzkumů, které se tvorbou HUT pro tyto pojmy zabývají, je celá řada. Navíc se inspiruji kurikulárními dokumenty či analýzou učebnicových řad. Jako hlavní východiska budu používat následující tři skupiny výzkumů: (Outhred, Mitchelmore, 2000), (Battista, 2007), (Sarama, Clements, 2009). Tyto zdroje dále porovnám s pozorováním vývoje chápání těchto pojmů u Piageta (1960) a s výsledky projektu Turnonccmath (viz oddíl 2.4.5).

I když jednotlivé skupiny výzkumníků často používají různý přístup (různé úlohy a výzkumné metody), jsou jimi vytvořené HUT v mnoha aspektech podobné. Nejprve podrobněji popíši výsledky jednotlivých výzkumů a na závěr zvýrazním paralely mezi přístupy v přehledné tabulce. Vzhledem k tomu, že v zásadě každý z uvedených autorů se odkazuje na práce J. Piageta, zařadím do tohoto srovnání i Piagetovy úrovně a popis schopností dětí v oblasti geometrické míry pocházející z jeho výzkumů.

2.4.1. Piagetovy výzkumy

Jak už bylo uvedeno, v Piagetově práci (1960) nenalézáme přímo pojem učební trajektorie, nicméně na řadě jeho pokusů můžeme sledovat, jak se pojetí obsahu[27] a objemu[28] u jeho respondentů s věkem (a vzděláváním) vyvíjí.

---

[27] Vycházíme z (Piaget et al., 1960) a jeho experimentů týkajících se obsahu. Jedná se zejména o pokusy: 1) zachování obsahu při odčítání shodných částí (s. 261 nn; dítěti ukážeme dva stejné zelené obdélníky – představují trávu – a kostičky, které představují domy. Na každý obdélník postavíme jeden dům a ptáme se, zda bude mít kráva na obou loukách stejně trávy. Pak přidáme další dům a měníme jejich uspořádání – těsně u sebe vs. rozházené po louce a stále se ptáme, zda bude mít kráva stejně trávy). 2) Zachování obsahu útvaru vzniklého přeskládáním původního tvaru (s. 273 nn; srovnávání dvou tvarů vzniklých ze stejného počtu čtverečků; nebo dvou tvarů, kde druhý vznikl rozstřižením a přeskládáním z prvního). 3) Zachování obsahu u vně ohraničené části (s. 286 nn; opět dva zelené shodné obdélníky jako louka, na jednu z nich položíme hnědý čtverec představující záhon, na druhou louku položíme shodný hnědý čtverec, který je ovšem možno rozdělit na různé části.; poté u druhého záhonu části různě přeskládáváme a ptáme se, zda plocha trávy zůstává stejná). 4) Porovnávání obsahů pomocí jednotek (s. 292 nn; dítěti předložíme dva tvary (jeden trojúhelníkový) a jeho úkolem je tyto tvary porovnat; má k dispozici čtvercové kartičky (jednotky) a trojúhelníkové kartičky (polovina jednotky), má určit který tvar je větší). 5) Dělení plochy na stejné části (s. 302 nn; dítě má za úkol rozdělit kruhový či obdélníkový dort na stejné části mezi 2, 3, 5 a 6 dětí).

[28] Vycházíme z (Piaget et al., 1960) a experimentů týkajících se objemu zde popsaných. Jedná se zejména o pokusy: 1) stavby na ostrovech: zachování objemu, dítě má k dané stavbě postavit takovou stavbu, aby v ní bylo přesně stejně prostoru, ale aby stavba stála na menším ostrově, 2) dítě má z nabídky vybrat těleso, které má stejný objem jako těleso, které dostalo, 3) dítě má za úkol zvolit z nabízených možností nádobu, která má dvojnásobný obsah v porovnání s nádobou původní, 4) známý test konzervace objemu kapalin: k dispozici jsou dvě stejně vysoké a široké sklenice vody, které ukážeme dětem, aby se přesvědčily, že obsahují stejné

Věk	Pokusy týkající se obsahu	Pokusy týkající se objemu
0–4	Senzomotorická úroveň (0–2) Vizuální srovnávání (I)	Senzomotorická úroveň (0–2) Vizuální srovnávání (I)
4–5	Předoperační úroveň – pre-konceptuální období (II A) *srovnávání obsahů prostým položením útvarů na sebe *chybí zachování obsahu (rozstřižením útvaru se obsah změní) *chybí tranzitivita (pokrytí ploch stejným počtem dlaždic není důkaz shodnosti jejich obsahů)	Předoperační úroveň – pre-konceptuální období (II A) *srovnávání objemů těles na základě porovnání jediného rozměru *chybí zachování objemu (přeskládáním tělesa se objem změní, stejně tak přelitím obsahu do užší sklenice) *chybí tranzitivita (použití stejného počtu kostek neznamená shodnost objemů těles) * rozdíl mezi vnímáním objemu jako kapacity (kolik se vejde vody), a prostoru, který těleso zabírá (převládá ten první) – pozornost je i při skládání kostek soustředěna na stěny
5–6 6–7	Předoperační úroveň – intuitivní období (IIB) *intuitivní zachování obsahu při rozstřižení útvaru, jeho posunutí, otočení *zachování obsahu: obsahy útvarů mohou být shodné, i když se liší jejich obvod (tranzitivita) * objevuje se aditivní princip (shodnost velikosti zbytku plochy po zastavění domy)	Předoperační úroveň – intuitivní období (IIB) *objevuje se princip kompenzace (větší výška stavby kompenzuje menší základnu)
7–8 7–9	Úroveň konkrétních operací (IIIA) *zachování obsahu je logická nutnost (ne však ještě zachování doplňku) * aditivní princip *není důležité, jak tvar vypadá, je důležité, jak vznikl (rozdělení na části a opětovné složení) * prosté počítání jednotek nehledě na to, že nejsou stejně veliké	Úroveň konkrétních operací (IIIA) *princip kompenzace je jasný, ale není jasné, o kolik vyšší stavba musí být *zachování objemu jen z hlediska objemu kapaliny (přelitím do užší sklenice se objem nezmění, stavba ze stejného počtu kostek má stejně místa – uvnitř), ale ne z hlediska toho, kolik prostoru těleso samo zaujímá (kostičky ve vodě zaujímají jiný objem podle toho, jak jsou poskládány)

množství vody. Poté experimentátor přelije vodu z jedné nádoby do nízké a široké sklenice a z další do jiné sklenice, vyšší a užší. Dítěti je položena otázka, zda obě sklenice obsahují stejné množství vody.

Věk	Pokusy týkající se obsahu	Pokusy týkající se objemu
9–12	Úroveň konkrétních operací (IIIB) (již od 8–8,5 roku) *zachování doplňku je jasné * práce s jednotkou i s ohledem na její velikost *řádko-sloupcová strukturace tvaru (koordinace dvou dimenzí) a logické násobení (spíše opakované přičítání) * objevuje se vztah mezi dvojnásobným zvětšením délky strany a čtyřnásobným zvětšením obsahu; pokud je třeba zdvojnásobit obsah, nemohu brát dvojnásobek strany.	Úroveň konkrétních operací (IIIB) (již od 8–8,5 roku) * používání kostek jako jednotek k poměřování, ale nedochází k měření hran (určen pouze počet kostek na povrchu stavby – vícenásobné započtení) a není používáno násobení rozměrů * kompenzace ve více rozměrech zároveň – „tento rozměr jsem zmenšil na polovinu, tak jiný rozměr zdvojnásobím“
12+	Úroveň formálních operací (IV) *skutečné pochopení vztahu „obsah je šířka krát délka“, uchopení úsečky jako nekonečné množiny bodů a plochy jako nekonečného množství úseček – kontinuum	Úroveň formálních operací (IV) * zachování objemu i ve smyslu prostoru, který těleso zaujímá ve vztahu k okolnímu prostoru (např. ponořené do kapaliny); toto pojetí objemu je nyní chápáno jako identické s prostorem uvnitř (kapacitou) *skutečné pochopení vztahu „objem je šířka krát délka krát výška“, stačí měřit délky hran a vynásobit (není třeba počítat kostky na obvodu) *dítě je schopno spočíst délku hrany krychle, která má dvojnásobný objem

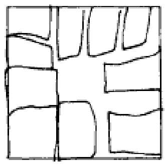
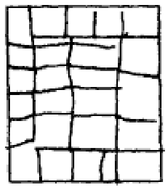
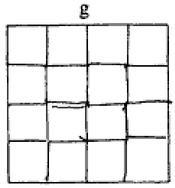
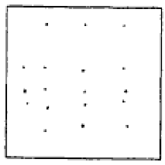
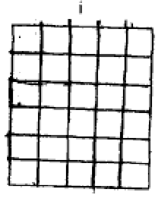
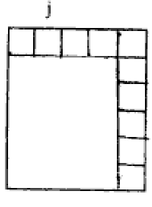
2.4.2. Výzkum Outhredové a Mitchelmorea – obsah

Dalším zdrojem, ze kterého při tvorbě HUT vycházím, je výzkum Outhredové a Mitchelmorea (2000). Autoři zaznamenali individuální rozhovory se 115 australskými dětmi z 1. až 4. ročníku. Záměrně byla zvolena taková věková skupina, která ještě neprošla výukou pojmu obsah ve škole. Žákům byly předkládány úlohy na obsah pravoúhelníku typu „urči, kolik dlaždic potřebuješ na pokrytí čtvercové/obdélníkové podlahy“, přičemž úlohy měly různé podmínky zadání: žáci dostali dlaždice jako manipulativum; dlaždice byla pouze nakreslená vedle podlahy; byly udány pouze rozměry dlaždice a rozměry podlahy, text žák pouze slyšel, ale neviděl apod.

Podle toho, jaké strategie děti používaly pro zjišťování obsahu (tj. jak pokrývaly plochu[29] jednotkami: strukturování, poměřování a počítání a rozdělování na menší části), bylo identifikováno 5 vývojových úrovní (tab. 2.3).

[29] V následujících tabulkách používám často pojmy plocha a obsah. Plochu chápu jako ohraničenou část roviny, kdežto termín obsah používám ve smyslu velikost plochy (tyto dva termíny považuji za ekvivalentní).

Tab. 2.3: Outhredová a Mitchelmore (2000): HUT pro obsah

Úroveň	**Popis**	**Obrázek a komentář**
0 Nedokonalé pokrytí	Jednotky nepokrývají celou plochu nebo se překrývají. Někde je patrná tendence zachovat strukturu na okrajích a nevěnovat pozornost tomu, co se děje uprostřed. Mohou se objevovat náznaky uchopení struktury (řádko-sloupcové), ale jsou tam mezery a překryvy.	b 
1 Primitivní pokrytí	Jednotky sice pokrývají celou plochu, ale není ještě patrná systematická organizace. Jednotky se mohou lišit velikostí i tvarem, nejsou řádně uspořádány a může se stále ještě objevovat přílišné zaměření na okraje. Správný výsledek na této úrovni není obvyklý (a když, tak je to náhoda).	c 
2 Strukturované pokrytí konstruované z jednotky	Správná řádko-sloupcová struktura, stejný počet zhruba pravoúhlých dlaždic/jednotek v každém sloupci i řádku. Velikost zakreslené jednotky je buď odhadnuta, dlaždice je obkreslena nebo dokonce změřena – rozměry jednotky však nejsou dány do vztahu s rozměry obdélníku. Správné odpovědi jsou obvykle podmíněny možností pracovat s konkrétním materiálem. Struktura není konstruována pomocí iterace řádků/sloupců – řádek/sloupec není vnímán jako jeden celek.	g  h 
3 Strukturované pokrytí konstruované pomocí měření	Počet jednotek ve sloupci/řádku je určen měřením a kreslením. Jeden rozměr určuje počet řádků a druhý rozměr počet sloupců – iterace řádků/sloupců jako samostatných celků je plně rozvinutá. Mladší děti čtverce počítají po jednom, starší používají opakované přičítání nebo násobení. Schéma struktury je uspořádané, zobecnitelné, ale stále ještě obrazné.	i  j 
4 Struktura pouze	Počet potřebných jednotek je určen z velikosti jednotky a z rozměrů obdélníku, aniž by dítě potřebovalo náčrtek. Je využito	

Kde nelze dobře rozhodnout, zda se termín vztahuje na plochu či na její velikost, používám raději výraz plocha, protože se víc liší od slov obvod a objem.

Úroveň	Popis	Obrázek a komentář
implicitní, řešení výpočtem	násobení, občas i opakované přičítání – z toho lze usoudit, že dítě strukturované pokrytí (řádko-sloupcové) využívá, ale nepotřebuje ho už kreslit. Tato znalost odpovídá porozumění vzorci pro obsah – schéma struktury se stává symbolickým.	

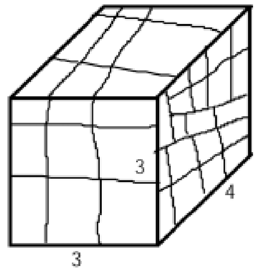
2.4.3. Battistův výzkum – obsah a objem

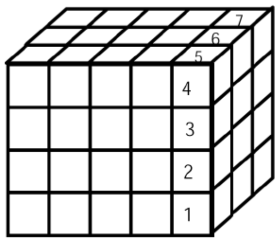
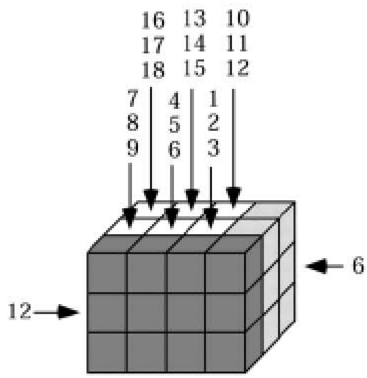
Battista je autorem či spoluautorem řady výzkumů zabývajících se hypotetickou učební trajektorií pro oba pojmy. Budu zde vycházet z výzkumů z roku 1996 a 1998 a přehledových studií z roku 2004 a 2007. Výzkum Battisty a Clementse z roku 1996 se zaměřuje na strukturaci prostoru do řádků, sloupců a vrstev tvořených jednotkovými krychlemi. V první fázi experimentu byly zaznamenány rozhovory se 45 žáky 3. ročníku a 78 žáky 5. ročníku, kteří řešili úlohu na určení počtu krychlí v krychlové stavbě znázorněné obrázkem (k dispozici měli i fyzický model stavby, který ovšem nesměli rozebírat). U vybraných 15 žáků 5. ročníku pak následovala druhá fáze experimentu, kdy žáci absolvovali výuku zaměřenou na objem a následně hloubkový individuální rozhovor, při kterém opět počítali krychle v krabici či krychlové stavbě (například jsou dány pohledy na stavbu shora, zboku a zepředu a žák má určit, kolik je ve stavbě krychlí).

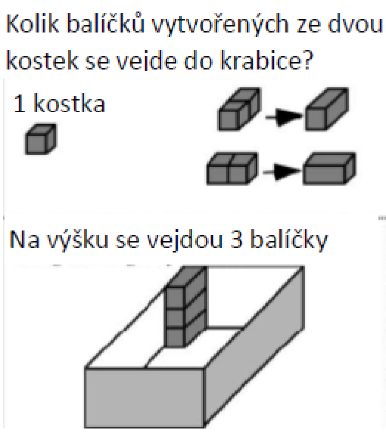
Výzkum Battisty a kol. (1998) je zaměřen na strukturaci plochy obdélníku do řádků a sloupců vytvořených z jednotkových čtverců. Vznik a způsoby strukturace autoři zkoumali na vzorku dvanácti žáků ve věku 7 až 8 let. Každý žák absolvoval dva až tři hloubkové individuální rozhovory, v jejichž rámci řešil úlohy na pokrytí obdélníku čtverci. Parametry úloh se opět lišily. Některé úlohy pracovaly s částečně nakreslenou čtvercovou sítí, u některých byly pouze pravidelně rozmístěné značky podél obvodu obdélníku, obdélník nebyl umístěn rovnoběžně s okrajem papíru, obdélník byl prázdný, ale dlaždice byla k dispozici jako manipulativum apod.

Shrnutí výsledků a přehled jednotlivých úrovní je uveden v (Battista, 2004, s. 193–200); zaměřuje se však pouze na postupný vznik strukturace prostoru ve 2D nebo 3D situaci. Vzhledem k tomu, že jednotlivé fáze jsou velmi podobné jako u Outhredové a Mitchelmorea, nebudu zde uvádět HUT pro obsah (je uvedena v příloze P1), uvedu pouze HUT pro objem.

Tab. 2.4: Battista (2004): HUT pro objem

Úroveň – objem	Popis	Obrázek a komentář
1 **Žádná strukturace ani organizace jednotek do řádko-sloupcové struktury**	Žáci ještě nejsou schopni organizovat jednotky do větších celků nebo lokalizovat všechny jednotky do třídimenzionálního pole (struktury). Pokud mají kvádr fyzicky složený, spočítají např. všechny viditelné kostky (kostky na hranách počítají	

Úroveň – objem	Popis	Obrázek a komentář
	dvakrát a v rozích třikrát) a přidají nějaké kostky na vnitřek.	
2 **Počátek používání větších celků při strukturaci plochy**	Žáci začínají používat uspořádání jednotek do větších celků (řad, vrstev) a rozpoznávat stejné složeniny/ celky – zejména na okrajích struktury. Kvádr je složen z jednotek, jimiž mohou být např. stěny nebo vrstvy. Ještě není vždy dobře koordinováno, může dojít k vícenásobnému započtení kostek.	Šestnáct kostek je na straně vpředu, bude 16 i vzadu, 12 kostek nahoře, bude 12 i dole – stále běžně dochází ke dvojímu započtení.
3 **Odstranění problémů s vícenásobným započtením jednotek**	Koordinace jednotlivých perspektiv – žáci rozeznávají stejnou jednotku z různých úhlů pohledu a díky tomu ji nezapočítávají vícekrát. Stále však mívají problém s uspořádáním jednotek uvnitř kvádru.	Umístění jednotek uvnitř kvádru je stále problém.
4 **Užití co největších celků při strukturaci, místy nepřesná koordinace**	Uspořádání jednotek do vrstev – žáci ale ještě nejsou přesně schopni tyto celky správně umístit.	 Při zjišťování počtu pater ve stavbě žák počítá i horní stěnu, jako by patra pokračovala nahoru.
5 **Strukturace správná, numerické chyby při určení počtu jednotek**	Umístění všech jednotek do sloupců / řad je jasné, ale často dojde k numerické chybě při jejich počítání. (Práce s celky je ještě nesystematická a nedůsledná – např. žáci zapomenou, kde skončili s počítáním, nebo nepoužívají co největší celky, aby minimalizovali možnost chyby). Jejich strategie ještě nejsou zobecnitelné na větší kvádry.	 Žák počítá po jednom nebo např. po dvou, výpočet je neobratný a často se vyskytnou chyby (malé celky, výpočet není zobecnitelný na větší stavby).

Úroveň – objem	Popis	Obrázek a komentář
6 **Strukturace správná a koordinace větších celků zcela rozvinutá** Počítání i bez opory v konkrétním materiálu	Žáci pracují bezchybně s řádky / sloupci či vrstvami. Počty jednotek jsou schopni určit i bez smyslové / manipulativní opory. Pracují s maximálními celky a určení počtu jednotek je jisté.	
7 **Abstraktní schéma strukturace, pochopení vztahu mezi prostorovým uspořádáním a numerickým procesem** Užití jiné jednotky než krychlové (tzv. balíčky)	Počet kostek v kvádru žáci umějí spočíst jako „počet kostek na výšku krát počet kostek na délku krát počet kostek na šířku“. Umějí pracovat i s balíčky (např. vyplnit kvádr balíčky o rozměru 1 x 1 x 2) – tj. zobecnit zkušenost na práci s jednotkami, které nejsou krychlové.	

V některých HUT pro objem je důležité dvojí pojetí objemu (viz též Curry, Outhred, 2005; Potari, 1996) – jednou je objem pojímán jako objem nádoby, kapacita (tento koncept je pro děti díky jejich zkušenostem z běžného života zpravidla jednodušší) a podruhé jako prostor, který těleso zabírá (resp. vyplnění prostoru kostkami, což je pro děti obtížnější). Tuto dualitu ovšem v Battistově pojetí HUT pro objem nenalézáme – zabývá se výhradně objemem jako prostorem, který těleso zabírá (potažmo, který může být vyplněn vhodnými jednotkami).

V pozdější práci (Battista, 2007, s. 902), kde autor shrnuje výsledky důležitých výzkumů v oblasti míry v geometrii, je výše zmíněný výzkum zasazen do širšího kontextu. Strukturace prostoru do řádko-sloupcové struktury je pouze součástí širšího rámce zahrnujícího dva doplňující se způsoby uvažování – numerické a nenumerické uvažování, které jsou na nejvyšší úrovni plně integrovány. Tento pohled je z uvedených hypotetických učebních trajektorií nejkomplexnější, přičemž zdůrazňuje nezbytnost geometrického (nenumerického) uvažování pro uchopení těchto pojmů (což podporují i výzkumy uvedené v oddíle 2.3.1). Výhodou tohoto popisu je i to, že se neomezuje na pravoúhlé tvary (nekončí u obdélníku či kvádru), ale má zvláštní úroveň i pro jiné obrazce a tělesa (viz úroveň 4 *Integrované numerické a nenumerické uvažování*). Tento popis HUT může být použit analogicky jak pro obsah, tak pro objem. Na druhou stranu je uvedený popis HUT poměrně obecný a nejsou v něm odlišeny jednotlivé podúrovně (například několik úrovní strukturace prostoru, které Battista sám popisuje, je shrnuto do jedné úrovně – úroveň 2 ve sloupci Numerické uvažování). Proto budu tuto strukturu ve své práci dále využívat jako zastřešující rámec – jakousi obecnou mapu. Další prezentované výsledky výzkumů se vždy budu snažit vztáhnout právě k tomuto popisu, případně užívat jako doplnění detailnějšího členění na jednotlivé podúrovně.

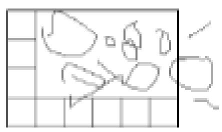
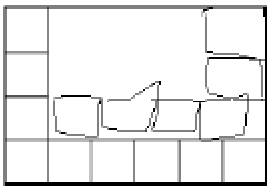
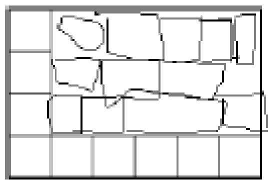
Tab. 2.5: Battista (2007) – integrovaný model HUT

<table>
<tr><th>Nenumerické uvažování</th><th>Numerické uvažování</th></tr>
<tr><td>1. Holistické vizuální porovnávání tvarů
Porovnávání na základě vizuální konfigurace (jak objekt vypadá). Koncentrace na celý objekt, nikoliv na jeho části. (Není ještě rozvinuta tranzitivita ani zachování.)</td><td>1. Počítání, které neodpovídá iteraci jednotky
Užití počítání k měření, počítání ale neodpovídá iteraci určité jednotky.</td></tr>
<tr><td>2. Vizuální porovnávání tvarů založené na rozkladu a opětovném složení tvaru
Rozklad objektu na menší části, které jsou pak přímo porovnávány. Nedochází k počítání jednotek či měření – jen porovnávání, a to buď celků, nebo po částech.</td><td>2. Iterace jednotky a určení počtu jednotek
Snaha použít a spočítat jednotky, které vyplní daný tvar. Sem patří všechny stupně postupné koordinace jednotek:
• správná koordinace a umístění jednotek
• sdružování jednotek do větších celků
• správná struktura iterací
• operace na iteracích (čtvercové / krychlové jednotky)
• zobecnění – práce s jednotkami, které jsou části celku (poloviny, čtvrtiny, třetiny)
• zobecnění – práce s jednotkami, které jsou ne-čtvercové / ne-krychlové</td></tr>
<tr><td>3. Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti
Rozklad objektu na menší části, které jsou pak posunuty, otočeny, překlopeny…; z toho pak plyne, že útvary jsou shodné.</td><td>3. Operace s numerickými mírami
Práce s mírami, aniž by byla explicitně použita iterace jednotek (ta probíhá jen v pozadí). Obsah obdélníku = šířka · délka apod.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Integrované numerické a nenumerické uvažování
Propojení numerického a nenumerického uvažování – použití geometrických vlastností objektů či jejich transformací ke zjišťování jejich míry. Například odvození a smysluplné používání procedur či vzorců pro obsah či objem jiných útvarů než pravoúhelníků a kvádrů.</td></tr>
</table>

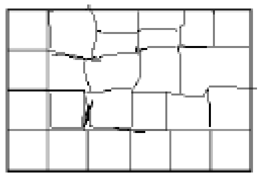
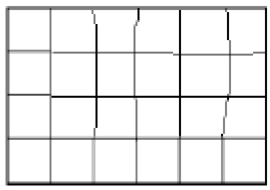
2.4.4. Výzkum Saramové a Clementse – obsah

Učební trajektorie uváděné v monografii (Sarama, Clements, 2009) je výsledkem řady výzkumů nejen uvedených autorů – jedná se o jakousi syntézu výsledků. Proto zde neuvádím vzorek ani metodu výzkumu. Nicméně citované výzkumy jsou většinou zaměřeny na děti do 10 let (resp. do konce 1. stupně základní školy). Jak vidíme z tab. 2.6, velká část úrovní popisujících HUT pro obsah a objem se opět týká pouze strukturace prostoru (úrovně 2–6 a úroveň 7). Nicméně i zde vidíme úrovně, které by v Battistově pojetí náležely pod nenumerické uvažování (úroveň 1 – Jednoduché porovnávání obsahů a úroveň X, která je vložena mezi úrovně 6 a 7 – Zachování obsahu). Autoři zmiňují ještě další koncepty jako velmi důležité pro vybudování míry ve 2D a 3D prostoru (s. 294–300), i když je neuvádějí v HUT: rozdělování plochy na stejné části (*equipartitioning*), porovnávání tvarů pokládáním na sebe a porovnáváním částí (aditivita, kompozice-dekompozice), zachování obsahu (obsah zůstává stejný, i když útvar rozdělíme a přeskládáme), dostatek zkušeností s danou činností (pokrývání prostoru, práce s nepravidelnými tvary, origami apod.). Všechny tyto činnosti by podle mého názoru spadaly pod nenumerické uvažování tak, jak je uvedeno v širším pojetí HUT podle Battisty. Jednotlivé úrovně týkající se strukturace prostoru do řádko-sloupcové struktury se příliš neliší od úrovní popsaných v oddílech 2.4.2 a 2.4.3.

Tab. 2.6: Sarama a Clements (2009) – HUT pro obsah

Úroveň	Popis	Obrázek
0 Před rozpoznáním obsahu jako zvláštní kvantity[30] (0–3 roky)	Fáze před rozlišením dané vlastnosti: pojem obsahu chybí. Pokud má dítě porovnávat obsahy, obvykle porovnává strany. Pokud má doplnit kresbu dlaždic, může dokreslit něco jako neuspořádané šišky.	
1 Jednoduché porovnávání obsahů[31] (4 roky)	Obsahy porovnává srovnáním stran, případně podle jejich součtu, anebo položením na sebe, když ho k tomu navede struktura otázky.	
2 Měření obsahu kladením útvarů vedle sebe[32]	Dítě pokryje obdélník dlaždicemi, pokud je má fyzicky k dispozici. Bez opory manipulativ však není schopno plochu takto strukturovat. Při pokusu strukturu zakreslit věnuje obvykle pozornost jen jednomu z aspektů – například pravoúhlé dlaždice položené vedle sebe (nedodrží stejnou velikost a/nebo nechává mezi dlaždicemi mezery, nebo zarovnává pouze do řad, a nikoliv i do sloupců). Často jen neúplné pokrytí.	 

[30] Pre-Area Quantity Recognizer (PAQR)
[31] Area Simple Comparer (ASC)
[32] Side-to-Side Area Measurer (SS)

Úroveň	Popis	Obrázek
3 Primitivní pokrytí[33] (5 let)	Dítě nakreslí úplné pokrytí plochy, ale dlaždice ještě nejsou správně zarovnány. Počet dlaždic určuje počítáním kolem okrajů a pak nesystematicky spočítá ty, které jsou uvnitř (některé přeskočí, započte dvakrát apod.).	
4 Vztah jednotek a jejich opakování [34]	Zakreslení pokrytí plochy je stejné jako v předchozím případě, jen mizí problémy s určením počtu dlaždic – dítě jde buď systematicky po řadách, nebo si spočtené dlaždice fyzicky značí.	
5 Řada jako jeden celek[35] (6 let)	Dítě kreslí a počítá některé řady jako řady (celky) – namaluje několik řad a pak se vrátí k zakreslování jednotlivých dlaždic –, ty jsou ovšem zarovnány i do sloupců. Dítě má mentální představu řady jako složeniny – což je jednotka vytvořená z jednotek – a intuitivně s ní pracuje. Nedochází ještě ke koordinaci délky a šířky, dítě ani neodvozuje velikost jednotky z velikosti obdélníku (aby se mu dlaždice dobře vešly).	
6 Řádko-sloupcová struktura[36] (7 let)	Objevuje se práce se skupinami jednotek (řádky / sloupce). Žák kreslí a počítá řady jako řady (zakresluje rovnoběžnými čarami). Počet dlaždic určuje buď systematickým počítáním po řádcích / sloupcích nebo postupným přičítám počtu dlaždic za každou řadu (výjimečně násobením). K určení počtu dlaždic mu stačí neúplný náčrt. V úkolu změřit neoznačený obdélník (chybí-li odrážky na velikost dlaždice), změří jednu stranu, aby určil velikost dlaždice, a následně i druhou, aby určil počet řad.	

[33] Primitive Coverer (PC)
[34] Area Unit Relater and Repeater (AURR)
[35] Partial Row Structurer (PRS)
[36] Row and Column Structurer (ARCS)

Úroveň	Popis	Obrázek
X Zachování obsahu[37] (7–9 let)	Žák je schopen usoudit na shodnost obsahu u dvou útvarů, které mají různý tvar (na základě dekompozice a opětovného poskládání).	Tento stupeň je vložen do HUT na základě výzkumné práce jiných autorů a sami autoři s tímto stupněm v některých dalších výzkumech, kterých se účastnili, nepracují (např. Eames et al., 2014).
7 Strukturace a vhled[38] **(9 let)**	Žák určuje obsah pomocí měření délek stran (délky i šířky). K výpočtu používá násobení a je schopen vysvětlit, proč to tak funguje. Nákres není nezbytný – iterace a řádků/sloupců je implicitní (na pozadí).	

HUT Clementse a Saramové se nezabývá objemem pro jiná tělesa než kvádry a jednotlivé úrovně se týkají buď kapacity (objemu nádoby), nebo strukturace prostoru do 3D řádko-sloupcové struktury. Nenumerický způsob uvažování je možné nalézt pouze u porovnávání kapacit nádob (viz úroveň 1 a 2).

Tab. 2.7: Sarama a Clements (2009) – HUT pro objem

Úroveň	Popis
0 Rozpoznání objemu / kapacity (tj. kolik se dovnitř vejde) **jako kvantity**[39] (0-3 roky)	Dítě rozlišuje danou vlastnost („tam se vejde hodně kostek“).
1 Objem / kapacita: Přímé porovnávání objemu[40] (od 4 let)	Dítě je schopno porovnat objem dvou nádob – tím, že obsah jedné přeleje do druhé, a pokud to přeteče, je ta první větší.
2 Objem / kapacita: Nepřímé porovnávání objemu[41] (od 5 let)	Dítě je schopno porovnat dvě nádoby za použití třetí a tranzitivního uvažování. Naleje ze srovnávací nádoby do dvou porovnávaných a podle toho, která přeteče, tak ta je menší.

[37] Area Conserver (AC)
[38] Array Structurer (AR)
[39] Volume Quantity Recognizer (VQR)
[40] Capacity Direct Comparer (CDC)
[41] Capacity Indirect Comparer (CIC)

Úroveň	Popis
3 Objem / strukturace prostoru: Jednoduché vyplnění prostoru[42] (od 6 let)	Žák částečné rozumí tomu, že kostky vyplňují prostor. Nejprve počítá jen stěny kostek, které jsou vidět (započítá některé víckrát a vnitřní vynechá). Se silnou podporou manipulativ je schopen zcela vyplnit prostor kostkami a někdy je i spočítat.
4 Objem / kapacita: Vztah jednotek a jejich opakování[43] (od 7 let)	K naplnění nádoby žák užívá jednoduché jednotky a je schopen určit jejich počet. Je schopen nahlédnout, že čím menší jednotky budou, tím jich bude potřebovat víc (princip kompenzace).
5 Objem / strukturace prostoru: Částečná strukturace prostoru [44] (7 let)	Žák rozumí tomu, že kostky vyplňují prostor, ale nevyužívá vrstvy ani vztahu násobení. Používá lepší strategie pro určení počtu kostek (snaží se spočíst i ty uvnitř, počítá systematicky, spočte počet kostek ve sloupci a dál už přidává vždy tentýž počet), někdy pracuje s řadou/sloupcem ale pouze intuitivně a ne všude.
6 Objem / strukturace prostoru: Strukturace prostoru do sloupců a řad[45] (8 let)	Žák určí počet kostek v řádku a dál už přidává vždy tentýž počet, nebo spočte kostky v řádku a vynásobí počtem sloupců (vrstev). Vzniká mentální představa vrstvy (jednotka složená z jednotek) – tuto složenou jednotku pak použije k určení počtu kostek v celém kvádru.
7 Objem / strukturace prostoru: Strukturace prostoru [46] (9 let)	Žákovi stačí rozměry kvádru, bez manipulace či nákresu skládá v představě strukturu vyplnění prostoru a počet kostek zjistí pomocí násobení (opakovaného přičítání). Umí vysvětlit, proč a jak je třeba použít násobení k výpočtu objemu. Používá s porozuměním vzorec pro objem kvádru.

Vzájemný vztah a závislost vývoje konceptů délka, obsah a objem popisuje longitudinální studie (Eames, Clements, Sarama, 2014). Podle ní mají učební trajektorie pro pojmy délka, obsah a objem mnoho společných rysů. Autoři u žáků od věku předškolních dětí až do 5. ročníku základní školy zkoumali, kdy se objevují jednotlivé úrovně pro zmíněné pojmy a jestli postup v učební trajektorii pro délku skutečně předchází postupu ve zbylých dvou učebních trajektoriích. Podle jejich zjištění je postup po jednotlivých úrovních těchto tří učebních trajektorií individuální (závisí na dítěti) – byly pozorovány případy, kdy vývoj v měření délek předchází vývoji u ostatních pojmů, ale vyskytly se i případy, kdy naopak měření objemu či obsahu předcházelo ve vývoji měření délek. Není tedy žádný důvod

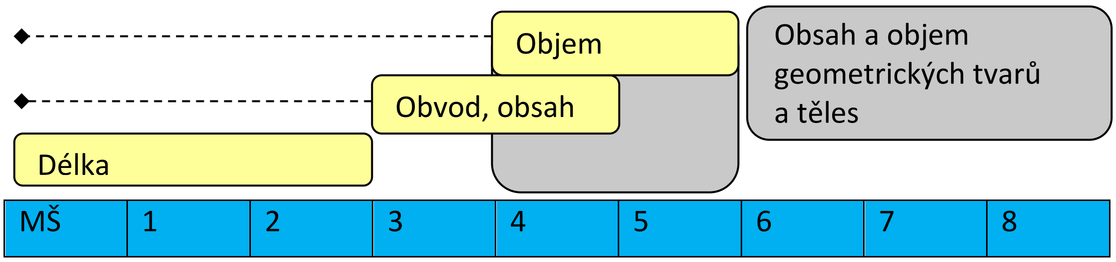
[42] Primitive 3-D Array Counter (PAC)
[43] Capacity Relater and Repeater (CRR)
[44] Partial 3-D Structurer (PS)
[45] 3-D Row and Column Structurer (VRCS)
[46] 3-D Array Structurer (AS)

zařazovat propedeutiku pro pojmy obsah a objem až po měření délek, nýbrž všechny pojmy se mohou s výhodou vyvíjet společně – díky podobným kognitivním rysům všech tří učebních trajektorií může postup v jedné učební trajektorii napomoci postupu či pochopení v trajektorii jiné. Výjimkou by mohl být pouze objem jako vyplnění prostoru kostkami, kde se podle výzkumu Curryové a Outhredové (2005) jeví jako nutná podmínka pro úspěšné pochopení struktury ve 3D dobře zvládnutá řádko-sloupcová struktura u plochy (2D). Koncept objemu (ve smyslu objemu nádoby) se vyvíjí paralelně s konceptem délky.

2.4.5. Turnonccmath.net

Budování pojmu obsah a objem podle projektu Turnonccmath je přímo spojeno s kurikulem, které je ovšem podepřeno empirickými výzkumy (například Confrey, 2015; Nguyen, 2010). Projekt je značně rozsáhlý a mapuje základní vzdělávání v USA do učebních trajektorií pro jednotlivé oblasti matematiky. Jde vlastně o převod rámcového vzdělávacího programu – Common Core State Standards for Mathematics – do formátu HUT. Výhodou je vzájemná provázanost trajektorií napříč doménami a jasná hierarchická struktura. Použitá hexagonální struktura dovoluje dobrou vizualizaci trajektorií a souvislostí mezi nimi. Popis úrovní zahrnuje úlohy, aktivity, způsoby interakce i nástroje hodnocení a je velmi podrobný. Zde uvádím jen stručný výtah – podrobnější materiály jsou dostupné na http://www.turnonccmath.net.

Rozložení učebních trajektorií do jednotlivých ročníků základní školy ukazuje schéma na obr. 2.6. Učební trajektorie pro obsah a objem jsou ještě doplněny o úrovně pro předškolní věk až 2. ročník, ačkoliv standardy CCSS je nevyžadují, a rovněž o některé další úrovně, které slouží k propojení s učebními trajektoriemi pro jiné oblasti (např. zlomky, dělení na stejné části).



Obr. 2.6: Turnonccmath – Schéma návaznosti jednotlivých učebních trajektorií

Na schématu je vidět, že učební trajektorie pro délku předchází trajektoriím pro obsah, obvod a objem a trajektorie pro obsah a objem se pouze částečně překrývají. To ovšem není v souladu se zjištěními Eamese, Clementse a Saramové (2014), kteří doporučují spíše paralelní vývoj všech trajektorií.

Základní výstavba učební trajektorie pro měření v prostoru je jednotná pro délku, obsah i objem. Podbarvení jednotlivých etap slouží pro lepší orientaci v detailním popisu HUT pro délku obsah a objem uvedeném v příloze P4.

1) Identifikace daného atributu, který má být měřen
2) Princip zachování délky, obsahu, objemu

3) Přímé porovnávání (kvalitativní měření)
4) Nepřímé porovnávání (kvalitativní měření)
   - zahrnuje usuzování pomocí principu tranzitivity (tj. třetí předmět slouží k poměřování)
5) Měření bez mezer a překryvů
   - Dělení na stejné části, užití těchto částí jako vlastních jednotek pro strukturaci
   - Prostorová strukturace s využitím externích jednotek
   - Vyčíslení měřené kvantity pomocí jednotek
   - Měření za pomoci standardních jednotek a nástrojů (např. měření délky pomocí pravítka)
6) Princip kompenzace
   - Nepřímá úměrnost mezi jednotkami a mírou – čím menší jednotka, tím více jich je (a naopak)
7) Aditivní Princip (kompozice a dekompozice)
   - Rozklad a opětovné složení čar, tvarů a těles na menší celky a z menších celků
8) Užití násobení (pro obsahy a objemy)
   - Vlastnosti násobení (komutativita, distributivita a asociativita) – provázány na učební trajektorii násobení
   - Využití násobení pro měření (určení počtu jednotek jako počet jednotek v řádku krát počet sloupců)
   - Určení obsahu a objemu jako součinu změřených délek
   - Vztahy mezi obsahem a obvodem; povrchem a objemem
   - Převody jednotek
   - Vzorce pro obsah pro pravoúhelníky, mnohoúhelníky, kruhy, …, a vzorce pro objem pro kvádry, hranoly, koule a rotační tělesa

Můžeme vidět, že mnoho kroků v této učební trajektorii (rozhodně kroky 1 až 4 a krok 7) by v Battistově rozšířené trajektorii spadaly pod nenumerické uvažování. Většina těchto aktivit je zařazena do učební trajektorie dokonce ještě před jakoukoliv strukturací prostoru pomocí shodných jednotek.

Podrobnější popis trajektorií pro obsah, objem a délku společně se zařazením jednotlivých kroků do ročníků je uveden v příloze P4.

2.4.6. Srovnání a shrnutí

Podíváme-li se na jednotlivé výzkumy a trajektorie navržené pro obsah, můžeme vysledovat mnoho společných rysů. Jednotlivá pojetí se liší zejména tím, zda do učební trajektorie zahrnují též nenumerické aspekty (jako zachování obsahu, tranzitivitu apod.) jako Saramová a Clements (SC), Battista (MB), Turnonccmath (TCC) a Piaget (JP), nebo se soustřeďují pouze na strukturaci prostoru jako Outhredová a Mitchelmore (OM).

Následující vlastnosti mají uvedené výzkumy společné (výzkumy označuji zkratkami):

- K identifikaci obsahu jako speciální kvantifikovatelné vlastnosti plochy dochází až v určitém věku (existují před-stádia) – SC, MB, TCC, JP.

- K prvotnímu porovnávání ploch dochází přímým porovnáváním (tj. položením útvarů na sebe) – SC, TCC, JP. Až později následuje porovnávání nepřímé (přes třetí objekt) nebo založené na rozkladu a opětovném složení objektu.
- Strukturace plochy do řádko-sloupcové struktury je pro výpočet obsahu klíčová (pro všechny výzkumy). Strukturace prochází zhruba následujícími fázemi:
  - Nedokonalá strukturace
  - Opakování jednotky
  - Řazení jednotek do větších celků (řádků/sloupců)
  - Vztah struktury a rozměrů
  - Abstraktní schéma strukturace umožňující provázání s numerickým procesem násobení (případně opakované přičítání)
- Úrovně související s nenumerickým uvažováním – zachování obsahu při posunutí, otočení, překlopení; tranzitivita, kompozice a dekompozice (rozložení a opětovné složení) – se objevují v různém časovém období u různých autorů a doplňují úrovně zaměřené na strukturaci plochy; od 5–6 roku se objevují na intuitivní úrovni až do období 7–9 let, kdy se ze zachování obsahu při určitých transformacích stává, podle Piagetových slov, „logická nutnost“. Pouze autoři OM se na tyto aspekty nezaměřují vůbec.
- Pouze TCC a JP řeší vztah mezi rozměrem jednotky a jejich počtem (princip kompenzace), respektive vztah mezi zvětšením délek stran a zvětšením plochy. Autoři SC sice zmiňují equipartitioning jako důležitý koncept pro budování míry ve 2D (což úzce souvisí s principem kompenzace), ale v učební trajektorii ho výslovně neuvádějí. V učební trajektorii podle MB nalézáme práci s jinou jednotkou, než je krychle, což by se dalo považovat za speciální případ principu kompenzace. Tento pojem však MB ve své práci explicitně nepoužívá.
- Pouze MB a TCC se zabývají ve své trajektorii též obrazci jinými než pravoúhelníky (poslední úrovně v trajektorii).
- Autoři SC doporučují paralelní průběh všech tří trajektorií (tj. pro délku, obsah i objem), zatímco v projektu TCC trajektorie pro délku předchází všem ostatním.

Zdá se, že nic nebrání tomu, abych dále pracovala s rozšířenou trajektorií pro budování pojmu obsahu, kterou navrhuje Battista (viz tab. 2.5), přičemž ostatní zdroje poslouží k detailnějšímu popisu jednotlivých úrovní. Vzhledem k tomu, že princip kompenzace není v trajektorii výslovně uveden, navrhuji ho doplnit do úrovně 2 k práci s jinými jednotkami než krychlovými, což je v souladu s HUT navrhovanou v TCC. Rovněž na základě výzkumů Huangové (2011) navrhuji doplnit šipku označující důležitost propojování mezi paralelně se rozvíjejícími liniemi numerického a nenumerického uvažování (viz tab. 2.8).

Tab. 2.8: HUT pro obsah využitá ve vlastním výzkumu

Nenumerické uvažování	Numerické uvažování
1. Holistické vizuální porovnávání tvarů Porovnávání tvarů na základě vizuálního srovnávání či přímým porovnáním – položením na sebe; srovnávání např. na	**1. Počítání, které neodpovídá iteraci jednotky** Počítání jednotek, ale počítání nesouvisí s iterací jednotky – pohyb prstem nad

Nenumerické uvažování	**Numerické uvažování**
základě jedné prominentní dimenze; zaměření pozornosti na celek – ještě není tranzitivita a zachování plochy při transformacích	objektem doprovázený počítáním – nesystematické počítání
2. Vizuální porovnávání tvarů založené na rozkladu a opětovném složení tvaru Rozklad útvaru na části a přímé porovnání těchto částí (neprobíhá ještě žádné počítání částí)	**2. Iterace jednotky a určení počtu jednotek** (sem patří celá strukturace prostoru do řádko-sloupcové struktury): ▪ Pokrývání bez překryvů a mezer a v odpovídající struktuře (systematické počítání) ▪ Vznik celků (řádky / sloupce) – postupné přičítání ▪ Operativní práce s iteracemi – multiplikativní uchopení ▪ Práce s jinými jednotkami a tvary (určování počtu jednotek); princip kompenzace (čím větší jednotka, tím méně jich bude třeba)
3. Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti (včetně enumerace) ▪ Rozdělení na části a přeskládání (otočení, posunutí, překlopení) částí, aby vznikl jiný útvar ▪ Porovnávání útvarů ve čtvercové síti ▪ Porovnávání útvarů s naznačenou sítí či bez sítě ▪ Práce s jinými jednotkami a tvary než čtverci / obdélníky (dělení útvaru na shodné části) Propojování	**3. Operace s numerickými mírami** ▪ Pokrývání / iterace jednotek či celků probíhá jen implicitně, obsah je určen jen na základě počtu – délek (tj. abstrakce vzorce pro obdélníky a čtverce)
4. Integrované numerické a nenumerické uvažování ▪ Třídy útvarů se shodným obsahem, ale jiným tvarem (např. trojúhelníky či obdélníky se stejným obsahem) ▪ Převody jednotek a jejich vztahy (představa dm^2 jako čtverce o straně 10 cm, složeného ze 100 cm^2, vztah jednotek poloviční délky a jejich počet k pokrytí původní jednotky) ▪ Práce s rozměry útvarů a jejich využití pro zjištění obsahu (výpočet rozměrů z obsahu) ▪ Obsah složených útvarů (nekonvexní útvary, útvary složené z obdélníků, doplněk …) ▪ Odvození vztahů/vzorců pro obsah pro další útvary (trojúhelníky, rovnoběžníky, lichoběžníky…, kruh) a jejich uvědomělé požívání (včetně výpočtu strany z obsahu, vztahu algebraického výrazu a jeho geometrické interpretace apod.)	

To, co bylo výše uvedeno pro obsah, platí obdobně i pro HUT navržené pro objem. Pro HUT pro objem je příznačné, že téměř všechny prameny rozlišují objem chápaný jako prostor uvnitř (kapacita) a objem chápaný jako prostor, který těleso zaujímá ve vztahu k okolí (např. je-li ponořeno do vody). Výjimkou je MB, kde učební trajektorie pro koncept objemu téměř identicky kopíruje HUT pro obsah, a zaměřuje se tedy spíše na objem jako zaujímaný prostor a na strukturaci tohoto prostoru. Srovnatelnou práci autorů OM k oblasti objemu se mi nepodařilo nalézt. V práci (Curry, Outhred, 2005) nalézáme sice velmi zajímavé vzájemné porovnání postupného vývoje v čase pro jednotlivé koncepty (délka, obsah a objem), ale není zde uvedena specifická HUT pro objem. Srovnáme-li jednotlivé přístupy (kromě OM), můžeme si všimnout následujícího:

- K identifikaci objemu jako speciální kvantifikovatelné vlastnosti dochází až v určitém věku (existují před-stádia) – SC, B, TCC, JP.
- Chápání pojmu objemu ve smyslu kapacity (co se vejde dovnitř) předchází ostatním způsobům chápání tohoto pojmu – SC, TCC, JP. Například v TCC probíhají jednotlivé kroky 5–7 nejprve pro objem-kapacitu a až později pro objem jako strukturu z kostek.
- Strukturace objemu jako zabraného prostoru do řádko-sloupcové struktury je pro výpočet objemu klíčová a prochází zhruba následujícími fázemi:
  - Nedokonalá strukturace
  - Opakování jednotky
  - Řazení jednotek do větších celků (řádků/sloupců a vrstev)
  - Vztah struktury a rozměrů
  - Abstraktní schéma strukturace umožňující provázání s numerickým procesem násobení (případně opakované přičítání)
- Úrovně související s nenumerickým uvažováním – zachování objemu (kapacity) a objemu (zabraného prostoru), tranzitivita, kompozice a dekompozice (princip aditivity) – se u různých autorů objevují v různém časovém období a doplňují úrovně zaměřené na strukturaci plochy.
- Trajektorie podle MB, TCC a JP obsahují úrovně, kde je řešen vztah mezi rozměrem jednotky a jejich počtem (princip kompenzace), práci s jinou jednotkou než krychlovou či vztah mezi zvětšením délek stran a zvětšením objemu.
- Pouze MB a TCC se zabývají ve své trajektorii též tělesy jinými než kvádry či krychle (poslední úrovně v trajektorii, zasahující již na 2. stupeň ZŠ).

Tab. 2.9: HUT pro objem, kterou budu dále používat

Nenumerické uvažování	**Numerické uvažování**
1. Holistické vizuální porovnávání tvarů ▪ Porovnávání staveb / objemu vody na základě vizuálního srovnávání či přímým porovnáním – postavením vedle sebe; srovnávání na základě jedné prominentní dimenze (výšky stavby, výšky hladiny v nádobě) ▪ Zaměření pozornosti na celek – ještě není tranzitivita a zachování objemu při transformacích (přelití, přeskládání kostek)	**1. Počítání, které neodpovídá iteraci jednotky** ▪ Počítání jednotek, ale počítání nesouvisí s iterací jednotky – nesystematické počítání
2.a) Porovnávání z hlediska kapacity ▪ Tranzitivita a zachování objemu při transformacích (přelití)	**2.a) Iterace a počítání jednotek objemu kapaliny** ▪ Určení počtu odměrek, které byly do nádoby nality či odlity.

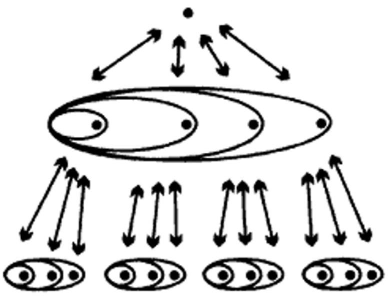
<table>
<tr><th>Nenumerické uvažování</th><th>Numerické uvažování</th></tr>
<tr><td>2.b) Vizuální porovnávání tvarů založené na rozkladu a opětovném složení tvaru
Rozklad tělesa na části a přímé porovnání těchto částí
Transformace krychlových staveb</td><td rowspan="2">2.b) Iterace jednotky a určení počtu jednotek (sem patří celá strukturace prostoru do řádko-sloupcové struktury):
▪ Vyplňování prostoru bez překryvů a mezer a v odpovídající struktuře (systematické počítání)
▪ Vznik celků (řádky / sloupce / vrstvy) – postupné přičítání
▪ Operativní práce s vrstvami – multiplikativní uchopení
▪ Práce s jinými jednotkami a tvary (určování počtu jednotek)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti (včetně enumerace)
▪ Rozdělení na části a přeskládání (otočení, posunutí, překlopení) částí, aby vznikl jiný útvar
▪ Krychlové stavby – stavby stejného objemu ale různých tvarů, otáčení staveb
▪ Práce s jinými jednotkami a tvary než krychlemi a kvádry (hranoly, jehlany)</td></tr>
<tr><td>3. Operace s numerickými mírami
▪ Pokrývání / iterace jednotek či celků probíhá jen implicitně, objem je určen jen na základě počtu – délek</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Integrované numerické a nenumerické uvažování
▪ Třídy těles se shodným objemem, ale jiným tvarem (kvádry)
▪ Převody jednotek a jejich vztahy (představa dm^3 jako krychle sestavené z 1 000 cm^3 krychliček; počet jednotek s polovičním rozměrem hrany v původní jednotce)
▪ Práce s rozměry útvarů a jejich využití pro zjištění objemu (výpočet rozměrů z objemu)
▪ Objem složených útvarů (útvary složené z kvádrů či hranolů)
▪ Odvození vztahů pro objem pro další útvary (hranoly, jehlany, kužele, …)</td></tr>
</table>

Pro výše popsané HUT jsou důležité pojmy multiplikativní a nenumerické uvažování. Těm se budu hlouběji věnovat ve dvou následujících oddílech.

2.5. Multiplikativní uvažování

V obou sestavených HUT (viz tab. 2.8 a tab. 2.9) nalézáme v rámci strukturace prostoru do jednotek úroveň, kde vzniká abstraktní schéma strukturace umožňující provázání s numerickým procesem násobení. Jedná se o krok, kdy vytváření struktury jednotek probíhá pouze implicitně a nahrazuje ho práce s délkami – tedy jejich násobení. Existuje proto dobrý důvod předpokládat, že míra zvládnutí či pochopení multiplikativního uvažování bude mít vliv na úspěšnost žáků v úlohách na obsah a objem (viz Battista, 2007; Hunag, 2011; Kamii, Kysh, 2006; Rendl, Vondrová, 2014). To jsme měli možnost vidět i v našem výzkumu (Tůmová, Janda, 2014), kdy způsob, jak žáci pracovali s operacemi násobení a dělení, poměrně silně koreloval s úspěšností. Zejména žáci, kteří uměli pro danou situaci vybrat správnou matematickou operaci, byli i v dalších úlohách úspěšnější.

V literatuře se uvádějí dva přístupy vysvětlující, jak multiplikativní uvažování vzniká (Carrier, 2014; Clark, Kamii, 1996). Jeden tvrdí, že multiplikativní uvažování je pouze přirozeným rozšířením opakovaného přičítání (Fischbain, 1985; Kouba, 1989, cit. podle Clark, Kamii, 1996). Druhá hypotéza, kterou zastávají i Kamiiová a Clark, říká, že násobení a dělení představují významný kvalitativní skok ve srovnání s opakovaným přičítáním (které je pouze algoritmem, sloužícím ke zjištění výsledku) a vychází spíše ze schématu korespondence než ze schématu přidávání. V multiplikativním uvažování žák pracuje se soubory věcí a nahlíží je zároveň jako jednotku (např. můžeme vzít čtyři takové soubory) a zároveň jako soubor skládající se z určitého množství prvků (např. soubor osmi prvků). To odpovídá i popisu násobení, který uvádí Piaget (viz obr. 2.7) – v tomto modelu dochází k vyššímu stupni abstrakce a prvky jsou organizovány v komplexnější struktuře vztahů: musí dojít simultánně k několika abstrakcím – soubor tří prvků je vnímán jako jednotka a čtyři tyto nové jednotky tvoří další jednotku – celek. Všechny tyto vztahy musí existovat zároveň, zatímco při přičítání jde spíše o postupný lineární proces přidávání.



Obr. 2.7: Schéma multiplikativního uvažování při výpočtu 3 · 4 podle Piageta (Clark, Kamii 1996, s. 42)

Clark a Kamiiová uvádějí i další výzkumy, které podporují názor, že násobení v sobě zahrnuje kvalitativně jiné aspekty nad rámec opakovaného sčítání. V rámci výzkumu prováděli rozhovory s 335 dětmi z 1. až 5. ročníku s cílem zmapovat, jak se multiplikativní uvažování vyvíjí. Otázky, na které děti odpovídaly, se týkaly spotřeby potravy u tří různě velkých ryb (5 cm, 10 cm a 15 cm), přičemž ryby i potrava byly k dispozici jako manipulativa. Na základě odpovědí žáků autoři identifikovali pět úrovní multiplikativního uvažování:

I. Odhad: žák nesrovnává nebo pracuje pouze na základě kvalitativního srovnávání A < B
II. Přičítání o 1 či o 2: další v řadě má vždy o 1 či o 2 více
III. Přičítání místo násobení: dvakrát více znamená, že přičtu 2
IV. Multiplikativní uvažování s častými chybami
V. Dobré multiplikativní uvažování

Zajímavé je, že i když ve 2. ročníku vykázalo již cca 9 % žáků dobré multiplikativní uvažování, ve 4. ročníku to bylo pouze 28 % žáků a v 5. stále ještě méně než polovina (49 %). Rozvoj multiplikativního uvažování se tedy zdá být poměrně pomalý a rozhodně není ukončen na 1. stupni základní školy.

Další výzkumy ohledně multiplikativního uvažování doplnily tyto základní úrovně o další – pěkný přehled nalézáme například v (Carrier, 2014). Výše uvedené úrovně jsou rozděleny ještě do podúrovní podle strategie používané k řešení výše zmíněného problému a problémů jemu podobných (tab. 2.10). Vidíme například, že žáci, kteří operaci tipují na základě klíčových slov v zadání úlohy, jsou přiřazeni k nižší úrovni než žáci, kteří opakovaně přičítají. Schopnost používat dělení či přenášet poměr je přítomna až v úrovni nejvyšší. Tyto kategorie a strategie budu používat k identifikaci úrovně multiplikativního uvažování, pozorovaného u žáků v testu či v rozhovorech (viz oddíly 4.5 a 4.7).

Tab. 2.10: Carrier (2014): Úrovně a strategie multiplikativního uvažování

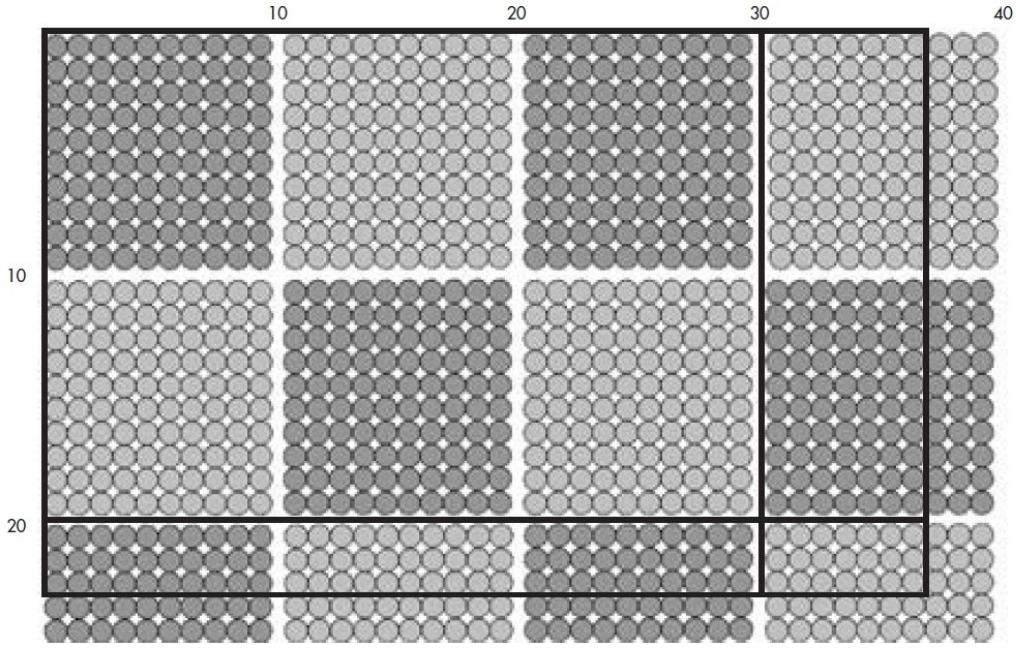
Úroveň	Strategie Žák:	Indikátor (strategie při řešení multiplikativních problémů) Žák:
I.	Nekvantifikuje	Nepoužívá ani vztah více – méně.
I.	Odhaduje	
II.	Hledá klíčová slova	Najde v zadání klíčová slova a podle toho použije příslušný algoritmus výpočtu.
II.	Počítá	Počítá po jedné.
II.	Přidává	Používá přičítání či odčítání k řešení multiplikativních úloh.
II.	Srovnává	Využívá zejména faktu, že čísla musí být uspořádána podle velikosti.
II.	Měří	Problém řeší poměřováním fyzických délek (klade jednotky vedle sebe bez mezer a překryvů od začátku až do konce).
III.	Opakovaně přičítá	Užívá strategii opakovaného přičítání.
III.	Koordinuje	Částečně koordinuje mezi objekty, čísly a operacemi. Není schopen popsat.
IV.	Násobí	Používá jazyk násobení. Dobře koordinuje mezi objekty, čísly a operacemi.
IV.	Rozděluje	Používá pojmy jako rozřezání a půlení, aby naznačil potřebu dělení, které pak vede k vyřešení problému.
V.	Aplikuje	Používá násobení i dělení. Je schopen přenést poměr do jiného systému (tj. 6 ku 4 je stejné jako 3 ku 2).

Další skutečností, kterou je třeba zmínit, je i to, že mnoho autorů (Barmby, 2009; Izsák, 2004; Jacob, Mulligan, 2014; Young-Loveridge, 2005) považuje model řádko-sloupcové struktury (obdélník rozdělený na čtverce, body uspořádané v řádkách a sloupcích) za velmi dobrý model pro budování multiplikativního uvažování. Jako hlavní výhody uvádějí názornost, objasnění distributivity, možnost snadného rozšíření násobení z přirozených čísel na zlomky či vícemístná čísla apod.

Young-Loveridgová (2005) zmiňuje dva základní typy modelů užívaných pro násobení: jeden je založen na počítání (např. číselná osa, po které se lze pohybovat kroky určité velikosti – tj. vlastně opakované přičítání), druhým typem je strukturovaný model[47] (skupina skupin) – užití tohoto přístupu se v žákovských řešení projevuje například užitím strategií: půlení a zdvojování (8 · 24 = 4 · 48 = 2 · 96 …), rozdělování podle řádů (8 · 24 = 8 · 20 + 8 · 4) nebo doplňování (8 · 24 = 8 · 25 – 8). Tento strukturovaný model je považován za sofistikovanější a komplexnější, i když je zdůrazňována potřeba umět použít oba přístupy (a tím i ovládat více řešitelských strategií). Řádko-sloupcová struktura v obdélníku je jedním z příkladů modelů tohoto typu. Young-Loveridgová a kolegové prováděli řadu výzkumů, aby ukázali,

[47] V originále collection-based model.

že tento model je přínosný pro vizualizaci a prohloubení pochopení pojmu násobení. Pro vysvětlení násobení vícemístných čísel používali autoři například model z obr. 2.8. Jednou z jeho hlavních výhod je rozdělení podle pozičního systému (každá desítka je oddělena mezerou), což navádí k různému rozdělování podle řádů, žáci si tak proces násobení mohou dobře vizualizovat. Domnívám se však, že na rozdíl od jiných modelů, které používají pouze čtvercovou síť se zvýrazněnými čarami po každých deseti čtverečcích, zde není tak dobře patrná souvislost s pojmem obsah.



Obr. 2.8: Řádko-sloupcový model pro násobení Young-Loveridgové

Podíváme-li se do České republiky, v Metodických komentářích ke Standardům pro základní vzdělávání (Nováková, Vondrová, 2015) je zdůrazňována důležitost manipulace a znázorňování k pochopení početních operací a jako příklad je pro násobení použit následující model (viz obr. 2.9).

Obr. 2.9: Znázornění operace násobení (Nováková, Vondrová, 2015, s. 10)

Hejný (2014) rozepisuje tři kategorie úloh, které by si žáci měli v rámci budování multiplikativního uvažování postupně osvojovat. První (a nejjednodušší) kategorií je násobení mezi objektem a skalárem (např. v úloze „Kolik kol mají 3 auta?“ vystupuje auto jako objekt a 3 jako skalár), druhou kategorií je pak násobení mezi dvěma objekty (počty kusů v řádku a sloupci, možnosti výběru sukně v kombinaci s možností výběru halenky apod.). Třetí kategorií je násobení dvou skalárů (operátorů), což je pro žáky obtížné, zejména pokud nemají oporu v konkrétních stavech (např. telefon byl zdražen o 25 % a následně zlevněn o 20 % nové ceny). V rámci druhé kategorie úloh uvádí autor pět základních typů úloh (s. 191–192) – prvním z nich je právě určení počtu dlaždic v obdélníku (pokud víme, kolik se vejde na každou stranu) a druhým (který na první typ úloh navazuje) pak zjišťování obsahu obdélníku na základě délek jeho stran.

Vzhledem k hojnému užívání řádko-sloupcového modelu jako jednoho ze základních modelů pro násobení můžeme očekávat, že porozumění pojmu násobení a uchopení pojmu obsahu budou těsně provázány a jedno bude ovlivňovat druhé.

2.6. Nenumerické uvažování

Battista (2007, s. 894) uvádí charakteristiky numerického[48] a nenumerického uvažování jen pro pojem délky. U ostatních pojmů je tento typ uvažování specifikován pouze v tabulce popisující HUT. Nenumerické uvažování nevyužívá čísla, využívá vizuálně-prostorové zdůvodňování založené na porovnávání, transformacích (prováděných i pouze v představě) či geometrických vlastnostech objektů. Naproti tomu numerické uvažování využívá práci s jednotkou, její opakování a určení počtu těchto jednotek. Nenumerické uvažování nemusí nutně předcházet uvažování numerickému, vyvíjí se s ním paralelně a v nejvyšších úrovních by tyto dva typy uvažování měly být plně integrovány. Jak tedy nenumerické uvažování přesněji vymezit a měřit? Podle popisu uvedeného výše by se mohlo jednat o prostorovou představivost[49] či o určitou podmnožinu těchto prostorových schopností.

O prostorové představivosti jako o složce obecné inteligence mluví například Říčan (2007). Prostorová představivost zahrnuje tři důležité složky: prostorovou orientaci (určování polohy člověka v okolí), schopnost vizualizace (tj. schopnost představit si, do jakých vzájemných vztahů se dostanou předměty mimo nás, octnou-li se v určitých polohách) a kinestetickou představivost (tu využívá například technik k určení pohybu soukolí). V souvislosti s matematikou vymezují prostorovou představivost jako specifický faktor matematických schopností například McGee (1979) a Bishop (1980), kteří uvádějí i přehled souvisejících výzkumů. Tento prostorový faktor (prostorová představivost) je některými autory charakterizován například jako schopnost vnímat prostorové vztahy a v představách s nimi manipulovat. Později dochází k rozdělení tohoto faktoru na prostorovou vizualizaci (představuji si rotaci či transformaci nějakého předmětu) a prostorovou orientaci (chápu vztah prostorové konfigurace objektů k mé vlastní poloze).

Další podrobný přehled různých vymezení prostorové představivosti můžeme nalézt například v (Molnár et al., 2006). V souvislosti s výukou matematiky[50] na základní škole považují autoři za relevantní geometrickou představivost. Nezabývají se tedy představami souvisejícími s umístěním člověka v prostoru (prostorovou orientaci), ale soustředí se na představy o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru. Vzájemným vztahem se zde myslí různé relace, transformace či operace

[48] V originále *measurement* a *non-measurement reasoning*. Rozhodla jsem se používat termín numerické a nenumerické uvažování, protože jedním z hlavních rozdílů je, že u *non-measurement reasoning* nepoužívají žáci k popisu či srovnávání ani jednotky ani čísla.
[49] *spatial abilities*
[50] Autoři se zaměřují na 3D prostor, a tedy výuku stereometrie. Domnívám se však, že by vymezení geometrické představivosti šlo analogicky vztáhnout i na objekty ve 2D prostoru.

s geometrickými útvary (např. vzájemná poloha útvarů, geometrická zobrazení, topologické transformace a jiné).

Zdá se, že tento pojem geometrické prostorové představivosti popisuje přesně ty schopnosti, jejichž rozvoji se věnuje větev HUT nazvaná nenumerické uvažování. Budeme tedy úroveň nenumerického uvažování měřit pomocí nástrojů a testů určených pro měření geometrické představivosti. Mezi výzkumníky bohužel nepanuje shoda v tom, který test by byl pro měření geometrické představivosti nejlepší. Jsou používány například úlohy – skládání tvarů (který tvar mohl být složen z těchto komponent), nalézání shodného tvaru (najděte dva shodné tvary), manipulace s 2D objektem ve 3D prostoru (posunutí, otočení, překlopení), mentální rotace nakresleného 3D objektu (jak vypadá objekt zezadu), různé polohy krychle či jiného tělesa ve 3D nákresu (jaký symbol je na spodní straně), představa tělesa na základě jeho sítě a podobně.

V českém prostředí existuje například test inteligenčních schopností I-S-T 2000 R (Amthauer et al., 2005), adaptovaný z německého prostředí. Jedná se o diagnostický test, který v základním modulu měří verbální, numerickou a figurální inteligenci, kde právě figurální inteligence představuje obrazně-prostorové inteligenční schopnosti. Modul vztahující se k figurální inteligenci se skládá z následujících typů úloh:

- **Výběr obrazců:** úlohy 121–140: Každá úloha ukazuje jeden obrazec rozstříhaný na několik kousků. Zkoumaná osoba má zjistit, který z deseti možných obrazců vznikne složením jednotlivých částí.
- **Úlohy s kostkami**: úlohy 141–160: Jsou dány kostky, na jejichž šesti stranách jsou odlišné značky. Vždy je vidět pouze tři strany kostky. Každá položka ukazuje jednu z daných kostek ve změněné poloze. Testovaný jedinec má zjistit, o kterou z nich se jedná.
- **Úlohy s maticemi**: úlohy 161–180: V každé úloze je na levé straně řada (nebo řady) obrazců uspořádaných podle určitého pravidla. Úkolem zkoumané osoby je zjistit, který z pěti nabídnutých obrazců bude stát na místě otazníku v neúplné řadě uspořádané podle stejného pravidla jako úplná řada či řady.

Bohužel všechny tyto testy jsou placené, hledala jsem tedy jiné zdroje. Inspiraci jsem našla v dizertační práci Slezákové (2011). Slezáková zmiňuje standardizovaný nástroj nazývaný Test čtverců, který vychází z podstaty Rybakovových figur. Každá úloha je planimetrickou figurou (nepravidelným tvarem), na jejímž obvodě je několik bodů označených číslicemi. Úkolem je představit si takové rozdělení obrazce, aby spojením obou rozdělených částí bylo možno vytvořit čtverec. Očíslování bodů slouží k přesnému označení místa, kde se má původní figura rozdělit. Pod každý obrázek se mají napsat čísla bodů, z nichž dělicí čáry vycházejí. Test umožňuje zjišťovat úroveň jednotlivých dílčích schopností, jako je pozornost, schopnost kombinovat různé tvary apod., a dá se použít při ověřování prostorové představivosti jedince. Tento test sloužil autorce k vytvoření vlastního testu na geometrickou představivost, který nazývá Test trojúhelníků. Úkolem respondentů je z daného mnohoúhelníku jedním řezem a následným přemístěním částí vytvořit rovnostranný trojúhelník.

Rozhodla jsem se použít pro nenumerické uvažování v rovině právě tento test, protože testuje schopnost dekompozice a následné rekompozice útvaru podle předem daných pravidel, a to je jeden z důležitých prvků v nenumerické části HUT pro obsah. Je nutno ovšem zmínit, že tento test neprověřuje, zda žáci chápou zachování obsahu při této transformaci, ani zde není důležitý aspekt porovnávání obsahů jednotlivých části. Test se zaměřuje výhradně na dekompozici a opětovné složení správného tvaru.

Pro nenumerické uvažování ve 3D je situace ještě složitější – jak jsem zmínila, existuje větší množství různých typů testů (úlohy s kostkami, mentální rotace 3D tělesa, představa tělesa na základě jeho sítě apod.). Rozhodla jsem se proto vybrat několik úloh z různých typů testů, což přesněji uvedu v oddíle 3.2.2.

2.7. Upřesnění výzkumných otázek

HUT popsané výše mi umožňují upřesnit výzkumné otázky. Jak již bylo zmíněno, práce si klade za cíl strukturovaně popsat uchopování pojmů obsah a objem žáky pomocí hypotetické učební trajektorie (HUT) a identifikovat kritická místa na této trajektorii (tj. místa, která jsou pro žáky při osvojování pojmů obsah a objem obtížná nebo jejichž osvojení je pro uchopení pojmu klíčové).

Jak vidíme z HUT uvedených výše (viz tab. 2.8 a tab. 2.9) a přehledu výzkumů v oddíle 2.3, nabízí se několik kroků či míst, která by se mohla projevit jako důležitá:

- propojení mezi numerickým a nenumerickým uvažováním
- strukturace prostoru do řádko-sloupcové struktury
- multiplikativní uvažování a propojení strukturace prostoru s operací násobení

V praktické části budu tedy hledat odpovědi na následující otázky:

RQ1: Souvisí úspěšnost v úlohách na nenumerické uvažování s úspěšností v úlohách na výpočet obsahu a objemu?

RQ2: Souvisí schopnost strukturovat prostor do řádko-sloupcové struktury s úspěšností v úlohách na obsah a objem?

RQ3: Souvisí projevovaná úroveň multiplikativního uvažování s úspěšností v úlohách na obsah a objem?

Jako další cíle jsem si stanovila zkoumat strategie a dovednosti, které pomáhají žákům při řešení úloh na obsah a objem, a nejčastější chyby, které můžeme při řešení těchto úloh pozorovat.

RQ4: Jaké strategie žáci různého věku používají při řešení vybraných úloh na obsah a objem a jakých chyb se dopouštějí?

Praktická část

3. Metodologie výzkumu

Jak jsem již zmínila, sestává se praktická část mého výzkumu ze dvou částí. Jednou z nich je písemný test a druhou rozhovory s žáky. Tuto kombinaci metod jsem zvolila v návaznosti na formulaci výzkumných otázek. Výzkumné otázky RQ1–RQ3 zkoumají vzájemný vztah mezi dvěma konstrukty (proměnnými), a proto je pro jejich zodpovězení vhodný kvantitativní výzkum (Hendl, 2004). Výzkumná otázka RQ4 se naopak zabývá strategiemi a obtížemi žáků při řešení úloh ve zkoumané oblasti. Pro její zodpovězení se jeví jako nejvhodnější výzkum kvalitativní, který poskytuje dobrý vhled do procesu řešení u jednotlivých žáků (možnosti odvodit tyto informace pouze z písemných řešení jsou značně omezené). Jako formu kvalitativního výzkumu jsem zvolila polostrukturovaný hloubkový rozhovor s žáky (Hendl, 2008), v rámci něhož budou žáci přemýšlet nahlas nad předloženými úlohami (verbalizace pomocí hlasitého uvažování, viz Janík, 2005).

Pro představení metodologie výzkumu jsem zvolila netradiční řazení. Zpravidla se nejdříve popisují tvorba úloh a zdůvodnění jejich výběru, dále pilotní výzkum a hlavní výzkum. Ovšem protože jsem po pilotáži úloh provedla poměrně velké změny v jejich formulaci, nejdříve stručně uvedu pilotní výzkum a teprve po něm úlohy a jejich analýzu a *priori*. Následovat bude popis administrace testu, tedy jak byl test v jednotlivých školách zadáván a stručná charakteristika jednotlivých škol. V dalších oddílech se budu věnovat rozhovorům s žáky – jak byli žáci vybíráni a jak rozhovory probíhaly. Kapitolu věnovanou metodologii uzavírá popis zpracování a způsobu analýzy získaných dat.

Analýza učebnic: Než přejdu k popisu pilotního testování, krátce zmíním provedenou analýzu učebnic, protože ta byla jedním ze zdrojů pro tvorbu úloh. Analýza vybraných českých učebnic matematiky sledovala dva cíle. Prvním cílem bylo zjistit typické a atypické druhy úloh týkajících se míry v geometrii, které se v učebnicích objevují, a inspirovat se jimi při tvorbě úloh pro test. Druhým cílem bylo získat přehled o implicitní učební trajektorii pro obsah a objem, která je v těchto učebnicích prostřednictvím příkladů a úloh implementována, aby bylo možné hledat souvislosti mezi identifikovanými obtížemi žáků a výstavbou učebnic, které žáci a jejich učitelé používají. Volbu učebnicových řad, které jsem zařadila do analýzy, jsem provedla na základě výpovědí učitelů získaných v rámci výzkumu zaměřeného na kritická místa v matematice z pohledu učitelů (Vondrová, Žalská, 2013). Na 1. stupni nejsou preference učebnic příliš vyhraněné – kromě učebnic Hejného a kol. (z nakladatelství Fraus) jsem zvolila ještě učebnice nakladatelství Alter. Na 2. stupni 133 ze 208 dotázaných učitelů uvedlo, že používají učebnice autorské dvojice Odvárko a Kadleček (nakladatelství Prometheus), a proto jsem zařadila do analýzy právě tuto řadu. Seznam učebnic, se kterými jsem pracovala, je uveden na konci seznamu použitých informačních zdrojů (viz kapitola 7). Výsledky analýzy učebnic se objevují převážně v diskusi u příslušných obtíží žáků.

3.1. Pilotní testování

Na základě studia literatury, analýzy HUT (viz tab. 2.8 a tab. 2.9) a vybraných učebnicových řad jsem vytvořila dvě sady úloh – pro 1. a 2. stupeň. Vzhledem k volbě výzkumných otázek, obsahuje test kromě úloh na výpočet obsahu a objemu rovněž úlohy, které jsou zaměřeny na nenumerické uvažování – a to jak ve 2D, tak i ve 3D, a dále pak úlohy, kde je vidět práce žáka se strukturací prostoru. Úlohy byly navrženy tak, aby se vztahovaly k různým fázím HUT. Úlohy na nenumerické uvažování ve 2D jsou součástí první části testu, na kterou budu odkazovat termínem *předtest* a úlohy označovat U1–U20. Zbylé jsou zařazeny do *hlavního testu* a označeny H1–H16. Úlohy tak, jak jsem je použila v pilotním šetření, jsou uvedeny v příloze P6. Abych se vyhnula opakování, v tomto oddíle se budu věnovat jen těm z nich, které na základě pilotáže doznaly změn.

Pilotní testování úloh bylo provedeno v srpnu a září 2015 s následujícími respondenty:

1. stupeň: Bára, Elvina, Vítek, Lucka, Anička, David[51]

2. stupeň: Mája, Zuzka, Matěj, Kačka

Dospělí respondenti: 4 + expertní posouzení: N. Vondrová, J. Kloboučková

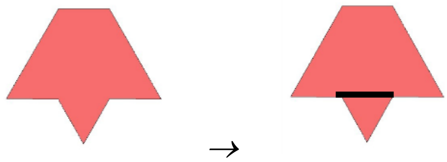
Testování probíhalo formou polostrukturovaného rozhovoru. U osmi respondentů byl rozhovor zaznamenáván na audio záznamník, u ostatních jsem pracovala pouze s řešením testu v papírové podobě a s poznámkami tazatelů. Dospělí respondenti a experti mi předávali své připomínky ústní formou.

Hlavní zjištění a provedené změny v testu shrnují následující dva oddíly, ve kterých pojednávám zvlášť úlohy na numerické a nenumerické uvažování.

3.1.1. Nenumerické uvažování

Předtest v pilotním testování sestával ze 20 různých úloh (mnohoúhelníků) s následujícím zadáním:

V mnohoúhelníku spojte dva vrcholy úsečkou tak, aby po přemístění jedné části ke druhé (pouze v představách) vznikl rovnostranný trojúhelník. Příklad:



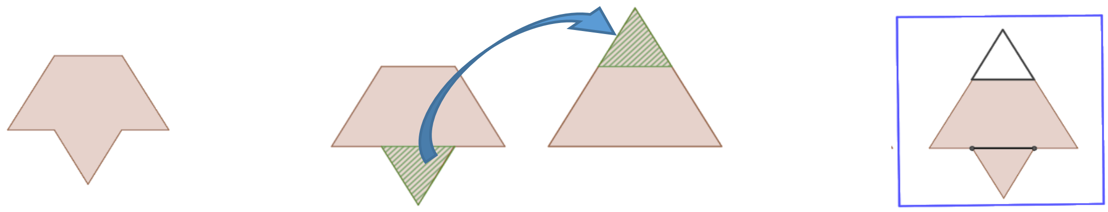
[51] U Davida a Matěje jsem měla k dispozici pouze poznámky a komentář tazatele, který jim test zadával a následně se dotazoval na strategie a způsob řešení.

Někteří žáci však řešili tyto úlohy tak, že pouze našli libovolný rovnostranný trojúhelník a ten pak odřízli (např. řešení úlohy U4 na obr. 3.2 zcela vpravo). To například u Lucky vedlo ke zdánlivě správnému řešení, ačkoliv zadání úlohy dobře nerozuměla a pouze odřízla část tvaru, která vypadala jako rovnostranný trojúhelník. Když jsem se jí ptala, kam by odříznutou část přesunula, nebyla schopná odpovědět. Rozhodla jsem se tedy upřesnit zadání (pomocí obrázku s rozkreslenými kroky) a požadovat, aby žáci do testu zakreslovali i místo, kam přijde jimi odříznutá část útvaru.

Nové zadání:

V testu najdete 20 mnohoúhelníků, vaším úkolem je ***nakreslit jednu čáru pomyslného řezu*** *(střihu) tak, aby po rozstřižení a přeskládání částí vznikl rovnostranný trojúhelník.* *<u>Řez musí spojovat dva vrcholy mnohoúhelníku</u>. Dále* ***zakreslete místo****, kam ustřižená část patří. Příklad:*

Zadání: *Představím si:* *Dokreslím:*



Dále byli někteří respondenti schopni najít u některých úloh z předtestu více řešení. Rozhodla jsem se tuto skutečnost akceptovat, ale nepřidávat při vyhodnocování testu body za další nalezená řešení.

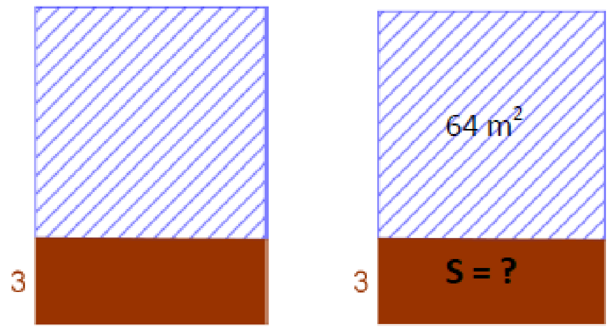
Úlohy na geometrickou představivost ve 3D (H7 až H11) zůstaly beze změny. Pouze jsem změnila pořadí úloh, aby se vždy vešla celá úloha na stránku.

3.1.2. Numerické uvažování

U úloh pro 1. i 2. stupeň jsem zaznamenala zejména obtíže žáků s tím, že si nepamatovali/nevěděli, co označují slova obsah či obvod. Po použití nápovědy „obsah určuje velikost plochy či lze ho vyjádřit počtem čtverečků a obvod je vlastně délka plotu“ již žáci pracovali bez problémů. Tyto nápovědy jsem povolila používat i v plošném testu.

Hlavním problémem téměř u všech úloh v této kategorii bylo to, že úlohy byly nestandardní a zejména slabší žáci je vůbec nezačali řešit. Po prvním přečtení se jim zdály příliš těžké, až na popud tazatele se k úloze vrátili a často ji vyřešili pouze s minimální nápovědou. Pro dobré žáky byly naopak úlohy často velmi jednoduché. U řady úloh jsem se tedy pokusila zadání zjednodušit či zpřehlednit. Například u H4 byl dodán popis do obrázku a byl použit nákres obsahující všechny relevantní informace potřebné k řešení úlohy (viz obr. 3.1), text zadání úlohy zůstal beze změny.

H4. Na obrázku je plánek zahrady. Vyšrafovaný ČTVEREC představuje trávu a plně vybarvený obdélník záhon. Vypočti plochu záhonu, když víš, že plocha trávy (vyšrafovaný čtverec) je 64 m² a kratší strana záhonu je dlouhá 3 m.



Obr. 3.1: Původní a upravený obrázek pro H4

V úloze H5 jsem se rozhodla vypustit zadání pod odrážkou b), abych test zkrátila.

H5. Na vydláždění koupelny bylo použito 300 ks dlaždic o rozměru 10 x 10 cm, kolik kusů dlaždic budu potřebovat, když nové dlaždice mají rozměr:

a) 20 x 20 cm

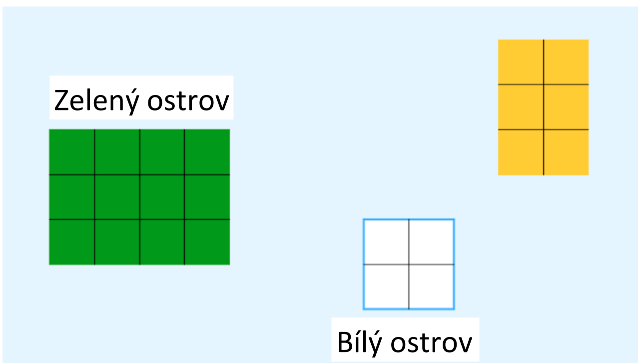
b) 2 x 2 cm?

Popiš, jak jsi postupoval. Spáry mezi dlaždicemi neuvažuj (jako kdyby žádné nebyly).

Nejvíce úprav si vyžádala úloha H13. Ukázalo se, že zadání je pro žáky velmi složité. Bylo tedy změněno a nakonec byla úloha nahrazena jinak formulovanou úlohou, která zjišťuje totéž – tedy výšku krychlové stavby, je-li dána velikost podstavy a počet kostek.

Původní zadání:

H13. Na obrázku jsou ostrovy. Děti na nich staví domy:



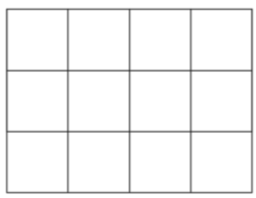
Zelený dům zabírá celý zelený ostrov o rozměru 4 x 3 a má 3 podlaží.

Kolik kostek bylo potřeba na jeho stavbu?

Jaká by byla nejmenší výška stavby, kdybychom ze stejného počtu kostek chtěli postavit dům na bílém ostrově o rozměrech 2 x 2?
Zdůvodni.

Zadání bylo nejprve pozměněno tak aby obsahovalo pouze nákres a tu část úlohy zaměřenou na výpočet výšky, je-li zadán objem stavby (tj. počet kostek).

H13. Mám 38 kostek, chci postavit stavbu na plánu (každý čtvereček na plánu označuje místo pro jednu kostku). Kolik musí mít stavba minimálně podlaží, aby žádná kostka nezbyla?



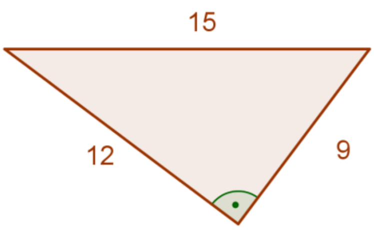
Toto zadání však neumožňovalo zjistit, jak by si žák strukturoval první patro stavby v situaci, kdy by neměl strukturu přímo naznačenou obrázkem. Proto jsem po dalším otestování a konzultaci s J. Kloboučkovou znovu změnila zadání a odstranila jsem náčrtek. Úlohu ve stejném znění jsem použila jak v testu pro 1. (úloha H8), tak i pro 2. stupeň (H13).

H13. Máš přesně 59 kostek o hraně 1, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 a šířce 3. Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

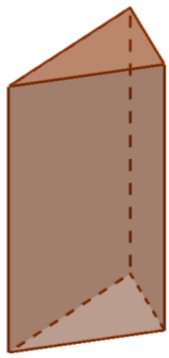
Rovněž úloha H16 (použita pouze pro 2. stupeň) doznala několika změn. Původně byla zařazena úloha, kde měli žáci za úkol zjistit výšku vody ve váze ve tvaru trojbokého hranolu, pokud znali rozměry podstavy a objem vody. Zadání bylo doplněno obrázkem.

H16. Váza má tvar hranolu s trojúhelníkovým dnem s rozměry 9, 12 a 15 cm (viz obrázek 1). Spočtěte:
a) kolik se do vázy vejde vody, pokud je vysoká 25 cm?
b) jak vysoko by sahala hladina vody, pokud by jí ve váze byl přesně 1 litr?

(Pomůcka: 1 l = 1 dm^3 = 1 000 cm^3)



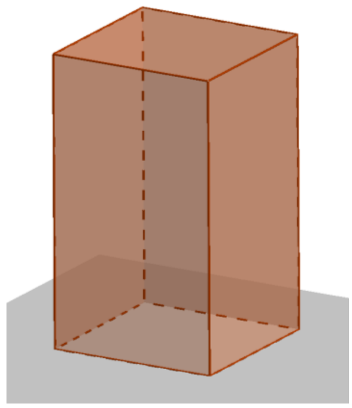
Obrázek 1: Váza a její dno



Opět se ukázalo, že v této podobě je úloha pro žáky příliš náročná a do písemného testu není vhodná. Nejprve jsem jí nahradila touto úlohou:

H16. Váza má tvar kvádru se dnem o rozměru 9 x 12 cm. Spočtěte, jak vysoko by sahala hladina vody ve váze, pokud bychom jí do vázy nalili přesně 1 litr.

(Pomůcka: 1 l = 1 dm^3 = 1 000 cm^3)



Nakonec jsem se ale rozhodla odstranit i obrázek, abych mohla pozorovat, zda a jak si žáci situaci nakreslí. Finální podoba úlohy je tedy tato:

H16. Váza má tvar kvádru se dnem o rozměru 9 x 12 cm. Spočtěte, jak vysoko by sahala hladina vody ve váze, pokud bychom jí do vázy nalili přesně 1 litr.

(Pomůcka: 1 l = 1 dm^3 = 1 000 cm^3)

Během pilotního testování se ukázalo, že řešení testu zabere některým žákům více než 45 minut (tedy dobu určenou pro jeho vyplnění). Počet úloh jsem však nechtěla snižovat a raději jsem se rozhodla akceptovat riziko většího počtu žáků, kteří úlohy v závěru testu nebudou řešit z časových důvodů, s tím, že otestuji všechny čtyři plánované oblasti.

3.2. Úlohy pro písemný test a jejich a *priori* analýza

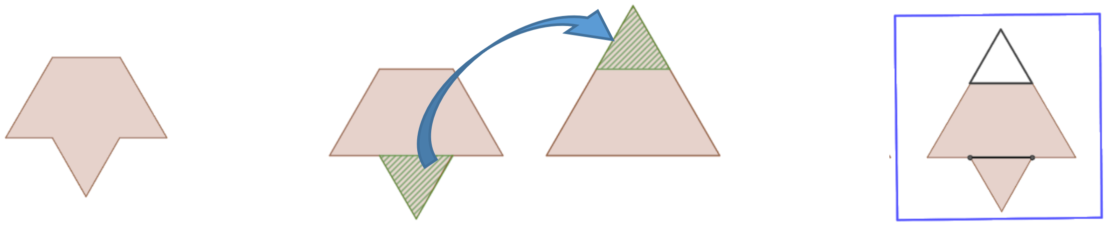
V tomto oddíle představím všechny úlohy písemného testu (v jejich finální podobě po úpravách na základě pilotáže) s analýzou a *priori*. Zaměřím se zejména na předpokládané způsoby řešení a očekávané chyby. Uvedu také, k jaké části HUT se úloha váže a jaké dovednosti či schopnosti testuje.

3.2.1. Úlohy na nenumerické uvažování 2D

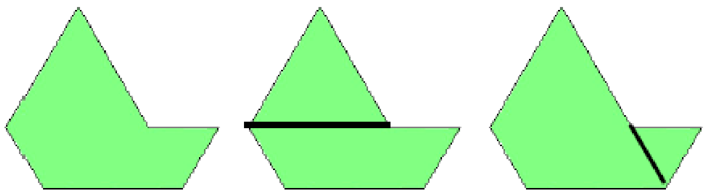
Jak uvádím v oddíle 2.6, jako vhodný test na nenumerické uvažování jsem zvolila zkrácenou verzi testu z práce Slezákové (2011). Zadání testu jsem však mírně modifikovala. Test prověřuje schopnost rozdělit útvar podle předem daných pravidel a následně ho znovu složit. Žák dostane pracovní list, na kterém je zakresleno 20 mnohoúhelníků. Jeho úkolem je pomocí spojnice dvou vrcholů nějakou část mnohoúhelníků odříznout a vzniklé tvary přeskupit tak, aby vznikl rovnostranný trojúhelník. Tyto úlohy jsem nechala v samostatném testu (předtest) s omezenou časovou dotací 10 minut. (Připomínám, že úlohy z předtestu označuji jako U1 až U20, abych je odlišila od úloh v hlavním testu, které označuji H1 až H16.) Celé zadání předtestu naleznete v příloze P6. Společné zadání pro všechny mnohoúhelníky bylo formulováno takto:

V testu najdete 20 mnohoúhelníků, vaším úkolem je ***nakreslit jednu čáru pomyslného řezu*** *(střihu) tak, aby po rozstřižení a přeskládání částí vznikl rovnostranný trojúhelník. Řez musí spojovat dva vrcholy mnohoúhelníku. Dále* ***zakreslete místo****, kam ustřižená část patří. Příklad:*

Zadání: *Představím si:* *Dokreslím:*



Řešení se pro jednotlivé úlohy liší; některé úlohy připouštějí více možností řešení – například v úloze U4 je možné buď odříznout menší rovnostranný trojúhelník (viz obr. 3.2 vpravo) a přemístit ho do levé dolní části obrazce nebo lze odříznout rovnostranný trojúhelník nahoře (viz obr. 3.2 uprostřed) a ten překlopit a přemístit pod lichoběžník dolů nebo odříznutý rovnoramenný lichoběžník otočit o 60° po směru hodinových ručiček a přiložit k rovnostrannému trojúhelníku zprava.



Obr. 3.2: Možná řešení úlohy U4 z předtestu

Očekávám, že žáci mohou přehlédnout podmínku ze zadání, že řez má spojovat dva vrcholy mnohoúhelníku, a následně budou vést řez např. v polovině strany. Také by mohlo dojít k tomu, že místo aby žáci vytvářeli rovnostranný trojúhelník přeskládáním částí původního mnohoúhelníku, odříznou pouze tu část, která vypadá jako rovnostranný trojúhelník, a budou ho považovat za konečné řešení.

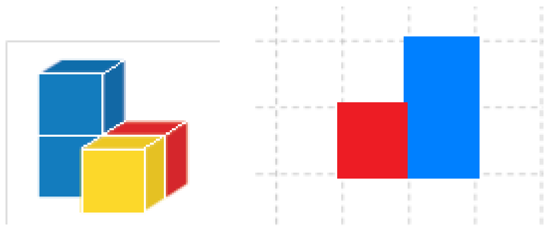
Zadání úlohy bylo modifikováno na základě pilotního testování – viz oddíl 3.1. Finální verze testů jsou uvedeny v přílohách P8 a P9. Verze pro 1. a 2. stupeň se v několika úlohách liší. Do verze pro 1. stupeň jsem nezahrnula některé úlohy, které se na základě výsledků Slezákové (2011) ukázaly jako obtížné (jsou to U7, U10, U15, U17 a U19 z testu pro 6. až 9. ročník), a nahradila je úlohami, které se ukázaly jako snazší.

3.2.2. Úlohy na nenumerické uvažování 3D

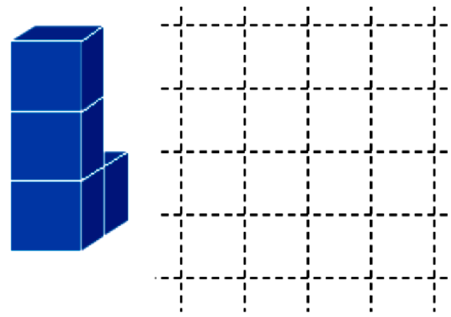
V případě 3D úloh byla jejich volba obtížnější, neboť se pro testování tohoto způsobu uvažování používají různá druhy testů. S výběrem úloh jsem se kromě testů volně dostupných na webu[52] inspirovala rovněž v dizertační práci Plškové (2010) a nakonec zvolila několik různých typů úloh. Úlohy zde nebudou uvedeny v pořadí, v jakém byly zadány v testu.

Jako zástupce úloh na mentální rotaci 3D objektu jsem vytvořila následující skupinu úloh (obrázky staveb jsou převzaty z učebnic Hejný a kol.).

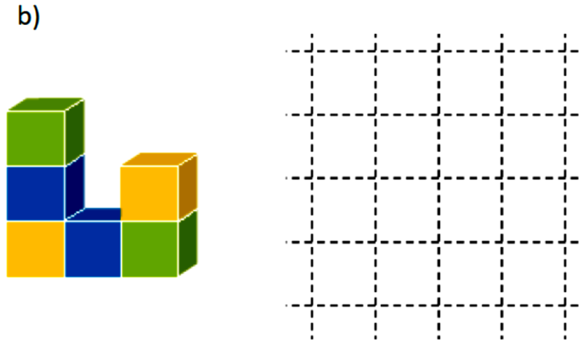
H9. Nakresli, jak by vypadala krychlová stavba při pohledu ***zezadu****: Příklad:*



a)

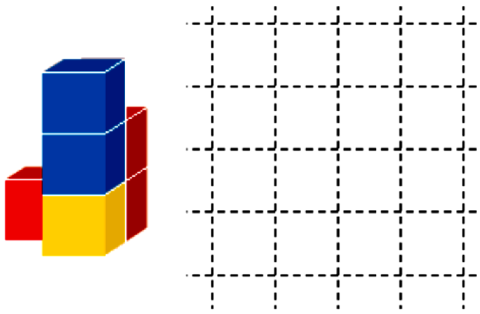


b)

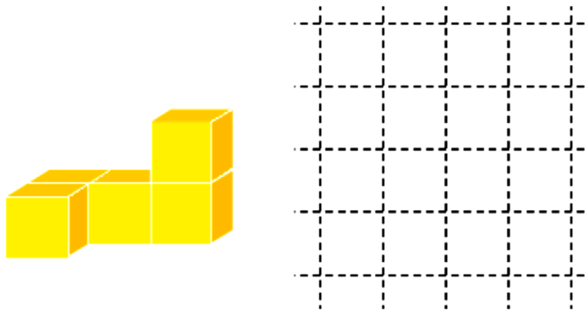


[52] Např. https://www.aptitude-test.com/spatial-visualization.html, nebo https://www.123test.com/spatial-reasoning-test/, http://www.psychometric-success.com/practice-papers/psychometric%20success%20spatial%20ability%20-%20practice%20test%201.pdf a jiné

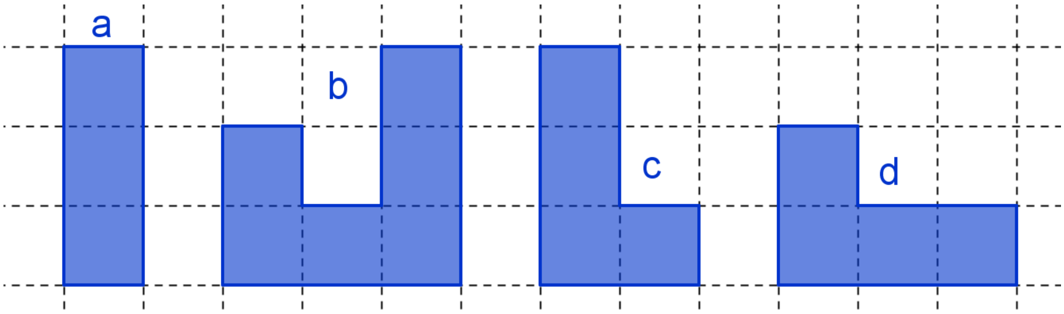
c)



d)



Řešením úlohy jsou čtyři nákresy na obr. 3.3.

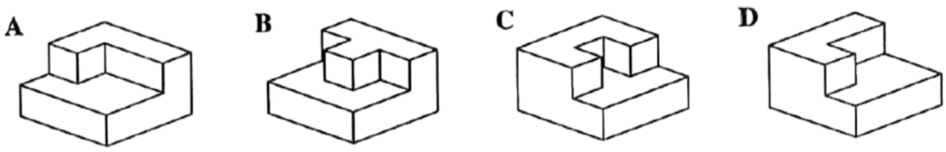


Obr. 3.3: Řešení úlohy H9

Očekávám, že někteří žáci si mohou všímat i různé barevnosti kostek a budou se snažit zachytit i tento aspekt. Žáci rovněž mohou chtít nějak zachytit situaci, kdy jsou dvě kostky za sebou (např. spodní kostka u stavby a), což může vést k nesprávnému nákresu. Asi nejčastější chybou, kterou očekávám, je zakreslení pohledu zepředu místo zezadu (nepřeklopení pohledu zepředu podle svislé osy). Úloha bude použita pro 1. i pro 2. stupeň.

Skládání tělesa z komponent testuje úloha H7 (převzato a upraveno z Plšková, 2010).

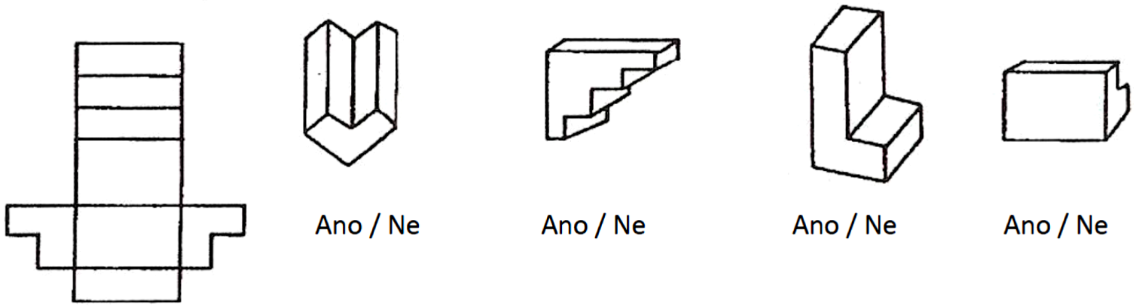
H7. Která dvě tělesa vytvoří po spojení zcela vyplněnou krychli? ....



Je zjevné, že složením částí B a C vznikne zcela vyplněná krychle. Neočekávám, že by tato úloha byla pro žáky problémová. Je možné, že někdo přehlédne, že krychle má být zcela vyplněná, a bude skládat komponenty A a B (resp. B a D). Úloha bude použita pro 1. i pro 2. stupeň.

Pro testování toho, zda jsou si žáci schopni vytvořit představu tělesa na základě jeho sítě, jsem zvolila následující dvě úlohy (převzato a upraveno z Plšková, 2010).

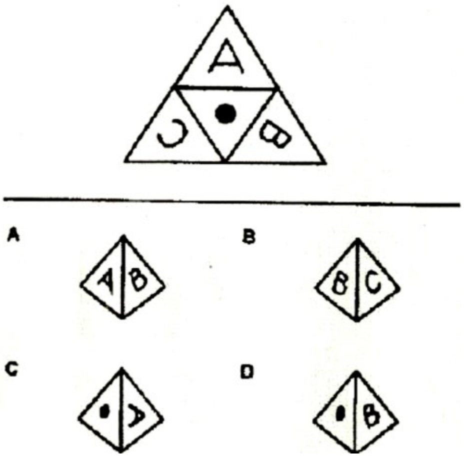
H8. Na obrázku je rozložená krabička, jak by vypadala tato krabička složená? Zakroužkuj u každé možnosti buď Ano (= tak by mohla vypadat) nebo Ne (= tak nevypadá).



Správným řešením je první a čtvrtá možnost (dobře je to patrné například z tvaru šestiúhelníkových „bočnic"). Lze očekávat, že žáci najdou pouze jedno řešení. Rovnoběžné úsečky v horní části sítě tělesa mohou asociovat schody (tedy žák zvolí nesprávně druhou možnost), žák se zaměří na „bočnice" ve tvaru písmene L, ale neuvědomí si, že nejdelší strany šestiúhelníku mají shodné délky (zvolí tedy nesprávně třetí možnost). Úloha bude použita pro 1. i pro 2. stupeň.

V úloze H11 nejde ani tak o tvar složeného tělesa jako o postavení či orientaci znaků nakreslených na plášti. Čtyřstěn je třeba v představě složit a představit si jeho různé polohy pomocí mentální 3D rotace.

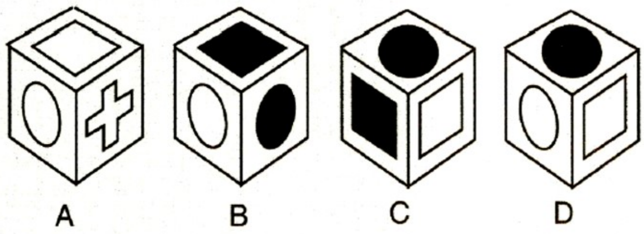
H11. Který čtyřstěn A, B, C, D není výsledkem složení nakreslené sítě tělesa? Škrtni ho.



Správnou odpovědí je, že nemohu složit pouze čtyřstěn D (písmeno B by po složení muselo být v jiné poloze). Může se stát, že žáci nebudou znát pojem čtyřstěn. Rovněž očekávám, že někteří z žáků se zaměří primárně na tvar složeného tělesa a nevšimnou si chybné polohy písmene B, tedy budou pokládat všechna řešení za možná. Vzhledem k tomu, že je zde použit pojem čtyřstěn, bude úloha použita až od 6. ročníku.

Posledním typem úloh, který jsem se rozhodla do testu zařadit, je úloha na různé polohy krychle (převzato a upraveno z Plšková, 2010).

H10. Na obrázcích A–D mají být různé pohledy na tutéž krychli. Jeden z obrázků tam ale nepatří. Najdi ho a škrtni.



Krychlí, která mezi ostatní nepatří, je krychle C. Dobře lze řešení najít například ze srovnání krychlí C a D, které by musely být (podle shodných stran nahoře a vpravo[53]) vlastně ve stejné poloze, ale liší se stěnou vpředu vlevo. Jedna z krychlí C a D tedy musí být ta „jiná" krychle. Z porovnání s ostatními krychlemi určíme odpověď: například, když pootočím D, čtvercem nahoru (tak, že kruh zůstane vlevo dole), musím dostat pohled A a při pootočení na opačnou stranu (tj. čtvercem dolů) musím dostat i pohled B. Problémová je tedy krychle C.

Domnívám se, že úloha bude pro žáky poměrně obtížná. Správnou krychli totiž nevidíme a nevíme, jak jsou na ní rozložené strany – chybí referenční objekt. Jak referenční objekt vypadá, zjišťujeme až na základě porovnávání. Je pravděpodobné, že žákům bude činit potíže systematicky pracovat s různými možnostmi – logicky vyvozovat (např. C a D nemohou být zároveň správně a A a D si neodporují, tedy C by mohlo být špatně). Může rovněž nastat, že žáci zaměří pozornost na kombinaci některých dvou stěn (například černý čtverec a černé kolečko) a krychle, které tuto kombinaci mají, budou považovat za správné, aniž by provedli mentální rotaci krychle a řešili symboly na ostatních stěnách. Úloha bude použita pouze pro 2. stupeň.

3.2.3. Úlohy zaměřené na strukturaci prostoru a práci s jednotkou

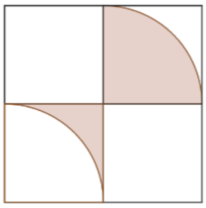
Vzhledem k tomu, že jedna z mých výzkumných otázek se zabývá strukturací prostoru do řádků, sloupců a případně vrstev tvořených opakováním příslušné jednotky, zařadila jsem do testu i skupinu úloh zaměřených primárně na zjišťování této dovednosti. Některé úlohy se zaměřují více na vytváření struktury uvnitř nějakého daného tvaru/tělesa, jiné zase na práci s jednotkou.

Úloha H1 pochází z výzkumu (Kospentaris et al., 2011) a byla vybrána s cílem zjistit, zda jsou žáci schopni vidět jednotku obsahu jako celek, který lze dále dělit, a pracovat s těmito částmi, i když jsou různého tvaru či v různých polohách. Skládá se z pěti podúloh, které jsou

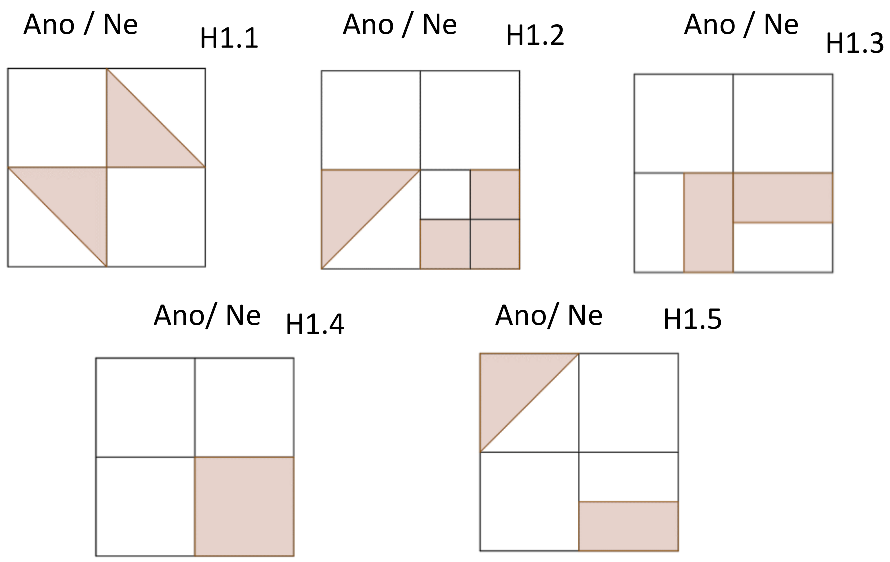
[53] Tato strategie řešení předpokládá, že žáci vědí, že se žádný symbol na kokstce neopakuje. To ovšem v zadání není výslovně uvedeno. Pokud by tato podmínka neplatila, obtížnost úlohy by extrémně vzrostla a úloha by nebyla jednoznačná – bylo by například možné představit si kostku, která by odpovídala obrázkům A, C a D a měla na protějších stěnách dva nevybarvené čtverce nebo kostku, která by odpovídala obrázkům B, C a D, ale měla dva černě vybarvené kruhy, a dva nevybarvené čtverce.

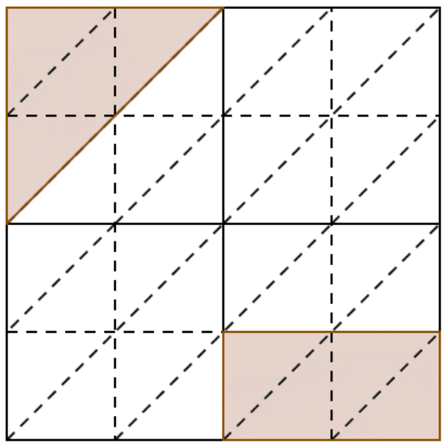
pro názornost označeny po řadě H1.1, H1.2, …, H1.5 – toto označení v testu nebylo uvedeno.

Obrázek 1*:*



H1. Má vybarvená část čtverce stejný obsah jako část čtverce vybarvená na obrázku 1? Zakroužkuj u každého z následujících obrázků.



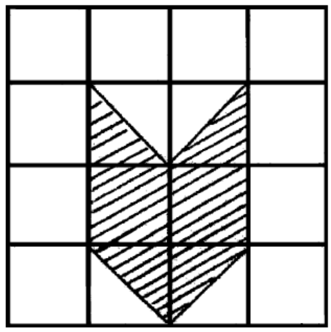


Obr. 3.4: Řešení úlohy H1.5 pomocí rozdělení na trojúhelníkové jednotky

Úlohu lze řešit několika způsoby. Geometricky: vybarvené části složíme k sobě (případně s využitím nějaké transformace) tak, aby dohromady tvořily malý čtverec (tj. čtvrtinu velkého čtverce). U obrázku 1 (vzor) stačí využít posunutí, stejně jako u prvního a druhého čtverce (H1.1 a H1.2). U H1.3 je třeba kromě posunutí použít i rotaci o 90°a u H1.5 je třeba po posunutí část vybarveného obdélníku (nebo trojúhelníku) odříznout, otočit o 180° a dále přesunout, což může být pro žáky poměrně obtížné. Další způsob řešení spočívá v tom, že se podíváme na obrázek jako na celek a části – po složení vybarvených částí v obrázku 1 dostaneme jeden vybarvený malý čtverec (resp. čtvrtinu velkého čtverce) – stejně jako v H1.4; další podúlohy lze řešit pomocí zjištění, jaká část malého (resp. velkého) čtverce je kde vybarvena. U H1.1 a H1.3 a H1.5 je vždy vybarvena dvakrát polovina malého čtverce, tedy dvě vybarvené poloviny dají čtverec celý. V H1.2 je vybarvena polovina a více než polovina, tedy obsah jistě nebude stejný. Žáci mohou pracovat i s rozdělením čtverce na menší jednotky a porovnávat jejich počet v jednotlivých vybarvených částech (např. čtverec o obsahu 1/16 původního velkého čtverce; nebo dokonce trojúhelník o obsahu 1/32 velkého čtverce, jak je naznačeno na obr. 3.4). Nepředpokládám však, že by se tento způsob řešení vyskytoval běžně.

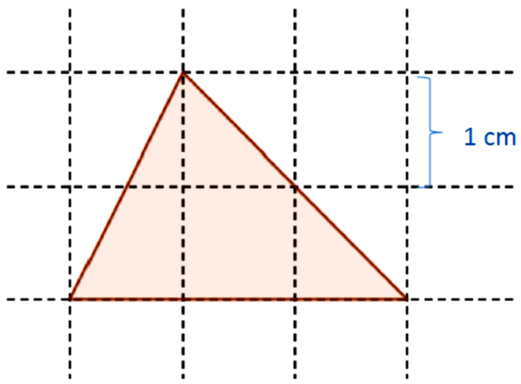
Očekávám, že nejobtížnější pro žáky bude podúloha H1.5, protože její geometrické řešení vyžaduje vícekrokovou mentální manipulaci objektu. Mohlo by také dojít k problémům při složení tvarů u obrázku 1 – tvary nemají všechny strany rovné. U tvaru H1.4 může dělat některým žákům problém to, že je vybarvena pouze jedna část čtverce a výsledek není složen ze dvou částí jako u vzoru na obrázku 1. Žáci by mohli rovněž tvary posunout a dívat se na obsah výsledného tvaru, aniž by řešili jejich případné překrytí. Úloha bude použita pro 1. i pro 2. stupeň.

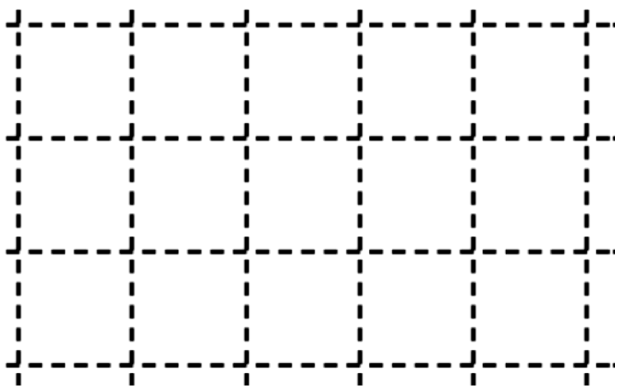
S ohledem na předpokládaný věk respondentů (nad 9 let), jsem se rozhodla nezařadit úlohu pouze na tvorbu či doplňování řádko-sloupcové struktury plochy obdélníku, kterou považuji pro tuto věkovou skupinu za triviální. Místo toho jsem zvolila úlohu z výzkumu Heredine-Konyové (2015), která se týká obsahu trojúhelníku ve čtvercové síti. Úloha je do určité míry podobná i úloze uváděné v článku Kamiiové a Kyshové (viz obr. 3.5), kterou autorky uvádějí jako úlohu, na které se ukázalo, že mnoho žáků nechápe čtverec jako jednotku obsahu (úspěšnost u žáků 7. ročníku byla méně než 50 %, 19 % respondentů vybralo jako správnou odpověď 6, což naznačuje, že jako jednotku obsahu započítávali jak celé čtverce, tak i trojúhelníky, které ovšem mají pouze poloviční velikost). Jako *úlohu H2* jsem tedy zařadila následující úlohu:



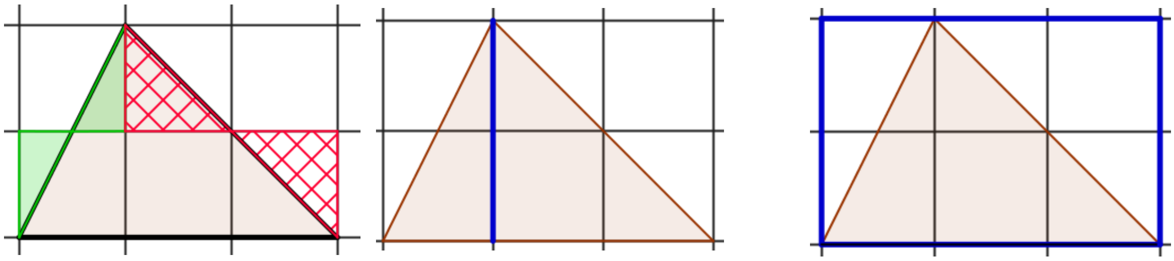
Obr. 3.5: Úloha z Michigan State Assessment (1973): urči obsah vyšrafované části

H2. Spočti obsah trojúhelníku, když víš, že strana čtverce v mříži je 1 cm. Nakresli dva další útvary se stejným obsahem.





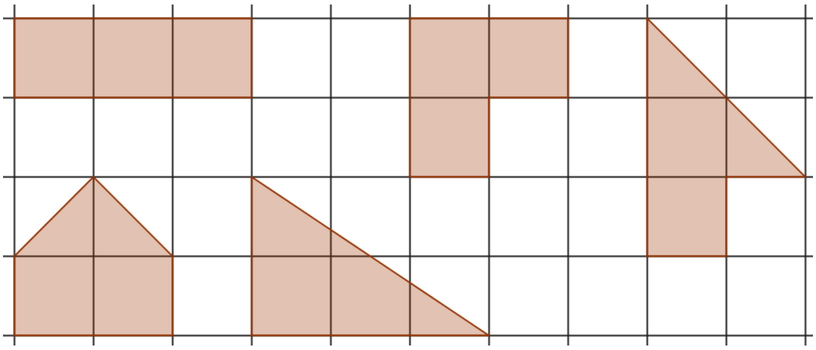
Úlohu lze řešit několika způsoby. U nejmladších žáků očekávám práci se skládáním jednotek, jak ukazuje obr. 3.6 vlevo. Může se objevit i strategie rozřezávání (žáci si útvar rozříznou na dva pravoúhlé trojúhelníky a obsah zjistí jako součet jejich obsahů) či rámování (žáci si útvar zarámují do obdélníku a obsah útvaru zjistí odečtením obsahu nevybarvených pravoúhlých trojúhelníků od obsahu obdélníku) – viz obr. 3.6 uprostřed a vpravo. Obsah příslušných pravoúhlých trojúhelníků mohou žáci spočíst buď opět skládáním čtverečků, nebo jako polovinu obsahu příslušného opsaného obdélníku nebo čtverce.



Obr. 3.6: Očekávané řešení úlohy H2.a: skládání čtverců, rozřezávání a rámování

Úlohu lze řešit rovněž výpočtem podle vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$, kde a je délka jedné strany a v_a je velikost výšky na ni, což ale předpokládá správné určení výšky k příslušné straně. Konkrétně tedy $S = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$. Ve druhé části úlohy očekávám jako nejčastější řešení mnohoúhelníky na obr. 3.7 (řešení existuje samozřejmě velké množství).

Při řešení úlohy se mohou u žáků vyskytnout následující obtíže: žáci nebudou vědět, co se myslí slovem obsah, nebo budou jako jednotku obsahu započítávat i čtverce, kde je vybarvena pouze část (tedy určí obsah 5). Tím, že zvolený tvar je trojúhelník, pro jehož obsah již znají žáci na konci 7. ročníku vzorec, může tato úloha navádět k užití vzorce, a nikoliv k práci se strukturou či čtvercovými jednotkami. V důsledku toho mohou žáci použít nesprávný vzorec – například vynásobí délky všech stran. Zde může být pro žáky problematické určení délky stran. V případě použití správného vzorce je třeba správně určit výšku trojúhelníku (jak její polohu, tak její délku).

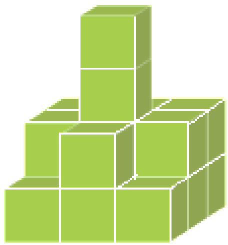


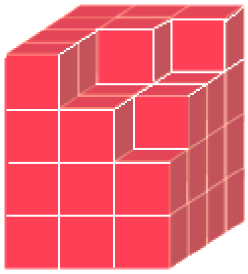
Obr. 3.7: H2 – očekávaná nejčastější řešení úlohy H2.b

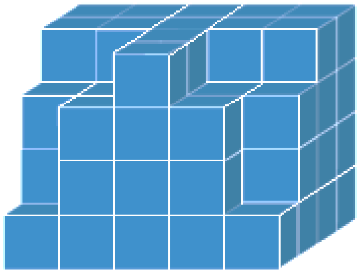
Druhá část úlohy (kreslení útvarů daného obsahu) má za cíl prověřit žákovu představu jednotky obsahu – zda vidí vypočtený obsah 3 cm^2 skutečně jako tři čtverce o straně 1. Tento typ úloh je poměrně nestandardní, proto očekávám, že úlohu někteří žáci nevyřeší nebo nakreslí pouze útvar shodný se zadaným trojúhelníkem. Za správnou práci se strukturou/jednotkou považuji správně určený obsah – a to jak za pomoci výpočtu, tak při počítání čtverečků (3 čtverečky či 3 cm^2) v kombinaci se správně zakreslenými útvary (to zejména pokud byl obsah určen výpočtem). Úloha bude použita pro 1. i pro 2. stupeň.

Na strukturaci prostoru do krychlových jednotek se zaměřuje *úloha H12* (vytvořena s použitím obrázků krychlových staveb z učebnice pro 4. ročník, Hejný a kol., s. 48).

H12. Zelená stavba má v prvním podlaží 9 kostek, červená 12 a modrá 20. Urči, kolik nejméně kostek musíš doplnit ke každé stavbě, aby vznikl zcela vyplněný kvádr. (Tedy, kdyby stavba byla v co nejmenší krabici, kolik kostek musíš doplnit, aby byla krabice zcela zaplněná?)







Zelená: …………….. *Červená: …………………* *Modrá: ………………..*

Úlohu lze řešit buď dopočítáváním chybějících kostek (po jedné – na základě obrázku a mentální představy struktury), nebo zjišťováním počtu chybějících kostek v každém patře (například u zelené stavby je v posledním patře pouze jedna kostka a má jich tam být 9, tedy v tomto patře 8 kostek chybí). Vyjde tedy, že u zelené stavby chybí 18, u červené 6 a u modré 12 kostek.

Jedná se o poměrně jednoduchou úlohu, u které je již strukturace vyznačena. Podle výsledků českých žáků u úloh tohoto typu v TIMSS (Rendl a Vondrová, 2014) neočekávám výrazné problémy. Pokud se žáci řídí pouze obrázkem, mohli by u červené a modré stavby započítat pouze ty kostky, které sousedí s nějakou zakreslenou kostkou celou stěnou (tj. opomenou kostku/y v rohu). Naopak kostky, které sousedí se zobrazenou stavbou třemi stěnami, by mohly být započteny vícekrát (žák započítá kostku například za každou viditelnou svislou stěnu). Úloha bude použita pro 1. i pro 2. stupeň.

Úloha H13 představuje složitější úlohu na strukturaci prostoru – žák stále pracuje s krychlovou jednotkou, ale není zadán žádný obrázek, který by správnou strukturaci prostoru naznačil. Strukturaci je třeba odvodit z rozměrů podlahy prvního podlaží.

Úloha byla po pilotním testování několikrát modifikována – viz oddíl 3.1. Původně se jednalo o úlohu „stavby na ostrovech“, kterou použil ve svém výzkumu Piaget (1960) – viz též oddíl 2.4.1, poznámka 28. Nicméně se ukázalo, že zadání úlohy není vhodné pro zadávání v rámci písemného testu. Zadání bylo modifikováno do níže uvedené podoby a je záměrně uvedeno bez náčrtku, abych mohla zjišťovat, zda a jaký náčrtek si vyrobí žáci sami a jak budou prostor strukturovat.

H13. Máš přesně 59 kostek o hraně 1, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 a šířce 3. Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

Výpočetně lze úlohu řešit takto: v jednom patře bude 3 · 4 = 12 kostek; počet pater, která postavíme z 59 kostek, určíme pomocí dělení 59 : 12 = 4(11), což znamená, že 4 podlaží budou zcela zaplněná a v 5. bude pouze 11 kostek. Je však možný i částečně manipulativní přístup – zakreslit kostky v prvním podlaží a zjišťovat, kolik takových pater lze ještě postavit.

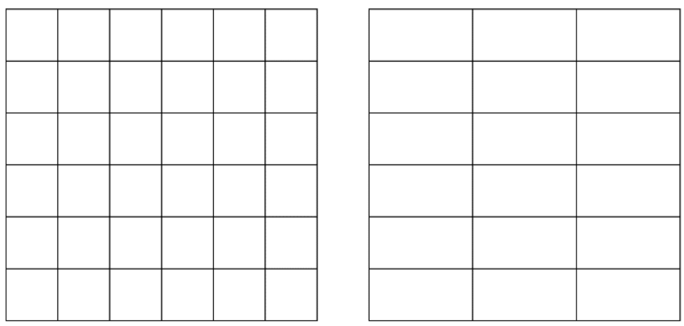
K zjištění počtu pater je možno použít následující strategie: představit si skládání kostek po jedné (tj. zaznačení všech 59 kostek), postupně přičítat/odčítat po patrech, najít nejbližší násobek čísla 12 k 59 a podobně.

Úloha je nestandardní v tom smyslu, že se ptáme po výšce stavby, když je zadán počet kostek (tedy objem); rovněž není poskytnut náčrt jako vodítko, což může způsobit, že se do řešení úlohy řada žáků ani nepustí. U žáků nižších ročníků může rovněž dojít k problémům při dělení dvouciferným číslem (buď ho ještě neumí, nebo ho udělají technicky špatně). Dále může dojít k nedorozumění ohledně pojmu stavba – zejména mladší žáci mohou předpokládat, že stavba má mít pouze stěny a uvnitř (obytný) prostor. Doufám, že tomuto nedorozumění předejdu požadavkem na to, aby byla stavba co nejnižší. Někteří žáci naopak mohou předpokládat, že by se stavba mohla rozšiřovat (např. polovina kostky přesahovat), nebo naopak zužovat (do jakési pyramidy). Jsou zadány pouze rozměry prvního podlaží, a tedy není jasné, jak mají být kostky položeny – žáci mohou určit chybně počet kostek v jednom podlaží. Tím, že jsou zadány rozměry, je rovněž možné, že někteří žáci použijí nějakou matematickou operaci se zadanými čísly, aniž by byli schopni interpretovat výsledek ve vztahu k zadané situaci. Úloha bude použita pro 1. i pro 2. stupeň.

Poslední úloha v této skupině úloh testuje práci s jednotkou ve tvaru kvádru. Zadání úlohy je opět záměrně bez náčrtku, aby bylo možné sledovat způsob strukturace prostoru u jednotlivých žáků. Jedná se o typickou Battistovu (2004) úlohu na strukturaci prostoru (viz oddíl 2.4.3), v zadání úlohy však chybí obrázky. Úloha by měla testovat dovednosti náležející do nejvyšší úrovně strukturace prostoru.

H14. Kolik nejvíc krabiček o rozměrech 2 x 1 x 1 dm naskládám do krychlové krabice o hraně 6 dm tak, aby šla zavřít?

Úloha připouští opět výpočetní i geometrické řešení. Počet balíčků zjistíme jako objem celé krabice ($6^3 = 216$ (cm^3)) vydělený objemem jednoho balíčku ($1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ (cm^3)) – tedy výsledkem je 108 balíčků. Geometricky lze řešit situaci pomocí náčrtku – první vrstva může být načrtnuta jedním ze dvou způsobů (podle toho, zda je delší hrana balíčku vodorovná, či svislá – viz obr. 3.8). První vrstva tedy bude obsahovat 36, resp. 18 balíčků. V prvém případě je však zapotřebí započítat takovéto vrstvy pouze 3 (balíček je umístěn „na výšku“), zatímco ve druhém případě je vrstev 6. Tedy celkem 108 balíčků.



Obr. 3.8: Úloha H14, náčrtek kladení balíčků na dno krabice

V řešení žáků očekávám výskyt následujících problémů: žáci mohou počítat povrch místo objemu či k výpočtu použít jiný nerelevantní vzorec; případně nebudou vědět, jak využít vypočtené objemy k určení počtu balíčků. Je rovněž možné, že někteří žáci si nebudou schopni situaci vůbec představit, a tedy určí nesprávně počet balíčků v jedné vrstvě. Tvar balíčku (kvádr) může činit žákům problémy při strukturaci – žáci započítají 6 vrstev po

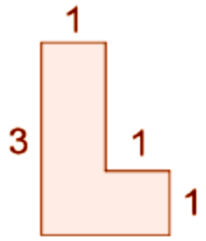
36 balíčcích, jako kdyby měl balíček tvar jednotkové krychle. Řešení úlohy vyžaduje v podstatě dva kroky: určení objemů a vydělení objemu krabice objemem balíčku, resp. určení počtu balíčků ve vrstvě a vynásobení počtem vrstev – žáci mohou druhý krok opominout. Úloha bude použita pouze pro 2. stupeň.

3.2.4. Úlohy zaměřené na konceptuální porozumění obsahu/objemu

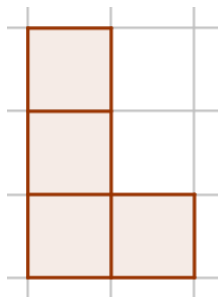
Do této kategorie jsem se rozhodla řadit úlohy, které patří v obou HUT k nejvyšší čtvrté úrovni – a to úrovni integrovaného numerického a nenumerického uvažování. Jedná se většinou o nestandardní úlohy, které vyžadují pokročilejší / konceptuální pochopení pojmu obsah nebo objem – nikoliv pouze přímou aplikaci vzorce.

Úloha H3 je zaměřena na výpočet obsahu obvodu nekonvexního pravoúhelníku. Tato úloha pochází z výzkumu Heredine-Kónyové (2015), ale podobný typ úloh nalézáme například i v TIMSS (viz úloha M07-08 z TIMSS 2007, citováno podle Vondrová, Rendl, 2015, s. 264).

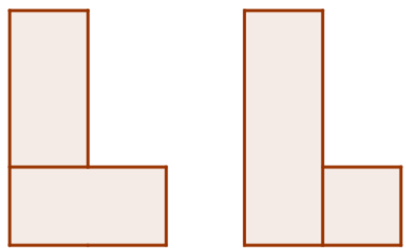
H3. Urči obvod a obsah útvaru na obrázku:



Obsah útvaru lze zjistit několika postupy. Jedním z nich je dokreslení čtvercové mříže odpovídající opakování příslušné čtvercové jednotky (viz obr. 3.9), obsah je tedy 4 čtverečky či 4 jednotky čtvereční. Další možností je pak rozdělení tvaru na dva obdélníky, u kterých zjistím obsah buď doplněním čtverečků (lze i v představě), nebo výpočtem – tj. jako součin délek stran. Dva možné způsoby rozdělení tvaru jsou ukázány na obr. 3.10. Pokud útvar rozdělím na dva shodné obdélníky (obrázek vlevo), je nutné delší stranu tohoto obdélníku určit jednoduchým výpočtem (3 – 1 = 2 nebo 1 + 1 = 2). Opět dostávám obsah 4 jednotky čtvereční. Poslední možností je určení obsahu obdélníku opsaného danému útvaru (2 · 3 = 6 jednotek čtverečních) a odečtení obsahu nevybarvené části, tj. obdélníku o rozměrech 2 x 1.



Obr. 3.9: H3 – dokreslení sítě



Obr. 3.10: H3 – rozdělení útvaru na dva obdélníky

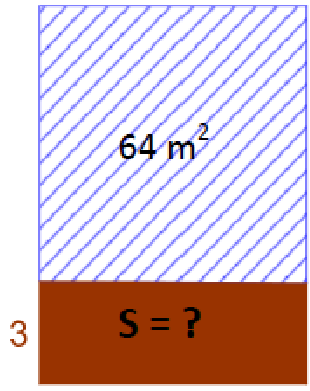
Pro výpočet obvodu je nutné nejprve určit délky všech stran mnohoúhelníku. Rozměry chybí u dvou stran, obě mají délku 2. Tedy obvod má délku 10 jednotek (3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 = 10).

V úloze záměrně nejsou uvedeny jednotky a náčrtek zároveň není v měřítku – to může některým žákům činit problém. Je to tak nastaveno proto, aby bylo možné lépe identifikovat ty žáky, kteří by údaje zjišťovali měřením z obrázku, a nikoliv počítáním jednotek. Další problém může představovat to, že se nejedná o obdélník – někteří žáci mohou například vypočítat obsah opsaného obdélníku místo obsahu útvaru.; další možností je, že se budou snažit vynásobit všechny strany útvaru, nenapadne je si útvar rozdělit apod. Žáci rovněž mohou chybně dopočítat délku některé ze stran nebo při výpočtu obvodu některou stranu nezapočítat. Dále, pokud si budou útvar rozdělovat na dva menší útvary, mohou výsledný obvod nesprávně počítat jako součet obvodů těchto menších útvarů (miskoncepce aditivity obvodu). Samozřejmě může dojít k záměně pojmů obsah a obvod. Úloha bude použita pro 1. i 2. stupeň.

Další úloha – *H4* – byla inspirovaná úlohou z učebnice matematiky pro 5. ročník autorů Hejný a kol. (2011; s. 46, úloha 6). Podobný typ úloh se v učebnicích autorů Hejný a kol. vyskytuje vícekrát (i když využití obsahu pro výpočet délky strany se objevuje poprvé až v 5. ročníku). Pro žáky pracující na 1. stupni podle učebnicové řady nakladatelství Alter je však tento typ úlohy nestandardní, neboť jde o určení rozměru útvaru na základě jeho vlastností a jeho obsahu a tento typ úloh v těchto učebnicích vůbec nenalézáme. Podobnou úlohu lze nalézt v učebnicích nakladatelství Prometheus až v 6. ročníku, nicméně nejedná se rozhodně o běžný typ úlohy.

Úlohu je třeba řešit výpočtem délky strany čtverce ze znalosti jeho obsahu – pokud žáci znají odmocninu, mohou délku strany určit jako odmocninu ze 64. Pokud se s odmocninou ještě nesetkali, mohou počítat druhé mocniny celých čísel a hledat, pro které číslo a je $a \cdot a = 64$. Musí ovšem znát vztah pro výpočet obsahu čtverce. Strana čtverce tedy vychází dlouhá 8 m. Obsah záhonu je pak $3 \cdot 8 = 24$ (m^2).

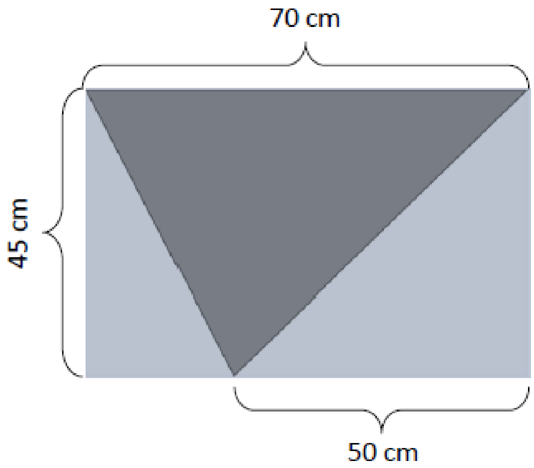
H4. Na obrázku je plánek zahrady. Vyšrafovaný ČTVEREC představuje trávu a plně vybarvený obdélník záhon. Vypočti plochu záhonu, když víš, že plocha trávy (vyšrafovaný čtverec) je 64 m^2 a kratší strana záhonu je dlouhá 3 m.



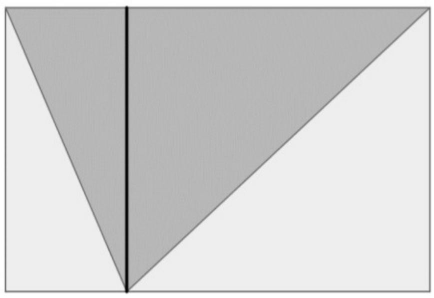
Jedná se o nestandardní úlohu, proto očekávám, že by mohla být pro žáky poměrně obtížná. Jedním z problémů by mohla být neznalost vztahu pro zjištění obsahu čtverce – může dojít k záměně vzorce pro obsah a obvod čtverce a pak by žáci zjišťovali délku strany pomocí výpočtu 64 : 4, nebo mohou použít jiný vztah či zdánlivě náhodnou operaci s čísly ze zadání úlohy (např. 64 : 3). I když žáci použijí správný vztah pro obsah čtverce, mohou mít problém se zjištěním odmocniny ze 64. Očekávám, že někteří žáci se budou pokoušet zjistit správné údaje měřením v obrázku. Úloha je dvoukroková – určení délky strany a následné zjištění obsahu záhonu; někteří žáci tedy mohou vynechat druhý krok a spokojit se pouze s vypočtením délky strany. Úloha bude použita pouze pro 2. stupeň.

Úloha H6 byla inspirována úlohou z TIMSS 2007 (úloha M01-12 citováno podle Vondrová, Rendl, 2015, s. 267) a úlohou z pracovního sešitu pro 7. ročník (Odvárko, Kadleček, 2012, s. 148).

H6. Vašek vyřízl z obdélníkové desky vybarvený trojúhelník. Kamarád Pepa ho hubuje, že víc než polovinu desky vyhodí. Vašek se ale brání, že odřezky jsou určitě menší než polovina. Kdo z nich má pravdu a proč?



Úloha byla záměrně formulována tak, aby nevyžadovala výpočet obsahu částí desky, a byla tedy řešitelná i vhodným porovnáváním částí. Jednou z možností je přesunutí menšího světlého trojúhelníku na pravou stranu – po složení s větším světlým trojúhelníkem vznikne trojúhelník shodný s tmavou částí desky. Další možností je rozdělení desky kolmou příčkou vedoucí ze spodního vrcholu tmavého trojúhelníku (viz obr. 3.11), pak už snadno nahlédneme, že dva a dva vzniklé trojúhelníky jsou shodné. Úloha má i dynamické řešení, které je však pro žáky zřejmě obtížné. Stačí posunout spodní vrchol tmavého trojúhelníku do jednoho ze dvou vrcholů na spodní straně obdélníku a hned je vidět, že obsah tmavého trojúhelníku je jedna polovina obsahu desky. Lze samozřejmě využít i výpočet: obsah desky je 45 · 70 = 3 150 (cm^2), zatímco obsah odříznuté části je $\frac{70 \cdot 45}{2} = \frac{3\,150}{2} = 1\,575\ (\mathrm{cm}^2)$, což je přesně polovina.



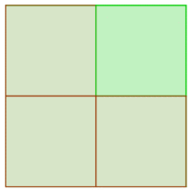
Obr. 3.11: Řešení H6 pomocí vhledu

Očekávám, že poměrně velké procento žáků nevyužije řešení pomocí vhledu, ale bude spoléhat na výpočet. Zde pak žáci mohou požít nesprávný vzorec pro obsah trojúhelníku: například vynásobení všech délek stran. Dále předpokládám, že žáci opomenou zdůvodnit své řešení. Úloha bude použita pouze pro 2. stupeň.

Úloha H5 kombinuje numerické a nenumerické uvažování a prověřuje porozumění pojmu obsah (konkrétně porozumění vztahu mezi velikostmi různých jednotek obsahu). Inspirací k této i následující úloze byly práce kolektivu výzkumníků, ke kterým patří například De Bock a Van Dooren. Úloha testuje, zda je žákovo porozumění jednotce obsahu natolik dobré, aby překonalo převládající tendenci řešit úlohy proporcionálně (tj. pomocí lineární závislosti).

H5. Na vydláždění koupelny bylo použito 300 ks dlaždic o rozměru 10 x 10 cm, kolik kusů dlaždic budu potřebovat, když nové dlaždice mají rozměr 20 x 20 cm? Spáry mezi dlaždicemi neuvažuj (jako kdyby žádné nebyly).

Úlohu lze opět řešit několika způsoby. Asi nejrychlejší způsob je si uvědomit, že 4 malé dlaždice tvoří dlaždici novou (například i za pomoci nákresu jako na obr. 3.12), a tedy celkově bude stačit dlaždic čtyřikrát méně. Další řešení je početní – lze spočíst obsah původní i nové dlaždice ($10 \cdot 10 = 100$ (cm^2), $20 \cdot 20 = 400$ (cm^2)) a na základě těchto obsahů buď přímo usoudit, že jedna nová dlaždice nahradí 4 původní, a tedy jich bude potřeba čtyřikrát méně, nebo z počtu dlaždic spočíst ještě obsah podlahy ($100 \cdot 300 = 30\,000$ (cm^2)) a počet nových dlaždic získat vydělením obsahu podlahy obsahem nové dlaždice (30 000 : 400 =75 (ks)).



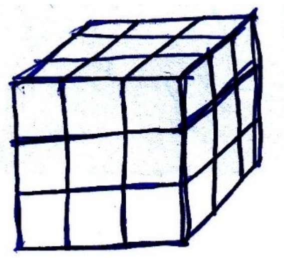
Obr. 3.12: H5 – malé a velké dlaždice

Očekávám, že se zde projeví „iluze linearity“, jak o ní píší Van Doreen a kolegové (2005). Žáci budou předpokládat, že pokud se rozměr strany dlaždice zvětšil dvakrát, zvětšil se dvakrát i obsah (použijí tedy nějaký proporcionální postup výpočtu). Další překážkou je i to, že není explicitně uveden rozměr či obsah původní podlahy. K výpočtu není tento údaj sice potřeba, ale domnívám se, že někteří žáci budou tento údaj potřebovat a mohou ho spočíst chybně, nebo nebudou vědět, jak postupovat, když tam tento údaj není přímo uveden. Úloha bude použita pouze pro 2. stupeň.

Zcela analogická je následující úloha, jen se v ní žáci zabývají krychlovými jednotkami a jednotka se zmenší, nikoliv zvětší.

H15. V krabici je bez mezer naskládáno 100 kostek o hraně 12 cm. Kolik kostek o hraně 4 cm bychom potřebovali na vyplnění stejné krabice?

Úlohu lze opět řešit několika způsoby. Nejrychlejší způsob je si uvědomit, že jedna původní kostka může být zcela vyplněna 27 novými kostkami (například i za pomoci nákresu – viz obr. 3.13), a tedy celkově bude potřeba 27krát více kostek. Nebo naopak lze určit objem původní i nové kostky výpočtem ($12^3 = 1\,728$ (cm^3), $4^3 = 64$ (cm^3)) a na základě těchto objemů buď přímo spočíst, že místo jedné původní kostky bude potřeba 27 nových kostek, a tedy jich celkově bude potřeba 27krát více (tj. 2 700). Nebo lze ještě z počtu kostek spočíst objem krabice ($100 \cdot 1728 = 172\,800$ (cm^3)) a počet nových kostek získat vydělením objemu krabice objemem nové kostky (tedy 172 800 : 64 = 2 700 (ks)).



Obr. 3.13: H15 – malé kostky ve velké

Očekávám, že se zde ještě více projeví „iluze linearity“ (Van Doreen et al., 2005). Žáci mohou předpokládat, že pokud se rozměr hrany krychle zmenšil třikrát, zmenší se objem také třikrát (použijí tedy nějaký proporcionální postup výpočtu). A i když si žáci uvědomí, že vztah objemu a délky hrany není lineární, mohou zvolit jiný vztah než x^3 (například předpokládat, že objem se zmenší pouze devětkrát). Další překážkou je i to, že není explicitně uveden rozměr či objem krabice. K výpočtu není tento údaj sice potřeba, ale domnívám se, že někteří žáci budou tento údaj potřebovat a mohou ho spočíst chybně, nebo nebudou vědět, jak postupovat, když tam tento údaj není přímo uveden. Žáci by měli mít k dispozici kalkulačku, pokud by ji neměli, může dojít k numerickým chybám při počítání s „nehezkými“ čísly. Úloha bude použita pouze pro 2. stupeň.

Úloha H16 byla zařazena jako „spojitá“ obdoba úlohy H13 s cílem sledovat, jaký vliv na úspěšnost má přechod od diskrétního případu (kostky) k případu spojitému (voda).

H16. Váza má tvar kvádru se dnem o rozměru 9 x 12 cm. Spočtěte, jak vysoko by sahala hladina vody ve váze, pokud bychom jí do vázy nalili přesně 1 litr.

(Pomůcka: 1 l = 1 dm^3 = 1 000 cm^3)

Úlohu H16 nelze vyřešit pomocí (mentální) manipulace s krychlovými jednotkami, ale je ji nutno řešit pomocí výpočtu. Je třeba vypočíst obsah podstavy (9 · 12 = 108 (cm^2)) a tímto obsahem pak vydělit objem vody (1000 : 108 = 9,259 (cm)). Případně může žák zkoušet spočíst objem vody pro různé výšky (tedy počítat 9 · 12 · *v* pro různá *v*) a to činit tak dlouho, až bude výsledek blízko požadovanému objemu 1 000 cm^3.

Jedním z předpokladů správného řešení úlohy je výběr správného vzorce vhodného pro danou situaci. Žáci mohou mít jednak problém s vybavením si vzorce pro objem kvádru (použijí místo něho jiný), anebo budou hledat vzorec přímo pro výšku, místo aby použili vzorec pro objem. Hlavní obtíž tedy vidím v tom, že je nutno spočíst výšku hladiny vody, a nikoliv objem nádoby. Žáci si rovněž budou muset výšku ze vzorce pro objem kvádru nějak vyjádřit, což jim může činit obtíže. Situace není doprovozena náčrtkem, což také přispívá k obtížnosti úlohy. Úloha bude použita pouze pro 2. stupeň.

3.2.5. Testované dovednosti v jednotlivých úlohách a jejich vztah k HUT

Ttab. 3.1 představuje testované dovednosti v jednotlivých úlohách a úroveň hypotetické učební trajektorie (HUT), ke které se vztahují.

Tab. 3.1: Testované dovednosti a referenční úroveň HUT pro jednotlivé úlohy

Označení úlohy	Testované dovednosti	Referenční úroveň HUT
Předtest – úlohy U1–U20	schopnost dekompozice a následného přeskládání do požadovaného tvaru (rekompozice)	Obsah; Nenumerické uvažování, Úroveň 3 – Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti
H1 – Vybarvené plochy ve čtverci	práce s jednotkou a jejími transformacemi (dělení, přesouvání apod.); pochopení pojmu obsah; lze řešit i pomocí proporcionálního uvažování (uvažování ve vztahu část-celek, dělení na stejné části).	Podle způsobu řešení: Obsah; Numerické uvažování, Úroveň 2 – Iterace jednotky a určení počtu jednotek (práce s jinými jednotkami a tvary) Obsah, Nenumerické uvažování, Úroveň 3 – Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti

Označení úlohy	Testované dovednosti	Referenční úroveň HUT
H2 – Obsah trojúhelníku v mříži	práce s jednotkou (chápání čtverce jako jednotky obsahu, možnost jejího rozdělení a opětovného složení)	Část a: Numerické uvažování, Úroveň 2 – Iterace jednotky a určení počtu jednotek (práce s jinými jednotkami a tvary) [54] Část b: Obsah, Nenumerické uvažování, Úroveň 3 – Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti (porovnávání útvarů ve čtvercové síti)
H3 – Obsah „elka“	rozlišení pojmů obsah a obvod, mentální dekompozice tvaru (případně jeho doplnění), výskyt miskoncepce aditivity obvodu	Obsah; Úroveň 4 – Integrované numerické a nenumerické uvažování (obsah složených útvarů – nekonvexní útvary, útvary složené z obdélníků, doplněk …) (+ Obvod)
H4 – Obsah záhonu	hlubší porozumění pojmu obsah čtverce – úloha „opačná“ k úlohám běžně se vyskytujícím v učebnicích (tj. spočti obsah)	Obsah; Úroveň 4 – Integrované numerické a nenumerické uvažování (práce s rozměry útvarů a jejich využití pro zjištění obsahu – výpočet rozměrů z obsahu)
H5 – Větší dlaždice v koupelně	práce se čtvercovou jednotkou a vztah mezi jednotkami (zvětšení délky strany jednotky znamená jiné zvětšení obsahu)	Obsah; Úroveň 4 – Integrované numerické a nenumerické uvažování (převody jednotek a jejich vztahy, princip kompenzace)
H6 – Rozřezání desky	porozumění pojmu obsah trojúhelníku, dekompozice a rekompozice útvaru, schopnost vyčíst údaje z obrázku; obsah trojúhelníku, jako polovina vhodně opsaného obdélníku; vzorec na obsah trojúhelníku	Obsah; Úroveň 4 – Integrované numerické a nenumerické uvažování (odvození vztahů/vzorců pro obsah pro další útvary – trojúhelníky, rovnoběžníky…). Lze však řešit i na Úrovni 3 - porovnávání tvarů založené na transformacích (porovnávání útvarů bez sítě)
H7 – Složení krychle	skládání tělesa z komponent, mentální rotace 3D objektu	Objem; Nenumerické uvažování, Úroveň 3 –

[54] Tato úloha by mohla být zařazena i na úrovni 4 Integrované numerické a nenumerické uvažování (neboť využívá dekompozici útvaru a určení obsahu jeho částí). Nicméně vzhledem k tomu, že jsem očekávala, že počítání čtverečků bude u žáků převládající strategií, zařadila jsem úlohu na úroveň 2, jak je uvedeno v tabulce.

Označení úlohy	Testované dovednosti	Referenční úroveň HUT
		Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti
H8 – Síť hranolu	představa tělesa na základě jeho sítě, dimenzionální dekompozice (rozklad tělesa na jeho průvodní jevy – stěny – a jejich složení do sítě), mentální rotace 3D objektu	Objem; Nenumerické uvažování
H9 – Pohled na stavby zezadu	schopnost mentální rotace 3D objektu	Objem; Nenumerické uvažování, Úroveň 3 – Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti
H10 – Která krychle tam nepatří	mentální rotace 3D objektu, systematická práce s možnostmi (logické vyvozování, práce bez referenčního objektu).	Objem; Nenumerické uvažování, Úroveň 3 – Porovnávání tvarů založené na transformacích zachovávajících vlastnosti
H11 – Síť čtyřstěnu	představa tělesa na základě jeho sítě, mentální rotace 3D objektu	Objem; Nenumerické uvažování
H12 – Kolik kostek chybí	schopnost doplnit strukturu vytvořenou z krychlových jednotek v situaci, kdy je struktura naznačena obrázkem	Objem; Numerické uvažování, Úroveň 2b – Iterace jednotky a určení počtu jednotek (vyplňování prostoru bez překryvů a mezer a v odpovídající struktuře)
H13 – Stavba na ostrově	schopnost představit si strukturu vytvořenou z krychlových jednotek v situaci, kdy jsou zadány pouze rozměry podstavy a není uveden žádný náčrtek; multiplikativní uvažování žáka	Objem; Numerické uvažování, Úroveň 2b – Iterace jednotky a určení počtu jednotek (operativní práce s vrstvami – multiplikativní uchopení)
H14 – Skládání balíčků do krabice	práce s nekrychlovou jednotkou (nejvyšší úroveň strukturace prostoru)	Objem; Numerické uvažování, Úroveň 2b – Iterace jednotky a určení počtu jednotek (práce s jinými jednotkami a tvary)
H15 – Malé kostky místo velkých	práce s krychlovou jednotkou – jak se změní počet jednotek, když se jednotka zmenší (zmenšení je dáno ovšem zvětšením délky hrany krychle, nikoliv objemu)	Objem; Úroveň 4 – Integrované numerické a nenumerické uvažování (převody jednotek a jejich vztahy, princip kompenzace

Označení úlohy	Testované dovednosti	Referenční úroveň HUT
H16 – Výška hladiny vody ve váze	porozumění pojmu objem kvádru; schopnost identifikovat správný vzorec pro danou geometrickou situaci a schopnost vyjádřit si ze vzorce jinou proměnnou	Objem; Úroveň 4 – Integrované numerické a nenumerické uvažování (práce s rozměry útvarů a jejich využití pro zjištění objemu – výpočet rozměrů z objemu)

3.3. Výběr výzkumného vzorku pro test a administrace testu

Zadávání testu bylo naplánováno na druhý týden školního roku 2015/2016 (tj. září 2015), aby si žáci již stihli zvyknout na to, že se po prázdninách vrátili do školy, ale aby se minimalizovaly vlivy právě probíraného učiva. U tříd, které v daném období neprobíraly geometrii, bylo testování posunuto i do třetího zářijového týdne. Celkem se testování zúčastnilo 40 tříd 2. stupně a 20 tříd 1. stupně z osmi pražských škol. Bylo otestováno více než 1 300 žáků, některé testy však musely být z dalších analýz vyloučeny (například proto, že žák nepsal jednu část testu, nebo pokud nebylo možno obě části testu jednoznačně spárovat). Jedná se o vzorek vytvořený na základě dostupnosti, nikoliv o náhodný výběr škol a tříd. Nicméně jsem se snažila o homogenitu škol v tom, že jsou všechny z Prahy, střední velikosti (počet žáků na školách se pohybuje v rozmezí mezi 400 až 800 žáky), navštěvují je děti z bezprostředního okolí, většina z nich nemá žádné speciální zaměření a jedná se většinou o fakultní školy. Testu se zúčastnily celé třídy, žáci nebyli nijak vybíráni. Přehled škol s kódy pro jednotlivé žáky je v příloze P5.

Časové omezení pro zadávání testu mi neumožnilo zadat testy osobně, požádala jsem tedy o zadání testu přímo učitele matematiky jednotlivých tříd. Zadavatele testu jsem proškolila a vybavila je písemnou instrukcí (viz příloha P7). Všechny dotazy žáků a jiné poznámky k průběhu testu učitelé zapisovali do připraveného protokolu. Žáci měli být informováni, že výsledky testu neovlivní jejich hodnocení (test se nebude známkovat), ale že test je součástí většího výzkumného projektu, a proto že je důležité, aby pracovali co nejlépe. Jak bude vidět v oddíle 3.5.2, právě motivace žáků se později ukázala jako poměrně problematická. Značné procento žáků vynechávalo úlohy na numerické uvažování (pravděpodobně proto, že se jednalo o úlohy poměrně nestandardní, kde cesta k řešení nebyla patrná na první pohled, což se ostatně projevilo i v pilotím testování), a soustředilo se zejména na úlohy testující nenumerické uvažování.

Písemný test se skládal ze dvou částí. První část – předtest – byl zaměřený na dekompozici a následnou rekompozici útvarů a byl časově omezený na 10 minut. Druhá část – hlavní test – obsahoval úlohy výpočetní (na obsah, obvod a objem) společně s úlohami na prostorovou představivost. Čas na řešení byl 35 minut pro 1. stupeň a 45 minut pro 2. stupeň. Ve většině případů byl předtest u žáků 2. stupně zadáván v jiné vyučovací hodině (tedy i jiném dni) než test hlavní. Do výzkumu byli zařazeni pouze ti žáci, kteří psali hlavní část testu, a pro některé analýzy bylo nutno vyloučit i ty žáky, kteří nepsali obě části testu.

U předtestu bylo řešení modelového příkladu v zadání žákům předvedeno jako návodná úloha, aby se předešlo problémům s nepochopením zadání. Rovněž byl s žáky zopakován pojem rovnostranného trojúhelníku. Žáci se většinou ptali na to, zda mohou použít více řezů, zda se mohou ve výsledném obrazci části překrývat nebo zda mohou některé části „zahodit" – na všechny tyto otázky odpovídali zadavatelé záporně.

U hlavního testu se jako jeden z hlavních problémů ukázala absence jednotek v zadání některých úloh (H3, H13). Žáci se nejčastěji ptali, jak to mají spočítat, když tam nejsou jednotky (u H3), nebo co znamená „krychle o hraně 1" v úloze H13. Učitelé jim většinou odpovídali, ať si vyberou nějakou jednotku (cm, mm), ať použijí obecné slovo „jednotky" nebo ať výsledek uvedou úplně bez jednotek. Rovněž se objevovaly dotazy k tomu, že obrázek při přeměření neodpovídá zadání (např. u úlohy H2 je napsáno, že strana čtverce mříže je 1 cm, ale na obrázku měří 1,5 cm). Žáci se zajímali o to, čemu mají věřit (obrázku, nebo popisu). Tazatelé většinou odpovídali tím, že se jedná pouze o náčrt, a ať se žáci řídí tím, co je napsáno v zadání. Další otázky směřovaly k vyjasnění pojmů kvádr (zadavatelé většinou odpovídali odkazem na krabici), čtyřstěn (tazatelé buď měli k dispozici model, nebo naznačovali gesty, jak takové těleso vypadá), obvod (plot kolem zahrady) a obsah (velikost plochy).

Vzhledem k tomu, že se v průběhu školního roku 2015/2016 přihlásilo k testování ještě 6 tříd (celkem 126 žáků) využila jsme této možnosti a provedla ještě jedno kolo testování (tzv. dotest – únor 2016). Výsledky samozřejmě nemohou být srovnávané s výsledky žáků, kteří psali test na začátku školního roku, nicméně jsme se rozhodli tento vzorek dat využít k ověření obtížnosti úloh nezávisle na pořadí úloh v testu. Zadání pro tyto třídy bylo totiž připraveno tak, že pořadí úloh v testu bylo náhodné – jinak instrukce pro zadávání testu byly shodné s hlavním testováním. V oddíle 4.1.3 je vliv pořadí úloh na jejich výsledky podrobněji rozebrán.

3.4. Výběr žáků pro rozhovory a průběh rozhovorů

Rozhovory s žáky jsem natáčela začátkem roku 2017, po dokončení analýzy výsledků písemných testů. Na základě výsledků jsem se rozhodla vybrat pro rozhovory žáky tří škol – jednu, jejíž celkové výsledky (v úlohách na numerické uvažování) byly blízko k průměru, druhou, která patřila mezi školy s nejlepšími výsledky, a třetí, která byla naopak v dolní polovině výsledkové listiny. Výběr škol byl rovněž ovlivněn ochotou školy žáky k rozhovorům poskytnout a mými časovými možnostmi; všechny rozhovory jsem provedla sama. Bylo natočeno celkem 57 rozhovorů. Rozhovory probíhaly podle doporučených etických pravidel (Gavora, 2010) a ve snaze zachovat maximální anonymitu žáka. Rozhovory v délce 10 až 25 minut byly natáčeny vždy s každým respondentem zvlášť, v oddělené místnosti. Kamera zabírala pouze papír s řešením a ruce žáka (aby bylo možné sledovat gestikulaci) a již během natáčení jsem používala k oslovování žáka pseudonym.

Při natáčení rozhovoru leželo na stole vždy volně k dispozici pravítko, tužka, propiska a kalkulačka. Když to rozhovor vyžadoval (například žák si situaci neuměl představit), poskytla jsem žákovi manipulativa ve formě dřevěných kostek. Schéma vedení rozhovoru je uvedeno v příloze P12, kde jsou uvedeny i nápovědy, které jsem předem vytvořila pro různé situace, k nimž mohlo dojít.

Pro rozhovory jsem vybrala jako stěžejní úlohu H13, neboť se v rámci analýzy písemných řešení ukázala jako velmi zajímavá. Při řešení této úlohy lze sledovat jednak schopnost strukturace uzavřeného 2D prostoru do čtvercových jednotek, jednak strukturaci 3D prostoru do krychlových jednotek a také například multiplikativní uvažování žáka. Navíc jsem při interpretaci výsledků písemného testu pracovala s hypotézou, že pokud žáci použijí k řešení úlohy výpočetní postup ($3 \cdot 4 = 12$ a $59 : 12 = 4(11)$) a výsledek správně interpretují, můžeme usoudit na to, že si umí strukturu kladení kostek správně představit. Tito žáci většinou neměli potřebu v písemném testu cokoliv zakreslovat nebo si zakreslili pouze obdélník se zadanými rozměry. Potřebovala jsem tedy ověřit, zda se tato hypotéza potvrdí při rozhovorech s žáky, kdy se jich budu moci na strukturaci prostoru přímo doptat.

Dalším cílem rozhovoru bylo sledovat strategie, problémy a miskoncepce, které se u žáků objeví. Pouze u žáků, kteří úlohu H13 vyřeší rychle, jsem se rozhodla použít i úlohu H14 (případně H16). Zajímaly mě především obtíže žáků při řešení těchto úloh.

Jako cílovou skupinu jsem zvolila žáky 5. a 6. ročníku, neboť se v testu ukázalo, že úloha H13 pro ně nebyla úplně snadná (úspěšnost 21 % a 17 %), a tedy je větší pravděpodobnost, že se u těchto respondentů objeví více miskoncepcí. S žáky 4. ročníku jsem se rozhodla nepracovat proto, že ještě neovládají dělení dvouciferným číslem (což by prakticky eliminovalo výskyt jedné z řešitelských strategií), a u žáků vyšších ročníků jsem se na základě výsledků testů naopak obávala toho, že by pro ně úloha mohla být příliš snadná.

Rozhovory s žáky jsem natáčela v několika dnech a průběžně jsem prováděla analýzu pořízeného materiálu. To vedlo k tomu, že jsem mezi jednotlivými natáčeními provedla některé změny v zadání úloh, se kterými žáci při rozhovorech pracovali. Prvních šest rozhovorů probíhalo nad zadáním úloh H13 a H14 ve stejné formě, jako byly v písemném testu (úlohu H14 jsem předkládala pouze těm žákům, kteří H13 vyřešili rychle – v prvním kole rozhovorů se k ní dostali pouze 2 žáci z 6). Vzhledem k tomu, že se všichni žáci doptávali na to, co znamená „krychle o hraně 1“, doplnila jsem v dalších rozhovorech do zadání k rozměrům krychle i obdélníku „cm“. Modifikované zadání pro další rozhovory pak vypadalo takto:

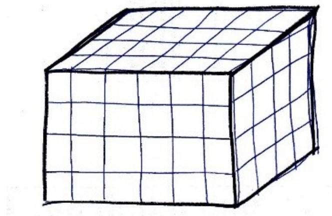
Úloha 1. Máš přesně 59 kostek o hraně 1 cm, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 cm a šířce 3 cm. Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno? Kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

Od třináctého rozhovoru jsem pak přidala i podúlohu, abych ověřila, zda žák bude schopen aplikovat případný objev na novou situaci a jestli se jeho strategie řešení nějak změní.

Úloha 1a. Jak by se odpověď změnila, kdyby největší plocha, na které stavíš první patro, mohla být 5 cm na délku a 4 cm na šířku?

Od rozhovoru číslo 20 jsem se rozhodla pro žáky, kteří jsou s řešením rychle hotovi, začlenit ještě úlohu na určení počtu kostek ve stavbě dané obrázkem.

Úloha 2. Z kolika kostek je stavba načrtnutá na obrázku? (Uvnitř nejsou žádná prázdná místa.)



Od rozhovoru číslo 25 již úlohu na určení počtu kostek ve stavbě řešili všichni žáci. Rovněž jsem připravila návodnou úlohu k úloze H14 (jedná se o úlohu, kterou pro testování schopnosti strukturace používá Battista, 2004, s. 201). Tato úloha byla doplněna obrázky, ale používala jsem jí pouze pro žáky, kteří se k úloze H14 v časovém limitu dostali, ale měli s jejím řešením bez podpory obrázku problémy, které se nepodařilo odstranit ani při použití manipulace s kostkami. Finální podoba podkladů k rozhovorům je uvedena v příloze P12 za schématem vedení rozhovoru.

V následujícím oddíle podrobněji popíši, jakým způsobem byla získaná data zpracovávána a analyzována.

3.5. Analýza a zpracování dat

V tomto oddíle se budu věnovat přípravě a způsobu provedení analýzy dat. Popíši, jak byla data z provedených experimentů (tj. písemného testu a rozhovorů s žáky) zpracována a následně kódována.

3.5.1. Analýza písemného testu

Vzhledem k velkému počtu respondentů byly výsledky testu (písemná řešení žáků) zpracovávány autorkou a dvěma dalšími hodnotiteli. Hodnotitelé přiřazovali body za řešení jednotlivých otevřených úloh podle klíče uvedeného v tab. 3.2. Podúlohy (uzavřené úlohy) byly hodnoceny na škále 1/0 podle toho, zda byla úloha zodpovězena správně, či nikoliv. Díky důkladné a *priori* analýze jednotlivých úloh testu mohly být již na počátku analýzy vytipovány určité jevy, které budou při analýze dat sledovány (například, zda žák při výpočtu uvedl nějaký vzorec, zda úlohu H6 řešil geometrickým vhledem, nebo výpočtem obsahů a podobně). Tyto jevy kódovali hodnotitelé na základě jednotných instrukcí. Data zapisovali do excelovské tabulky, kde každý řádek obsahoval výsledky jednoho žáka a v jednotlivých sloupcích se nacházelo bodování úloh a kódování jednotlivých jevů. Hodnotitelé zároveň pořizovali popis (případně doslovný opis) řešení u otevřených úloh, aby mohla být data ještě dále analyzována bez nutnosti procházet znovu všechna písemná řešení. U otevřených úloh se rovněž zaznamenávalo, pokud se žák úlohu vůbec nepokusil řešit (vynechal ji). Tento výsledek byl považován za odlišný od výsledku, kdy se o řešení žák pokusil, ale získal 0 bodů (například vše vygumoval).

Tab. 3.2: Způsob bodového hodnocení jednotlivých úloh v testu

Úloha	**2 body**	**1 bod**	**0 bodů**	**Počet podúloh**
H1	Nejvýše 1 chyba	dvě nebo tři chyby	čtyři a více chyb	5 (uzavřené)
H2	Obsah (3) spočten správně a nakreslen alespoň jeden útvary o obsahu 3 čtverečky neshodný s původním trojúhelníkem; nebo obsah není uveden, ale jsou nakresleny dva útvary s obsahem 3 čtverečky neshodné s původním trojúhelníkem	Nebylo použito	V ostatních případech	2 (otevřené)
H3	Obsah i obvod útvaru spočten správně	Alespoň jeden z výpočtů je správně	Není spočten správně ani obvod ani obsah	2 (otevřené)
H4	Správně spočtený obsah záhonu 24 m^2	Nebylo použito	Jiný výsledek než 24 m^2	
H5	Správně určený počet dlaždic (75)	Nebylo použito	Chybný výsledek	
H6	Správná odpověď (obě části desky jsou shodné)	Nebylo použito	Jiná odpověď	
H7	Správná odpověď (BC)	Nebylo použito	Jiná odpověď	
H8	Všechny 4 podúlohy správně	Nejméně dvě z podúloh správně	Nejvýše jedna podúloha správně	4 (uzavřené)
H9	Všechny 4 podúlohy správně	Nejméně dvě z podúloh správně	Nejvýše jedna podúloha správně	4 (uzavřené)
H10	Správná odpověď (C)	Nebylo použito	Jiná odpověď	
H11	Všechny 4 podúlohy správně	Nejméně dvě z podúloh správně	Nejvýše jedna podúloha správně	4 (uzavřené)
H12	Všechny 3 podúlohy správně	Alespoň jedna podúloha správně	Žádná podúloha není správně	3 (otevřené)
H13	Správné řešení úlohy (4 podlaží plná 11 kostek v pátém); připouštím i významově shodné odpovědi jako např. „5 pater a v nejvyšším chybí jedna kostka“ apod.	Nebylo použito	Jiná odpověď	

Úloha	2 body	1 bod	0 bodů	Počet podúloh
H14	Správná odpověď (108 balíčků) nebo numerická chyba v principiálně správném výpočtu	Částečně správné řešení: například spočteny objemy krabice a balíčku nebo nakreslen správný náčrtek kladení balíčků v jednom patře	Bez odpovědi, nebo pouze obrázek či nějaká poznámka nevedoucí k dalšímu smysluplnému řešení	
H15	Správná odpověď (2 700 kostek) nebo numerická chyba v principiálně správném výpočtu	Částečně správné řešení: například spočteny objemy obou druhů kostek nebo nakreslen správný náčrtek	Bez odpovědi, nebo pouze obrázek či nějaká poznámka nevedoucí k dalšímu smysluplnému řešení	
H16	Správná odpověď (9,259 nebo zaokrouhlená hodnota – mezi 9 a 9,5), případně numerická chyba, nebo nedokončený výpočet 1 000 : 108	Částečně správné řešení: spočten alespoň obsah podstavy ve správných jednotkách	Bez odpovědi, nebo pouze obrázek či nějaká poznámka nevedoucí k dalšímu smysluplnému řešení	

V průběhu kódování jevů a hodnocení úloh jsem prováděla opakované namátkové kontroly kódování ostatních hodnotitelů a na základě toho upřesňovala instrukce pro kódování. Pokud se ukázalo, že některá úloha poskytuje zásadní informace (jako například v případě úlohy H13), provedla jsem kontrolu bodování a dodatečné kódování dané úlohy (přímo na základě písemných řešení u všech žáků), abych zajistila co možná největší konzistenci zakódovaných dat. U úlohy H13 jsem například přidávala kódování jevu „Kód_STR“ (podrobněji vysvětleno v oddíle 4.4.1.3) – tedy jevu, který označoval, jak si žák zakreslil strukturu kladení kostek v prvním patře stavby, a doplnila kódování jevu „Kód_DIV“ (viz oddíl 4.5), který označoval, jaký způsob výpočtu žák použil pro zjištění počtu pater ve stavbě (postupné přičítání, násobení či dělení) a zda byl výsledek schopen interpretovat.

Takto připravená a zakódovaná data se stala východiskem pro další kvalitativní a kvantitativní analýzy. Návazná kvalitativní analýza spočívala v hledání dalších význačných (skupin) jevů a sledování jejich výskytu. U otevřených úloh jsem zavedla kódy pro použité řešitelské strategie. Jako další příklad mohu uvést zavedení takzvaného „Indexu odvahy“, který udává, na kolik úloh si žák troufl. Tento index byl zaveden na základě pozorování, že poměrně velké procento žáků vynechávalo úlohy zaměřené na numerické uvažování (výpočtové) – zavedla jsem tedy dva ukazatele: jeden udává počet řešených úloh ze všech 16 úloh v hlavním testu a druhý udává rovněž počet řešených úloh ale pouze z úloh na numerické uvažování (výpočtových). Dalším sledovaným jevem se u úlohy H13 stal chybný počet kostek v prvním podlaží (jev je označen hodnotou 1, pokud žák počítá nebo kreslí v prvním podlaží stavby nesprávný počet krychlí). Další příklady sledovaných jevů jsou uvedeny v příloze P15 a v kapitole 4 věnované výsledkům výzkumu. Získaná kvalitativní (okódované jevy) i kvantitativní (bodová hodnocení jednotlivých úloh) data byla dále analyzována pomocí kvantitativních metod, a to v programu IBM SPSS Statistics (verze 19) a internetových stránek IntelectusStatistics.com (viz analyze.intellectusstatistics.com). Výpočty na těchto stránkách byly prováděny pouze pro ověření výsledků získaných v SPSS a kontrolu splnění předpokladů pro daný typ analýzy.

3.5.2. Analýza polostrukturovaných rozhovorů

Videozáznamy pořízené během rozhovorů s žáky byly přepsány do doslovných protokolů[55] a dále zpracovány v programu Atlas.ti, kde byly podrobně analyzovány pomocí technik zakotvené teorie (Stratus, Corbin, 1990). Ve fázi kódování byly jednak použity kódy, které byly již předem dány na základě jevů, jež se projevily při analýze výsledků testů, a jednak bylo provedeno otevřené kódování, kdy byly částem rozhovorů relevantním pro výzkumné otázky přiděleny výstižné nové kódy. Tak vznikaly i nové kategorie. Ve druhé fázi byly jevy dále slučovány do kategorií, například podle možné příčiny vzniku.

Pro analýzu rozhovorů s žáky jsem použila celkem 47 různých kódů. Zde uvedu pouze příklad kategorie kódů „vazba na konkrétní reprezentace objektů“, která se při analýze dat objevila. Tato kategorie slučuje jevy, jejichž výskyt může být způsoben přílišnou vazbou žáka na reprezentace objektů:

- Žák se při zhotovování nákresu/náčrtku situace soustřeďuje na to, kterým směrem má být zakreslena délka a kterým šířka obdélníku.
- Žák neví, co v zadání znamená „o hraně 1" a má problémy s pochopením zadání, pokud není uvedena konkrétní jednotka.
- Žák při práci s manipulativy pracuje pouze s kostkami, které má aktuálně k dispozici, nehledě na to, co je v zadání nebo co mu řekl tazatel.
- Žák si situaci nějak nakreslil, ale nákres ho vede ke špatnému řešení (kvůli neproporcionálním rozměrům, chybě ve vytváření apod.), i když bez nákresu by úlohu řešil jinak; jde vlastně o situace, kdy (chybně) vytvořený nákres působí jako překážka pro správné řešení.
- K vyhotovení náčrtku žák používá pravítko a vše přesně odměřuje – potřebuje se opřít o konkrétní jednotky a rozměry.

Výsledky této analýzy budou podrobněji popsány v oddíle 4.7.

[55] Kromě autorky se na této činnosti podíleli tři další přepisovači.

4. Výsledky výzkumu

V této kapitole budou popsány výsledky obou částí výzkumu (tj. písemného testu a rozhovorů s žáky) ve vztahu k výzkumným otázkám. Vzhledem k tomu, že první tři výzkumné otázky hledají vztah mezi různými dovednostmi žáků, je třeba ještě zavést proměnné (testová skóre, indexy apod.), které budou tyto dovednosti popisovat. Jedná se o konstrukty: úspěšnost v úlohách na obsah a objem, geometrická představivost, schopnost strukturace a úroveň multiplikativního uvažování. Ty potřebujeme přesněji definovat a u žáků změřit, tj. prověřit validitu a reliabilitu příslušných částí obou testů (předtestu i hlavního testu). Obsahovou validitu posuzuji na základě analýzy úloh a diskuse s odborníky. K ověření konstruktové validity jsem zvolila faktorovou analýzu, která by měla potvrdit vytvoření proměnných – dimenzí (skupin úloh) vhodných pro měření daných konstruktů. Pro posouzení reliability jsem zvolila ověření vnitřní konzistence příslušných částí testu a využívám ukazatel Cronbachovo alfa (pro celý test i pro jednotlivé dimenze). Než přistoupím k posouzení aspektů validity a reliability, podíváme se na test nejprve z hlediska obtížnosti jednotlivých úloh.

4.1. Obtížnost jednotlivých úloh

V následujících oddílech se budu věnovat úspěšnosti žáků v jednotlivých úlohách, tedy obtížnosti úloh. Nebudu se věnovat strategiím řešení a chybám u těch úloh; které jsou zmíněny v oddíle 4.7. Zde budu rozebírat pouze výsledky některých uzavřených úloh a předtestu, neboť těm se v dalších analýzách detailně nevěnuji. Připomínám, že úlohy z předtestu označuji jako U1–U20, zatímco úlohy hlavního testu mají označení H1–H16.

4.1.1. Předtest

Předtest byl vytvořen ve dvou verzích – pro 1. a 2. stupeň. Lišily se tím, že pět úloh pro 2. stupeň (U7, U10, U15, U17 a U19), které v testu Slezákové (2011) vycházely jako obtížné, bylo nahrazeno úlohami lehčími. Úlohami určenými výhradně pro 1. stupeň se zde zabývat nebudu (jejich výsledky v dalších analýzách nepoužívám). Tab. 4.1 ukazuje celkovou obtížnost úloh pro žáky 2. stupně. Úlohy jsou srovnány podle klesající obtížnosti. Při vyhodnocování žákovských řešení se projevily dvě úlohy (U18 a U19) jako problematické. Podrobněji je způsob vyhodnocení těchto úloh popsán v příloze P12.

Tab. 4.1: Obtížnost úloh použitých v předtestu (pro žáky 2. stupně)

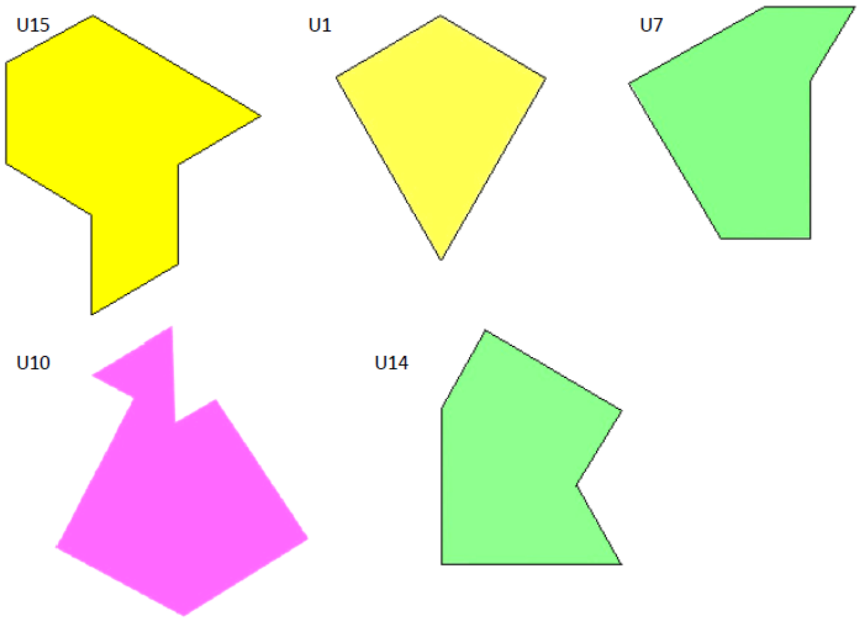
Úloha	Úspěšnost
U15	11 %
U1	15 %
U7	17 %
U10	18 %
U14	19 %
U17	24 %
U13	25 %

Úloha	Úspěšnost
U19	27 %
U20	31 %
U16	42 %
U18	47 %
U12	56 %
U3	57 %
U8	60 %

Úloha	Úspěšnost
U11	62 %
U4	75 %
U9	76 %
U6	80 %
U5	91 %
U2	91 %

Předtest je z hlediska obtížnosti úloh rovnoměrně rozložen: 5 úloh s úspěšností do 20 %, 4 úlohy s úspěšností 20–40 %, 4 úlohy s úspěšností 40–60 %, 5 úloh s úspěšností 60–80 % a 2 úlohy s úspěšností větší než 80 %. Lze si všimnout, že kromě úloh U1 a U7 se jeví jako obtížnější úlohy uvedené až na druhé straně testu. To nepochybně souvisí rovněž s pořadím úloh v testu, protože ne všichni žáci se dostali ke všem úlohám (na druhé straně testu vidíme daleko více vynechaných úloh). Test byl časově omezen a byl navrhován s tím, že ke všem úlohám se dostanou jen někteří respondenti.

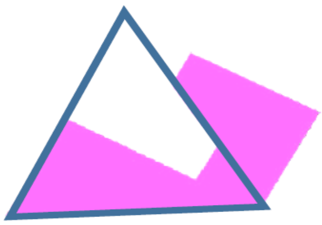
Podíváme-li se na úlohy, které měly obtížnost menší než 20 %, jsou to vesměs úlohy, které vysoce korelovaly s faktorem schopnosti změny pohledu (jak bude vidět ve faktorové analýze popsané v oddíle 3.5.2). Zadání těchto úloh je na obr. 4.1.



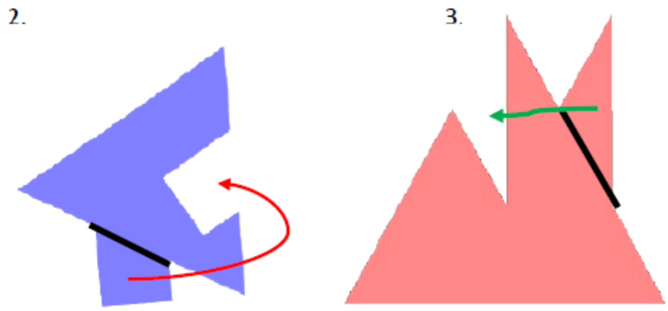
Obr. 4.1: Úlohy z předtestu s úspěšností pod 20 %

Obtížnost těchto úloh může spočívat v tom, že strategie, kterou si žák pro ostatní úlohy předtestu vyvinul, u nich vede do slepé uličky. V průběhu analýzy dat jsem použila tento test na dospělé respondenty[56] s cílem najít a reflektovat nejčastěji používané strategie při řešení úloh. Shodli jsme se na těchto dvou – strategie 1 „odřízni, co přesahuje, a dej to tam, kde něco chybí“ a strategie 2 „hledej v obrázku trojúhelník“ či „trojúhelník v pozadí“. První strategie spočívá v odříznutí části obvykle malého obsahu a jejím přemístění do tvarově odpovídajícího volného prostoru. Tato strategie výborně funguje například u úloh U2 a U3 (viz obr. 4.3).

[56] Například na konferenci Dva dny a didaktikou matematiky (2016) a na letní škole YESS 8 v Poděbradech (2016).

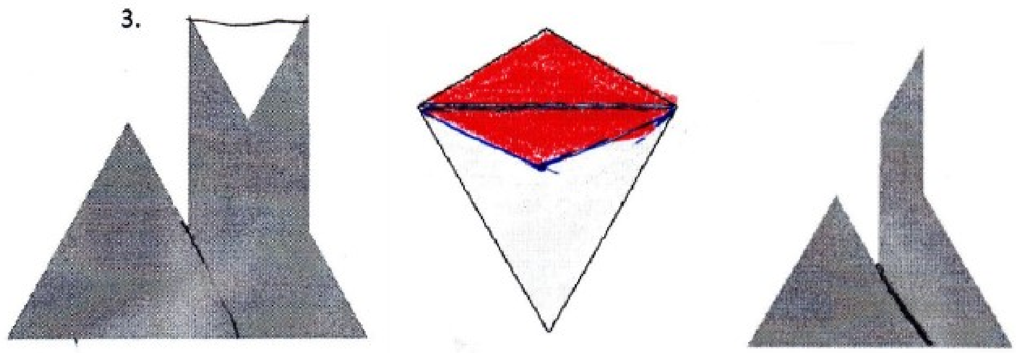


Obr. 4.2: Předtest, strategie 2



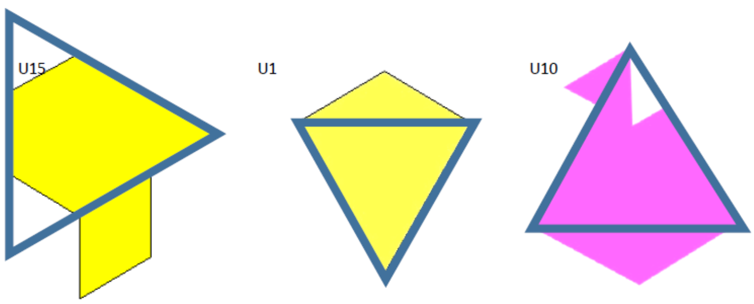
Obr. 4.3: Úlohy dobře řešitelné strategií 1

Druhá strategie spočívá v nalezení tvaru rovnostranného trojúhelníku jakoby v pozadí obrázku. Pak už je potřeba pouze to, co je vně trojúhelníku, přemístit tam, kde zbylo volné místo (viz obr. 4.2). To, že se někteří žáci v předtestu soustředili zejména na hledání rovnostranných trojúhelníků, je vidět i v písemných žákovských řešeních na obr. 4.4, kdy žák pouze odřízl část mnohoúhelníku ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, ale zbylou část nikam nepřesunul (jako by ji zahodil nebo ji umístil přes nalezený trojúhelník).

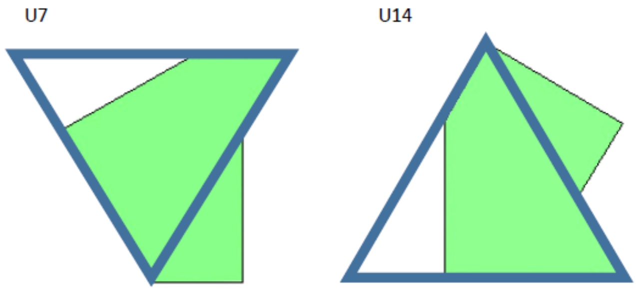


Obr. 4.4: Předtest, ukázka žákovských řešení – zaměření na nalezení rovnostranného trojúhelníku

Jak už jsem uvedla výše, obě tyto strategie vedou u úloh U1, U10 a U15 do slepé uličky a žák musí u těchto úloh překonat něco, co by se dalo nazvat „distraktor rovnostranného trojúhelníku“, což je naznačeno na obr. 4.5. Teprve, když se mu podaří tuto strategii zavrhnout, může úlohu úspěšně vyřešit.

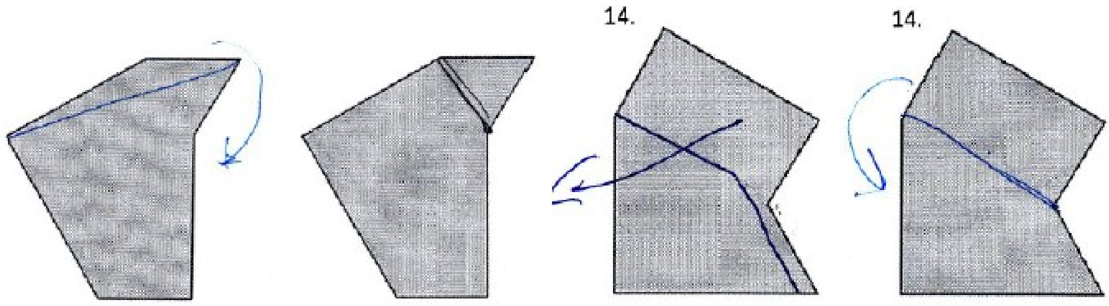


Obr. 4.5: Distraktor rovnostranného trojúhelníku



Obr. 4.6: Řešení úloh U7 a U14

Úlohy U7 a U14 jsou vytvořeny z původního rovnostranného trojúhelníku odříznutím stejného tvaru. V úloze U7 je výsledný trojúhelník v neprototypické poloze (obr. 4.6), což ji činí obtížnější. Pokud se v písemném testu objevuje chybné řešení, jde u U7 většinou o odříznutí nějaké obsahově „malé" části mnohoúhelníku (viz strategie 1) a v U14 se poměrně často objevuje odříznutí obdélníku vpravo nahoře (viz obr. 4.7).



Obr. 4.7: Nejčastější chybná řešení úloh U7 a U14

Zajímavý je rovněž vývoj úspěšnosti žáků po ročnících, jak ukazuje tab. 4.2, v níž jsou úlohy seřazeny podle klesající obtížnosti (tj. úloha U1 se ukázala jako nejobtížnější). V tabulce uvádím pouze úlohy společné pro oba testy.

Tab. 4.2: Úspěšnost žáků v úlohách předtestu společných pro 1. i 2. stupeň

Ročník	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celková úspěšnost**
Počet žáků	**218**	**245**	**237**	**212**	**135**	**177**	
U1	6 %	13 %	12 %	11 %	10 %	27 %	13 %
U14	12 %	26 %	13 %	17 %	23 %	29 %	20 %
U13	16 %	30 %	17 %	23 %	29 %	40 %	25 %
U20	19 %	31 %	21 %	26 %	36 %	49 %	29 %
U16	30 %	45 %	32 %	43 %	40 %	55 %	40 %
U18	33 %	51 %	48 %	38 %	47 %	54 %	45 %
U12	37 %	51 %	49 %	47 %	59 %	73 %	51 %
U3	40 %	51 %	43 %	50 %	66 %	78 %	53 %
U11	32 %	53 %	48 %	62 %	61 %	76 %	54 %
U8	42 %	59 %	52 %	56 %	60 %	73 %	56 %
U9	58 %	68 %	73 %	71 %	77 %	83 %	71 %
U4	68 %	77 %	68 %	77 %	78 %	80 %	74 %
U6	64 %	78 %	72 %	79 %	82 %	90 %	77 %

Ročník	4	5	6	7	8	9	Celková úspěšnost
Počet žáků	**218**	**245**	**237**	**212**	**135**	**177**	
U5	77 %	84 %	89 %	87 %	91 %	96 %	87 %
U2	83 %	90 %	91 %	89 %	93 %	95 %	90 %

Vidíme, že zejména u obtížnějších úloh si žáci 5. ročníku vedli dokonce lépe než žáci v ročnících 6–8. Můžeme se dohadovat, zda je to způsobeno odchodem žáků s lepšími výsledky v matematice na konci 5. ročníku na víceletá gymnázia. Tento jev se projevil pouze u obtížnějších úloh.

4.1.2. Hlavní test

Úspěšnost v jednotlivých úlohách hlavního testu pro ročníky 4 a 5 je uvedena v tab. 4.3; úlohy jsou uvedeny s klesající obtížností. V posledním sloupci je rovněž uvedeno, jaké procento žáků k úloze vůbec nic nenapsalo, tedy patrně úlohu úplně vynechalo (u některých uzavřených úloh toto nebylo možné na základě písemných řešení žáků odlišit).

Tab. 4.3: Úspěšnost žáků 1. stupně v jednotlivých úlohách

1. stupeň	Počet žáků celkem: ***456***				
Úloha	**Celková úspěšnost**	**% žáků s 0 body**	**% žáků s 1 bodem**	**% žáků se 2 body**	**Vynechal %**
H13	14 %	86 %	0 %	14 %	43 %
H2	29 %	71 %	0 %	29 %	15 %
H3	36 %	54 %	19 %	27 %	34 %
H12	46 %	30 %	47 %	23 %	4 %
H9	48 %	37 %	29 %	34 %	NA
H8	51 %	27 %	45 %	28 %	11 %
H1	68 %	13 %	38 %	49 %	NA
H7	84 %	16 %	0 %	84 %	7 %

Úspěšnost v jednotlivých úlohách pro žáky 6–9 ročníků je uvedena v tab. 4.4. Opět je uvedeno i procento žáků, kteří danou úlohu neřešili (respektive nic do řešení nenapsali).

Tab. 4.4: Úspěšnost žáků 2. stupně v jednotlivých úlohách

2. stupeň	Počet žáků celkem: ***747***				
Úloha	**Celková úspěšnost**	**% žáků s 0 body**	**% žáků s 1 bodem**	**% žáků se 2 body**	**Vynechal %**
H15	5 %	93 %	4 %	3 %	53 %
H16	12 %	80 %	15 %	5 %	74 %
H5	15 %	85 %	0 %	15 %	36 %
H14	19 %	75 %	12 %	13 %	65 %
H6	23 %	77 %	0 %	23 %	37 %
H4	25 %	75 %	0 %	25 %	43 %
H10	29 %	71 %	0 %	29 %	9 %
H13	31 %	69 %	0 %	31 %	48 %
H3	39 %	46 %	30 %	25 %	20 %

2. stupeň	Počet žáků celkem: ***747***				
Úloha	**Celková úspěšnost**	**% žáků s 0 body**	**% žáků s 1 bodem**	**% žáků se 2 body**	**Vynechal %**
H2	41 %	59 %	0 %	41 %	17 %
H12	58 %	18 %	48 %	34 %	5 %
H9	67 %	17 %	32 %	50 %	NA
H8	69 %	14 %	35 %	51 %	NA
H11	74 %	10 %	33 %	57 %	NA
H1	84 %	6 %	20 %	74 %	NA
H7	94 %	6 %	0 %	94 %	1 %

Jak se dalo očekávat, nejobtížnější úlohy (s úspěšností do 25 %) jsou úlohy H4–H6 a H14–H16, tedy většina úloh, které byly navrženy pro testování konceptuálního pochopení pojmů obsah a objem. Nejjednodušší (s úspěšností nad 65 %) pro žáky byly úlohy H1, H7–H9 a H11 – tedy úlohy zaměřené spíše na geometrickou představivost. Výjimku tvoří úloha H10, která ačkoliv je zaměřená na geometrickou představivost, vyšla jako značně obtížná – tento výsledek však koresponduje s výsledky a *priori* analýzy úlohy.

U úloh H2, H5, H6, H10 a H15 pozorujeme největší procento žáků, kteří úlohu řešili, ale neuspěli (rozdíl mezi procentem žáků s 0 body a těmi, co úlohu vůbec neřešili). Jedná se o úlohy, které se zdají poměrně snadné, ale řešení není zcela jednoduché (např. u úlohy je nějaký silný distraktor). To lze pozorovat u úloh H5 a H15, kde mají žáci tendenci nesprávně použít lineární vztah pro poměr velikostí jednotek („strana dlaždice je dvakrát delší, budu jich tedy potřebovat dvakrát méně“). U úlohy H10 se ukázala jako silný distraktor kostka A (možná proto, že na sobě nemá žádné tmavě vybarvené obrazce, které upoutávají pozornost[57]).

Obtížnosti úloh korespondují rovněž s předpokládaným umístěním úlohy na hypotetické učební trajektorii (viz tab. 3.1). Například úlohy H15 a H16 spadají v HUT pro objem do nejvyšší úrovně, tj. úrovně 4 – Integrované numerické a nenumerické uvažování (převody jednotek a jejich vztahy, princip kompenzace a práce s rozměry útvarů a jejich využití pro zjištění objemu – výpočet rozměrů z objemu). Stejně je tomu i v případě úloh H5 a H6, které patří do nejvyšší úrovně v HUT pro obsah.

4.1.3. Dotest – ověření vlivu pořadí úloh na jejich obtížnost

Vzhledem k tomu, že se některé z nejobtížnějších úloh nalézaly až na konci testu, kladla jsem si samozřejmě otázku, zda vysoká obtížnost úloh nesouvisí s jejich umístěním. Na druhou stranu, někteří zadavatelé uváděli, že žáci odevzdávali test ještě před uplynutím vymezeného času (například i o 10 minut dříve), z čehož usuzuji, že skutečnost, že žák úlohu vynechal, nemusí nutně znamenat, že by na ni neměl dostatek času. Závislost obtížnosti na pořadí úloh byla prověřena zmíněným dotestem v roce 2016 (viz oddíl 3.3).

[57] Toto se objevilo při jednom z pilotních rozhovorů, ale hlubší průzkum této úlohy jsem neprováděla.

Jak jsem již uvedla, měla jsem možnost otestovat ještě dalších 6 tříd (126 respondentů) jimž byly zadávány testy s náhodným pořadím úloh (každý test měl jiné pořadí úloh). Díky tomu lze posoudit, zda má pořadí úloh v hlavním testu vliv na jejich obtížnost. Nelze samozřejmě srovnávat absolutní úspěšnosti žáků – dotest proběhl uprostřed školního roku a mezi testovanými třídami převažují deváté ročníky – nicméně lze smysluplně srovnat pořadí jednotlivých úloh podle jejich obtížnosti.

Pořadí úloh podle obtížnosti v hlavním testu a dotestu uvádí tab. 4.5, u obou testů jsou uvedena pořadí úlohy podle úspěšnosti (pod číslem 1 je nejobtížnější úloha a nejlehčí úloha bude v pořadí podle obtížnosti mít číslo 16. Vidíme, že se pořadí úloh podle obtížnosti v hlavním testu a v dotestu liší obvykle o 1 místo s výjimkou úloh H3 a H6. Obě úlohy se ukázaly pro žáky účastnící se dotestu jako relativně obtížnější (tj. soudě podle výkonosti v ostatních úlohách bychom mohli očekávat vyšší úspěšnost) – např. H6 byla v hlavním testu pátá nejobtížnější úloha, zatímco v dotestu se ukázala jako druhá nejobtížnější. Úloha H3 byla v dotestu zařazena v průměru na sedmém místě a úloha H6 jako desátá úloha – obě úlohy se tedy v průměru nalézaly na stránkách dotestu více vzadu, což mohlo mít určitý vliv na úspěšnost žáků, nicméně u jiných úloh vliv pořadí úlohy nepozorujeme[58].

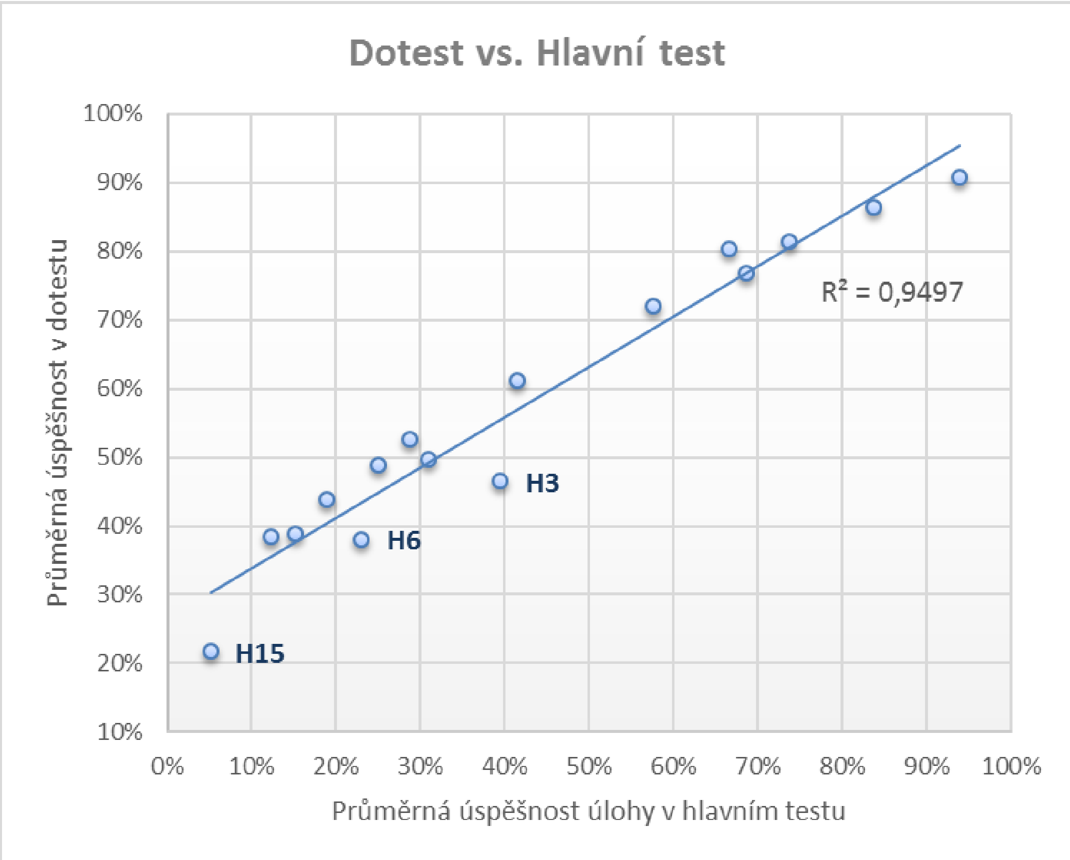
Tab. 4.5: Srovnání pořadí obtížnosti úloh v Hlavním testu a v Dotestu

Pořadí podle obtížnosti Hlavní test	Úspěšnost žáků Hlavní test	Úloha	Pořadí podle obtížnosti Dotest	Úspěšnost žáků Dotest
1	5 %	**H15**	1	22 %
2	12 %	**H16**	3	38 %
3	15 %	**H5**	4	39 %
4	19 %	**H14**	5	44 %
5	23 %	**H6**	2	38 %
6	25 %	**H4**	7	49 %
7	29 %	**H10**	9	53 %
8	31 %	**H13**	8	50 %
9	39 %	**H3**	6	47 %
10	41 %	**H2**	10	61 %
11	58 %	**H12**	11	72 %
12	67 %	**H9**	13	80 %
13	69 %	**H8**	12	77 %
14	74 %	**H11**	14	81 %
15	84 %	**H1**	15	86 %
16	94 %	**H7**	16	91 %

[58] Úloha H2 se například z druhého místa v hlavním testu posunula v průměru na místo deváté (tj. v dotestu byla zařazena jako devátá úloha), ale na její pořadí co do úspěšnosti to nemělo žádný vliv – zůstala desátou nejobtížnější úlohou.

V tab. 4.5 tedy například vidíme, že úloha H15 byla v hlavním testu nejobtížnější úlohou (je na prvním místě podle obtížnosti) a průměrná úspěšnost žáků v této úloze v hlavním testu byla 5 %. V dotestu byla u této úlohy průměrná úspěšnost vyšší – 22 %, ale úloha zůstala stále nejobtížnější úlohou celého testu. Pořadí podle obtížnosti v dotestu by mělo být díky náhodnému řazení úloh očištěno od vlivu jejich pořadí v testu. U úlohy H16 se zdá, že je její obtížnost v hlavním testu nadhodnocena, a kdyby byla zařazena dříve, bude průměrná úspěšnost žáků vyšší (v dotestu to je až třetí nejobtížnější úloha, hned po úloze H6, která se ukázala pro žáky relativně obtížnější než v dotestu).

Ještě lépe vztah mezi obtížnostmi úloh v obou testech uvidíme, zobrazíme-li je v bodovém grafu – úspěšnost v hlavním testu je na ose *x* a úspěšnost v dotestu na ose *y* (viz obr. 4.8).



Obr. 4.8: Vztah obtížnosti úloh v dotestu a v hlavním testu

Při tomto znázornění není důležitá absolutní velikost úspěšnosti v úloze, ale její úspěšnost vzhledem k úlohám ostatním. Body označující jednotlivé úlohy by pak měly být uspořádány zhruba v přímce (předpokládáme totiž, že obtížnost úloh v dotestu lze modelovat na základě obtížnosti v hlavním testu pomocí nějakého lineárního vztahu: „obtížnost v dotestu = konstanta + koeficient · obtížnost v hlavním testu“). Z grafu vidíme, že tento model vysvětlí téměř 95 % variability dat, což je velmi silná shoda. Regresní přímka představuje obtížnost v dotestu, kterou bychom očekávali, pokud by vztahy mezi obtížnostmi jednotlivých úloh byly v obou testech stejné. Největší vzdálenost od regresní přímky mají úlohy H6, H3 a H15 – u všech bychom podle výsledků v hlavním testu očekávali vyšší úspěšnost v dotestu. Úloha H15 zůstává jednoznačně nejobtížnější úlohou v obou testech a ani umístění úlohy dříve v testu na tom nic nezměnilo. Úlohy H3 a H6 se v pořadí obtížnosti posunuly o 3 místa vpřed (tam se mohl projevit i vliv pozdějšího zařazení těchto úloh), u jiných úloh výrazné posuny nepozorujeme. Lze tedy konstatovat, že pořadí úlohy nemá zásadní vliv na relativní[59] obtížnost úlohy a nízká úspěšnost v úlohách H14–H16 není výrazně ovlivněna umístěním úloh na poslední straně testu (úlohy zůstaly mezi nejobtížnějšími, i když byly umístěny uprostřed či na začátku testu).

Tento oddíl měl za cíl popsat složení testu z hlediska obtížnosti jednotlivých úloh (které úlohy se jevily jako obtížné a které naopak jako snadné) a poskytnout čtenáři přehled o tom, jaké procento žáků jednotlivé úlohy vůbec řešilo. Rovněž jsem ukázala, že vliv pořadí úlohy v testu na její obtížnost není významný, a můžeme tedy smysluplně pracovat s výsledky hlavního testu, i když úlohy nebyly zadávány v náhodném pořadí.

4.2. Validita a reliabilita testů

Podle (Chvál et al., 2015) posouzení validity testu ukazuje na oprávněnost interpretace testových skóre. Navržené testové úlohy mají za cíl měřit několik konstruktů: nenumerické uvažování, které je reprezentováno schopností dekompozice a rekompozice útvarů ve 2D a geometrickou představivostí ve 3D; dále pak numerické uvažování, které se skládá ze schopnosti strukturovat prostor do čtvercových/krychlových jednotek a konceptuálního pochopení pojmů obsah/objem. Úlohy do testu byly navrženy s využitím odborné literatury a přiřazení úloh k jednotlivým konstruktům jsem dále diskutovala s odborníky jak z České republiky, tak například z Francie (v rámci odborné konference CERME 10, kam byl přijat můj článek popisující vztah mezi strukturací prostoru a konceptuálním pochopením pojmu obsah/objem). Díky těmto diskusím došlo například k odlišení úloh zaměřených na strukturaci od úloh zaměřených na konceptuální pochopení obsahu/objemu. V některých analýzách používám rovněž konstrukt pojmenovaný „výpočetní úlohy" (proměnná „CALC"), který slouží k označení těch úloh, kde může žák dojít k výsledku s použitím výpočtu a/nebo s využitím nějakého vzorce (např. u úlohy H6 by to byl výpočet obsahů jednotlivých částí a jejich porovnání, u úlohy H2 lze použít k výpočtu obsahu vzorec pro obsah trojúhelníku a není třeba počítat čtverce v síti, v úloze H14 si žák nemusí představovat umístění krabiček do velké krabice, ale stačí, když vydělí objem krabice objemem malé krabičky, apod.).

Pro ověření, jaké proměnné by mohl test měřit a zda je bude možné interpretovat v souladu s tím, jak byl test navržen, jsem ještě provedla v SPSS faktorovou analýzu. Je třeba však brát v potaz, že se jedná o velmi aproximativní model (Hendl, 2004, s. 485), který slouží pouze jako doplňkové hledisko pro posouzení, zda navržené skupiny úloh skutečně měří to, co měřit mají (tj. zda to tak lze oprávněně interpretovat), případně pro návrh nových proměnných. Nevyhodnocovala jsem faktorovou strukturu testu či kvalitu modelu – mým cílem není sestrojit a testovat nějaký diagnostický nástroj. U předtestu i hlavního testu jsem ověřila předpoklady pro použití faktorové analýzy (Bruin, 2006): máme dostatek dat (729, resp. 747), determinant korelační matice je nenulový (0,003 pro předtest a 0,042 pro hlavní

[59] Označením relativní myslím úspěšnost ve srovnání s ostatními úlohami v testu či pořadí úspěšnosti.

test), míra KMO[60] je v obou případech akceptovatelná (0,905 a 0,886) a Bartlettův test zamítl v obou případech hypotézu shody korelační matice s identickou maticí (p = 0,000).

4.2.1. Proměnné pro měření úspěšnosti

Ve výzkumných otázkách RQ1–RQ3 se zabývám vztahem určitých schopností a úspěšnosti v úlohách na obsah a objem. V tomto oddíle přesněji vysvětlím, co touto úspěšností míním, a zavedu proměnné, pomocí kterých budu úspěšnost měřit.

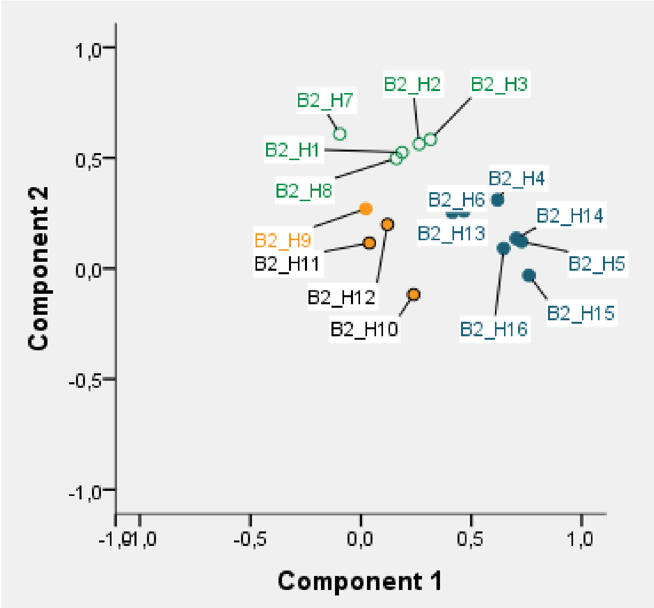
Úlohy zaměřené na výpočty a porozumění pojmu obsah a objem jsou obsaženy v hlavním testu. Test obsahuje 16 úloh, jejichž výsledky jsem podrobila explorační faktorové analýze. Nejlépe interpretovatelná se zde ukázala faktorová analýza, která extrahuje tři faktory, využívá metodu hlavních komponent a kolmou rotaci Varimax. Tyto tři faktory vysvětlují 43 % variability výsledků jednotlivých úloh. V tab. 4.6 je uvedena korelace jednotlivých úloh s vytvořenými faktory (faktorové zátěže). Velmi podobné výsledky dostáváme, i když použijeme nekolmou rotaci Oblimin nebo Promax. Metodu Varimax jsem zvolila proto, že jsou její výsledky přímočařeji interpretovatelné.

Tab. 4.6: Výsledek faktorové analýzy v SPSS: vztah jednotlivých úloh k vytvořeným faktorům – faktory (komponenty) jsou ve sloupcích a jsou označeny čísly 1–3. Hodnoty v tabulce u úloh představují korelaci výsledku úlohy a daného faktoru. Korelace menší než 0,3 nejsou zobrazeny.

Rotated Component Matrix			
	Component		
	1	2	3
H1		0,525	
H2		0,563	
H3	0,315	0,584	
H4	0,618	0,310	
H5	0,727		
H6	0,467		
H7		0,608	
H8		0,498	0,366
H9			0,467
H10			0,596
H11			0,714
H12			0,556
H13	0,414		0,377
H14	0,703		
H15	0,760		
H16	0,646		

[60] Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy, míra udávající vhodnost dat pro faktorovou analýzu s hodnotami v intervalu <0;1>; akceptovatelné jsou podle Bruina hodnoty větší než 0,6.

První z faktorů (sloupec označený 1) nejlépe koreluje s úlohami H4–H6 a H14–H16; druhý (sloupec označený 2) s úlohami H1–H3 a H7–H8 a poslední s úlohami H9–H12 (viz též obr. 4.9, kde jsou barevně odlišeny jednotlivé skupiny úloh). Je nasnadě interpretace faktoru 3 jakožto faktoru geometrické představivosti. Úlohy H9–H11 byly s tímto cílem přímo vybrány a v úloze H12 (určení chybějících kostek ve stavbě) hraje představa doplnění chybějící struktury stavby jistě významnou roli. Tento faktor koreluje i s úlohami H8 a H13, kde H8 je další úloha, která byla zařazena s cílem testovat geometrickou představivost žáka, a úloha H13 připouští rovněž řešení pomocí mentální manipulace s kostkami (tedy opírající se o geometrickou představivost). K tomuto faktoru a jeho interpretaci se vrátím podrobněji v oddílu 4.2.2, který je věnován proměnným popisujícím geometrickou představivost / nenumerické uvažování.



Obr. 4.9: Extrahované faktory z hlavního testu a jejich korelace s úlohami. Hodnoty na osách *x* a *y* představují korelaci dané úlohy s faktorem 1 (*x*) a faktorem 2 (*y*). Korelace s faktorem 3 nejsou znázorněny.

Faktor 1 velmi dobře koreluje s úlohami, které jsem označovala jako úlohy na konceptuální pochopení obsahu/objemu. Tedy úspěšnost v těchto úlohách by mohla být interpretována jako měřítko konceptuálního pochopení těchto pojmů. Rozdíl je pouze v tom, že podle faktorové analýzy koreluje úloha H3 (výpočet obsahu „elka“) s tímto faktorem poměrně slabě. Naopak úloha H14, kterou jsem po diskusích s experty zařadila mezi úlohy na strukturaci prostoru, koreluje s tímto faktorem velmi silně. Může jít i o to, že úloha je zadaná bez obrázku, a tedy jednou z projevených dovedností zde musí být i porozumění jazyku úlohy[61] a jeho převedení do představy geometrické/reálné situace. V zadání úlohy H14 je použita například notace 2 x 1 x 1 pro udání rozměrů krabičky. Během rozhovorů s žáky se ukázalo, že porozumění tomuto zápisu bylo jednou z hlavních překážek pro úspěšné vyřešení úlohy. Úloha H13 (rovněž označená experty jako strukturační) s tímto

[61] Hejný (2007, s. 110) vidí budování konceptuálního pochopení (tj. budování schématu) určitého pojmu jako upřesňování pojmů, které ve schématu vystupují, nebo jsou s ním propojeny. Toto upřesňování probíhá jak na úrovni představ, tak na úrovni jazyka. Pohle Jirotkové (2007) je vývoj představ žáka rovněž provázen vývojem jazyka (s. 117). Autorka rozděluje vývoj užívání jazyka v geometrii do osmi etap (0–7), které souvisí s rozvojem žákova porozumění. Zjevně tedy porozumění jazyku úlohy (použití znakového zápisu 2 x 1 x 1 pro rozměry kvádru by mohlo spadat až do etapy 5, spíše 6) může předpokládat vyšší úroveň žákova konceptuálního pochopení pojmů obsah a objem, což se projeví vysokou korelací s faktorem 1.

faktorem koreluje také (i když ne tak silně jako H14). Tento faktor využiji v dalších analýzách, a sice pro měření úspěšnosti v úlohách na obsah a objem.

Zbývá ještě najít interpretaci faktoru 2. Úlohy, které s tímto faktorem korelují, jsou vesměs úlohy, které byly zařazeny do testu i pro 1. stupeň, a tedy vyžadovaná úroveň pochopení konceptů obsah a objem není vysoká. Na prvním i druhém stupni patří tyto úlohy k nejméně obtížným (viz oddíl 4.1). Zadání úloh je vždy doprovázeno obrázkem a úlohy lze vyřešit bez znalostí o objemu či obsahu[62] a bez velkých nároků na geometrickou představivost – možná s výjimkou úlohy H8, která ale zároveň poměrně dobře koreluje i s faktorem 3 (geometrická představivost). Dalo by se říct, že tyto úlohy lze řešit i „bez využití hlubších matematických znalostí“. V dalších analýzách tuto skupinu úloh nebudu využívat.

Je zajímavé, že při žádné modifikaci provedené faktorové analýzy nebyl nalezen faktor, který by koreloval pouze s úlohami na výpočet/konceptuální pochopení obsahu (a nikoliv objemu). Úlohy, které vyžadovaly hlubší konceptuální pochopení obsahu (H4–H6), silněji korelují s úlohami, které vyžadují hlubší konceptuální pochopení objemu (H14–H16)[63], než s jednoduššími úlohami na obsah H2–H3. Zdá se tedy, že vývoj chápání pojmů obsah a objem postupuje paralelně (rozumí-li někdo pojmu obsah, je pravděpodobnější, že bude mít i dobré pochopení pojmu objem a vice versa).

Samostatný faktor, který by popisoval schopnost strukturace prostoru do čtvercových či krychlových jednotek, v provedené faktorové analýze rovněž nenalézáme. Neprojevil se ani ve faktorových analýzách s jinými parametry (jiný počet faktorů, jiný způsob rotace, jiný způsob extrakce komponent). Když se podíváme pouze na úlohy, ve kterých hraje roli strukturace 3D prostoru (tj. úlohy H12–H14), je možné, že v jejich přiřazení k určitému faktoru hrál buď roli fakt, že úlohy byly zadané bez obrázku (a žáci si museli geometrickou situaci představit pouze na základě popisu), nebo že vyšší úrovně schopnosti strukturace jsou natolik provázány s konceptuálním pochopením, že je faktorová analýza nedokázala odlišit. Vidíme, že jednoduchá úloha na strukturaci H12 (doplněná obrázkem) koreluje s faktorem geometrické představivosti, těžší úloha na strukturaci H13 koreluje jak s faktorem představivosti, tak s faktorem konceptuálního pochopení a nejobtížnější úloha týkající se strukturace H14 již koreluje pouze s faktorem konceptuálního pochopení.[64] Toto je třeba zohlednit v další analýze při řešení otázky RQ2 (souvislost strukturace prostoru a úspěšnosti v úlohách obsah a objem).

---

[62] U řady testovaných tříd (25 z celkového počtu 60, jednalo se i o třídy na druhém stupni) byl význam pojmu obsah při testu zopakován – a to buď ve smyslu „obsah je velikost plochy“ a/nebo „obsah lze zjistit jako počet čtverečků, které útvar pokrývají“ (1. stupeň).

[63] Korelace mezi úlohami H4–H6 a úlohami H14–H16 se pohybují mezi 0,26 a 0,48, zatímco korelace s úlohami H2 a H3 se pohybují pouze mezi 0,24 a 0,36.

[64] Zdá se, že se v úlohách podařilo zachytit vývoj od manipulace, přes manipulaci v představách až ke konceptuálnímu pochopení: úloha H12 se opírá převážně o prostorovopu představivost, H13 je úloha spojující představy a výpočty a úloha H14 už silně koreluje s konceptuálním pochopením.

Jak tedy měřit úspěšnost v úlohách na obsah a objem? Pro potřeby dalších analýz nebudu pracovat s jediným významem úspěšnosti v úlohách na obsah objem, ale zavedu tři proměnné, které nahlíží na úspěšnost z různých hledisek. Tab. 4.7 ukazuje seznam zavedených proměnných, jaké úlohy zahrnují, jejich interpretaci (včetně omezení pro používání) a na základě čeho proměnnou zavádím (zdroj).

Tab. 4.7: Proměnné popisující úspěšnost v úlohách na výpočet obsahu a objemu

Proměnná	**Úlohy (#)**	**Interpretace a omezení pro jejich použití**	**Zdroj**
CONC	(6) H3 – H6, H15 – H16	Měří <u>konceptuální pochopení obsahu a objemu</u>. <u>Nezahrnuje úlohy</u>, které více než 10 % žáků řešilo pomocí <u>strukturace prostoru</u> a/nebo (mentální) manipulace.	Expertní posouzení + analýza strategií
CALC	(9) H2 – H6, H13 – H16	Úspěšnost ve všech úlohách, které se dají řešit nějakým <u>výpočtem či pomocí vzorce</u>.	Původní návrh použitý při tvorbě testu
F_CONC	(7) H4 – H6, H13 – H16	Úlohy vztahující se k faktoru 1 provedené FA, tj. zjišťující <u>konceptuální pochopení obsahu a objemu</u> (není rozlišeno, zda a do jaké míry lze při řešení využít strukturaci prostoru)	Faktorová analýza

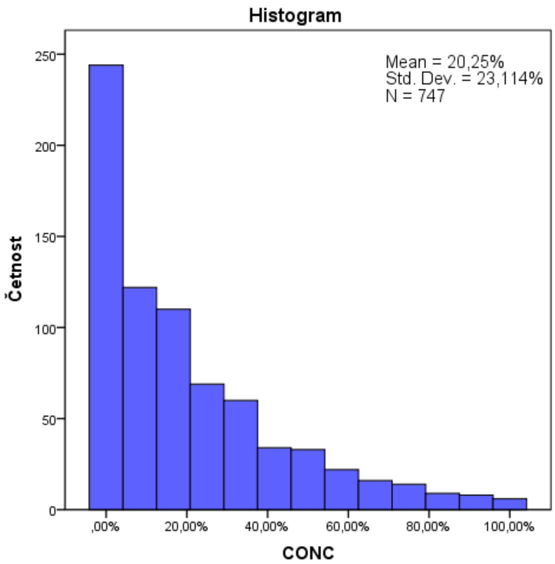
Všechny proměnné jsou vypočteny jako součet bodů, které žák ve vybraných úlohách dosáhl, vydělený maximálním počtem dosažitelných bodů v těchto úlohách. Hodnoty proměnných se tedy pohybují mezi 0 a 1 a popisují procentuální úspěšnost žáků v odpovídajících úlohách.

Tab. 4.8 uvádí základní popisné statistiky zavedených proměnných. Je uvedena i reliabilita příslušné části hlavního testu sestávající pouze z vybraných úloh. K výpočtu reliability jsem použila software IBM SPSS Statistics a ukazatel Cronbachovo alfa. Cronbachovo alfa pro všech 16 úloh hlavního testu vychází $\alpha = 0{,}814$, což je považováno za uspokojivé (Gavora, 2013, s. 528). V tabulce je uvedena i odvozená reliabilita (tj. konzistence stejného počtu náhodně vybraných položek z testu; pro její výpočet jsem použila vzorec z Chvál et al., 2015, s. 188) a rozdíl těchto hodnot. Pro všechny tři proměnné je odvozená reliabilita menší než reliabilita stejného počtu náhodně vybraných úloh z testu. Skupiny úloh jsou tedy dostatečně vnitřně konzistentní.

Tab. 4.8: Popisné statistiky a reliabilita proměnných popisujících úspěšnost, $N = 747$

Proměnná	**Počet úloh**	**Průměr**	**S.E.**	**Medián**	**Směrod. odchylka**	**Reliabilita**	**Odvozená reliabilita**	**Rozdíl**
CONC	6	0,2025	0,00845	0,1667	0,23114	0,719	0,621	0,099
CALC	9	0,2366	0,00868	0,1667	0,23735	0,792	0,711	0,081
F_CONC	7	0,1870	0,00870	0,1429	0,23695	0,768	0,656	0,111

Všechny tři proměnné se vyznačují velkým počtem respondentů, kteří dosáhli úspěšnosti 0 % (mnoho žáků obtížnější úlohy na výpočet obsahu a objemu buď vůbec neřešilo, nebo byli v úlohách neúspěšní). Rozdělení jsou velmi podobná rozdělení proměnné CONC zobrazené na obr. 4.10. Shapirův-Wilkův test normality spolu s vizuální kontrolou Q-Q grafu vede jednoznačně k zamítnutí hypotézy normality u všech tří proměnných.



Obr. 4.10: Histogram četností pro proměnnou CONC

4.2.2. Proměnné pro měření nenumerického uvažování

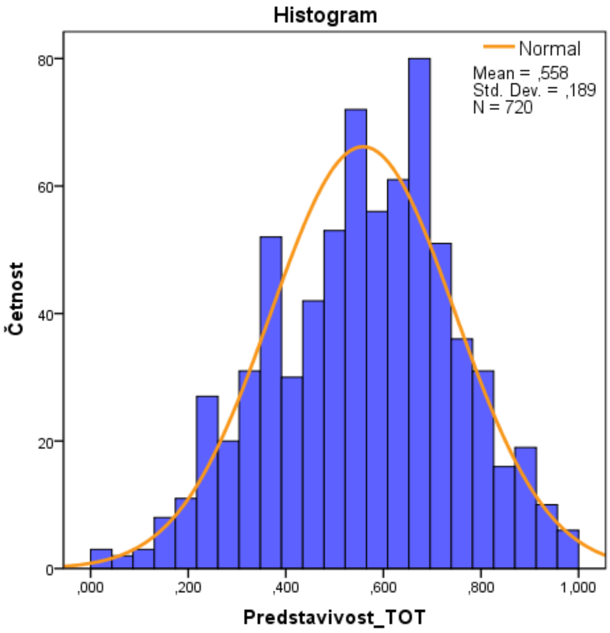
Pro měření nenumerického uvažování bylo do testu zařazeno několik typů úloh – jednak jde o celý předtest (dekompozice a rekompozice útvarů v rovině) a dále úlohy H7 až H11 v hlavním testu (geometrická představivost ve 3D). Ve faktorové analýze hlavního testu (oddíl 4.2.1) se ukázalo, že výsledky v úlohách H8–H12 poměrně silně korelují s faktorem 3, který bychom mohli interpretovat právě jako faktor geometrické představivosti. Doplním tedy úlohy H8–H12 k úlohám z předtestu abych získala proměnnou, která bude popisovat co nejširší oblast nenumerického uvažování. Tuto proměnnou označím „Představivost_TOT“ a při jejím výpočtu použiji přímo výsledky jednotlivých podúloh – např. úloha H8 má 4 podúlohy, které budou do této proměnné přímo zařazeny (agregovaný výsledek za celou úlohu H8 nebude použit). Tím zajistím srovnatelnější zastoupení obou složek (předtest má 20 úloh a z hlavního testu bude zahrnuto 16 podúloh). Hodnota proměnné bude vypočtena jako aktuálně získaný počet bodů (tj. počet úspěšně zodpovězených položek) vydělený 36 (tedy maximálním dosažitelným počtem bodů) – jedná se tedy vlastně o procentuální úspěšnost v těchto 36 úlohách či podúlohách. Základní popisné statistiky této proměnné ukazuje tab. 4.9.

Tab. 4.9: Popisné statistiky a reliabilita proměnné „Představivost_TOT“

Proměnná	Počet úloh	Průměr	S.E.	Medián	Sm. odchylka	Reliabilita
Představivost_TOT	36	0,5582	0,00703	0,5694	0,18873	0,886

Vidíme, že reliabilita těchto 36 položek vychází dostatečná (α = 0,886). A i když rozložení výsledků více odpovídá normálnímu rozdělení (viz obr. 4.11) i podle Q-Q grafu, Shapirův-Wilkův test normality tuto hypotézu zamítá, což zohledníme v dalších analýzách. Tato proměnná popisuje všechny testované aspekty nenumerického uvažování žáka a budu ji používat pro zodpovězení výzkumné otázky RQ1.

Provedeme-li navíc faktorovou analýzu s 36 položkami zahrnutými v proměnné „Představivost_TOT“ (viz příloha P16), zjistíme, že se úlohy na geometrickou představivost rozdělují do sedmi skupin (faktorů). Většina úloh z předtestu má vztah k jednomu z prvních dvou faktorů. Podrobnější analýzou jednotlivých úloh jsem se snažila zjistit důvod tohoto rozdělení, ale jediný rozlišovací znak mezi úlohami se zdá být umístění úlohy na první či na druhé stránce. Je pravděpodobné, že si žáci nechali méně času na úlohy na druhé straně listu (u řady respondentů je na druhé straně více úloh neřešených než na straně první). To se ostatně ukázalo již v přehledu úspěšnosti jednotlivých úloh. Tuto teorii by podporovala i skutečnost, že úloha 11 má vysokou korelaci s faktorem 1 i 2 (jedná se o první úlohu řešitelnou „obvyklou“ strategií na druhé straně testovacího listu). Faktory 3, 4, 5 a 7 pak korelují vždy s podúlohami jedné u úloh hlavního testu (viz tab. p1). To by potvrzovalo to, že každá z úloh H8–H12 opravdu měří nějaký jiný aspekt geometrické představivosti, a vysvětlovalo nízkou reliabilitu té části hlavního testu, která sestává pouze z úloh H8 až H12[65]. Zajímavý je faktor 6, se kterým silně korelují úlohy z předtestu (U1, U7, U10 a U15). Tento faktor by mohl být interpretován jako schopnost změnit řešitelskou strategii. Jak jsme viděli v oddíle 4.1.1, většina úloh z předtestu je řešitelná pomocí strategie odříznutí a přemístění části s nejmenším obsahem nebo strategie nalezení vhodného rovnostranného trojúhelníku „v pozadí obrázku“. Ovšem u úloh U1, U7, U10 a U15 vedou tyto strategie do slepé uličky, a řešení tak vyžaduje určitou změnu pohledu či změnu strategie. Tuto schopnost změny pohledu/strategie by mohl zachycovat právě tento faktor. Průměrný výsledek v úlohách U1, U7, U10 a U15 tedy použiji jako indikátor popisující tuto schopnost změny pohledu (proměnná „Změna_STRAT“)[66]. S tímto faktorem koreluje poměrně silně i úloha H10, tu však do proměnné „Změna_STRAT“ nezahrnuji, neboť by snižovala vnitřní konzistenci této skupiny úloh. Schopnost zvažovat a měnit strategie v průběhu řešení úlohy je projevem kultury matematického myšlení žáka tak, jak ji popisuje Hejný (2007, s. 90), a lze tedy očekávat, že tato schopnost bude pozitivně korelovat s výsledky žáka v úlohách, které vyžadují jiný způsob řešení než přímou aplikaci



Obr. 4.11: Histogram proměnné „Představivost_TOT“

[65] Vnitřní konzistence skupiny těchto úloh – úloh jako celků nikoliv jednotlivých podúloh – nevycházela jako dobrá (α = 0,536 což bylo o 0,041 méně než reliabilita náhodně vybraných 5 úloh z testu).

[66] Proměnná „Změna_STRAT“ je vypočtena jako podíl skutečně dosažených bodů z maximálního dosažitelného počtu bodů (tj. 4).

vzorce (tedy i úlohy na konceptuální pochopení obsahu a objemu v hlavním testu). Je zřejmé, že tato schopnost nesouvisí pouze s geometrickou představivostí, ale může souviset i s celkovým způsobem žákova uvažování a řešení problémů. Ostatní faktory vzešlé z této faktorové analýzy nepovažuji za důležité vydělovat a popisovat samostatnou proměnnou.

Pro měření konstruktu geometrická představivost (nenumerické uvažování) budu tedy kromě proměnné „Představivost_TOT“ používat i proměnnou „Změna_STRAT“. Přehled proměnných je uveden v tab. 4.10.

Tab. 4.10: Proměnné pro měření nenumerického uvažování

Proměnná	**Úlohy (#)**	**Interpretace a případná omezení pro jejich použití**	**Zdroj**
Představivost_TOT	(36) U1–U20, H8–H12 (podúlohy)	Úlohy vztahující se ke všem testovaným typům nenumerického uvažování.	Návrh testu + faktorová analýza
Změna_STRAT	(4) U1, U7, U10, U15	Indikátor schopnosti žáka změnit při řešení úloh zaměřených na geometrickou představivost strategii řešení	Faktorová analýza

Základní popisné statistiky proměnné „Změna_STRAT“ jsou uvedeny v tab. 4.11. Opět se jedná o ukazatel, kde je velmi nízká úspěšnost – více než polovina testovaných žáků získala 0 % (tedy úlohu vůbec neřešili, nebo ji řešili špatně).

Tab. 4.11: Popisné statistiky a reliabilita proměnné „Změna_STRAT“

Proměnná	Počet úloh	Průměr	Medián	Sm.odchylka	Reliabilita	Odvoz. reliabilita	Rozdíl
Změna_STRAT	4	0,1549	0,0000	0,24450	0,607	0,463	0,144

Vnitřní konzistence této proměnné není sice tak vysoká jako například u proměnných pro měření úspěšnosti, ale to je způsobeno nízkým počtem úloh. Srovnání s odvozenou reliabilitou je velmi dobré.

Vzhledem k tomu, že faktorové analýzy testů neposkytly žádný faktor, který by byl smysluplně interpretovatelný jako schopnost strukturace či multiplikativního uvažování, budeme se vhodným způsobem měření těchto schopností zabývat až v části věnované přímo dané výzkumné otázce.

4.3. RQ1 – Nenumerické uvažování a úspěšnost v úlohách na výpočet obsahu a objemu

V tomto oddíle se budu zabývat odpovědí na výzkumnou otázku **RQ1**: Souvisí úspěšnost v úlohách na nenumerické uvažování s úspěšností v úlohách na výpočet obsahu a objemu?

V oddíle 4.2 jsem se podrobně zabývala tím, co a jak vytvořený test měří, a zavedla jsem některé proměnné, které v této části využiji. Pro měření úrovně nenumerického uvažování byly zavedeny proměnné „Představivost_TOT“ a „Změna_STRAT“, přičemž první proměnná zohledňuje všechny testované aspekty geometrické představivosti, zatímco druhá se vztahuje ke schopnosti změnit při řešení úloh na geometrickou představivost strategii řešení.

Hledáme souvislost mezi těmito proměnnými a úspěšností žáků v úlohách na výpočet obsahu a objemu. Jako měřítko úspěšnosti v úlohách na výpočet obsahu a objemu jsem zvolila proměnnou „CALC“ (která vyjadřuje úspěšnost ve všech úlohách řešitelných výpočtem) a proměnnou „F_CONC“ (která vyjadřuje pouze úspěšnost v úlohách vyžadujících hlubší pochopení pojmu obsah/objem). Žádná z těchto proměnných nezahrnuje výsledky úloh, které vstupují do proměnných používaných k zachycení geometrické představivosti (viz oddíl 4.2.1), a má tedy smysl počítat jejich statistickou závislost. Údaje z obou testů byly k dispozici pro 720 žáků, protože žáci, kteří nepsali obě části testu, byli z analýzy vyloučeni.

Vzhledem k tomu, že všechny proměnné jsou kardinálního typu s mnoha variantami, použila jsem k analýze statistické závislosti Pearsonův korelační koeficient (Rabušič, 2002). Všechny korelace vycházejí jako statisticky významné s hodnotou nad nebo blízko k hodnotě 0,5[67], tedy jako podstatné až velmi silné (viz tab. 4.12).

Tab. 4.12: Korelace mezi geometrickou představivostí a úspěšností v úlohách na obsah a objem, N = 720

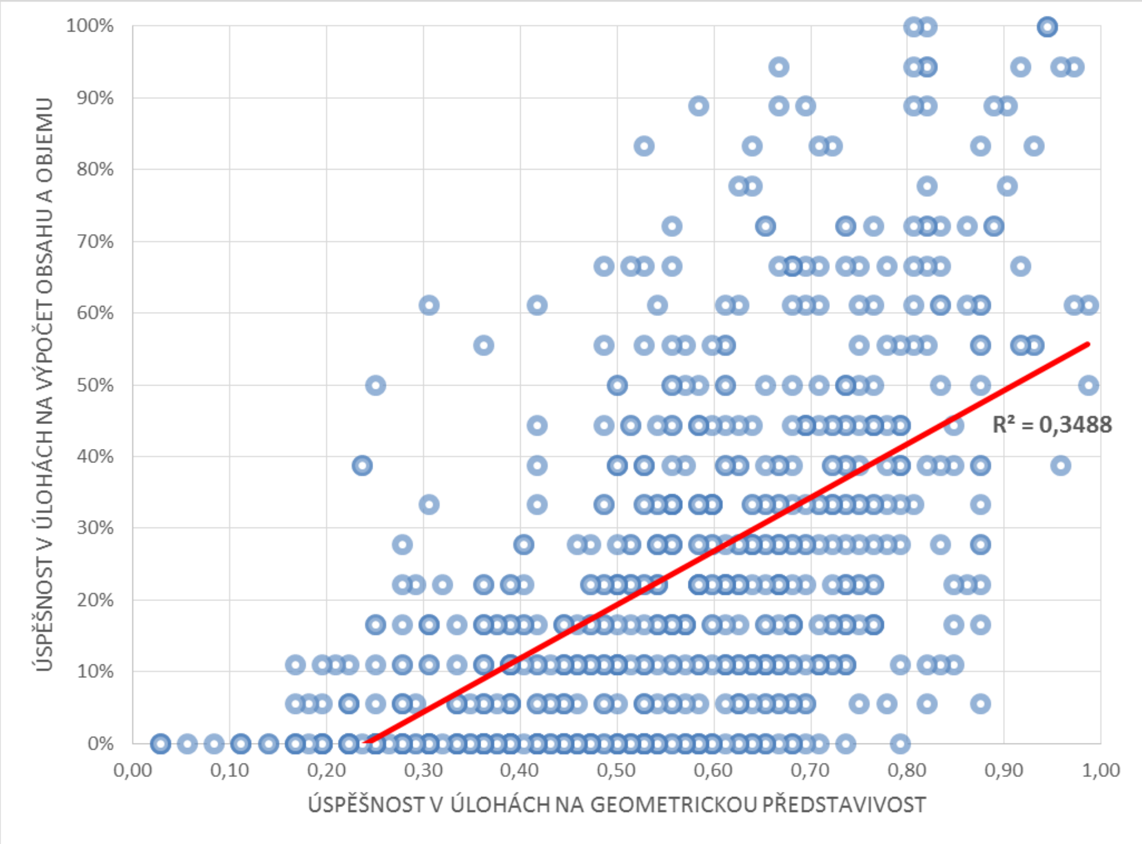
Pearsonův korelační koeficient mezi proměnnými	**F_CONC (Konceptuální pochopení)**	**CALC (Výpočetní úlohy)**
Změna_STRAT	0,454	0,457
Představivost_TOT	0,531	0,591

Chceme-li vztah obou proměnných znázornit graficky, můžeme použít rovněž bodový graf. „Představivost_TOT“ (tj. úspěšnosti v úlohách zaměřených na geometrickou představivost) je vynesena na ose *x* a „CALC“ (tj. úspěšnosti v úlohách zaměřených na výpočty) je vynesena na ose *y* (viz obr. 4.12). Daty je proložena regresní přímka – kdybychom předpovídali výsledek žáka ve výpočetních úlohách na základě výsledku v úlohách na představivost, jsme schopni postihnout 34,9 % variability dat, což značí poměrně silný vztah obou proměnných (a přesně odpovídá druhé mocnině korelace 0,591 mezi proměnnými „CALC“ a „Představivost_TOT“).

Zkoumání výzkumné otázky RQ1 tedy můžeme uzavřít s tím, že jsme na základě korelační analýzy nalezli <u>podstatnou až velmi silnou souvislost mezi geometrickou představivostí a úspěchem ve výpočetních úlohách na obsah a objem</u>. Souvislost geometrické představivosti s úlohami na konceptuální pochopení obsahu a objemu je rovněž podstatná až velmi silná i když o něco málo slabší. Tato zjištění dám ještě do souvislosti se zjištěními týkajícími se výzkumných otázek RQ2 a RQ3 pomocí lineárního regresního modelu pro

[67] Všechny korelace vychází jako statisticky významné na hladině 0,001.

proměnné CALC a budu zjišťovat, která složka se jeví pro predikci proměnné CALC jako nejdůležitější (viz oddíl 4.6).



Obr. 4.12: Vztah mezi geometrickou představivostí a úspěšností v úlohách na obsah objem

4.4. RQ2 – Souvislost mezi strukturací prostoru a úspěšností v úlohách na obsah a objem

Další výzkumná otázka, na kterou hledám odpověď, je **RQ2**: Souvisí schopnost strukturovat prostor do řádko-sloupcové struktury s úspěšností v úlohách na obsah a objem?

4.4.1. Proměnné pro měření strukturace

Jak můžeme v použitém testu pozorovat a měřit schopnost strukturovat prostor? Žádný samostatný faktor popisující tyto schopnosti jsem při faktorové analýze nenalezla, a to i přesto, že jsou v testu úlohy, které byly navrženy s cílem prověřit schopnost strukturace prostoru do čtvercových nebo krychlových jednotek (viz oddíl 4.2). K zodpovězení výzkumné otázky RQ2 tedy využiji úlohy, které byly původně navrženy pro testování schopnosti strukturace prostoru – úlohy H12–H14. Všechny tři úlohy se týkají strukturace 3D prostoru, nicméně v řešení žáků lze u těchto úloh pozorovat i strukturaci v rovině. Jevy pozorované v písemném testu dám do souvislosti s poznatky z rozhovorů, protože rozhovory s žáky byly zaměřeny právě na aspekty strukturace. Podívejme se tedy podrobněji na to, jaké informace podávají úlohy H12–H14 o schopnosti strukturovat u jednotlivých žáků.

O tom, že úloha H12 silně souvisí se schopností strukturovat, nemůže být pochyb. Úloha H12 také nejvíce korelovala s faktorem geometrické představivosti (viz oddíl 4.2.2), tedy tato schopnost je zřejmě zásadní pro její vyřešení. V zadání úlohy je strukturace zakreslena a jde o její doplnění. Lze říci, že tato úloha „měří“ představivostní aspekt strukturace (není třeba nic násobit, vytvářet pomyslné celky z kostek – řádky, sloupce, patra apod.). Stačí doplnit strukturu v představě a spočítat kostky po jedné. Rovněž díky znázorněné strukturaci a práci s krychlovými jednotkami představuje H12 nejjednodušší ze strukturačních úloh.

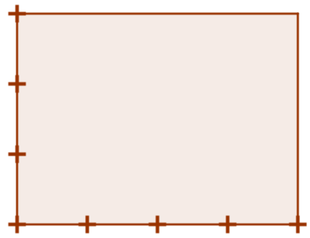
Zcela jiná je situace pro úlohy H13 a H14. Úlohy se vůbec nepokusilo řešit 46 %, resp. 65 % respondentů. Vzhledem k tomu, že se v rámci faktorové analýzy (viz oddíl 4.2.2) nepotvrdila existence zvláštního faktoru pro strukturaci, je třeba prozkoumat, do jaké míry úlohy H13 a H14 souvisí se strukturací a zda je můžeme použít jako měřítko schopnosti strukturovat. K tomu využiji analýzu pořízených rozhovorů s žáky a budu zjišťovat, co jsou hlavní překážky pro správné vyřešení úloh H13 a H14 a zda tyto překážky souvisí primárně se strukturací prostoru či nějakým jiným faktorem. Cílem následující analýzy je odpovědět na otázku, zda lze úspěšné vyřešení úlohy H13 a H14 oprávněně interpretovat jako znak dobré strukturace (nebo zda musel žák pro správné vyřešení projevit především jiné schopnosti). Budu rovněž hledat další příznaky, pomocí kterých by bylo možné sledovat kvalitu schopnosti strukturovat v písemných řešeních žáků.

4.4.1.1. Úloha H13

H13. Máš přesně 59 kostek o hraně 1, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 a šířce 3. Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

V této části vycházím z rozhovorů s 57 žáky 5. a 6. ročníku. Při jejich analýze jsem nalezla dva hlavní zdroje překážek pro úspěšné vyřešení úlohy H13. První z nich je převedení textu zadání do geometrické situace. Řadím sem i situace, kdy žák ignoruje část zadání – například nepracuje s podmínkou, že musí použít všechny kostky nebo že stavba má být co nejnižší. Druhý zdroj chyb souvisí s určením počtu kostek/pater: tedy žák si zadání správně „přeloží“ (tj. ví, co se po něm chce, jak souvisí rozměr obdélníku s počtem kostek umístěných na jedné straně, že udané rozměry jsou rozměry podstavy stavby apod.), ale udělá nějakou chybu v návazných výpočtech.

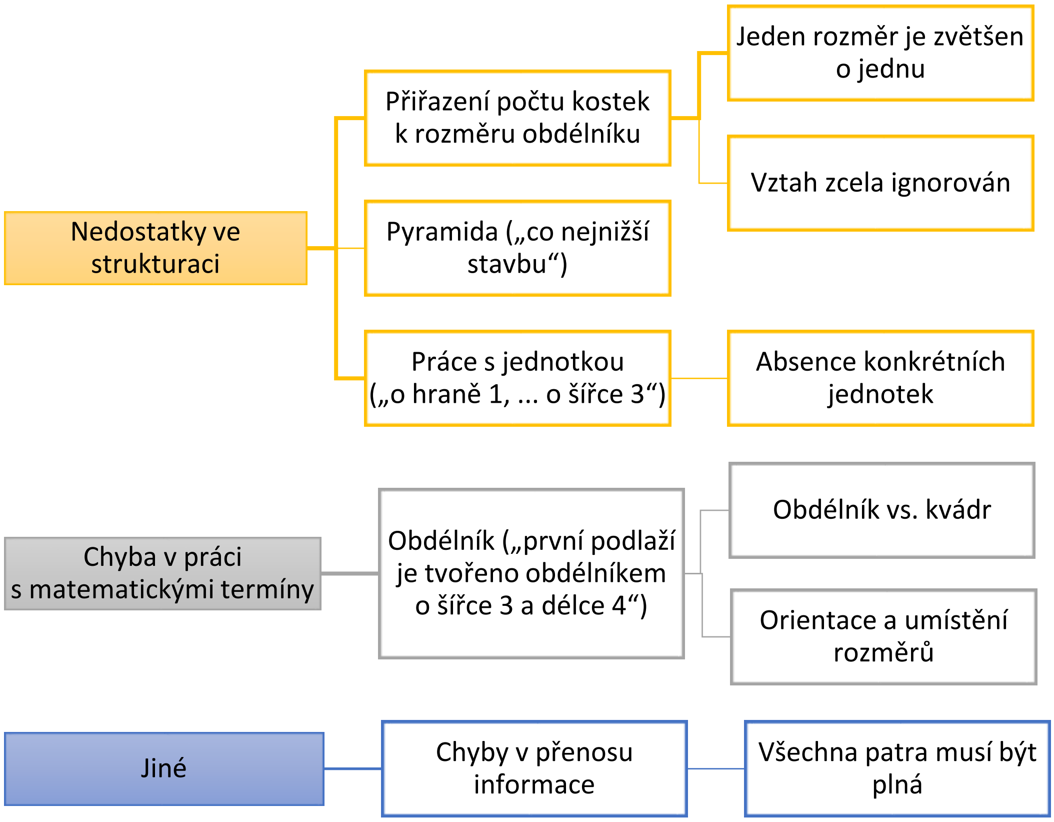
Podíváme-li se nejprve na druhou skupinu chyb – tedy chyby, které souvisí s chybnou prací ve správné geometrické situaci, můžeme předpokládat, že půjde o obtíže, které by se objevovaly i v případě, že byla úloha doplněna náčrtkem uvedeným na obr. 4.13 – to je přesně ta geometrická situace, o které předpokládám, že ji žák získal „překladem“ zadání úlohy. Pokud by zadání úlohy bylo doplněno podobným náčrtkem, bude se jednat bezpochyby o úlohu strukturační (jednalo by se o klasickou úlohu na doplnění strukturace ve 2D podle Saramové a Clementse, 2009; doplněnou dalším krokem, a to určením počtu pater).



Obr. 4.13: Náčrtek pro doplnění zadání úlohy H13

Žák tedy nepotřebuje žádné znalosti o výpočtu objemu či obsahu, stačí mu vytvoření představy struktury složené z jednotkových krychlí a určení jejich počtu.

Úloha je ovšem zadaná bez obrázku, a proto (chceme-li výsledek H13 považovat za indikátor schopnosti strukturovat) je třeba ukázat, že překážky související s „překladem" zadání do geometrické situace přímo nesouvisí se schopností počítat obsah a objem. Podrobná analýza problémů žáků při „překladu" zadání této úlohy se nalézá v oddíle 4.7 věnovaném strategiím a chybám žáků. Na obr. 4.14 uvádím přehled těch problémů, které byly identifikovány jako problémy související s „překladem" úlohy do geometrické situace. Pozorované problémy jsou rozřazeny do stejných kategorií, které budu využity při analýze strategií a chyb žáků v oddíle 4.7.



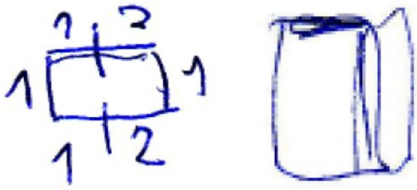
Obr. 4.14: Kategorizace hlavních překážek spojených s „překladem" zadání úlohy H13

Na základě analýz v oddíle 4.7 lze konstatovat, že většina překážek spadá do kategorie „Nedostatky ve strukturaci", jak jsme předpokládali. Zároveň se ukázalo, že vzhledem k zadání úlohy bez obrázku je nutné při jejím řešení použít i jiné znalosti/schopnosti než strukturační (zejména znalost používaných matematických konvencí a pojmů). Ovšem ty překážky, které přímo nesouvisí se strukturací (obdélník, všechna patra plná), nesouvisí přímo ani se schopností počítat obsah a objem (viz již zmíněný oddíl 4.7). To nás opravňuje interpretovat úspěšné vyřešení úlohy H13 jako znak dobré strukturace. Rovněž má smysl zjišťovat korelaci mezi výsledky v této úloze a úlohami na konceptuální pochopení objemu a obsahu.

4.4.1.2. Úloha H14

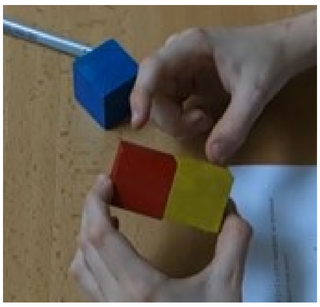
H14. Kolik nejvíc krabiček o rozměrech 2 x 1 x 1 dm naskládám do krychlové krabice o hraně 6 dm tak, aby šla zavřít?

Při podrobnější analýze řešení úlohy H14 v rozhovorech pracuji pouze s menším vzorkem dětí. K úloze H14 se dostali pouze ti, kteří vyřešili správně a rychle (tj. cca do 15 minut) úlohu H13 – v pozdějších verzích rozhovoru pak úlohu H13 a úlohu na počet kostek ve stavbě. Z 57 respondentů byla úloha H14 předložena 16 žákům a jednalo se vesměs o žáky v matematice dobré či velmi dobré. Jediná překážka pro vyřešení této úlohy, která nebyla povahy ryze strukturační (tj. nešlo o problém s tím, jak balíčky do krabice správně naskládat), je interpretace zápisu „krabička o rozměrech 2 x 1 x 1“ (ta se objevila u 10 žáků ze 16). Vzhledem k tak vysokému počtu výskytů je třeba tuto překážku prozkoumat detailněji.



Obr. 4.15: Adamův nákres krabičky

Adamovi (5. ročník) nepomohlo, ani když byla jednotlivá čísla označena jako šířka, výška a hloubka. Je to pochopitelné, protože u obdélníku modeloval Adam nejprve jeden rozměr (délku) vertikálně a zde v označení rozměrů ještě délku nahradila hloubka a přibyl rozměr výška. Adam nejprve nakreslí pohled na obr. 4.15 vlevo (odděluje jednotky na šířce obdélníku, aby bylo patrné, že jsou 2), ale pojmy hloubka a výška ho zmatou (neví, kterým směrem je má umístit). Pokusí se sice nakreslit ještě 3D náčrtek balíčku (obr. 4.15 vpravo), ale nakonec úlohu vzdává.



Obr. 4.16: Michal – „To je [rozměr] 2“

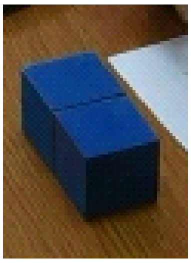
Viděla jsem, že pro žáka bylo obtížné zkoordinovat tyto tři rozměry (navíc ještě s jejich názvy). Proto jsem v dalších rozhovorech tento typ nápovědy nepoužívala a použila jsem místo toho manipulativa.

Michal (5. ročník) říká, že je mu zadání úlohy jasné, jen že si neumí představit tu krabičku – tedy kvádr o rozměrech 2 x 1 x 1. Když jsem mu podala jednu kostku se slovy, že se jedná o kostku o hraně 1, sám si přibral další dvě kostky, sestavil z nich kvádr a hledal na něm příslušné rozměry (na obr. 4.16 ukazuje rozměr 2 a na obr. 4.17 pak rozměr 1). Zdálo se, že si není jistý, kde je třetí rozměr, tak jsem mu ho ukázala a potvrdila mu tím, že krabičku vymodeloval správně.

Obr. 4.17: Michal – „krát 1“

Michal dále řešil úlohu bez problémů, pouze zapomněl na to, že v krabici bude více vrstev krabiček, což na můj popud okamžitě zkorigoval. Je vidět, že i pro Michala, který byl v řešení všech úloh velmi úspěšný, je obtížné zkoordinovat tři rozměry nějakého tělesa a představit si kvádr pouze na základě uvedení jeho tří rozměrů (v použitém tvaru).

Atina (6. ročník) při řešení H14 odkazuje na znalosti, které má z fyziky, kde se s touto formou zápisu pravděpodobně setkala, ale zápis zprvu nedovede interpretovat.



Obr. 4.18: Model krabičky

T: … Mohlo by to vypadat třeba takhle? (tazatelka položí dvě kostičky vedle sebe, které ztvárňují jednu malou krabičku – viz obr. 4.18) Podle toho, co tam je napsaný?
S: Mohlo, ale i takhle (*postaví dvě kostičky jednu na druhou*, *tazatelka přitakává)* … To jsou asi všechny způsoby, které můžou být. Možná ještě takhle by to šlo (*kostky položí napříč*), ale ono je to jenom otočený v podstatě.

Vidíme, že když Atina dostala k dispozici model, postavila daný kvádr do všech tří možných poloh – tj. že rozměr 2 reprezentoval postupně hloubku, výšku i šířku. Zdá se tedy, že se zamýšlela i nad tím, jaké číslo v zápisu představuje jaký rozměr a jak je tento model fyzicky orientován. Úlohu později částečně vyřešila až s pomocí návodné úlohy (s obrázky balíčku i krabice – viz příloha P14).

Hlavní otázkou, kterou je třeba zodpovědět, je to, zda lze úlohu H14 považovat za primárně strukturační nebo zda způsob zadání úlohy (zápis 2 x 1 x 1, absence obrázku) natolik navádí na výpočetní řešení, že by to nebylo korektní. Za tímto účelem se podíváme na strategie, které žáci použili k řešení úlohy H14 v testu. Tab. 4.13 zobrazuje jejich přehled i s počty žáků, kteří danou strategii použili, podle ročníků.

Tab. 4.13: Počty žáků podle řešitelské strategie v úloze H14 (procenta vzhledem k počtu řešitelů)

Primární strategie řešení úlohy H14		**6**	**7**	**8**	**9**	**Součet**	**v %**
Strategii nelze určit (pouze výsledek apod.)		10	7	7	7	31	12 %
Výpočet objemů (**117** žáků)	Správný postup	2	6	7	25	40	15 %
	Vypočteny pouze oba objemy	3	4	1	0	8	3 %
	Numerická chyba	1	4	3	1	9	3 %
	Použit vzorec pro obsah místo objemu	0	8	4	7	19	7 %
	Zdánlivě náhodná operace s čísly	10	20	6	5	41	16 %
Skládání (**114** žáků)	Správné kladení krabiček i určení počtu patek	5	12	8	18	43	16 %
	Chybný počet krabiček v 1. patře	5	14	6	16	41	16 %
	Chybně určený počet pater	5	10	3	7	25	10 %
	Numerická chyba	2	1	1	1	5	2 %
Vynechal		193	117	87	88	485	
Celkový počet žáků		**236**	**203**	**133**	**175**	**747**	

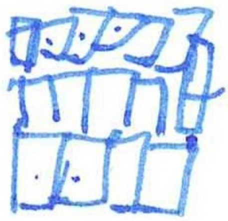
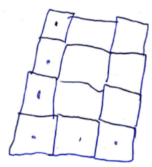
Vidíme, že více než 50 % žáků, kteří úlohu řešili (a u kterých jsem byla schopna strategii určit), používá pro její řešení nějakou výpočetní strategii (snaží se o výpočet poměru objemů krabice a krabičky) a neřeší úlohu s využitím představy umisťování krabiček do prostoru vymezeného krabicí. Domnívám se tedy, že by nebylo zcela korektní považovat úspěšné řešení úlohy H14 za projev správné strukturace. Kdybychom pak počítali korelaci výsledků strukturačních úloh (kam bychom zařadili i H14) s úlohami na výpočty, mohla by být tato korelace nadhodnocena.

K měření schopnosti strukturace zavedu proměnnou „Index_STR“, která využije pouze výsledky úloh H12 a H13 (tedy úloh, které můžeme považovat za čistě strukturační). Použiji ale jemnější stupnici bodování (nikoliv bodování na škále 0–1–2, které využíváme pro výpočet celkových výsledků v testu). Pro úlohu H12 máme k dispozici výsledky všech tří podúloh (bodovaných 0 nebo 1 podle toho, zda žák podúlohu vyřešil). Index strukturace („Index_STR“) tedy bude vypočten jako součet výsledků těchto podúloh s výsledkem úlohy H13. Pro tuto úlohu máme k dispozici detailnější bodování na škále 0–5[68], použijeme tedy toto, aby ohodnocení strukturace bylo co nejjemnější. Hodnota indexu se pohybuje mezi 0 a 8 body (maximálně 3 body za úlohu H12 a maximálně 5 za úlohu H13 – úloha H13 má tedy v indexu vyšší váhu).

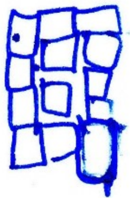
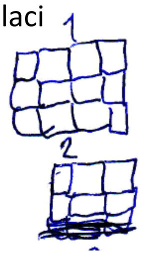
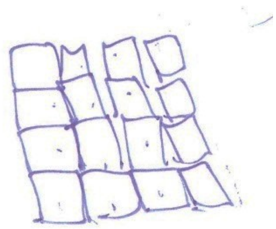
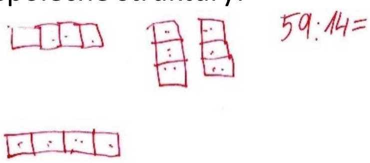
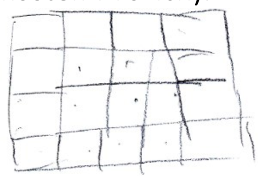
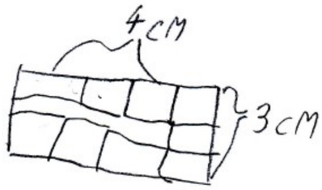
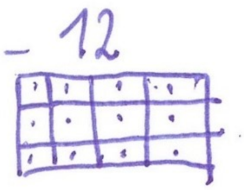
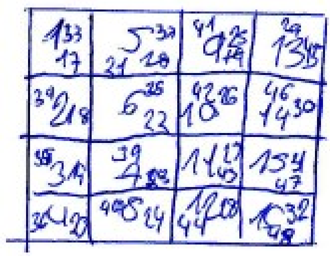
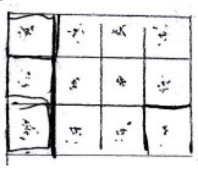
4.4.1.3. Zobrazení prvního podlaží stavby jako indikátor strukturace

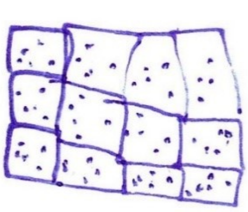
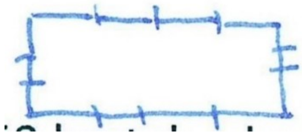
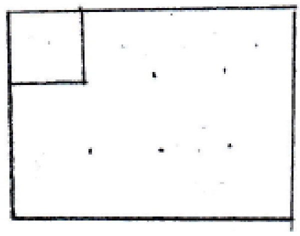
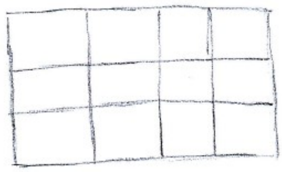
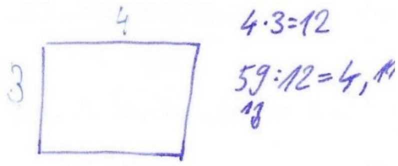
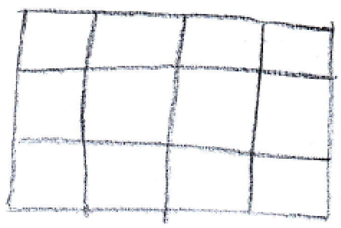
Při analýze písemných řešení žáků v testu jsem zaznamenala, že žáci velmi často zobrazují strukturu prvního podlaží stavby, kterou mají postavit. Náčrtky byly velmi různé a velmi dobře odpovídaly jednotlivým stádiím strukturace prostoru v rovině, jak je popisují Saramová a Clements (2009) nebo Battista (2004) – viz oddíl 2.4.4. Aby byla souvislost lépe patrná, vybírám z tab. 2.6 název úrovně a stručný popis a uvádím příklady řešení, která by mohla spadat do této kategorie a která se vyskytla buď v testu, nebo v rozhovorech (viz tab. 4.14).

Tab. 4.14: Souvislost HUT pro obsah a způsobu zobrazení prvního podlaží stavby žáky

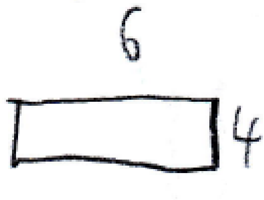
Úroveň	Popis	V řešení testu	V rozhovoru
3 Primitivní pokrytí (5 let)	Dlaždice ještě nejsou správně zarovnány Počet dlaždic určuje počítáním kolem okrajů a pak nesystematicky spočítá ty, které jsou uvnitř	SN.6F.23 (6. ročník) – je ovšem možné, že se jedná o pohled z boku a situaci, kdy se počet kostek v každém patře zvyšuje, nicméně žák dále počítá s 16 kostkami v patře: 	Cyril kostky zakresluje po jedné, ale vůbec je nepočítá – prohlásí, že jich je 7:  Max tvrdí, že v prvním podlaží bude 7 kostek a ve druhém 6, podlaží zakresluje takto (poslední řádek ve 2. podlaží škrtnul

[68] Jemnější bodování pro úlohu H13: 0 bodů = žádný krok nevede správným směrem, 1 bod = správný postup pro určení počtu kostek v prvním podlaží nebo počet pater, ostatní výpočty chybné; 2 body = jako 1 bod + náznak dalšího správného výpočtu bez výsledku či interpretace; 3 body = výpočty se zdají správné, ale chybí jedna odpověď (interpretace); 4 body = správný postup, ale numerická chyba při výpočtu (správně interpretováno); 4,5 bodu = správně vypočteno i interpretováno, ale žák odpovídal na jinou otázku, než je v zadání (např. v posledním patře bude chybět 1 kostka); 5 bodů = správný postup, výsledek i odpověď (tj. interpretace výsledku). Všechna řešení této úlohy byla znovu analyzována autorkou, aby byla zajištěna maximální konzistence dat.

Úroveň	Popis	V řešení testu	V rozhovoru
		Žák 6. ročníku (BD.6A.19): 	až při manipulaci s kostkami): 
4 Vztah jednotek a jejich opakování	Stále nedokonalé zarovnání dlaždic, ale správné určení počtu – žák jde buď systematicky po řadách, nebo si spočtené dlaždice fyzicky značí	Žákyně ZR.8A.24 úlohu ale dále neřešila:  Žák 6. ročníku (LK.6A.17) vidí řádky a sloupce jako celky, ale nedává je do společné struktury:  	Filomena (6R) počítá kostky nejprve po obvodu a pak uvnitř, kostky si značí, ale počet neurčila správně (dvojí započtení kostek v rozích):  Eda (6R) si strukturu naznačuje, počítá kostky po obvodu a pak vnitřek jako 1 kostku, určí tedy nejdřív počet 11 kostek: 
5 Řada jako jeden celek (6 let)	Kreslí a počítá některé řady jako řady (celky) – některé řady přesné, jiné z jednotlivých dlaždic (zarovnány) Představa řady jako složeniny – jednotka z jednotek Nedochází ještě ke koordinaci délky a šířky, žák ani nespojuje velikost jednotky	Žák (BD.6D.07) kreslí sice přesnou strukturu, ale kostky počítá po jedné:  Tento typ zakreslení/počítání lze najít i u žáka 9. ročníku (KR.9A.06):	Charlotta – značí si kostky po jedné (strukturu však zakreslovala pomocí rovnoběžných čar):  Oskar (6R) – kreslí přesně, ale počítá po jedné, a to opakovaně: 

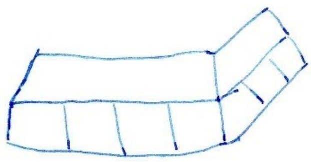
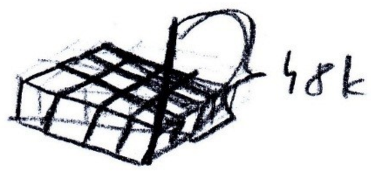
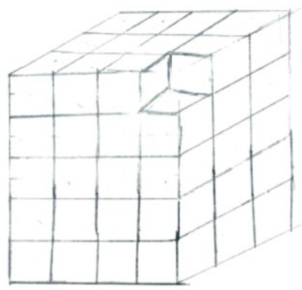
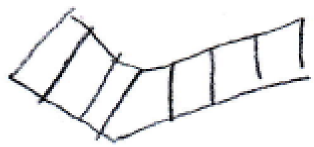
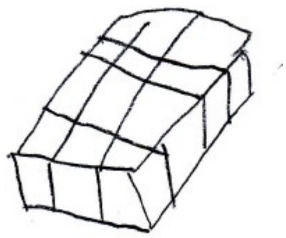
Úroveň	Popis	V řešení testu	V rozhovoru
	z velikosti obdélníku		
6 Řádko-sloupcová struktura (7 let)	Žák zakresluje strukturu rovnoběžnými čarami); počet dlaždic určuje systematickým počítáním po řádcích či sloupcích (postupným přičítám, výjimečně násobením) K určení počtu dlaždic stačí neúplný náčrt Je schopen odměřit velikost dlaždice a přenést ji do obdélníku pro určení počtu řad a sloupců	Žákovi SN.8B.03 stačí ke správnému řešení pouze náznak struktury:  Totéž v případě žáka 9.ročníku (SN.9F.14): 	Růženě (6R) stačí pouze naznačená struktura (násobí), u větších rozměrů ovšem přestane do počtu kostek zahrnovat první sloupec – a počítá chybně (a –1) · b):  Radka (5R) určuje počet kostek pomocí násobení: 
7 Strukturace a vhled[69] (9 let)	Žák určuje obsah pomocí měření délek stran (délky i šířky) K výpočtu používá násobení a je schopen vysvětlit, proč to tak funguje Nákres není nezbytný – iterace a řádků /	Je zaznamenán pouze správný výpočet 3 · 4=12 a 59 : 12=4(11), který je správně interpretován. Někdy je zakreslen i obrys obdélníku s rozměry. 	Hynek (5R) provádí správný výpočet z hlavy, strukturu kreslí jen na dotaz tazatelky: 

[69] Array Structurer (AR)

Úroveň	Popis	V řešení testu	V rozhovoru
	sloupců je implicitní (na pozadí)		Lumír (5R) si kreslí pouze náčrtek s obrysy a provádí správné výpočty: 

Vzhledem ke korespondenci nákresů s jednotlivými úrovněmi HUT lze předpokládat, že způsob nákresu dobře popisuje žákovu schopnost strukturace. Navíc (oproti HUT pro obsah) se tu objevuje nákres struktury ve 3D pohledu, což považuji za projev pokročilé strukturace, neboť je třeba koordinovat zároveň 3 perspektivy.

Tab. 4.15: Zachycení strukturace ve 3D pohledu

Úroveň	Popis	Pozorované řešení – písemné	V rozhovoru
Zachycení strukturace ve 3D pohledu	Objevuje se proto, že žáci se snaží zachytit první podlaží krychlové stavby, nikoliv kladení dlaždic na plochu	LK.9B.11 (9. ročník) – ani 3D nákres nemusí vest ke správnému řešení:  Žákyně 5. ročníku (VS.5A.03) – úlohu správně vyřešila pomocí nákresu:  Žák 5. ročníku (BD.5D.25) předvedl opravdu vynikající nákres a správné řešení: 	Dušan (6R) – vše řeší správně a rychle, načrtává toto:  Lukáš (6R) – rovněž velmi rychlé a správné řešení: 

Problém s interpretací úrovně strukturace může nastat u žáků, kteří jsou na nejvyšší úrovni strukturace, protože ti už si nepotřebují strukturu kreslit (mají implicitní strukturu). Chceme-li používat nákres jako indikaci strukturace, musíme tyto žáky odlišit od těch, kteří pouze nakreslili obdélník s rozměry, ale dál nic nespočetli, protože nevěděli jak. V rozhovorech s žáky jsem se tedy snažila najít znak, podle kterého tyto žáky odlišit – jak (z písemného řešení) poznat, že se žák nalézá ve stádiu implicitní struktury. Zjistila jsem, že z 57 žáků účastnících se rozhovorů bylo 12 na úrovni implicitní strukturace. Všichni tito žáci určovali počet kostek výpočtem $3 \cdot 4 = 12$ a $59 : 12 = 4(11)$ a výsledek správně interpretovali. Nákres ke správnému řešení nepotřebovali, ale na žádost tazatele strukturu bezchybně zakreslili. Zdá se tedy oprávněné předpokládat, že pokud žák v testu počítá tímto výpočtem a výsledky správně interpretuje, že je na nejvyšší úrovni strukturace prostoru (tj. na úrovni *3 Operace s numerickými mírami*) a můžeme ho přiřadit do dané kategorie, i když strukturu nezobrazil.

V testu je však řada řešení, kdy je pouze napsaná odpověď, ale postup výpočtu není uveden, tedy žák úlohu buď vyřešil z hlavy (byla natolik jasná, že nepotřeboval postup zapisovat), nebo řešení opsal. Abychom se vyhnuli nesprávným interpretacím, klasifikujeme tyto žáky jako ty, kteří nemají žádnou strukturu zobrazenu.

Zavedu tedy proměnnou „Kód_STR“, která popisuje úroveň strukturace odvozenou z náčrtku či způsobu výpočtu. V oddíle 4.4.3 budeme dále zkoumat, zda tato proměnná koreluje s výsledky ve výpočetních úlohách a v úlohách zaměřených na konceptuální pochopení pojmů obsah a objem. Hodnoty a způsob okódování písemných řešení pro proměnnou „Kód_STR“ ukazuje tab. 4.16.

Tab. 4.16: Hodnoty, kterých nabývá proměnná „Kód_STR“

Kód_STR	**Název**	**Popis**
–1	Nesprávný počet kostek v prvním podlaží	Struktura prvního podlaží má jiné rozměry než 3 x 4
0	Neidentifikovatelná	Není možné určit – chybí náčrtek či celý způsob řešení
1	Struktura z jednotlivých kostek	Zakreslení struktury po jednotlivých kostkách, žák v nákresu nespojuje jednotlivé řádky či sloupce (neodděluje je rovnoběžnými čarami)
2	Struktura z řádků a sloupců	Struktura je zakreslena pomocí rovnoběžných čar (při správném rozměru)
3	3D nákres	Zobrazení stavby v nějakém 3D pohledu
5	Implicitní struktura	Struktura většinou není zakreslena, nebo je zakreslena pouze hranice obdélníku, nicméně je uveden správný výpočet s korektní interpretací výsledku

4.4.2. Vývoj schopnosti strukturace

Před zodpovězením otázky o vztahu schopnosti strukturovat a úspěšnosti se ještě krátce zmíním o tom, jak žáci v úlohách na strukturaci uspěli. Prezentuji pouze výsledky písemného testu, neboť strategiím a problémům při strukturaci bude věnována většina oddílu 4.7.

Úspěšnost žáků v úlohách H12–H14 zaměřených na strukturaci podle ročníků ukazuje tab. 4.17. Uvádím pro srovnání i výsledky v úloze H14, kterou jsem podle analýzy žákovských řešení nakonec neoznačila jako čistě strukturační (viz oddíl 4.4.1.2).

Tab. 4.17: Úspěšnost žáků v úlohách na strukturaci prostoru

Ročník	H12 vynechal	H12 – úspěšnost	H13 vynechal	H13 – úspěšnost	H14 vynechal	H14 – úspěšnost	Počet žáků
4	5 %	43 %	56 %	6 %	N/A	N/A	218
5	3 %	50 %	32 %	21 %	N/A	N/A	238
6	7 %	48 %	64 %	17 %	82 %	7 %	236
7	3 %	60 %	45 %	30 %	58 %	20 %	203
8	7 %	58 %	52 %	27 %	65 %	20 %	133
9	2 %	67 %	29 %	54 %	50 %	33 %	175
Celkem	**4 %**	**53 %**	**46 %**	**25 %**	**65 %**	**19 %**	**1 203**

U úlohy H12 vidíme, že ji vynechalo mizivé procento respondentů. Nicméně ještě v 8. ročníku je přes 40 % respondentů, kteří udělali chybu alespoň u jedné ze tří staveb, pro 6. a nižší ročníky je to přes 50 %. Jako nejobtížnější se ukázala stavba modrá (H12.3), kde je průměrná úspěšnost na druhém stupni pouze 54 % (u zelené stavby v H12.1 je úspěšnost 57 % a u červené stavby v H12.2 66 %). Úspěšnost v úloze H13 je podstatně nižší. Domnívám se, že to je z velké části způsobeno tím, že je úloha zadaná bez obrázku a žáci si museli zadání úlohy do geometrické situace nejprve „přeložit“. Právě tento „překlad“ se ukázal v rozhovorech s žáky jako poměrně velká překážka (viz oddíl 4.7). Na stejný problém s „překladem“ narážejí žáci i v úloze H14, kde je potřeba ještě navíc zvládnout pokročilejší strukturaci (práci s jednotkou ve tvaru kvádru) nebo použít výpočet. To vše se odráží na vysokém procentu žáků, kteří úlohu neřešili (ještě v 9. ročníku to byla téměř polovina) i na relativně nízké úspěšnosti.

U úloh H12 a H13 vidíme, že žáci 5. ročníku dosahují lepších výsledků než ročníky šesté, což se projevilo i v předtestu. Domnívám se, že je to způsobeno odchodem nadanějších žáků na víceletá gymnázia. Tab. 4.18 ukazuje průměrné hodnoty proměnné „Index_STR“ (což je proměnná zachycující výsledky úloh H12 a H13 v jemnějším bodování, maximální hodnota tohoto indexu je 8 bodů). Rovněž vidíme, že 5. ročníky měly lepší průměrný výsledek než ročníky 6. Nejúspěšnější 9. ročníky dosahují v průměru pouze na 62 % maximální hodnoty indexu.

Tab. 4.18: Průměrné hodnoty Indexu strukturace („Index_STR“) po ročnících

Ročník	4	5	6	7	8	9
Index_STR (průměr)	1,58	2,88	2,35	3,59	3,37	4,93
v % z max. 8 b	20 %	36 %	29 %	45 %	42 %	62 %

Zajímavé je rovněž sledovat vývoj v zakreslování struktury prvního podlaží podle ročníku (tj. věku) respondentů.

Tab. 4.19: Vývoj úrovně zakreslení strukturace v úloze H13

Jev\Ročník	4	5	6	7	8	9
Úlohu vynechal	56 %	32 %	64 %	45 %	52 %	29 %
Chybná strukturace	13 %	13 %	6 %	9 %	2 %	3 %
Způsob strukturace nelze určit	9 %	11 %	6 %	10 %	11 %	14 %
Po jedné kostce	12 %	13 %	8 %	8 %	12 %	9 %
Řádky a sloupce	6 %	17 %	8 %	8 %	10 %	18 %
3D náčrtek	2 %	6 %	3 %	6 %	2 %	5 %
Implicitní (propojení na výpočet)	2 %	8 %	5 %	13 %	12 %	22 %
Počet žáků	***218***	***238***	***236***	***203***	***133***	***175***

Podle HUT pro obsah i objem by cílem výuky měla být strukturace implicitní (tedy propojení situace na výpočet bez nutnosti strukturu zakreslovat). Je vidět, že procento žáků, u kterých jsme byli schopni tento způsob strukturace identifikovat, s věkem respondentů narůstá, ale ani v 9. ročníku není nijak vysoké. Je však třeba uvážit, že u 14 % respondentů nemohla být úroveň strukturace určena, neboť u řešení chyběl postup, tedy velmi pravděpodobně skutečné procento žáků, kteří jsou na této úrovni, je vyšší (ne však vyšší než 36 %).

V dalších analýzách budu pracovat pouze s výsledky testu pro 2. stupeň, protože v testu pro 1. stupeň mnoho úloh (zejména výpočetních) z pochopitelných důvodů chybí.

4.4.3. Vztah strukturace a úspěšnosti v úlohách na obsah a objem

V předchozích oddílech jsme podrobně zdůvodnili, proč můžeme k měření úrovně strukturace použít proměnné, které shrnuje tab. 4.20.

Tab. 4.20: Proměnné používané pro popis schopnosti strukturace

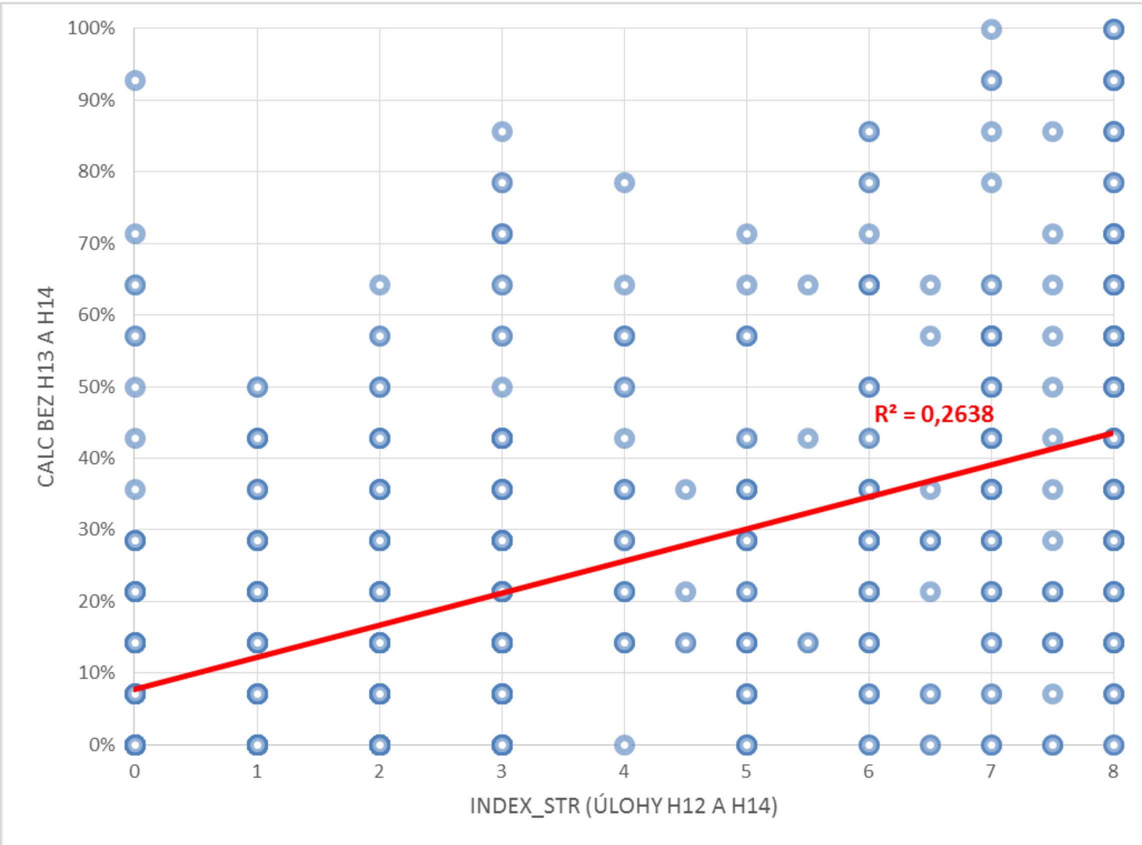
Označení proměnné	**Zahrnuté úlohy (#)**	**Interpretace a případná omezení pro jejich použití**
Index_STR	(2) H12–H13	Proměnná měří schopnost strukturace pomocí úspěšnosti v úlohách H12 a H13 (všechny podúlohy H12 + bodování H13 na škále 0–5).
Kód_STR	H13	Kvalitativní ohodnocení nákresu prvního podlaží doplněné hodnocením způsobu řešení. Jsou zahrnuti pouze žáci, kteří úlohu H13 řešili.

Pro měření úspěšnosti v úlohách na obsah a objem můžeme použít pouze proměnnou „CONC“ (viz oddíl 4.2.1), která zahrnuje pouze úlohy H3–H6 a H15–H16 a byla záměrně konstruována tak, aby neobsahovala žádnou z primárně strukturačních úloh. Bylo by možné použít i proměnnou „CALC“, ze které vyloučíme úlohy H13 a H14. Označíme ji „CALC_bez H13 a H14“, a bude se tedy od proměnné „CONC“ lišit pouze tím, že zahrnuje i úlohu H2. Vzhledem k tomu, že všechny proměnné „Index_STR“, „CONC“ a „CALC_bez H13 a H14“ můžeme považovat za kardinální, lze sílu asociace počítat pomoci Pearsonova korelačního koeficientu (Rabušič, 2002). Korelace vycházejí jako statisticky významné[70] s hodnotou nad nebo blízko k hodnotě 0,5, tedy jako **podstatné**. Konkrétní hodnoty jsou uvedeny v tab. 4.21.

Tab. 4.21: Korelace mezi schopností strukturace a úspěšností v úlohách na obsah a objem, N = 747

Pearsonův korelační koeficient mezi proměnnými	CONC (Konceptuální pochopení bez strukturací)	CALC_bez H13 a H14 (Výpočetní úlohy)
Index_STR	0,483	0,514

Zobrazíme-li si hodnoty pomocí bodového grafu s vynesením regresní přímky stejně, jako jsme to dělali pro geometrickou představivost na obr. 4.19, vidíme, že Index strukturace vysvětluje více než 26 % variability výsledku proměnné „CALC_bez H13 a H14“ (viz obr. 4.19).



Obr. 4.19: Vztah mezi schopností strukturace a úspěšností v úlohách na obsah a objem

Druhá proměnná, kterou jsem zavedla pro popis úrovně strukturace, je proměnná „Kód_STR“ zachycující způsob nákresu strukturace prvního patra v úloze H13. Je otázkou, zda má smysl zkoumat vztah mezi touto proměnnou a výsledkem „CONC“, případně „CALC_bez H13 a H14“, pro všechny žáky nebo pouze pro ty, kteří úlohu H13 řešili. V případě, že zahrneme všechny žáky, je třeba rozhodnout, jak kódovat ty, kteří úlohu

[70] Všechny korelace vychází jako statisticky významné na hladině 0,001.

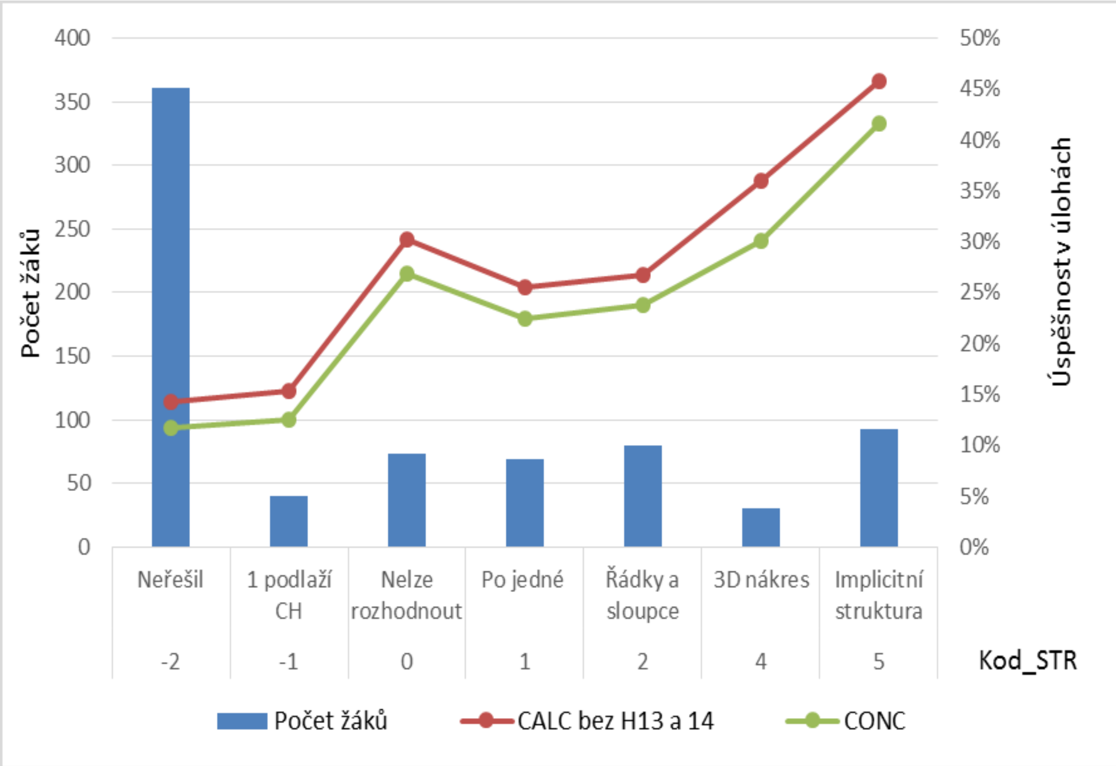
neřešili. Nabízí se dvě možnosti: buď okódujeme ty žáky, kteří H13 neřešili, nulou (tj. index strukturace bude 0 jak v případě, že žák úlohu vůbec nezkusil řešit, tak v případě, že strukturu vůbec nenakreslil a třeba napsal pouze odpověď), nebo zvolíme zvláštní kód odpovídající nejnižší úrovni strukturace (použila jsem hodnotu −2; pokud se žák do úlohy vůbec nepustil, pravděpodobně nerozumí zadání, nebo se domnívá, že úlohu stejně nevyřeší – můžeme tedy jeho schopnost strukturace klasifikovat jako horší než u toho, kdo se o nějaké řešení pokusil). V případě modifikací, kdy zahrnujeme všechny žáky, nese proměnná „Kód_STR“ rovněž informaci o tom, zda žák úlohu H13 řešil, či nikoliv (tato informace vstupuje i do obou Indexů odvahy). „Kód_STR“ i jeho modifikace lze považovat za ordinální typ dat – rozdíly mezi jednotlivými hodnotami nejsou smysluplně interpretovatelné, ale hodnoty jsou uspořádány podle úrovně HUT, které nákres odpovídá (čím vyšší hodnota, tím lepší strukturace). Proto jsem pro hodnocení asociace zvolila Spearmanovo ró (korelační koeficient pořadí). Hodnoty korelací pro různé varianty indexu ukazuje tab. 4.22.

Tab. 4.22: Korelace mezi Kód_STR a úspěšností v úlohách na obsah a objem

Spearmanovo ro	**R_CONC (Konceptuální pochopení bez strukturací)**	**CALC bez H13 a H14 (Výpočetní úlohy)**
Kód_STR (jen ti, co řešili H13) ***N = 386***	0,290	0,313
Kód_STR0 (ti, co neřešili = 0) ***N = 747***	0,363	0,375
Kód_STR2 (ti, co neřešili = −2) ***N = 747***	0,409	0,425

Všechny korelace vycházejí jako statisticky významné, ale ukazují střední až podstatnou sílu závislosti.

Podíváme-li se na obr. 4.20, který zobrazuje průměrné hodnoty proměnných „CALC bez H13 a H14“ a „CONC“ pro jednotlivé typy strukturace (ti, co neřešili, jsou označení −2), zjistíme, že data ukazují trend, který jsme očekávali. Žáci, kteří strukturují lépe, mají v průměru lepší výsledek než ti, kteří strukturují s chybami. Pouze pod strukturací s kódem 0 (tj. žádný nákres, nelze identifikovat) se nalézá poměrně dost žáků, kteří mají ve výpočetních úlohách velmi dobré výsledky, a je tedy pravděpodobné, že výsledek neopsali, ale strukturu a výpočet nezaznamenali proto, že úlohu řešili z hlavy. U těchto žáků však nemáme jak kód strukturace určit, i když mohou být klidně na nejvyšší úrovni implicitní strukturace. To bude samozřejmě vypočtený korelační koeficient oslabovat. Je rovněž vidět, že průměrná úspěšnost žáků, kteří úlohu H13 vůbec neřešili, je srovnatelná s úspěšností těch, kteří ani nedokázali správně určit počet kostek v 1. podlaží stavby. Na základě pozorování uvedených výše lze konstatovat, že vztah mezi úspěšností a strukturací existuje a jeho síla se jeví jako střední až podstatná.



Obr. 4.20: Vztah kódu strukturace a průměrné úspěšnosti

Zkoumání výzkumné otázky RQ2 lze tedy uzavřít s tím, že byla na základě korelační analýzy nalezena podstatná souvislost mezi schopností strukturovat a úspěchem v nestrukturačních výpočetních úlohách na obsah a objem. Tyto nálezy dále prozkoumám z hlediska lineárního regresního modelu oddílu 4.6. Výsledky dalšího zkoumání schopnosti strukturace u žáků jsou popsány i v oddíle 4.7 věnovaném strategiím a chybám žáků.

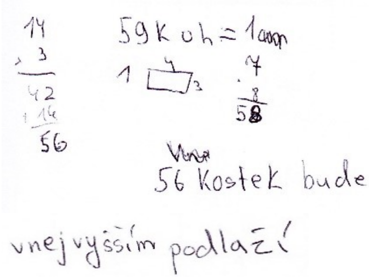
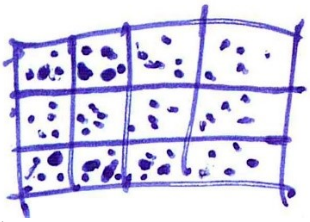
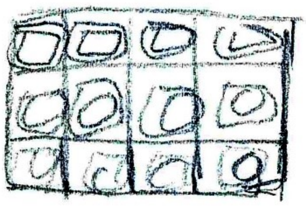
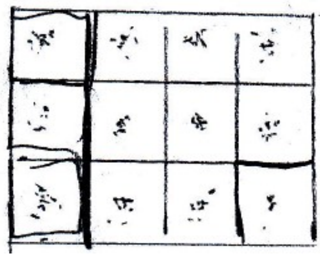
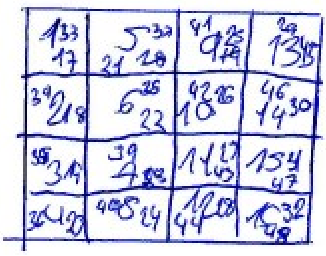
4.5. RQ3 – Souvislost mezi multiplikativním uvažováním a úspěšností v úlohách na obsah a objem

Tento oddíl je věnován výzkumné otázce **RQ3**: Souvisí projevovaná úroveň multiplikativního uvažování s úspěšností v úlohách na obsah a objem?

4.5.1. Proměnné pro měření multiplikativního uvažování

Opět se nejprve budu věnovat hledání vhodných proměnných, které popíší úroveň multiplikativního uvažování. V tab. 2.10 je uveden přehled vývoje úrovní multiplikativního uvažování (jakási HUT). Při řešení úlohy H13 v testu se objevují výpočetní strategie, které by bylo možné přiřadit k popisu některých úrovní této HUT. Tab. 4.23 obsahuje stručný popis úrovní z tab. 2.10 a písemná řešení žáků, která by se dala k dané úrovni zařadit. Jedná se pouze o úroveň projevenou při řešení jedné konkrétní úlohy, nelze z toho usuzovat zcela přesně na úroveň multiplikativního uvažování žáka. Toto konkrétní řešení je ovlivněno například tím, že je zde potřeba dělit dvouciferným číslem, takže pokud si žák není jist technickým provedením této operace, může se uchýlit na nižší úroveň a k výsledku dojít postupným přičítáním (při tom si může být vědom, že je třeba užít operace dělení a uměl by správně interpretovat i výsledek).

Tab. 4.23: Souvislost úrovní multiplikativního uvažování a žákovských řešení úlohy H13

Úroveň	Stručný popis	Pozorované řešení – písemné	V rozhovoru
II. Hledá klíčová slova	Najde v zadání klíčová slova a podle toho použije příslušný algoritmus výpočtu	Žákyně 6. ročníku (BD.6D:04) používá nějaký výpočet, ale výsledek interpretuje zcela jinak, než by výpočtu odpovídalo: 	Tonda (6R) na určení počtu kostek v patře užil sčítání: $4+3=7$ Viktorie (6R) – první pokus o výpočet: $S=(a\cdot a+b\cdot b)$ $S=(3\cdot 3+4\cdot 4)$ $S=25$ Alena (5R) popisuje výpočet: „Takže sečtu, těch 4 cm a 3 cm. To je 7 a musím to vydělit tím, padesáti devíti.“
II. Počítá	Počítá po jedné	Žák 6. ročníku (BD.6D.12) počítá po jedné až do 59:  Žák 9. ročníku (SN.9F.07) rovněž počítá po jedné, značí si to zmenšujícími se útvary a počty po patrech si zapisuje: 	Oskar (6R) počítá kostky po jedné: 59, 58, 57 … až do 1 (kostky si tečkuje):  Charlotta (6R) si vpisuje do rámečků pro kostky čísla: 
III. Opakovaně přičítá / odčítá	Užívá strategii opakovaného přičítání / odčítání	Žák 6. ročníku (BD.6D.07) postupně od 59 odečítá: $59-12=47-12=35$ $35-12=23=11=11=0$	Anda (6R) přidává postupně číslo 12, aby se dostala k 59:

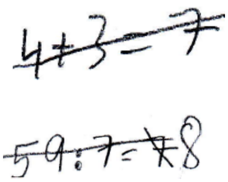
Úroveň	Stručný popis	Pozorované řešení – písemné	V rozhovoru
		Postupné přičítání nalezneme i u žáka 9. ročníku (ZR.9A.06): 12 12 12 12 48	12 12 12 36 +12 48 +12 které stav 50
IV. Násobí	Používá jazyk násobení Dobře koordinuje mezi objekty, čísly a operacemi	Žák 8. ročníku (BT.8B.02) se snaží k 59 dostat pomocí násobků 16: ~~16 · 4 = 64~~ 16 · 3 = 48	Martin (5R) hledá chybějící číslo v rovnosti: $12 \cdot \_\_ = 59$ následně počítá: $12 \cdot 4 = 48$ Viktorie (6R) zkouší, jaký násobek 12 vyjde nejblíž k 59: 12 · 4 = 46 12 · 5 = 60
V. Předpoví dá	Používá násobení i dělení Je schopen přenést poměr do jiného systému	Řešení žáka 9. ročníku (KL.9B.03): 59 : 12 = 4,11 Jedno podlaží má 12 kostek, spočítám si tedy kolik jestě mohu udělat takových pater a zbytek je poslední patro, tedy počet kostek v něm.	Filoména (6R) počítá pomocí dělení, ale zbytek určuje za pomoci násobení (přesně ví, co čísla ve výpočtech znamenají): 59 : 12 = 4, 4 . 12 = 48 59 − 48 = 11

Zdá se, že žákovská řešení lze okódovat podle úrovní projeveného multiplikativního uvažování, a to pomocí kódů uvedených v tab. 4.24. Pro tento jev zavedu proměnnou „Kód_DIV“. Úrovně „II. Hledá klíčová slova“ a „II. Počítá (po jedné)“ jsem při klasifikaci sloučila do jedné, neboť obě náleží do skupiny II (tj. do nejnižší projevené úrovně multiplikativního uvažování). Opět budu toto kódování používat ve dvou variantách: v jedné pouze pro ty žáky, kteří úlohu řešili, (proměnná se tak vztahuje pouze k jevům týkajícím se multiplikativního uvažování) a ve variantě „Kód_DIV1“, kdy zavedeme hodnotu −1 pro ty, kteří úlohu vynechali, a budeme proměnnou používat pro všechny žáky.

Proměnná „Kód_DIV1“ pak nenese informaci pouze o úrovni multiplikativního uvažování, ale i o tom, zda žák úloze porozuměl natolik, že si ji troufl začít řešit. Vzhledem k tomu, že úloha H13 byla klasifikována jako převážně strukturační, může být použití modifikované proměnné „Kód_DIV1“ problematické – to je třeba vzít v potaz při interpretaci výsledků.

Tab. 4.24: Hodnoty použité ke kódování proměnné „Kód_DIV1“

Kód_DIV	**Název**	**Popis**	**Úroveň**
−1	Neřešeno	Vůbec úlohu H13 neřešil (jen u proměnné Kód_DIV1).	
0	Neidentifikovatelné (Neurčeno)	Není možné určit, chybí postup řešení.	
1	Operace a její smysl nesouvisí, chyba v provedení operace, počítá po jedné kostce (Odhadování)	Použije nějakou operaci, ale výsledek neumí interpretovat. Použitá operace neodpovídá multiplikativní situaci. Počet kostek ve stavbě zjišťuje počítáním po jedné.	*II. Hledá klíčová slova + II. Počítá*
2	Opakované přičítání (Přičítání)	Počet pater zjišťuje opakovaným přičítáním počtu kostek v prvním podlaží.	*III. Opakovaně přičítá/odčítá*
3	Opakované násobení (Násobení)	Při zjišťování počtu pater hledá násobek 12, který bude nejblíž zadanému počtu kostek.	*IV. Násobí*
4	Dělení	Počet pater zjišťuje pomocí dělení a výsledek umí správně interpretovat.	*V. Předpovídá*



Obr. 4.21: Tondův výpočet

Někteří žáci zdánlivě projevují více úrovní multiplikativního uvažování naráz. Například Tonda zmíněný v úrovni II. „Hledá klíčová slova a podle toho hledá algoritmus“ – nejprve použije operaci sčítání k určení počtu kostek v jednom patře 4 + 3 = 7. Pak ale pro zjištění počtu pater, zcela správně použije operaci dělení (i když s nesprávnými vstupy), viz obr. 4.21. Kód operace jsem při kódování dat volila podle toho, jakou nejnižší úroveň multiplikativního uvažování žák projevil. Kdyby tento žák psal pouze písemný test, kódovala bych jeho multiplikativní uvažování nejnižší úrovní (tj. úrovní 1 „Odhadování“). Podíváme-li se na rozhovor s žákem, vidíme, že nejenom používá operaci sčítání pro řešení multiplikativního problému (počet kostek v patře), ale také si není jist interpretací výsledku operace a pouze ji odhaduje (podrobněji je rozhovor s tímto žákem popsán ještě v oddíle 4.7.2).

S: Takže v nejvyšším podlaží by podle mě bylo osm kostek. (*tužkou naznačuje směrem na výsledek dělení)*
T: V nejvyšším podlaží by bylo osm kostek, protože ti to vyšlo jakoby, že těch padesát devět děleno sedmi je osm, jo?
S: Anebo by to bylo teda osm pater. (*čte si znovu zadání)* Jo… tak to bude osm podlaží.

Myslím, že okódování kódem 1 zde opravdu dobře odpovídá schopnosti žáka operaci dělení a násobení v konkrétních situacích používat.

4.5.2. Vývoj multiplikativního uvažování

Procento žáků v jednotlivých ročnících, kteří používají danou výpočetní strategii, ukazuje tab. 4.25. Při interpretaci výsledků však musíme brát v potaz poměrně vysoké procento žáků, u kterých nelze výpočetní strategii identifikovat. V tabulce jsou zahrnuty i výsledky žáků 1. stupně, i když při zjišťování vztahu s úspěšností je nebudeme používat.

Je vidět, že počty žáků, kteří jsou schopni v této úloze odpovídajícím způsobem použít operaci dělení (správně ji provést a interpretovat), se stoupajícím věkem narůstají – není to ovšem nijak velké procento. V 9. ročníku je to o něco málo více než 14 % žáků, u dalších 22 % žáků však neumíme rozhodnout, protože většinou neuvedli postup. Je tedy pravděpodobné, že skutečná hodnota bude vyšší; maximálně však 36 %. Podíváme-li se na žáky, kteří buď dělí, nebo násobí, je to v 9. ročníku kolem 26 % žáků (opět je třeba brát v potaz zkreslení díky neidentifikovatelným strategiím). Vidíme tedy, že ještě v 9. ročníku jsou žáci, kteří buď operaci tipují (neví, jak souvisí s geometrickou situací, a nejsou schopni výsledky interpretovat), nebo počítají kostky po jedné (těch je ale pouze něco kolem 5 % plus dalších 30 % těch, kteří si na úlohu netroufli).

Tab. 4.25: Počty žáků, kteří při řešení H13 použili danou strategii, podle ročníků

Jev\Ročník	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celkem**
Neřešeno	56 %	32 %	64 %	45 %	52 %	29 %	**46 %**
Neidentifikovatelné	32 %	41 %	11 %	22 %	12 %	22 %	**24 %**
Odhadování	6 %	8 %	6 %	7 %	8 %	5 %	**7 %**
Přičítání	6 %	14 %	11 %	10 %	11 %	17 %	**11 %**
Násobení	0 %	3 %	4 %	7 %	6 %	12 %	**5 %**
Dělení	0 %	3 %	3 %	10 %	11 %	14 %	**6 %**
Celkový počet žáků	***218***	***238***	***236***	***203***	***133***	***175***	***1 203***

4.5.3. Vztah multiplikativního uvažování a úspěšnosti v úlohách na obsah a objem

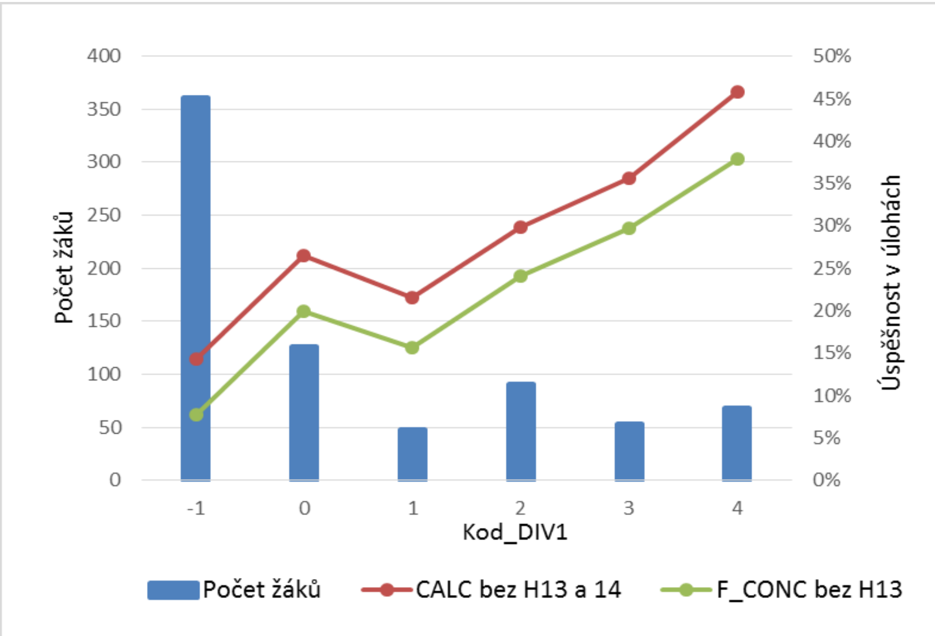
Vzhledem k tomu, že se proměnná „Kód_DIV“ úzce vtahuje k výsledku v úloze H13, nebylo by korektní hledat korelace s proměnnými, které popisují úspěšnost ve výpočtech a zároveň obsahují výsledek úlohy H13. Pro hledání souvislosti s úspěšností tedy použiji proměnnou „CALC bez H13“ (výsledek v úlohách H2–H6 a H14–H16) a „F_CONC bez H13“ (výsledek v úlohách H4–H6 a H14–H16). Tab. 4.26 ukazuje spočtené korelační koeficienty. Vzhledem k tomu, že rozdíl mezi jednotlivými hodnotami „Kód_DIV“ není smysluplně interpretovatelný, ale jednotlivé kategorie jsou uspořádány, je třeba považovat tuto proměnnou za kategoriální a použít opět neparametrický koeficient korelace Spearmanovo ró.

Tab. 4.26: Korelace mezi „Kód_DIV“ a úspěšností v úlohách na obsah a objem

Spearmanovo ró	F_CONC (Konceptuální pochopení bez H13)	CALC bez H13 (Výpočetní úlohy)
Kód_DIV (jen ti, co řešili H13) ***N = 386***	0,240	0,269
Kód_DIV1 (ti, co neřešili = −1) ***N = 747***	0,435	0,440

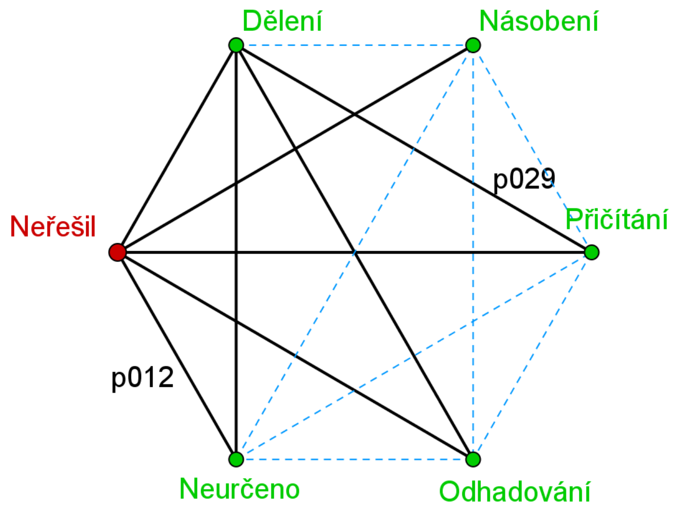
Zjištěné korelace jsou u proměnné „Kód_DIV“ ještě nižší než u proměnných popisující strukturaci. Navíc proměnná „Kód_DIV1“, která by vykazovala střední až podstatnou korelaci, nepopisuje pouze multiplikativní uvažování, ale částečně též strukturační schopnosti (tj. zda žák této převážně strukturační úloze porozuměl a troufl si ji řešit). Nezbývá než konstatovat, že nalezená asociace mezi multiplikativním uvažováním a úspěšností v úlohách na výpočet objemu a obsahu je pouze na úrovni nízká až střední.

Obr. 4.22 ukazuje graf průměrné úspěšnosti žáků v úlohách na výpočet obsahu a objemu pro jednotlivé kategorie multiplikativního uvažování. Je patrné, že kategorie 0 (používaná pro situace, kdy o úrovni multiplikativního uvažování nelze rozhodnout) může mít na svědomí snížení pozorovaného korelačního koeficientu. Kódem 0 bylo ohodnoceno celkem 126 žáků a nacházejí se zde jak žáci se 100 % úspěšností, tak ti s úspěšností 0 %. Problémem je to, že pokud není uveden postup výpočtu, je nemožné o tomto kódu rozhodnout. Korelace počítaná pouze pro žáky, kteří mají „Kód_DIV“ větší nebo roven 1 (tj. kde máme všechny potřebné informace), vychází s proměnnou „CALC bez H13“ na 0,229 a s proměnnou „F_CONC bez H13“ na 0,212 – což je ale stále pouze nízká až střední míra korelace.



Obr. 4.22: Vztah multiplikativního uvažování a průměrné úspěšnosti v úlohách

Vzhledem k poměrně nízké míře korelace jsem se rozhodla prošetřit ještě hypotézu, že žáci s různou úrovní multiplikativního uvažování dosahují v úlohách na výpočet obsahu a objemu stejných výsledků. Na základě Shapiro-Wikova testu a vizuální kontroly Q-Q grafu zamítáme hypotézu normality dat pro proměnnou „CALC bez H13". Je tedy třeba použít neparametrický test – zvolila jsem Kruskalův-Wallisův[71] test rovnosti mediánů a simultánní porovnání mediánů úspěšnosti v úlohách pro jednotlivé dvojice úrovní multiplikativního uvažování (Hendl, 2004, s. 347). Zamítnutí či nezamítnutí hypotézy shodnosti mediánů na hladině významnosti 0.05 % zobrazuje obr. 4.23.



Obr. 4.23: *p* hodnoty pro testování hypotézy shodnosti mediánů úspěšnosti pro různé úrovně multiplikativního uvažování

Vrcholy šestiúhelníku představují jednotlivé hodnoty proměnné „Kód_DIV1". Černě vyznačené úsečky spojují vždy dva kódy, pro které vychází rozdíl mediánů úspěšnosti jako statisticky významný a kde hypotézu rovnosti mediánů můžeme zamítnout. Je vidět například statisticky významný rozdíl mezi mediány úspěšností v úlohách „CALC bez H13" pro žáky, kteří úlohu H13 řešili pomocí dělení („Dělení"), a pro žáky, kteří úlohu řešili postupným přičítáním („Přičítání"). U úsečky je uvedena i příslušná *p* hodnota[72], v tomto případě 0,029 – hypotézu shodnosti mediánů úspěšnosti pro tyto dvě skupiny tedy zamítáme. Pokud u černě vyznačené úsečky není *p* hodnota uvedena, znamená to, že vyšlo $p < 0{,}001$. Z tohoto grafu lze například vyčíst, že žáci, kteří používali k řešení úlohy H13 dělení a výsledek uměli správně interpretovat, měli statisticky významně lepší úspěšnost v úlohách na výpočet obsahu a objemu[73] než všechny ostatní skupiny žáků s výjimkou žáků, kteří k výpočtu používali postupné násobení. Naopak žáci, kteří úlohu H13 vůbec neřešili,

[71] Použila jsem v SPSS funkci Nonparametric Tests > Independent Samples pro proměnnou „CALC bez H13" a s „Kód_DIV" jako proměnnou určující skupiny. Při automatické volbě testu SPSS vybírá Kruskal-Wallisův test jako nejlepší možnost, jeho užití v tomto případě souhlasí s popisem v (Hendl, 2004, p. 347).

[72] Tedy pravděpodobnost, že se vyskytnou konkrétně pozorovaná data za předpokladu platnosti hypotézy, že mediány obou skupin jsou shodné. Pokud je tato pravděpodobnost menší než 5 %, hypotézu zamítáme.

[73] Z bodu „Dělení" vycházejí 4 černě označené úsečky, tj. pro tyto dvojice skupin byla hypotéza shodnosti mediánů zamítnuta. Jediná dvojice, kde nebyla hypotéza shodnosti mediánů zamítnuta, jsou skupiny „Dělení" a „Násobení" (označeno modrou přerušovanou čarou).

měli statisticky významně horší úspěšnost v úlohách na obsah a objem než všechny ostatní skupiny žáků. Mezi ostatními dvojicemi skupin pak již nebyl statisticky významný rozdíl.

Zkoumání výzkumné otázky RQ3 tedy můžeme uzavřít s tím, že jsme na základě korelační analýzy nalezli pouze nízkou až střední sílu asociace mezi projevenou úrovní multiplikativního uvažování a úspěchem v úlohách na obsah a objem. Vzhledem k tomu, že vstupem nebyl test multiplikativního uvažování, ale kvalitativní proměnná, která pro řadu žáků nemohla být spolehlivě určena (např. proto, že v řešení chyběl postup), je pravděpodobné, že změřená korelace je podhodnocena. Dále se ukázalo, že žáci, kteří používají při řešení úlohy H13 dělení (a výsledek umí odpovídajícím způsobem interpretovat), mají statisticky lepší výsledky ve výpočetních úlohách než ostatní skupiny žáků. Jedinou výjimku tvoří ti, kteří používali pro výpočet postupné násobení – jejich úspěšnost byla srovnatelná.

4.6. Srovnání vlivu jednotlivých proměnných

V předchozích oddílech jsem zkoumala souvislost proměnných popisujících nenumerické uvažování, schopnost strukturace a multiplikativní uvažování s úspěšností v úlohách na obsah a objem. Vzhledem k tomu, že jsem zjišťovala korelaci úspěšnosti s třemi různými skupinami proměnných (dovednostmi žáků), vyvstává přirozeně otázka, zda lze nějak porovnat vliv[74] jednotlivých proměnných na úspěšnost. K tomuto účelu jsem zvolila lineární regresní model, kde závislou (predikovanou) proměnnou je proměnná popisující úspěšnost a nezávisle proměnné (prediktory) vstupující do modelu jsou proměnné popisující nenumerické uvažování, schopnost strukturace, multiplikativní uvažování a proměnné popisující základní charakteristiky žáka (jako jsou ročník a známka z matematiky). Jako závisle proměnnou jsem zvolila proměnnou „CALC bez H13“, protože zahrnuje nejširší spektrum výpočetních úloh na obsah i objem. Úlohu H13 jsem z proměnné „CALC“ vyloučila proto, že řada prediktorů přímo souvisí s výsledky této úlohy. Prediktory tedy nejsou na závisle proměnné konstrukčně závislé. Lineární regresi jsem modelovala v programu SPSS, kde jsem zvolila metodu Enter s postupným přidáváním prediktorů do modelu.

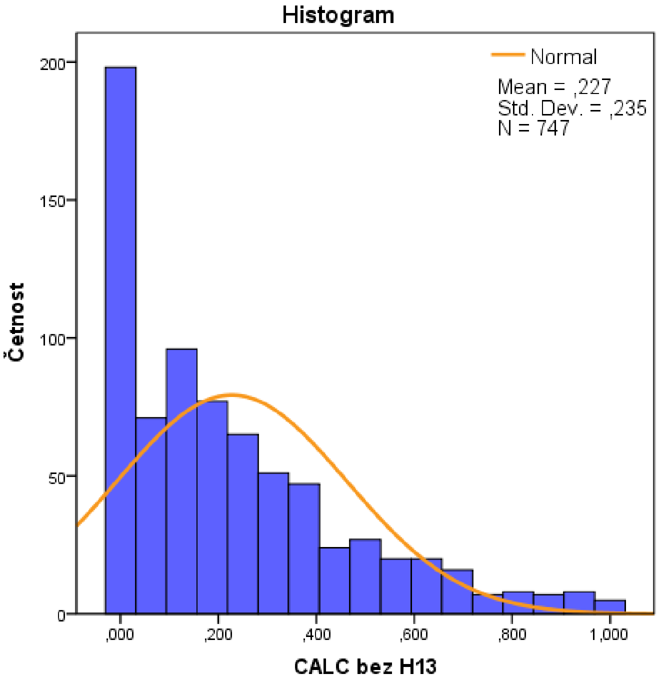
4.6.1. Proměnné

Pro lepší orientaci uvedu přehled všech proměnných, které vstupují do modelu, i když některé z nich již byly popsány v předcházejících oddílech.

Proměnná „CALC bez H13“ uvádí úspěšnost v úlohách H2–H6 a H14–H16 (dosažený počet bodů vydělený maximálním dosažitelným počtem bodů – tedy nabývá hodnot mezi 0 a 1), má střední hodnotu 0,227 a směrodatnou odchylku 0,235. Rozdělení této proměnné je zobrazeno na obr. 4.24 a je zjevné, že se podstatně odlišuje od normálního. Je to způsobeno zejména velkým počtem žáků, kteří v těchto úlohách nezískali ani bod (více než

[74] Hovořím zde o vlivu ve smyslu vzájemného vztahu, provedené analýzy mě neopravňují vztah interpretovat jako příčinnou souvislost.

čtvrtina). Je jasné, že tato proměnná nerozlišuje dobře mezi slabšími žáky. Nicméně poměrně velké množství pozorování nám dovoluje mnohonásobnou lineární regresi použít.



Obr. 4.24: Rozdělení proměnné „CALC bez H13“

Prediktory vstupující do modelu a jejich případné modifikace a jejich základní popisné statistiky ukazuje tab. 4.27. (Popisné statistiky jsou spočteny pouze pro ty žáky, kteří byli zařazeni do modelu.)

Tab. 4.27: Prediktory vstupující do modelu a jejich popisné statistiky, *N*=719

Označení proměnné	**Typ**	**Význam/Modifikace**	**Stř. hodnota**	**Sm. odchylka**
Představivost_TOT	Kardinální na intervalu ⟨0;1⟩	Úspěšnost v úlohách na nenumerické uvažování	0,558	0,1889
Změna_STRAT	Kardinální {0;0,25;0,5; 0,75;1}	Schopnost změny strategie při řešení	0,1544	0,2443
Index_STR	Kardinální {0;1;2; … ;8}	Úspěšnost v úlohách H12 a H13 na jemné bodovací škále.	3,58	2,714
Známka	Kardinální {1;2; … ;5}	Známka z matematiky. Pro jednotlivé známky byly vytvořeny dummy proměnné. Proměnná „známka není k dispozici“ byla vynechána.		
		Známka = 1	0,21	0,411
		Známka = 2	0,32	0,467
		Známka = 3	0,16	0,371
		Známka = 4;5	0,08	0,273

Označení proměnné	Typ	Význam/Modifikace	Stř. hodnota	Sm. odchylka
Ročník	Kardinální {6;7;8;9}	Ročník, který žák navštěvuje	7,33	1,157
Kód_DIV1	Ordinální {-1;0;1;2 ;3;4}	Kvalitativní ohodnocení multiplikativního uvažování žáka (viz tab. 4.24). Vytvořeny dummy proměnné (kód –1, tj. neřešil H13, a kód 0 byl vynechán)		
		D_KÓD_DIV = 3a4	0,164	0,371
		D_Kód_DIV = 1a2	0,185	0,389
Kód_STR2	Ordinální {-2;-1;0;1;2 ;3;5}	Kvalitativní ohodnocení schopnosti strukturace žáka. Vytvořeny dummy proměnné pro každou hodnotu (kód –2 tj. neřešil H13, byl vynechán)		
		D_kSTR = –1	0,053	0,224
		D_kSTR = 0	0,100	0,300
		D_kSTR = 1a2	0,202	0,402
		D_kSTR = 3	0,042	0,200
		D_kSTR = 5	0,124	0,330

Podrobné ověření splnění předpokladů tvorby lineárního regresního modelu je uvedeno v příloze P17.

4.6.2. Tvorba modelu a výsledné regresní koeficienty

Cílem tvorby lineárního modelu není přesně předpovídat hodnotu závisle proměnné, ani určit velikost parciálních regresních koeficientů. Mým hlavním cílem je porovnat prediktory podle jejich predikčních schopností. Nejprve jsem vytvořila model (pomocí metody Enter) pouze pro skupinu prediktorů, které se vztahují k nenumerickému uvažování, strukturaci a multiplikativnímu uvažování (tj. proměnné z RQ1–RG3). Proměnné v tomto modelu jsem na základě jejich významnosti pro predikci rozdělila do dvou skupin – na potenciálně významné (kde $p < 0{,}1$[75]) a ostatní. Následně jsem vytvořila tři finální modely – první pouze s těmito významnými prediktory ($R^2 = 0{,}452$), dále pak pro všechny proměnné z RQ1–RG3 ($R^2 = 0{,}455$) a až poté jsem do modelu přidala ještě další proměnné, které považuji za relevantní (tedy ročník a známku z matematiky; $R^2 = 0{,}534$). Ukázalo se, že rozdíl ve schopnosti vysvětlit variabilitu závisle proměnné (tj. změna R^2) mezi prvním a druhým modelem není statisticky významný, proto v tab. 4.28 prezentuji pouze výsledky prvního a třetího modelu.

[75] U těchto proměnných zamítáme hypotézu, že je regresní koeficient *B* roven nule na hladině $\alpha = 10\ \%$.

Tab. 4.28: Srovnání výsledků dvou regresních modelů pro predikci proměnné "CALC bez H13"

Model	Proměnná	B	Std. Error	Beta	t	Sig.	Tolerance	VIF
1	(Constant)	-0,092	0,022		-4,104	<0,001		
1	Představivost_TOT	0,368	0,049	0,296	7,467	<0,001	0,489	2,043
1	Změna_STRAT	0,169	0,033	0,176	5,150	<0,001	0,660	1,514
1	D_kSTR=5	0,116	0,024	0,163	4,890	<0,001	0,696	1,437
1	Index_STR	0,017	0,003	0,195	4,838	<0,001	0,475	2,107
1	D_Kód_DIV3a4	0,053	0,021	0,083	2,460	0,014	0,677	1,477
1	D_kSTR=0	0,054	0,023	0,070	2,416	0,016	0,926	1,080
3	(Constant)	-0,358	0,045		-7,894	<0,001		
3	Známka=1	0,157	0,019	0,273	8,202	<0,001	0,597	1,675
3	Ročník	0,043	0,006	0,214	7,025	<0,001	0,717	1,395
3	Představivost_TOT	0,252	0,048	0,202	5,236	<0,001	0,444	2,251
3	Změna_STRAT	0,140	0,031	0,146	4,548	<0,001	0,645	1,550
3	D_kSTR=5	0,113	0,032	0,158	3,562	<0,001	0,338	2,961
3	Index_STR	0,011	0,004	0,130	2,659	0,008	0,279	3,584
3	Známka=4;5	-0,059	0,026	-0,068	-2,240	0,025	0,713	1,403
3	D_kSTR=0	0,053	0,025	0,067	2,128	0,034	0,666	1,502
3	Známka=2	0,034	0,017	0,068	2,021	0,044	0,587	1,705
3	D_kSTR=3	0,065	0,037	0,056	1,752	0,080	0,659	1,517
3	D_Kód_DIV3a4	0,041	0,025	0,064	1,654	0,099	0,438	2,283
3	Známka=3	-0,023	0,020	-0,037	-1,150	0,250	0,652	1,534
3	D_kSTR=-1	0,019	0,029	0,018	0,644	0,520	0,855	1,169
3	D_Kód_DIV1a2	0,001	0,022	0,002	0,049	0,961	0,485	2,063
3	D_kSTR=1a2	-0,001	0,027	-0,002	-0,041	0,967	0,322	3,110

Model 1 (tj. proměnné pro nenumerické uvažování, strukturaci a multiplikativní uvažování) vysvětluje 45,2 % variability závisle proměnné „CALC bez H13“[76]. Přidáme-li do modelu i proměnné zachycující známku a ročník (model 3), stoupne vysvětlená variabilita o 7,6 % na 53,4 %. Zároveň se proměnné „Známka = 1“ a „Ročník“ stanou nejdůležitějšími prediktory v modelu. U ostatních prediktorů můžeme sledovat pokles regresních koeficientů ve srovnání s modelem 1 – proměnná pro známku a ročník nese patrně podobnou informaci, a tak vliv těchto proměnných částečně nahradí. Největší vliv pozorujeme u těch žáků, kteří mají z matematiky jedničku – těm předpovídá model téměř o 16 % vyšší úspěšnost ve výpočetních úlohách na obsah a objem (*B*=0,157). Vliv dalších klasifikačních stupňů je však již slabší a blíží se k hranici významnosti nebo je dokonce pod

[76] Dále budu označovat tuto proměnnou také pouze jako úspěšnost nebo úspěšnost v úlohách na výpočet obsahu a objemu

ní (známka 2 znamená zvýšení predikované úspěšnosti o cca 3 %, známka 4 nebo 5 snížení predikovaného výsledku o téměř 6 % a známka 3 není statisticky významným prediktorem). Též vliv věku žáka (ročník) je významný – model predikuje více než čtyřprocentní navýšení úspěšnosti za každý další ročník. Vliv nenumerického uvažování a dalších proměnných následuje až po těchto dvou hlavních prediktorech.

Model 1 umožňuje porovnat mezi sebou vliv proměnných zkoumaných v otázkách RQ1–RQ3. Největší vliv má proměnná „Představivost_TOT“, která popisuje celkovou úroveň nenumerického uvažování žáka. Rozdíl v predikované úspěšnosti v úlohách na výpočet obsahu a objemu (predikovaná hodnota „CALC bez H13“) pro žáka, který by měl nulový bodový zisk v úlohách na geometrickou představivost („Představivost_TOT“), a tím, který by měl v těchto úlohách 100 % úspěšnost, je téměř 37 % (B = 0,368) [77]. To vše samozřejmě za předpokladu, že ostatní prediktory budou shodné. Podobně pro druhou nejdůležitější proměnnou „Změna_STRAT“ (proměnná popisující úspěšnost ve čtyřech úlohách na geometrickou představivost, které vyžadují změnu řešitelské strategie): těm, kteří byli úspěšní ve všech čtyřech úlohách, předpovídá model téměř o 17 % (B = 0,169) vyšší úspěšnost ve výpočetních úlohách než těm, kteří neuspěli ani v jedné z těchto úloh. Třetím a čtvrtým nejdůležitějším prediktorem jsou pak proměnné týkající se strukturace („D_kSTR = 5“ – tato proměnná nabývá hodnotu 1 pro žáky, kteří jsou na úrovni implicitní strukturace, a „Index_STR“[78] – tj. úspěšnost ve strukturačních úlohách H12 a H13). Proměnná „D_Kód_DIV3a4“ (tj. ti žáci, kteří určovali počet pater v úloze H13 postupným násobením nebo dělením) vychází rovněž jako statisticky významný prediktor a těmto žákům předpovídá model zhruba o 5 % vyšší úspěšnost. Právě u této proměnné je vidět, že její vliv nahradila známka a ročník – v modelu 1 je statisticky významná (p = 0,014), zatímco v modelu, kam byly přidány prediktory pro známku z matematiky a ročník, již statisticky významná není.

Výsledky tohoto zkoumání lze shrnout takto: proměnné pro nenumerické uvažování, strukturaci a multiplikativní uvažování jsou významné prediktory pro úspěšnost v úlohách na výpočet obsahu a objemu – jsou schopny vysvětlit 45,2 % variability závisle proměnné. Nejvyšší predikční schopnost má proměnná „Představivost_TOT“ a proměnná „Změna_STRAT“ (obě spadají pod nenumerické uvažování). Dále predikci nejvíce přispívají proměnné týkající se strukturace a nejmenší vliv byl zjištěn u proměnné popisující multiplikativní uvažování. Tato proměnná dokonce přestane být statisticky významná, pokud do modelu zařadíme prediktory zachycující známku z matematiky a ročník. To odpovídá i zjištěním předchozích oddílů, kdy nalezená korelace mezi multiplikativním uvažováním a úspěšností byla pouze nízká až střední (viz oddíl 4.5.3), zatímco pro

[77] To lze formulovat i tak, že zvýšení úspěšnosti v úlohách na nenumerické uvažování o 10 % s sebou nese zvýšení predikované úspěšnosti ve výpočetních úlohách o 3,7 %.

[78] Index strukturace nabývá hodnoty 0 až 8 bodů, koeficient B = 0,017 znamená nárůst predikované úspěšnosti o 1,7 % za každý bod, který žák získá v těchto úlohách navíc. Tedy rozdíl predikované úspěšnosti mezi žákem, který získá 0 bodů, a tím, který získá maximum, by byl 13,5 %.

proměnné popisující nenumerické uvažování a strukturaci podstatná až velmi silná (viz oddíly 4.3 a 4.4.3).

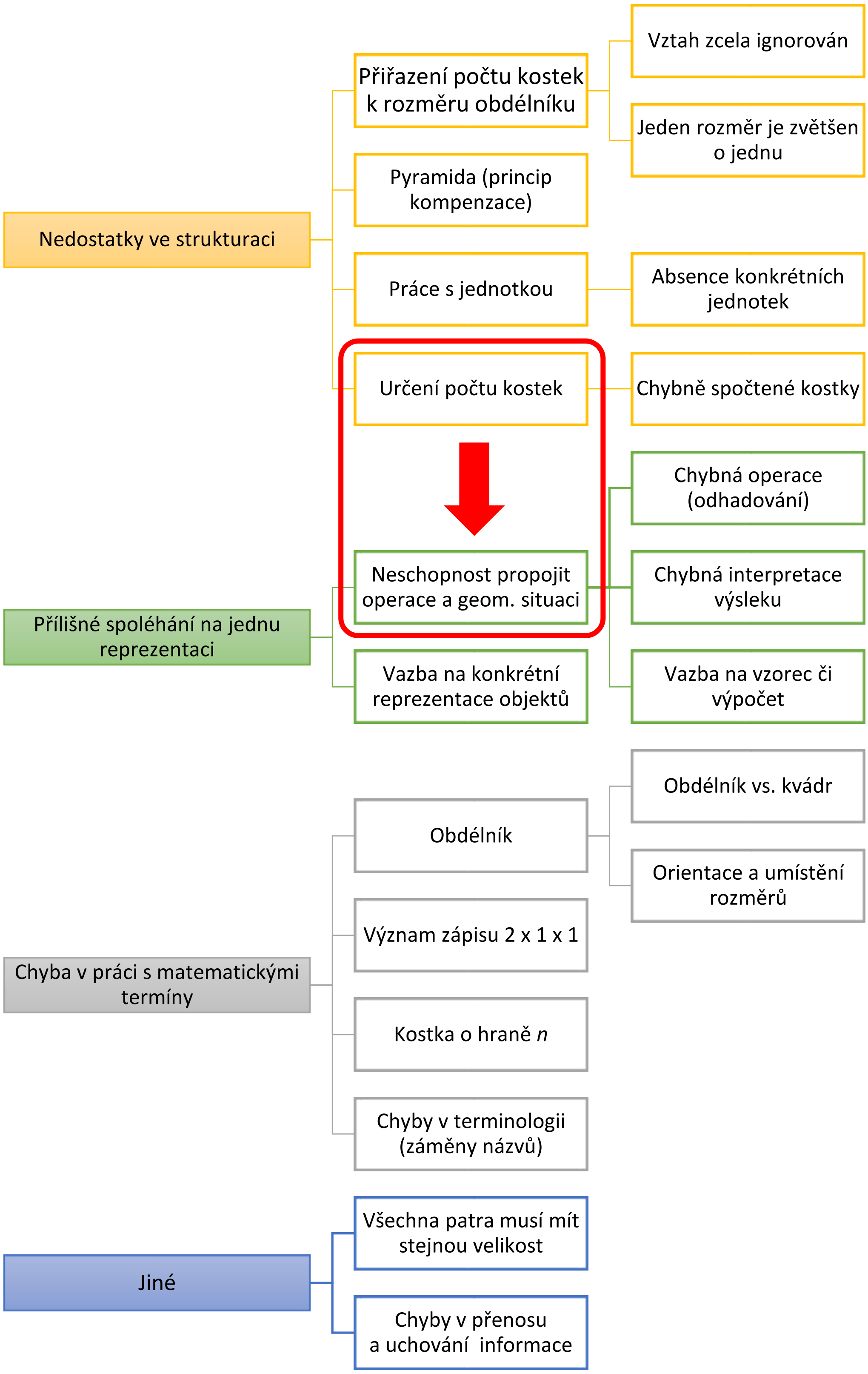
4.7. RQ4 – Strategie a chyby

V tomto oddíle se budu zabývat odpovědí na výzkumnou otázku **RQ4:** Jaké strategie žáci různého věku používají při řešení vybraných úloh na obsah a objem a jakých chyb se dopouštějí?

Těžištěm budou zjištění získaná během rozhovorů. Testy budou sloužit pouze jako doplňkový zdroj vzhledem k tomu, že strategie a chyby žáka můžeme z písemného řešení v mnoha případech pouze odhadovat. To znamená, že případná kvantifikace výskytu jednotlivých jevů, bude pouze orientační. Uvádím pouze počty žáků, u nichž se mi podařilo prokazatelně daný jev identifikovat (u každé úlohy je velké procento žáků, kteří úlohu vůbec neřešili nebo nenapsali postup, a tedy nemá smysl snažit se vyčíslit, kolik procent žáků jakou strategii používá). Analýzy v této kapitole tedy budou zaměřeny primárně kvalitativně.

Chyby a obtíže žáků jsem rozdělila do několika kategorií, které vznikly při kódování a analýze rozhovorů s žáky popsané v oddíle 3.5.2 (viz obr. 4.25). Než je začnu podrobněji rozebírat, uvedu, jak souvisí s teoretickým rámcem, se kterým pracuji. Problémy žáků zařazené do kategorie „Nedostatky ve strukturaci“ souvisí s úrovní 2 *Numerické uvažování* a přechodem na úroveň 3 (viz HUT pro obsah a objem v tab. 2.8 a tab. 2.9). Problémy zařazené do kategorie „Přílišné spoléhání na jednu reprezentaci“ souvisí jak s přechodem mezi úrovněmi 2 a 3 nenumerického uvažování (zde se obě kategorie překrývají), tak s propojováním numerického a nenumerického uvažování (v tabulkách pro HUT označeno šipkou).

To, co jsem označila „Chyby v práci s matematickými termíny“, přímo v popisu jednotlivých HUT nenalézáme – jedná se chyby v porozumění či používání specifických pojmů a konvencí, které se v této oblasti lokálně používají (tedy chyby v práci s formalizovaným matematickým jazykem). Patří sem například značení jednotek, porozumění pojmům obdélník, délka, šířka, výška apod. Poměrně bohatý výskyt problémů spadajících do této kategorie chyb jsem (kromě záměn termínů obvod, obsah a objem) neočekávala. Poslední kategorií jsou jiné obtíže pramenící např. z nepozornosti či nepřenesení informace z jedné situace do druhé nebo ze způsobu zadání situace (procesuální a konceptuální). V popisu HUT tento typ chyb nenalézáme.



Obr. 4.25: Kategorizace pozorovaných obtíží žáků

4.7.1. Nedostatky ve strukturaci

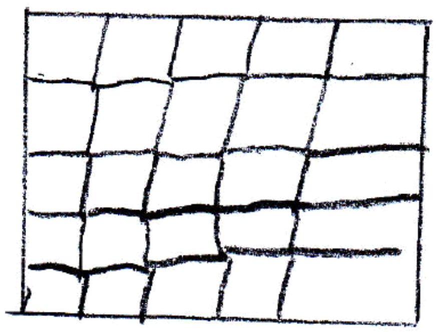
4.7.1.1. Přiřazení počtu kostek k rozměru obdélníku

Jednou z problémových oblastí bylo pro žáky určení vztahu mezi délkou strany obdélníku a počtem kostek, které lze na daný rozměr naskládat. Tento typ problému považuji za strukturační, i když náleží do vyšší úrovně strukturace, než jsem u úlohy H13 při analýze a *priori* očekávala. Tento krok – představa počtu kostek ve vztahu k délkám – by se měl objevit společně s přechodem od strukturace prostoru do jednotek k nejvyššímu stádiu strukturace (tj. uvědomělému užití rozměrů k výpočtu obsahu a objemu). V řešení žáků je patrné, že nejde pouze o to strukturu doplnit či být schopen ji členit do větších celků, jako jsou patra, či určovat počet kostek ve stavbě; tento krok – propojení rozměru s počtem kostek – se zdá být samostatným krokem v HUT: žák může být schopen určit počet kostek u naznačené struktury pomocí násobení, nicméně stále neuspět při propojení rozměru strany s počtem kostek. A naopak, pokud si žák dovede spojit rozměr s počtem kostek, které lze podél strany vyskládat, neříká to nic o tom, zda umí prostor vyplnit odpovídající strukturou a určit správný počet kostek.

Přesně toto vidíme u Maxe (5. ročník); v jeho řešení nalézáme řadu miskoncepcí, s určením vztahu mezi počtem kostek a délkou strany však problém nemá: „Jo, že ten obdélník má na dýlku čtyři kostky a na šířku tři.“ Max sice dál počítá s tím, že v jednom patře je 7 kostek (4 + 3 = 7), s tímto krokem (tj. rozměr↔kostky) však problém neměl. Dokonce kostky správně do obdélníku 3 x 4 poskládal.

Vztah mezi počtem kostek a rozměrem obdélníku zcela ignorován

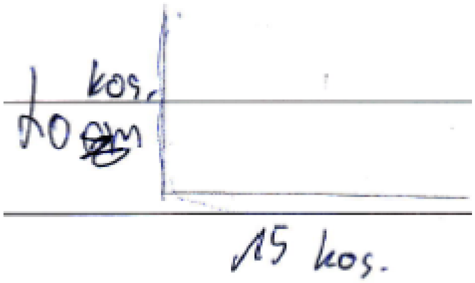
Někteří žáci, zdá se, vztah mezi počtem kostek a rozměry zcela ignorovali – to lze pozorovat například u Michaely (5. ročník). Michaela velmi přesně narýsuje obdélník o rozměrech 3 cm na 4 cm, když do něj ale chce dokreslit strukturu, zkouší nejprve měřit, ale pak kreslí kostičky od ruky po jedné. Její struktura má sice řádky a sloupce, ale jejich počet neodpovídá zadaným rozměrům kostky ale tomu, kolik se do náčrtku kostek právě vešlo (obr. 4.26). Z toho, že se žákyně na začátku snažila měřit, vidíme, že nějakou souvislost mezi počtem kostek a rozměrem předpokládala, nákres však neodpovídá zadání.



Obr. 4.26: Michaela – struktura z kostek

Aniko (6.ročník) nemá vůbec představu, jak by mohl rozměr stran obdélníku souviset s počtem kostek na jedné straně obdélníku:

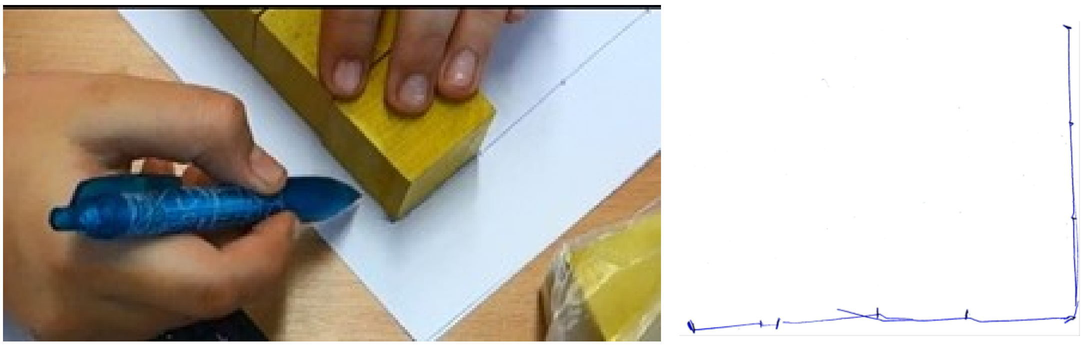
S: Tak by sem vešlo asi tak na od tý délky by tam bylo asi tak deset kostek … si myslím. A tu šířku... to by bylo zase malý.
T: No, vono právě ta plocha je taková malá, na kterou to musíš vejít tu stavbu. Budeš ji muset stavět asi do výšky. Protože tady na to (*ukazuje prstem na náčrtek*): na tři na čtyři se ti vejde jenom určitý počet kostek. Teď by bylo potřeba zjistit kolik. […]
S: Dalo, kdybysme si to padesát devět vydělili čtyřma a... kdyby něco zbylo, tak si to pak vydělím třemi. (*Tazatelka provede výpočet 59 /4 na kalkulačce.*) To je čtrnáct celých sedmdesát pět. Tak by... nebo se to asi nejdřív vydělí těma třema.
S: […] (*pokládá kalkulačku s výsledkem 19.66666667).* Když bysme to takhle vzali, tak po zaokrouhlení to bude dvacet... *(tazatelka přitakává)* ... a u tamtoho by to bylo zaokrouhleně patnáct. Takže na šířce (*přemýšlí*) na šířce by bylo patnáct a pak na.... na šířce by bylo patnáct a na délce by byl.... né, já jsem to teď obrátila. Na délce by bylo patnáct a na šířce by bylo...
T: Těch dvacet.
S: Těch dvacet. (*Aniko kreslí obr. 4.27*))



Obr. 4.27: Aniko – počet kostek na stranách obdélníku

Vidíme, že Aniko vydělila celkový počet kostek délkami stran obdélníku a výsledek interpretuje jako počet kostek, který musí být na každé straně. Žákyně zaměřuje pozornost na slovo „nejnižší“ v zadání.

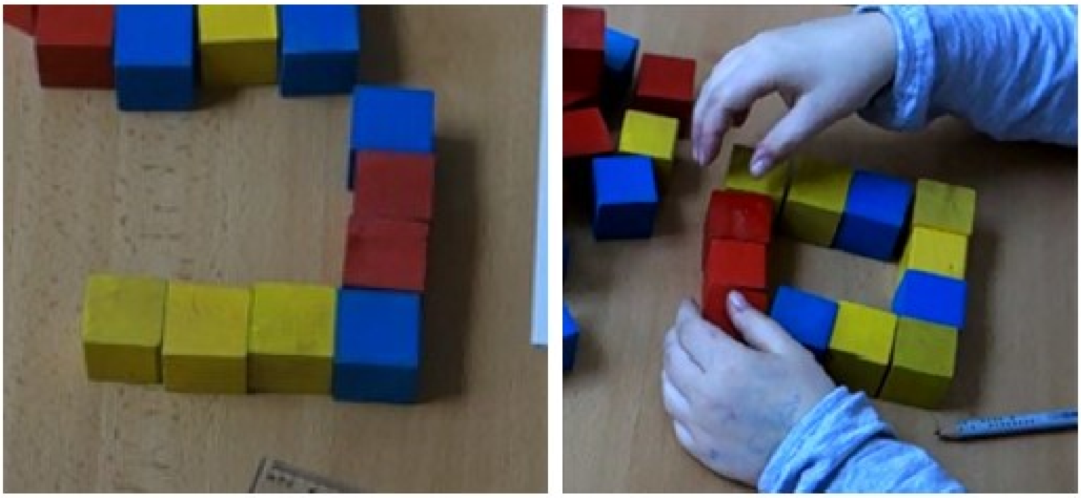
Je možné, že Aniko hledá takové řešení, aby vyskládala všech 59 kostek do jednoho podlaží. To by vysvětlovalo, proč dělí celkový počet kostek. Ani na dotaz tazatelky, zda je jedno patro nějak omezené, nezaměří svou pozornost na rozměry kostky (všímá si pouze rozměru patra). Vidíme, že se zde jedná s velkou pravděpodobností rovněž o problém strukturační, protože žákyni vůbec nezarazila skutečnost, že kdyby dostavěla celou stavbu tak, jak jí má navrženu (tj. 15 na 20 kostek), potřebovala by celkem daleko více kostek (300). Aby si žákyně uvědomila souvislost mezi rozměrem a počtem kostek, musela tazatelka souvislost předvést pomocí obkreslování kostek (viz obr. 4.28). Pak už žákyně zvládla určit počet kostek bez dokreslení struktury či vymodelování stavby (vzhledem k tomu, že při výpočtu počítá kostky podél stran – je možné, že počet kostek určila dokonce pomocí násobení).


Obr. 4.28: Aniko – souvislost mezi počtem kostek a rozměrem (manipulace a výsledný nákres)

Vidíme tedy, že Aniko u malých rozměrů problém s představou struktury a určením počtu kostek nemá. U větších rozměrů to není jisté, ale rozhodně má problém propojit rozměr strany s počtem kostek. Problém není způsoben tím, že by nevěděla, co je délka hrany (to tazatelka během rozhovoru demonstruje, ale žákyně stále trvá na svém původním řešení 15 x 20 kostek).

Jeden rozměr je zvětšen o jednu

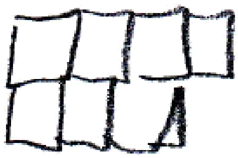
To, že vztah mezi počtem jednotek a rozměrem strany patří opravdu do strukturační úrovně, je ještě lépe vidět u žáků, kteří ve snaze modelovat situaci popsanou v zadání sice postaví do jedné řady 4 kostky, ale když znázorňují druhý rozměr, přidají 3 kostky ve sloupci k těm již vyskládaným čtyřem, čímž jim ale vznikne čtverec 4 x 4. To vidíme například na obr. 4.29 v řešení žákyň 5. ročníku Aleny (vlevo) a Daniely (vpravo).



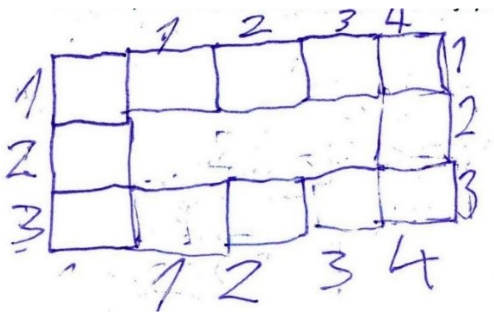
Obr. 4.29: Přidávání tří kostek ke čtyřem – Alena (vlevo) a Daniela (vpravo)

Daniela si svou chybu při následné kontrole sama opravila (počítala kostky po stranách, jestli má opravdu 3 a 4), ale Alenu se tazatelce nepodařilo na správné řešení žádným způsobem navést. Jedná se ovšem o velmi slabou žákyni, která měla zpočátku problém i umístit rozměry délku a šířku obdélníku kolmo k sobě. Zprvu situaci modelovala tak, jak je znázorněno na obr. 4.30, z něhož je vidět, že Alena nemá dobré porozumění ani u pojmů délka, šířka nebo obdélník.

Jako projev stejné miskoncepce můžeme interpretovat i některá písemná řešení žáků v testu. Obr. 4.31 ukazuje nákres žáka 6. ročníku (BD.6A.19). Tento žák pravděpodobně nejprve nakreslil sloupec ze tří kostek vlevo a řadu o čtyřech kostkách (nahoře i dole) přidal vedle. Poslední sloupec ale vytvořil pouze přidáním jedné kostky mezi zakreslené řady. Tak mu vznikl nákres o rozměrech 3 x 5 kostek, i když on sám kostku prvního sloupce mezi kostky umístěné v první řadě nepočítá (není označena číslem).



Obr. 4.30: Alena – délka 4 rovnoběžná se šířkou 3



Obr. 4.31: Přidání tří kostek ke čtyřem – písemné řešení žáka 6.ročníku

Problém přidávání tří kostek ke čtyřem považuji za ryze strukturační: jde vlastně o vymodelování jedné kostky / řady / sloupce dvakrát (jakási forma dvojího započtení) – žák ví, že 4 cm odpovídá čtyřem kostkám, ale neuvědomí si, že jednu z těch čtyř kostek/jeden sloupec již má v modelu umístěnu.

4.7.1.2. Pyramida (princip kompenzace)

Jako jedno z dalších problematických míst pro žáky se ukázaly dodatečné podmínky kladené na stavbu – konkrétně požadavek, aby stavba byla co nejnižší, a skutečnost, že je třeba použít všechny kostky (což pak znamená, že ne všechna podlaží budou plná).

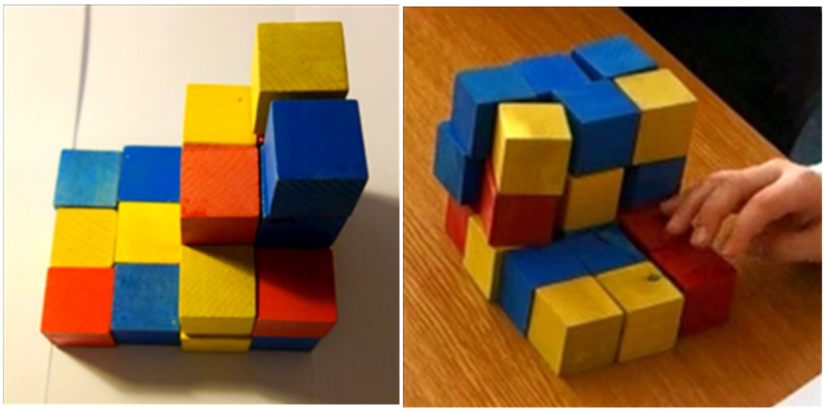
Obr. 4.32: Dina – stavba pyramidy

Např. Dina (6. ročník) zdánlivě nezaměřuje svou pozornost na požadavek, aby byla stavba co nejnižší, ale drží se vize pyramidové stavby. S dopomocí tazatelky a pravítka nakreslila plán prvního podlaží a přemýšlí, že další kostky bude umisťovat vždy do míst, kde se setkávají čtyři kostky podlaží předchozího (tedy na spodních 12 kostek by umístila už jen 6 a následně už jen 2). Když ji tazatelka upozorní, že by stavba měla být co nejnižší, poopraví svůj postup a rozhodne se ponechat vždy dvě patra shodná před tím, než počet kostek v patře zmenší (viz obr. 4.32).

Prakticky stejně jako Dina by postupovala i Daniela (5. ročník). Udělala první podlaží o 12 kostkách a tazatelka se zeptala, jak by postupovala, kdyby měla použít všech 59.

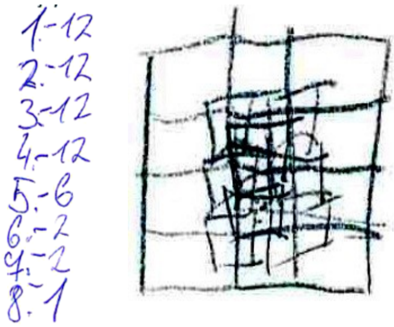
> S: Mě napadlo jakoby, že bych udělala ještě jednu tu stejnou…. (*Daniela naznačuje rukou položení další vrstvy; tazatelka přitakává)* .... pak zase menší, ale zase ještě jednou to zvopáknu. *(tazatelka přitakává) …* to zvopakovala … *(tazatelka přitakává)* jakože dvakrát stejný to podlaží.

Podobné schodovité stavby (viz obr. 4.33) staví rovněž Max (5. ročník) a Veronika (5. ročník). Tento typ chyby se však při rozhovorech objevil pouze u slabých až velmi slabých žáků.



Obr. 4.33: Schodovitá stavba Maxe (vlevo), Veroniky (vpravo)

Zdá se, že schopnost uvidět vztah mezi výškou stavby a počtem kostek v jednotlivých patrech je do určité míry analogická práci s jednotkou různé velikosti. Vyžaduje to, aby žák vnímal patro jako jakousi (stavební) jednotku a byl mu jasný vztah, že čím větší je jednotka, tím méně jednotek budu potřebovat na dosažení určitého objemu (zde konkrétně reprezentovaného určitým množstvím kostek). To přesně odpovídá následující podúrovni strukturace v úrovni 2 *Iterace jednotky a určení počtu jednotek* v HUT: Práce s jinými jednotkami a tvary (určování počtu jednotek); princip kompenzace (čím větší jednotka, tím méně jich budu potřebovat). Pokud se u žáků objevuje tato chyba, je to pravděpodobně proto, že se opírají o svou životní zkušenost (stavění pyramid a věží) a podmínku v zadání ignorují (nevšimli si jí, nepřikládají jí význam) nebo že nevidí vztah mezi výškou stavby a velikostí jednotlivých pater, což lze klasifikovat jako problém náležící do kategorie „Nedostatky ve strukturaci“.



Obr. 4.34: Stavba tvaru pyramidy v řešení žákyně ZR.7C.21

Pokusy o stavbu pyramidy nalézáme i mezi testovanými žáky – ale přesně identifikovat je můžeme na základě písemného řešení jen u několika málo respondentů – viz obr. 4.34.

4.7.1.3. Práce s jednotkou

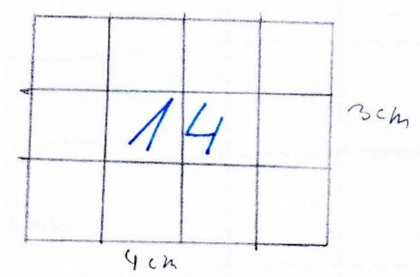
Absence konkrétních rozměrů

Ukázalo se, že práce s „abstraktní jednotkou“ je pro žáky vesměs problematická. Jednak se tato otázka objevovala velmi často při zadávání testu (otázka na rozměr jednotky se objevila ve 21 z 60 testovaných tříd) a stejně tak prvních 6 testovaných žáků mělo problém s pochopením výrazu „kostek o hraně 1“. Vidíme to například v rozhovoru s Amálkou (6. ročník).

> S: No to, jak je to.... to nás zajímá přesně 59 kostek o hraně jedný, co... co je jako o hraně jedný?
> T: Tak (*pokládá na stůl dřevěnou kostku*) máš nějakou kostku a tady ta hrana (*ukazuje hranu na kostce*) je prostě dlouhá jednu jednotku.
> S: Hm, dobře.

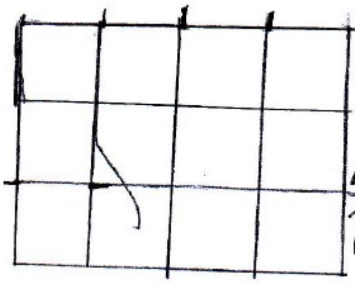
Jak už jsem psala v oddíle 3.4, s úlohou zadanou bez uvedení jednotek pracovalo pouze prvních 6 žáků. Takže v dalších rozhovorech se problém neobjevil.

Domnívám se, že tyto problémy souvisí se strukturací, ale poměrně volně. Aby žák tuto obtíž překonal, musí si nějakou (obecnou) jednotku představit; pokud žák například vidí vztah mezi délkou hrany krychle a délkou strany obdélníku (např. představí si 3 krychle vyskládané podél strany délky 3), je pravděpodobné, že obtíž překoná; pokud nestrukturuje dobře, konkrétní rozměry by mu pomohly k přesnému narýsování situace a následnému vyřešení úlohy. Zjistila jsem, že strategii přesného narýsování prvního podlaží pomocí pravítka použilo v rozhovorech 15 žáků (více než čtvrtina), zatímco v písemném testu se tento jev prakticky neobjevil. Výjimkou je žákyně 8. ročníku BT.8A:03 (viz obr. 4.35). Té však ani narýsování struktury ke správnému určení počtu kostek nepomohlo.



Obr. 4.35: Žákyně 8. ročníku jako jedna z mála v hlavním testu strukturu podlaží rýsuje

Přitom žáci při psaní hlavního testu pravítka k dispozici měli. Domnívám se proto, že je nízký výskyt rýsování náčrtku způsoben právě tím, že v úloze nejsou explicitně uvedeny jako jednotky centimetry. Mnozí žáci – jako například Matyáš (5. ročník) – vůbec neměli představu, kolik kostek v jednom patře vyjde, dokud nedokončili nákres. U Matyáše lze velmi dobře pozorovat, jak nejprve rýsuje po jedné kostce a teprve, když mu sjede tužka, uvědomí si, že může nakreslit celý sloupec kostek najednou. Domnívám se, že tomuto žákovi uvedení rozměrů s konkrétní jednotkou při řešení úlohy významně napomohlo.



Obr. 4.36: Matyáš (5. ročník) zjišťuje počet kostek až na základě přesně narýsovaného nákresu

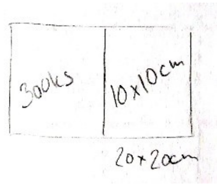
Tedy překážka spočívající v neuvedení konkrétních rozměrů se zdá být závažnější pro ty žáky, kteří tak dobře nestrukturují (proto lze tvrdit, že náleží do kategorie „Nedostatky ve strukturaci“), a rovněž souvisí s jevy ve skupině „Vztah mezi počtem kostek a rozměry obdélníku“, kterým byl věnován oddíl 4.7.1.1.

Jednotka jako nedělitelná

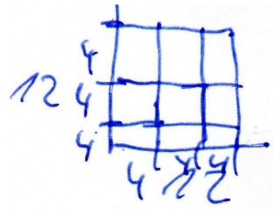
Při analýze písemných řešení testu (viz příloha P18) se podařilo identifikovat několik žáků, kteří v úloze H2 určují obsah trojúhelníku jako počet všech čtverců, kam trojúhelník zasahuje – tedy jako 5 čtverců. Pravděpodobně nepracují s částmi jednotky nebo s jednotkou jako dělitelnou. Výskyt obdobné chyby popisují Kamiová a Kyshová (2006), ovšem v daleko větším měřítku.

Vzájemný vztah jednotek (převody)

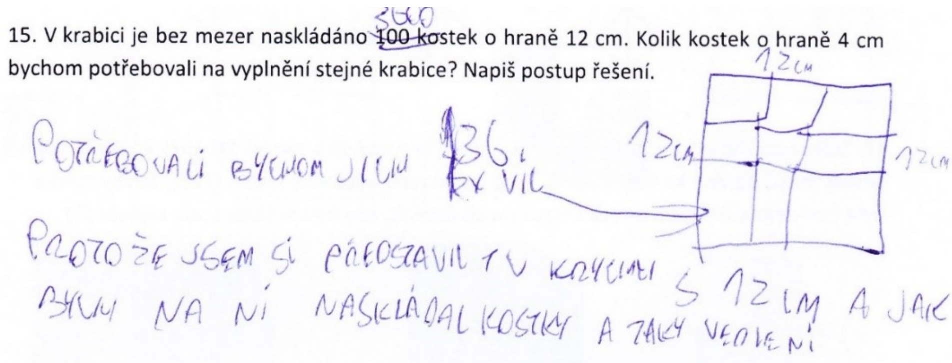
Další druh chyb, který náleží do této kategorie, se objevil při analýzách písemných řešení žáků u úloh H5 a H15. Úlohy jsou zaměřeny na princip kompenzace a práci s jednotkami (tj. řeší, kolik menších či větších jednotek je potřeba k vyplnění stejné plochy nebo stejného objemu). V těchto úlohách se objevilo pouze mizivé procento žáků, kteří se úlohu pokusili řešit pomocí grafického znázornění situace (u úlohy H5 méně než 7 % žáků a u úlohy H15 jen přibližně 2,5 % žáků). Mnozí žáci, i když si situaci nakreslili, nenahlédli vzájemný vztah používaných jednotek. Nezakreslili situaci tak, aby menší jednotka vyplňovala tu větší, nebo ji vyplňuje, ale ne ve všech rozměrech: někteří žáci 9. ročníku nakreslili dlaždici 20 x 20 jako obdélník, do kterého se vejdou vedle sebe dvě menší dlaždice (viz obr. 4.37), zatímco jiný žák 9. ročníku vyplnil pouze dno krychle o hraně 12 (viz obr. 4.38). Téměř správné vyplnění vidíme na obr. 4.39 u dalšího žáka 9. ročníku (zde pravděpodobně došlo k chybě až při určování počtu menších jednotek potřebných k vyplnění větší jednotky).



Obr. 4.37: Nákres dlaždic v úloze H5 (SV.9A.05)



Obr. 4.38: Vyplněné dno krychle (BD.9D.06)



Obr. 4.39: Téměř správné vyplnění větší jednotky v úloze H15 (TB.9A.01)

Podrobnější analýza chyb v řešení úloh H5 a H15 se nachází v příloze P18. Snaha o řešení úlohy H15 pomocí náčrtku se projevuje v zásadě až u žáků 9. ročníku, kde se jich o tento způsob řešení pokusilo 12 (v ostatních ročnících dohromady pouze 6). Z těchto dvanácti pouze 5 dospělo ke správnému řešení. Geometrická představa jednotky a jejich vzájemného vztahu (tj. vyplňování jedné jednotky pomocí jiné) je evidentně pro žáky obtížná a nezdá se, že by s ní běžně pracovali.

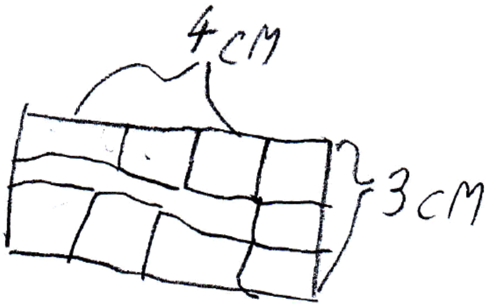
4.7.1.4. Určení počtu jednotek (enumerace)

Další poměrně početnou skupinou chyb, které se ve spojitosti se strukturací objevily, jsou chyby při určování počtu kostek/jednotek v útvaru s naznačenou strukturou. Při rozhovorech se tyto chyby projevily ve dvou různých situacích. První typ se objevil v situaci, kdy žáci určovali počet kostek v prvním podlaží stavby (na základě částečně či zcela zakreslené struktury – 2D situace), a druhý typ se projevil při určování počtu kostek ve stavbě z kostek zadané nákresem (3D situace). Tyto chyby těsně souvisí s následujícím oddílem (4.7.2) a chybami pramenícími z nepropojení geometrické situace a výpočtu.

Chyby v určení počtu jednotek ve 2D situaci

I u žáků 6. ročníku lze vidět, že určují počet kostek v patře (analogické počtu čtvercových dlaždic na obdélníku) nepříliš systematickým počítáním nejprve podél okrajů a pak uvnitř. Eda, žák 6. ročníku, počítá vždy kostky podél okrajů a pak dopočte kostky uprostřed. Tato jeho strategie však často vede k chybám. Zjištění počtu kostek prováděl Eda v představě, ale na žádost tazatelky svůj postup vysvětluje a zakresluje.

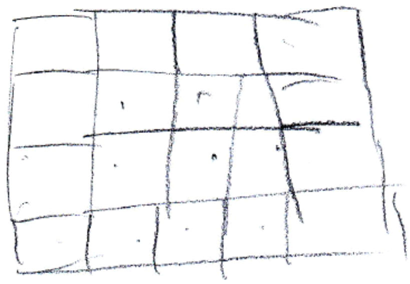
> S: Já to jenom načrtnu, jo? (*dokresluje do obdélníku kostičky po jedné, nejprve horní řadu*) […]
> S: A sem se v tom případě vejdou 2 kostky, nebo… *(tazatelka přitakává) …* Protože jednu už tady mám. Raz, dva… (*pokračuje v dokreslování kostiček do obdélníku do pravého sloupce; kostku v rohu „už tady má“*) A, ee, sem se v tom případě zase vejdou tři kostky, protože jednu už tady mám. (*Eda dokresluje 3 kostky do spodní řady, … tazatelka přitakává) …*Takže tak a, ee, potom tady už bude jenom jedna kostka. *(Eda dokončuje nákres zobrazený na obr. 4.40; tazatelka přitakává*) Ee a tady máme ještě další dvě, takže dohromady 13 kostek zaplní jedno patro a…



Obr. 4.40: Edův způsob počítání kostek v patře

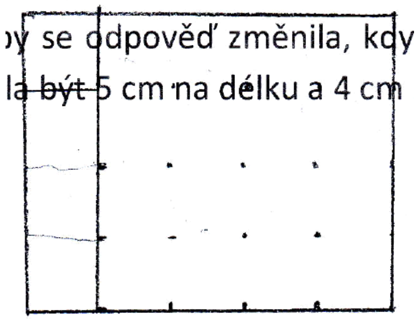
Vidíme, že Eda počítá kostky na okrajích takto: 4 + 2 + 3 + 1 (při součtu ale udělá numerickou chybu a vyjde mu 11) a následně přidá 2 kostky za vnitřek. Když se snaží podobný výpočet provést pro patro o rozměrech 5 x 4, počítá opět 5 + 3 + 4 + 2, ale na vnitřek už zapomene, takže mu vyjde 14. Eda pracuje dobře se strukturací podél okrajů, rohové kostky nezapočítává dvakrát, ale vnitřku struktury nevěnuje příliš pozornosti. Jeho strategie určení počtu kostek jako by spadala do nižších úrovní strukturace (viz HUT pro obsah, úroveň 3 nebo 4 v tab. 2.6) a neumožňuje mu snadné zobecnění na větší rozměry obdélníku. Podobný způsob počítání kostek v jednom patře stavby vidíme i u Eriky (6. ročník) a Filomeny (6. ročník). Filomena zjišťuje počet kostek v případě patra o rozměru 5 x 4.

> S: Takže tady je 4 (*kreslí 4 kostky pod sebe*) 4 kostky (*tazatelka přitakává, žákyně kreslí další 4 kostky vodorovně od dolní kostky doprava*) No, obdélník (*tazatelka přitakává a žákyně dodělává nákres na obdélník rozdělený na jednotlivé kostičky*) 4 a tady je teda 5. Takže tady je těch 6 kostek. Takže tady je těch 6 kostek (*ukazuje na kostky uprostřed*), takže to je 10 (*přičítá sloupeček vlevo, není rozumět*), … to je 14 (*pravděpodobně přičetla kostky vpravo*), 24.


Obr. 4.41: Filomena počítá kostky

Tedy Filomena započetla nejprve 6 kostek uprostřed nákresu, pak dvakrát 4 kostky za krajní sloupce a nakonec 10 – což by mohlo být dvakrát 5 za spodní a horní řadu. Tedy se pravděpodobně jedná o dvojí započtení kostek v rozích.

Růžena (6. ročník) již počet kostek v prvním podlaží určuje násobením, ale (možná i vlivem svého nákresu) při určování počtu kostek (čtverců v obdélníku) vynechá jeden sloupec či řádek – tedy u nákresu na obr. 4.42 určí počet kostek pomocí výpočtu 4 · 4. Tuto chybnou strategii opakuje ještě několikrát i u obdélníků s jinými rozměry. Podle toho, který rozměr spočetla dřív, jí buď vychází obsah obdélníku 6 x 4 jako 18 = 6 · 3, nebo jako 20 = 5 · 4.



Obr. 4.42: Růženin nákres podlaží 5 x 4

Je patrné, že někteří žáci ještě v 6. ročníku neurčují počet čtverců v obdélníku pomocí opakovaného přičítání či dokonce násobení, nepracují s opakujícími se celky, jako jsou řádky a sloupce, ale počítají značně nesystematicky. Lze konstatovat, že tento konkrétní model (tuto reprezentaci) nemají spojený s násobením. O to obtížněji mohou pak spojovat obsah obdélníku s násobením délek jeho stran.

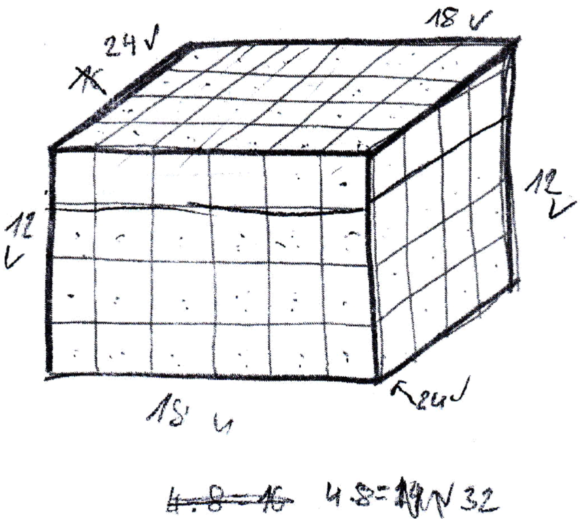
Chyby v určení počtu kostek ve 3D situaci

Následující chyby se projevily u žáků, kteří měli za úkol určit počet kostek ve stavbě tvaru kvádru (s rozměry 4 x 6 x 4) dané náčrtkem. Tato úloha byla v rozhovorech předložena celkem 32 žákům (jsou uvedeni v seznamu v příloze P17) a 18 z nich (tedy více než polovina) určovalo počet kostek ve stavbě tak, že spočetli viditelné stěny (tedy vlastně povrch). Někteří žáci dokonce spočetli viditelné stěny kostek pouze na těch stěnách kvádru, které byly zakresleny na obrázku. U 8 z těchto žáků mohl být tento výsledek způsoben tím, že třída (5. ročník, škola Za Rybníkem) v době natáčení rozhovorů právě probírala povrch kvádru, kde byl pro ně základní pomůckou model kvádru s vyznačenou čtvercovou sítí. U ostatních 21 žáků se tato chyba objevila v 10 případech, což je stále téměř polovina. U žáků, kteří používají učebnice Hejného a kol., se tato chyba projevila pouze u 4 ze třinácti respondentů.

Pozoruhodné bylo, že mnozí z žáků, u kterých se tato chyba objevila, zvládli krátce před tím vyřešit úlohu H13 – tedy určili počet pater, které postaví z daného počtu kostek. Minimálně byli všichni tito žáci tazatelkou dovedeni k přibližně správnému řešení. Domnívám se, že obtíž této úlohy na určení počtu kostek ve stavbě tkví právě ve způsobu zadání – zde je zadáním hotový objekt (koncept); navíc ještě 3D objekt znázorněný pomocí jistých konvencí v rovině. V úloze H13, když žáci nevěděli, nejčastěji zjišťovali odpověď tím, že si představovali proces stavby: jak postupně přidávají další patra, než spotřebují všech 59 kostek. Pokud se tedy zaměřovali na proces stavby, bylo pro ně poměrně snadné určovat počet kostek pomocí násobení (opakovaného přičítání) jako: „počet kostek v patře“ · „počet pater“.

Zdá se tedy, že se téměř polovina žáků 5. a 6. ročníku stále nachází pouze na úrovni 2–3 Battistovy HUT pro výpočet objemu kvádru (viz tab. 2.4). Například výpočet Petronely (6. ročník) už by odpovídal úrovni 3, neboť rozpoznává stejnou kostku z různých perspektiv, vícenásobnému započtení kostek se však vyhne pouze v horní vrstvě a kostky umístěné podél svislých hran stavby stále započítává dvakrát, stejně tak i kostky v celé spodní vrstvě.

> S: Ee, takže, já jsem si vypočítala jakoby jenom todlecto, těhlentěch 18. (*Odděluje v přední stěně stavby vrchní patro čarou – viz obr. 4.43.*)
> T: Jo. Jakoby odsud, od týhle čáry dolů.
> S: Pak na druhý straně je to úplně to samý…. *(tazatelka přitakává) …* Pak tady jsem si to vypočítala taky podsaď. … *(tazatelka přitakává)* Tady je těch 12. *(ukazuje na boční stěnu stavby)* Na druhý straně je to úplně to samý. … *(tazatelka přitakává) …* A tady nahoře jsem si to vypočítala jakoby už všechny. ... *(tazatelka přitakává) …* Protože todlecto, ta kostka je, jakože tohle *(ukazuje na dvě různé stěny kostky).*
> T: *(přitakává)* To je stejná kostka, aha, už to vidím. […]
> S: Ee, a teď ještě musíme spočítat ten vnitřek. […] tohlecto je 8, to je ten vnitřek jakoby *(ukazuje na 8 kostek uprostřed horní stěny stavby)*. *(tazatelka přitakává)* A to je jakoby, tohlentco jsou 4 *(pohybuje tužkou směrem dolů v náznaku sloupce)*. A ty 4 nejsou vidět jako, že jo.



Obr. 4.43: Výpočet Petronely

Viděli jsme, že polovina žáků 5. a 6. ročníku, s nimiž byly dělány rozhovory, ještě nepoužívá operaci násobení k určení počtu kostek ve stavbě (nemají tuto operaci propojenou s touto konkrétní reprezentací), což pravděpodobně bude překážkou k tomu, aby nahlédli, že objem kvádru lze zjistit vynásobením délek jeho tří navzájem kolmých hran.

4.7.2. Přílišné spoléhání na jednu reprezentaci

U tohoto typu chyb se jedná o narušené propojení mezi některými z těchto elementů: konkrétní reprezentace geometrické situace, geometrická situace (jako prvek teoreticko-geometrického prostoru), matematická operace sloužící k výpočtu a algebraický vzorec sloužící k výpočtu. Nejčastěji můžeme pozorovat narušení provázanosti mezi geometrickou situací a matematickou operací (příp. vzorcem). Projevuje se to právě tím, že žáci operaci odhadují například na základě klíčových slov (to jsme viděli i v oddíle 4.5.1 věnovaném multiplikativnímu uvažování), nebo nějakou operaci k výpočtu zvolí a u interpretace jsou velmi nejistí a správnou odpověď odhadují podle reakce tazatele. Rovněž sem patří nesprávné užití vzorců, které je zdaleka nejčastější chybou pozorovanou v písemných testech žáků. Na druhou stranu do této kategorie řadím i situace, kdy žák výpočet/výsledek odvozuje z konkrétního nákresu (lze si toho nejlépe všimnout, pokud nákres obsahuje nějakou chybu a žák podle toho opraví výpočet, který by byl jinak správný). Nepracuje tedy s teoreticko-geometrickým objektem, ale pouze s danou konkrétní reprezentací.

4.7.2.1. Neschopnost propojit operace a geometrickou situací

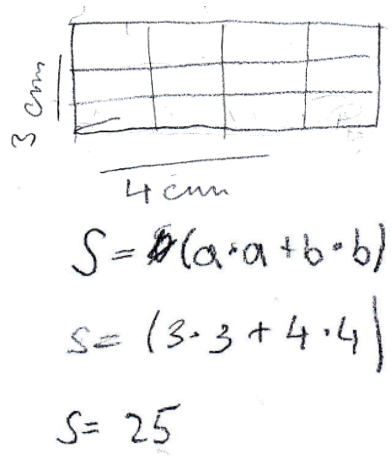
V rozhovorech s žáky můžeme chybějící propojení mezi geometrickou situací a výpočtem pozorovat například u Tondy (6. ročník). Tonda na určení počtu kostek v patře užívá sčítání a interpretaci výsledku opravuje podle reakce tazatelky.

S: No, tak já bych osobně teda udě... sečetl tu délku a šířku.... (*ukazuje prstem na zadání, tazatelka přitakává*) .... tří a čtyř centimetrů, což je teda sedm. *(tazatelka přitakává, žák píše „4 + 3 = 7")* A potom bych vydělil padesát devět kostek děleno sedmi.
T: (*přitakává*) A těch.. to čtyři plus tři, těch sedm, by bylo jakoby počet kostek.. kde? Nebo....
S: V jednom podlaží.
T: To by bylo v jednom podlaží.
S: Dohromady. *(tazatelka přitakává) …* To je... sedm? (*přemýšlí nad dělením 59 : 7*) Jo, sedm. (*dále šeptá*) To je blbost. Tady dostanu vždycky těch osm.

$$59 : 7 = \cancel{7}8$$

S: Takže v nejvyšším podlaží by podle mě bylo osm kostek. (*tužkou naznačuje směrem na výsledek dělení)*
T: V nejvyšším podlaží by bylo osm kostek, protože ti to vyšlo jakoby, že těch padesát devět děleno sedmi je osm, jo?
S: Anebo by to bylo teda osm pater. (*čte si znovu zadání)* Jo... tak to bude osm podlaží.
T: (*přitakává*) Dobře. Takže osm podlaží.

Viktorie (6. ročník) si nejprve nakreslila náčrtek prvního podlaží, včetně umístění kostek. Dokonce později tazatelce vysvětluje, proč to tak nakreslila: že když má každá kostka 1 cm, tak se vejdou na jednu stranu 4 a na druhou stranu 3. Pak ale zapíše vzorec na obr. 4.44 a počítá, aniž vlastně tuší co.



Obr. 4.44: Viktorie – určení počtu kostek

S: (počítá pod sebou 16 + 9 = 25) Blbě… (tazatelka přitakává). To je blbost, docela.
T: Tady ti vyšlo 25, a co by to mělo být?
S: Ee, to nevím.
T: Dobře. Tak se pojďme podívat tady na ty kostičky. *(Viktorie souhlasí)* Jak máš tady nakreslený. Kolik ti jich vyjde na to první patro? Kolik jich tam postavíš?
S: 12 (*tazatelka přitakává)* Tak tam asi vynásobíme 25 těma dvanácti?

Vidíme, že Viktorie, i když má před sebou správný náčrtek, volí raději práci se vzorcem, aniž tuší, co by mohl daný vzorec zjišťovat. Když tazatelka zaměřuje její pozornost zpět na náčrtek situace, Viktorie se stále snaží do výpočtu začlenit výsledek, který právě spočetla. Dále jednotlivé vrstvy kostek fyzicky modeluje. Ovšem přesvědčení o tom, že to, co získala výpočtem podle vzorce, je pro získání výsledku důležité, nalézáme i v dalším rozhovoru, když Viktorie říká: „Možná 59 děleno 25. Ne, děleno 12.“ Aby Viktorie úlohu nakonec správně vyřešila, musí ji tazatelka opakovaně navádět na práci s modelem a pomoci jí vytvořit procesuální model stavby. Podobné jevy pozorujeme i v dalších rozhovorech: například u Aleny (5. ročník) nebo u Ctirada (5. ročník).

Použití nesprávného vzorce či nesprávně zvolené matematické operace jsou nejčastější chybou identifikovanou v řešeních žáků i v hlavním testu. Souhrn v tab. 4.29 ukazuje, kolik procent identifikovaných chyb lze zařadit do kategorie "Neschopnost propojit operace a geometrickou situaci" u každé úlohy – jsou to skupiny chyb nazvané „Operace se zadanými údaji“, „Jiný vzorec“ (sem jsou zahrnuty i záměny – tj. chyby, kdy žáci místo objemu počítají povrch a místo obsahu obvod), „Linearizace“ a „Jen první krok výpočtu“. Hranice mezi skupinami chyb „Operace se zadanými údaji“ a „Jiný vzorec“ je neostrá. Označení „Jiný vzorec“ používám pro případy, kdy se v řešení buď vyskytuje přímo algebraický zápis vzorce, nebo pokud výpočet připomíná dosazení do nějakého vzorce. Označení „Operace se zadanými údaji“ je použito spíše pro sled výpočtů (matematických operací), do kterých zadané údaje vstupují. „Jen první krok výpočtu“ používám pro ty případy, kdy žák zkouší úlohu řešit pomocí výpočtu, ale udělá pouze první krok (například v úloze H5 spočte pouze obsahy malé a velké dlaždice), ale dál úlohu neřeší. V příloze P18 lze nalézt pro jednotlivé úlohy konkrétní příklady chyb, které řadím do těchto kategorií.

Tab. 4.29: Přehled skupin chyb zařazených do kategorie „Neschopnost propojit operace a geometrickou situaci"

Úloha	**H2**	**H3 – obsah**	**H4**	**H5**	**H6**	**H14**	**H15**	**H16**
Operace se zadanými údaji			30 %	21 %		28 %	23 %	19 %
Jiný vzorec (též záměny obsahu za obvod apod.)	66 %	63 %	60 %		73 %	13 %	6 %	8 %
Linearizace				61 %			67 %	
Jen první krok výpočtu (neví si dál rady)				10 %		5 %		57 %
Nepropojení geom. situace a výpočtu celkem	**66 %**	**63 %**	**90 %**	**92 %**	**73 %**	**46 %**	**96 %**	**84 %**
Počet identifikovaných chyb (100 %)	**106**	**142**	**181**	**358**	**180**	**148**	**312**	**153**

Údaje v tabulce je třeba číst s tím, že u každé úlohy je určitá část chybných řešení, u kterých jsem nebyla schopna určit původ chyby například proto, že žák neuvedl postup. Tedy údaje je třeba brát spíše jako orientační. Také počet identifikovatelných chyb se v každé úloze liší. Nicméně z přehledu jasně vyplývá, že u většiny úloh převažují chyby pramenící z nepropojování geometrické situace a výpočtu/vzorce. Výjimkou je úloha H14, kde polovina žáků řešila úlohu pomocí strukturace (tedy představy skládání kostek do krabice) a 48 % chyb u této úlohy představují chyby při strukturaci. Podobnou situaci bychom mohli očekávat i u úlohy H2, kde mnoho žáků řešilo úlohu pomocí zobrazené čtvercové mříže. V úloze H2 ale využití této strategie vedlo většinou ke správnému řešení (nikoliv k chybě), proto u identifikovaných chyb převažují chyby v řešení výpočtem, a vidíme zde tedy 68 % chyb způsobených nepropojením geometrické situace a výpočtu.

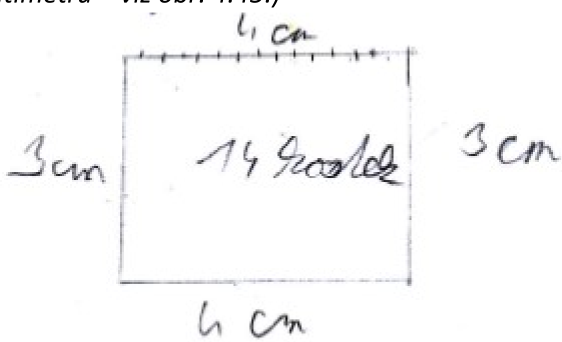
Takto vysoký podíl chyb náležící do této kategorie (spolu s velmi nízkou úspěšností) je alarmující. Souvisí to patrně také s tím, že většina žáků volí výpočetní řešení, a nikoliv řešení pomocí vhledu, strukturace apod. – např. jen velmi málo žáků se snaží napomoci si při řešení úloh H5 a H15 grafickým znázorněním (podrobněji viz příloha P18).

Přílišné spoléhání na výpočet či vzorec

Jedná se vlastně o extrémní případ oddělení výpočtu od geometrické situace. Žák natolik spoléhá na vzorec či výpočet, že tváří v tvář reálné situaci odmítá to, co mu vyšlo v modelu, a je přesvědčen, že to musí být podle výpočtu (jsou to špatné kostky apod.).

To pozorujeme například u Pavla (6. ročník). Důsledkem lpění na vzorci je ignorování vztahu mezi rozměrem a počtem kostek (tedy problém kategorizovaný jako „Nedostatky ve strukturaci“).

S: Takže 4 kostky se tam určitě nevejdou – takže na dýlku ... na dýlku, ... 4 kostky a na šířku 3 kostky na šířku, takže vlastně na tohle by se zaplnilo 14 kostek. Takže... Vlastně u tohohle to nejde namalovat úplně. (*měří rozměry na papíru)*
T: A uměl bys mi je namalovat třeba vedle? […]
S: Takže to můžu vlastně udělat i tady ty půlky centimetrový. (*Pavel kreslí do původního náčrtku podél jedné strany odrážky po půl centimetru*) Takže bysem to ještě... (*počítá do 8*)
T: Takže ty teď maluješ co?
S: Já teď maluju, abysem si mohl rozhraničit ty kostičky … *(tazatelka přitakává) …* Potom ještě by to bylo tady *(Pavel kreslí a dále rozměřuje půl cm na půl, počítá vzniklé mezery a vyšlo mu 16) ...12, 13, 14.* Takže tady tu jednu kostku mám špatně ... *(Pavel gumuje rozdělení u posledního půlcentimetru – viz obr. 4.45.)*



Obr. 4.45: Pavel – rozdělení strany na 14 kostek

T: Jo. Jo, a to maluješ, aby se ti tam vešlo těch 14 kostek?
S: 14 kostek no. Vlastně to ani nemusím malovat.
T: A to ti teda tady vyšlo z tohohle výpočtu, jo?
S: Jo. Jo, protože mám jeden cm, mám 1 cm tu hranu a mám 59 kostek a 14 centimetrů rovná se, když sečtu všechny ty strany.

Když potom Pavel první podlaží fyzicky modeluje, opravdu vidíme, že uvažuje o 14 kostkách položených vedle sebe (viz obr. 4.46). Teprve po určitém přemýšlení stavbu přestaví na rozměr 3 x 4 kostky.

Obr. 4.46: Pavel – „Vešlo by se mi tam 14 kostek."

Pavlovy problémy souvisí se strukturací prostoru (chybným určením počtu kostek) a přílišným spoléháním na formální znalost – Pavel spoléhá na vzorec (počet kostek v patře určíme jako součet rozměrů, tj. 3 + 3 + 4 + 4 = 14) a toto přesvědčení nadřazuje dokonce i fyzickému modelu. Na plochu o rozměrech 3 x 4 totiž tolik kostek neposkládá, Pavel hledá proto jiná řešení, aby se tam kostky vešly. Když už dojde ke stavbě prvního podlaží ve tvaru kvádru 3 x 4 x 1, komentuje to slovy:

S: Jako tady s těma kostičkama to nejde. Zase to je druhý podlaží... *(dostavuje druhé podlaží stavby 3 x 4)* Tak druhý no.
T: Počkej, jak jsi říkal, že tady s těma kostičkama to nejde…
S: No, s těma kostičkama to nejde, protože jich je jenom málo, a kdyby byl tady... no a navíc 14 kostek se rovná, jako kolik by to zaplnilo dohromady všechno na šířku i na dýlku, a tadyhle v tomhletom to právě nejde. Protože jich je málo.

Rovněž Max (5. ročník) velmi tvrdošíjně trvá na tom, že počet kostek v prvním podlaží stavby s rozměry 3 x 4 je 7. Když se ho tazatelka dotazuje, zda náhodou nemyslí jen ty kostky po okrajích, pokládá velmi rozhodně ruku na celé podlaží a říká „těhle sedm" (viz obr. 4.47)

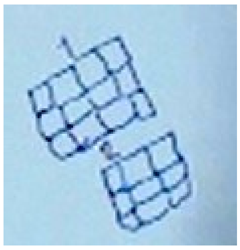
S: Všech sedm jsem vodečet z toho, z těch padesáti devíti *(Max zcela jasně indikuje, že měl na mysli všechny kostičky v prvním podlaží – „všech sedm" žádný obvod…)*

Obr. 4.47: Max – „Těhle sedm."

T: Těchletěch sedm jo? *(také ukazuje na všech 12 kostek)*
S: *(Max přitakává) a* z těch 52.

Tato chyba se u Maxe vyskytuje konzistentně. Jeho první pokus o vytvoření požadované stavby je pyramida.

S: (kreslí čtyři čtverečky vodorovně, tři svisle, doplňuje na výplň obdélníku, kreslí kostky po jedné) Takhle bude to první podlaží … (tazatelka přitakává) … A to druhý, to bude ... To druhý bude z šesti (říká 6, ale kreslí devět kostek ve čtverci 3 x 3 – viz obr. 4.48).



Obr. 4.48: Maxův nákres podlaží

Max si při manipulaci chybu s určením počtu kostek ve druhém podlaží opraví, ale první podlaží pro něj zůstává postaveno ze sedmi kostek až do konce rozhovoru. A to i přesto, že později modeluje stavbu s prvním podlažím 3 x 3 kostky (počet kostek určí správně jako 9). Toto podlaží vznikne z původní stavby odebráním 3 kostek z první vrstvy. Tedy žák po odebrání tří kostek od „sedmi“ dostává 9, což ho nijak nezarazí. Domnívám se, že v případě stavby 3 x 3 určil počet kostek správně proto, že uspořádání kostek pro něj bylo nějakým ikonickým reprezentantem (prototypem) čísla 9, nikoliv proto, že by se pokoušel počítat kostky např. po jedné.

Nízké využívání grafických metod

Jako další z ukazatelů toho, že žáci příliš nespojují výpočty s geometrickou situací, bych viděla poměrně nízké využívání grafických metod v řešení úloh. Podíváme-li se na počet žáků, kteří vybrané výpočetní úlohy řešili pomocí nákresu, případně geometrického vhledu, vidíme, že je zejména u některých typů úloh prakticky zanedbatelný. Například u úlohy H5 si nějaký náčrtek k úloze udělalo pouze 50 žáků (ze 479, kteří se o řešení pokusili) a u H15 je to pouze 18 z 343 řešitelů. Řešení pomocí náčrtku u úlohy H15 nalézáme téměř výhradně u žáků 9. ročníků, u úlohy H5 je rozložení tohoto způsobu řešení rovnoměrnější, což pravděpodobně souvisí se znatelně vyšší obtížností zakreslení 3D situace. U úlohy H6 se celkem 88 ze 463 řešitelů pokusilo o nějaké geometrické řešení (tito žáci tedy využili nenumerického uvažování), což je skoro 20 %. Tento způsob řešení byl pro žáky poměrně úspěšný – daleko více chyb a neúspěšných řešení nalézáme mezi těmi, kteří se snažili situaci řešit výpočtem či odhadem. Celkem 220 z 386 řešitelů úlohy H13 zakresluje alespoň nějaký náčrtek prvního podlaží (ale 40 z nich nemá ani tuto strukturaci správně). Úlohu H14 řešilo 262 žáků, z toho 114 se prokazatelně pokusilo o grafické řešení (71 z nich však nedokázalo toto řešení dovést ke správnému výsledku: 41 žáků určilo chybně počet krabiček v jenom patře a 25 žáků určilo chybně počet pater, u pěti žáků se vyskytla numerická chyba).

4.7.2.2. Fixace na konkrétní reprezentace objektů

U některých žáků se setkáváme s tím, že pracují pouze s konkrétními reprezentacemi objektů, ačkoli by situace vyžadovala teoretickou úvahu. Tuto tendenci jsme objevili v písemných řešeních osmi žáků[79], kteří při řešení úlohy H2 zjišťovali rozměry trojúhelníku

[79] Chyba se mohla vyskytnout u více respondentů, ale u těchto osmi jsem ji bezpečně identifikovala.

měřením (i když se jedná o náčrtek a délka označená jako 1 cm má při změření 1,5 cm). Tito žáci pracovali s náčrtkem, jako by to byl přímo ten objekt, na který měl náčrtek odkazovat. Měření skutečných délek stran znázorněného útvaru se vyskytlo ještě u dalších 47 žáků v úloze H3, nicméně vzhledem k nejasnému zadání úlohy[80] nelze u této úlohy interpretovat měření jako nekorektní postup.

Tendence žáků pracovat s konkrétními reprezentacemi objektů byla patrná i v rozhovorech. Například Max měl sklon pracovat pouze s kostkami, které měl fyzicky před sebou na stole, a řešení pro větší počet kostek pro něj představovalo problém. V oddíle 4.7.1.1 jsme viděli případ Michaely (5. ročník), která přesně narýsovala obdélník o rozměrech 3 x 4 cm, ale při zakreslování kostek se první kostku pokusila zhruba odměřit a dál kreslila kostičky podle toho, aby jí vyšly podobně velké, takže nakonec dostává strukturu 5 x 5 (viz obr. 4.26).

Snad nejlépe patrný je tento konflikt mezi reprezentací objektů a jeho teoretickými vlastnostmi u Charlotty (6. ročník). Charlotta se správně domnívá, že na obdélník o rozměrech 3 x 4 naskládá 12 kostek. Následně si tento obdélník s drobnou nepřesností narýsuje. Na výzvu tazatelky, aby kostky do obdélníku rovněž zakreslila, však začne kreslit rozdělení na řádky a sloupce od ruky (bez měření). Nejprve zakreslí dvě vodorovné úsečky, ale vzdálenost mezi nimi je menší než 1 cm. V důsledku toho jí vychází poslední řada daleko širší než předchozí dvě, což jí přiměje dokreslit třetí úsečku, aby rozdělení obdélníku bylo rovnoměrné. Dostane tedy strukturu 4 x 4. Své úvahy opraví podle toho, co získala zakreslováním.


Obr. 4.49: Rozdělení obdélníku u Charlotty

S: Ee, je ta podlaha, na kterou to budu stavět.
T: Na kterou to budeš stavět. A kolik myslíš, že se ti tam vejde těch kostek na tudle podlahu?
S: No, když to má 1 cm a šířka je 3 a délka je 4, tak ... asi 12?
T: Asi 12? A jak tam budou ležet? Na- nakreslíš mi je?
S: Jako do toho? *(tazatelka přitakává, Charlotta rozděluje obdélník 3 svislými a 3 vodorovnými čarám; ty první dvě vodorovné si však nakreslila příliš blízko, takže jí tam zbyl prostor na třetí čáru*)
T: Takhle, jo? A je jich 12, jak jsi říkala?
S: Ne, je jich 16.
T: Ono jich je 16, jo? Ehm, tak co, co je špatně? Předtím jsi říkala 12.
S: Protože já jsem to nedala tu jednu čáru, já jsem tam dala jako jednu dvě.
T: Ehm, jo. Takže máš jich, máš jich, má jich být 12 a tohle je špatně nakreslený, nebo?
S: No, já jsem si to asi špatně spočítala, že tam nemělo bejt 12, ale 16 těch kostiček.

[80] Vedle obrázku tvaru jsou sice uvedena čísla, ale chybí u nich jednotka. Navíc není nikde nakresleno, jak dlouhou úsečkou je na obrázku reprezentován 1 cm. Žáci se mohou domnívat, že čísla představují počty neznámých jednotek, a rozhodnou se úlohu řešit pomocí rozměrů změřených z obrázku. Někteří dokonce určují měřením velikost této jednotky v cm.

T: A když jsi, a když jsi počítala těch 12, tak to jsi spočítala jak?
S: Ee, řekla jsem si takhle 3, tak že by vod tý stěny mohly bejt, když jsem říkala 12. Tak … *(tazatelka přitakává) …* Jsem myslela vo tý šířce těch 3 cm, že u 1 cm by mohla bejt jedna kostička a u těch 4 by mohly bejt takhle 4 … *(tazatelka přitakává) …* A pak jsem to tam jenom doplnila a vyšlo mi 12.
T: (*přitakává*)… takže to bylo jakoby, když tohlencto schovám (*zakrývá tužkou horní řadu čtverečků v náčrtu),* takhle tě to *(Charlotta souhlasí),* takhle to bylo.
S: Ano
T: Když jsi přemýšlela těch 12.
S: Jo, protože já jsem… *(tazatelka přitakává) …* Abych tak správně řekla, se to tadytu čáru jako ne- jako nemyslela jsem na tu čáru, že sem tadyto trošku posunula sem a i tu *(není rozumět)* trošku výš, aby to bylo to jeden centimetr, a pak sem si řekla, že mi to vlastně nebude vycházet, že když tadyto ta čára *(tj. třetí vodorovná linka)* tam nebude, že to bude asi 2 cm ta jedna kostička.
T: Aha, aha, tak co teď s tím. Tak kte- kterou vezmeme? Že předtím jsi myslela 12, teď je tady nakreslených 16. Tak řekneme, že tohle je špatně a tamto bylo dobře, nebo řekneme, že tamto bylo špatně a tohle…
S: Tamto bylo špatně, tadyto je dobře.

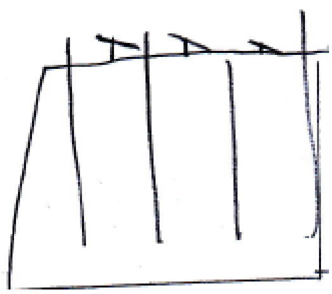
Zdá se, že si Charlotta svým teoreticko-geometrickým řešením není jistá, možná ji znejistila i žádost tazatelky o zakreslení struktury. Rozhodla se tedy spolehnout na svůj nákres (konkrétní reprezentaci situace), i když ta je z části vytvořena pomocí měření a zčásti pouze na základě odhadu.

Tyto problémy úzce souvisí rovněž s problémy, které žáci měli, když v úloze nebyly zadány konkrétní jednotky (viz oddíl 4.7.1.3).

4.7.3. Chyba v práci s matematickými termíny

4.7.3.1. Obdélník = kvádr

Další skupina obtíží se vztahuje k práci s pojmem „obdélník“. Jednu překážku patrně představuje samotný pojem obdélník, kteří žáci často zaměňují s pojmem kvádr. Někteří žáci jako například Filip (5. ročník) považují podlahu tvořenou obdélníkem za nějaký objekt postavený z kostek (krychli či kvádr).



Obr. 4.50: Filip – „Do obdélníku se vejdou 4 kostky.“

Obr. 4.51: Filipův výpočet

S: První obdélníkem o délce 4 a šířce 3. Obdélník ... takže... (Filip odměřuje po centimetru nahoře, pak přiloží pravítko dolů a kreslí od něj 4 svislé čáry – viz obr. 4.50). Tady někde, takže do jednoho obdélníku se vejdou 4 kostky.
T: Jakoby do toho prvního podlaží? *(Filip souhlasí)* Jo.
S: Jakoby jeden obdélník se rovná 4 kostkám.
(tazatelka dává žákovi kostky) […] Ehm, to je jedna. Tak raz dva tři čtyři, takže takhle takže jakoby červenej je obdélník a modrý jsou ty kostky *(Filip postavil na sebe nejprve 1 červenou kostku a na ni 4 modré – viz* obr. 4.52*).*
Takže jeden obdélník, se vejdou čtyři kostky, takže... budu mít 59 kostek a jedna je jeden obdélník je ze čtyř. Tak já to zkusím… *(tazatelka přitakává) …* Vylučovací metodou, postupně.

59 mínus 5, ne, jo 5, 55, ne 5, 4. Takže jako by když bych postavil tadyto, tak mi zbyde 54 kostiček (*viz* obr. 4.51).

Filip tvrdí, že obdélník je reprezentován jednou červenou kostkou – dokonce s tím i počítá, když zjišťuje počet kostek po postavení prvního patra: počítá 59 − 5 = 54. Později dokonce vysvětluje, že odečítal 4 kostky za první patro a 1 kostku za ten obdélník. Rozhodně je patrné, že popis v úloze není schopen spojit s odpovídající geometrickou situací a slovo obdélník ho spíše mate.

Obr. 4.52: Filip – „Červenej je obdelník.“

Adam (5. ročník) uvažuje o obdélníku podobně. V jeho prvním pokusu je obdélník představován kvádrem 3 x 1 x 1, ve druhém pak kvádrem 4 x 1 x 1; jeho kresby jsou v pohledu z boku.

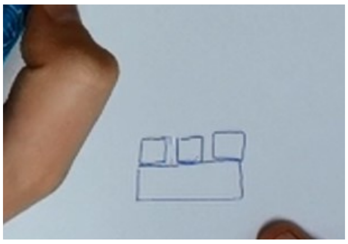
S: Hm. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce čtyř centimetrů a šířce 3, si nakreslím jako to, jako že jsou čtyři centimetry a tohle že jsou tři centimetry. *(kreslí obdélník odhadem v poměru 1 : 3)* Mám mít obdélník a kolik podlaží té stavby bude zcela zaplněno, kolik kostek bude v nejvyšším podlaží? *(znovu čte potichu zadání)* Takže o hraně jeden centimetr *(Adam kreslí nad obdélník 3 kostky – viz obr. 4.53)*... Ehm, takže tohlencto... Možná bych si to asi ten obdélník možná votočil, ale to je asi blbost

T: Jak myslíš otočil?

S: Jako že bych si ten obdélník, že by nebyl takhle, ale že by byl takhle *(Adam nejprve ukazuje na nakreslený obdélník s delší stranou vodorovně, následně naznačuje obdélník s delší stranou svisle)* … ale to by bylo zase vyšší, tak to by mi asi nepomohlo.

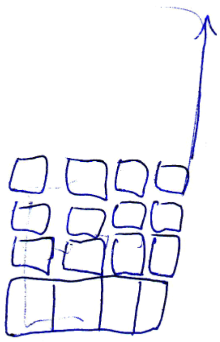
[…]

S: No a chybí mi o délce 4, 4 cm to bych si možná jakoby (*není rozumět; Adam rozděluje obdélník na 4 čtverce*), 4 cm, takže možná to bude spíš, o hraně jednoho centimetru (*kreslí znovu, začíná obdélníkem tvořeným 4 kostičkami, nad něj kreslí 4 kostičky, do každého vyššího patra*). Aby to bylo nějak, že (*mumlá, je rozumět: jedna kostka, druhá kostka*) jednoho cm, myslím, že když mám 59 kostek, tak bych tak, můžu, na těch 59 kostek potřebuju takhle nahoru (*viz obr. 4.55*).



Obr. 4.53: Adam kreslí nad obdélník 3 kostky

Obr. 4.54: Adam – „Takhle vypadá ten obdélník.“

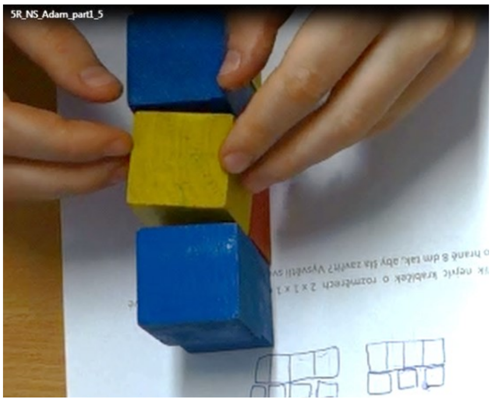


Obr. 4.55: Adam – „59 kostek potřebuju takhle nahoru.“

To, co Adam míní obdélníkem, je vidět na modelu, který na výzvu tazatelky postavil.

S: Takhle (*Adam staví 4 kostky do řady – viz obr. 4.54, tazatelka přitakává*) …. To je teda obdélník a pak by byly takhle ty kostky, já je od sebe oddělím, aby to jakoby vypadalo, že to sou fakt (*Adam staví na 4 kostky další 4 kostky, dělá mezi nimi mezery – viz obr. 4.56*).

Nejprve se zdálo možné, že Adam kreslí správnou stavbu z pohledu z boku, při vymodelování z kostek se ale ukázalo, že stavba má hloubku pouze jednu kostku. Pro Adama patrně znamená obdélník totéž co kvádr. Navíc jako kdyby uvažoval vždy pouze jeden z rozměrů – při prvním pokusu 3 cm a později 4 cm. Dokonce to i sám poznamenává v replice: „No a chybí mi o délce 4 cm.“ Adam při práci s kostkami vymodeluje „obdélník“ jako kvádr 4 x 1 x 1. Je vidět, že použil pouze délku 4 cm a šířka není nikde zohledněna. I u tohoto žáka slouží termín obdélník jako překážka pro pochopení úlohy. V pokračování tohoto rozhovoru se ještě objeví, že v tomto chybném pochopení situace hraje významnou roli umístění jednoho z rozměrů obdélníku vertikálně.

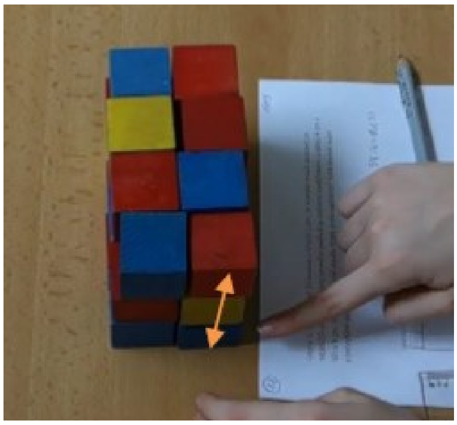


Obr. 4.56: Adam – „Já ty kostky od sebe oddělím.“

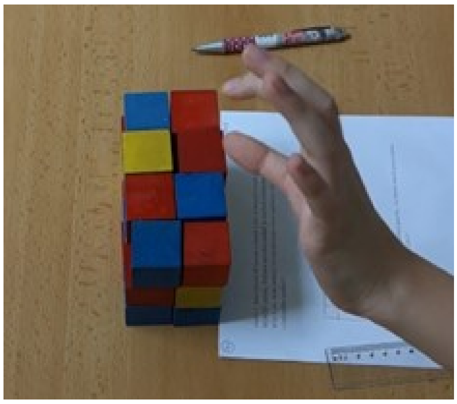
Na obr. 4.57 je ukázáno, jak základní obdélník vymodelovala na dotaz tazatele Julie (5. ročník).

Obr. 4.57: Juliin základní obdélník

S: (*dostaví zbytek kostiček*) Ee, tadyhlencto je ten základní obdélník a…
T: Tohle celý je ten základní obdélník?
S: No, 3 cm.
T: Tenhle ten 4 na 3, jo? *(Julie souhlasí)* Jak ti tam psali? Hmm, můžeš mi ukázat ty rozměry, kde jsou teda ty 4 jakoby cm a kde 3?
S: Tady 4, 3 tady. (*Julie ukazuje postupně šířku a výšku stavby – viz obr. 4.58*)
T: 4 jsou tady, tady jsou 3.
S: Jakoby ta jedna kostka je 1 cm jakože.
T: Jo, jasně, jasně. To si představuju, bezva. Takže todlencto je ten obdélník, tohle *(ukazuje na přední stěnu stavby)*, nebo obě tyhlencty *(ukazuje na celou stavbu)*.
S: No, jakoby to je ten jeden, jakoby z výšky je to takhle (*ukazuje rukou nad stavbou – viz obr. 4.59*), že jo, a zepředu takhle.
T: Zepředu je to takhle. Hmm, takže teď, kdybys měla udělat tu stavbu z 59 kostek, že by si měla použít všech 59 kostek, kam bys je teda naskládala dál? Jak by to bylo? Já už teda žádný nemám, tak…
S: No jakoby, že bych tady udělala dalších těch, myslím, že 14, jakoby ještě na to dalších 14 obdélníků, jakoby o výšce 1 krát jakoby 4, jakoby že ten 1 bude měřit 1 cm a takhle bych je skládala na to a nahoře. *(Julie naznačuje gestem přidávání dalších vrstev – viz obr. 4.59)*

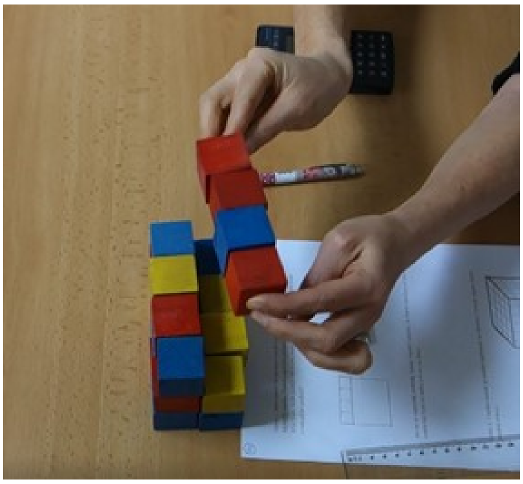


Obr. 4.58: Julie ukazuje šířku 3



Obr. 4.59: Julie přidává další vrstvy

T: Takhle jako myslíš ty 1 krát 4, takovýhle jo? (*Tazatelka se snaží zjistit, jak vypadá jedno patro – viz obr. 4.60*)
S: Ne, zatím i tyhlencty, jakože celý ten obdélník (*viz obr. 4.61*)



Obr. 4.60: T – „Takovýhle jedno patro?“

Obr. 4.61: Julie – „Ne, tohle celý.“

Vidíme, že Julie nerozlišuje mezi pojmem obdélník a pojmem vrstva či kvádr. Navíc ještě vidí základní obdélník jako kvádr o rozměrech 4 x 2 x 3 a vrstvy, které na něj lze přikládat, mají tedy tvar 4 x 2 x 1. Opět je jeden z rozměrů obdélníku (zde je to šířka) umístěn vertikálně, jak je vidět i na obr. 4.58. Tedy jednou z hlavních překážek je zde nesprávná interpretace slova obdélník, a to opět v kombinaci s umístěním jednoho rozměru obdélníku vertikálně.

Pavel (6. ročník) považuje první podlaží své stavby přímo za ten zadaný obdélník, a proto ho nepočítá do celkového počtu podlaží.

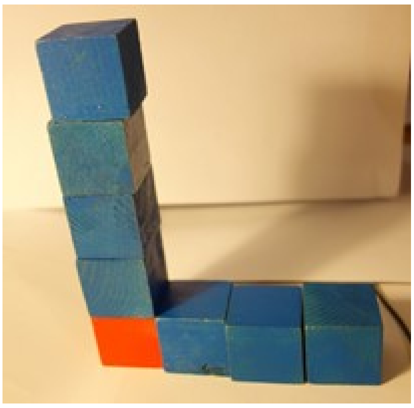
S. V tom nejvyšším podlaží..., takže whatever, takže 45 : 14, 45 : 14 = 3. Takže 3 podlaží by to byly a 3 krát je 30, dvanáct a zbyly by 3 kostky na tom nejvyšším podlaží vlastně.
T: Jo.
S: Takže by byly … (*píše 3 podlaží).*
T: A těch 14 v tom úplně spodním nepočítáš jako?
S. No, počkat… (*čte znovu zadání) … podlaha* prvního podlaží je tvořena obdélníkem. Jo, podlaha prvního podlaží, takže to první nepočítám.
T: Jo, takže to je jakoby ta podlaha, těch prvních 14 je podlaha.
S: Jo.

U jevu „obdélník = kvádr“ dle mého názoru není přímá souvislost se strukturací prostoru – žák si může umět velmi dobře představit strukturaci kvádru do jednotkových krychlí a stejně například nezapočíst první podlaží, protože ho považuje za ten zadaný obdélník (tj. podlahu) apod. Znalosti, které zde žák musí projevit, se týkají spíše konvence (definice pojmů, umístění rozměrů) a nejde o znalosti, které by přímo sloužily k výpočtu obsahu útvarů či objemu těles.

4.7.3.1. Jeden rozměr obdélníku umístěn vertikálně

U Filipa i Julie jsme viděli, že chybné uchopení výrazu obdélník vedlo k umístění jednoho z rozměrů obdélníku vertikálně. To se ukázalo, jako překvapivě častá překážka pro správné řešení. Deset žáků z celkového počtu 57 (tj. více než 17 %), umisťovalo jeden rozměr obdélníku ve vertikálním směru. Část Filipova řešení jsme již viděli, takto příběh s modelem prvního podlaží pokračoval.

> T: … a ještě, podívejme se ještě jednou, oni říkají, že ten obdélník, že se tam ten rozměr 3 na 4 znamená, … *(Filip přitakává)* že se tam vejdou 3 kostičky na šířku a 4 kostičky na dýlku
> S: Takže
> T: Do toho prvního podlaží
> S: Takže to je vlastně sedm.
> T: No.
> S: Kostek. Takže jakoby 3 na šířku, tady. Takže, takže takhle dokonce. *(přidává 3 kostky ke stavbě, viz obr. 4.62)* Takže tady mně něco vypadlo. 59 děleno, eee musím to […] sedmi.



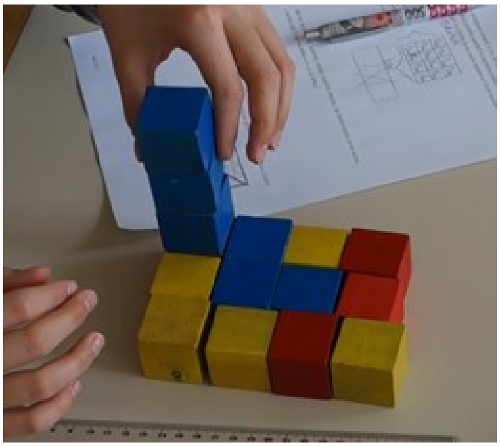
Obr. 4.62: Filip – „A 3 na šířku“

Šířka je ve Filipově stavbě vymodelována horizontálně (zprava doleva), zatímco délka je umístěna vertikálně. U Adama se rovněž projevilo, že ztotožnění obdélníku s kvádrem může být důsledkem umístění jednoho rozměru obdélníku vertikálně.

> T: Jo, čtyři kostky. A ten obdélník o délce 4 a šířce 3 je kde? Jenom abych ho viděla.
> S: Počkat, to jsou 4 cm a … (*Adam opravuje stavbu, nejprve 4 kostky, na ně další 4 a na ně už tu existující stavbu 2 x 4*). Tohlencto jsou ty 3 cm a tohlencto jsou, že jo, jsou ty 4 cm podle tý úlohy (*ukazuje postupně na 3 kostky v prvním sloupci a 4 kostky ve třetí vrstvě – viz obr. 4.63)*, a když je to jedna kostka o hraně jednoho centimetru, tak má ta hrana jeden centimetr.
> T: Jasně.
> S: Když jsme řekli, že takhle na jednom tom obdélníku bude takhle v prvním patře 4 kostky.
> T: Jo, takže každý patro by mělo 4 ty ….

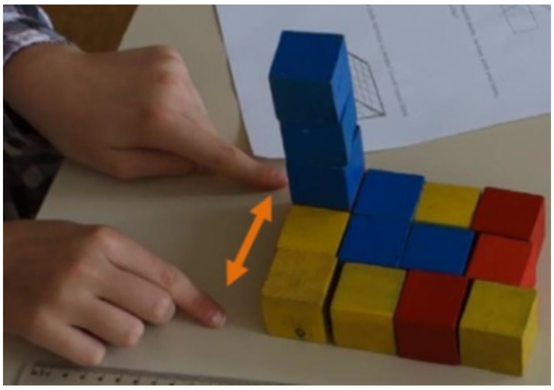
Obr. 4.63: Adam – „To jsou 3 cm“

Umístění délky vertikálně se ukázalo, jako velká překážka i pro Simonu (6. ročník). Bylo pro ni téměř nemožné odpovědět na otázku, kolik postavím pater, protože podle ní směřuje délka jednoznačně vertikálně, a je tedy v úloze už zadaná.

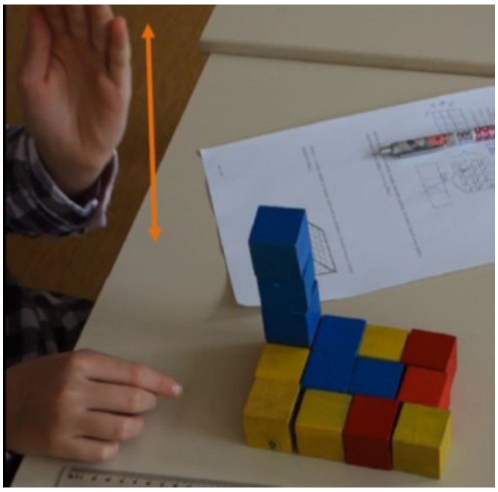


Obr. 4.64: Simona – „Musí vyjít 4 podlaží, když víme, že délka je nahoru.“

S: .... a ta šířka je tři centimetry, takže by to mělo vyjít jakoby nakonec 4 podlaží, protože když víme, že ta délka je jakoby takhle nahoru, ... (*tazatelka přitakává)* .... takže... (*bere si do ruky dvě kostičky*) bude to ... (*staví na první podlaží další kostičky do výšky, viz obr. 4.64)* takže takhle jakoby....
[…]
S: No. Jakože... když vždycky, jak máme tu šířku takhle.... (*Simona ukazuje prsty na stole obr. 4.66*) … (*tazatelka přitakává*)
S: ... a tu délku takhle (*viz obr. 4.65*), takže to prostě bude takovejhle jakoby obdélníček. (*naznačuje rukama doplnění stavby do kvádru*)



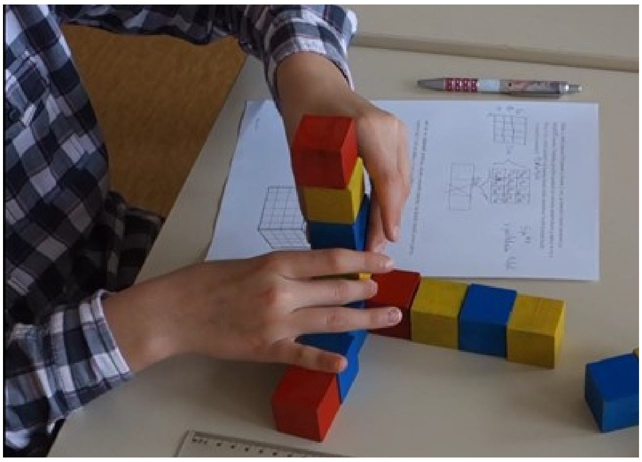
Obr. 4.66: Simona – „Šířku máme takhle."



Obr. 4.65: Simona – „A tu délku takhle. "

Simona považuje délku za vertikální rozměr stavby. Se značnou dopomocí tazatelky nakonec úlohu správně vyřeší, ale když má řešit modifikaci úlohy pro obdélník 5 x 4, je první pokus o znázornění stavby opět o rozměru 5 x 4 x 5. Když Simona popisuje, jak bude stavbu tvořit, mluví o tom, že dá 5 kostek na délku, a přitom staví kostky do výšky 5 na sebe (viz obr. 4.67).

Proč postavila třetí rozměr rovněž 5, Simona nekomentovala, nicméně představa, že délka je vertikální, je u ní hluboce zakořeněná. Domnívám se, že tento jev nesouvisí se strukturací, ale s pochopením pojmu obdélník (jako rovinný útvar, zde jako podložka) a se schopností pracovat s konvencí pro označování rozměrů (délka, šířka, výška). Celkem 15 žáků řešilo, kterým směrem bude na nákresu či modelu umístěna délka a šířka. Považovali tedy buď toto umístění za důležité nebo se snažili v úloze zorientovat pomocí všech dostupných vodítek. U těch, kteří si zároveň představovali obdélník s jedním vertikálním rozměrem, je umístění rozměrů pochopitelně podstatné – výška stavby by pak záležela na natočení „obdélníku". Nicméně zbývajících 9 žáků řešilo otázku umístění, aniž si uvědomili, že výpočet na konkrétním umístění obdélníku nezávisí.



Obr. 4.67: Simona – „5 kostiček na délku."

4.7.3.2. Označování jednotek pro obsah jako cm

Při analýze písemných řešení žáků (úloha H2) si zejména na prvním stupni můžeme všimnout, že poměrně velký počet žáků označuje jednotky obsahu symbolem „cm“. Někteří žáci používali jako jednotku čtverec, což jsem považovala za správné řešení. Zde se jedná o případy, kdy byl výsledek zapsán jako 3 cm. Téměř všichni tito žáci nakreslili ve druhé části úlohy dva neshodné útvary s obsahem 3 čtverečky, z čehož lze usuzovat, že se jedná pouze o opomenutí či chybný zápis správné jednotky. Podrobněji viz příloha P18.

Pokud se toto chybné označení vyskytuje u jiných úloh, již nejsme schopni jednoznačně rozhodnout, zda je pochopení jednotky správné, či nikoliv (tj. zda jde pouze o chybné označení). Vzhledem k tomu, že se tato chyba vyskytuje většinou společně s chybou v kategorii „Operace s čísly“ nebo „Jiný vzorec“, lze se domnívat, že jde skutečně o neporozumění pojmu, a ne pouze o chybné označení (jak tomu bylo u žáků 1. stupně v úloze H2).

4.7.4. Jiné

4.7.4.1. Všechna patra musí mít stejnou velikost

Někteří žáci ještě řeší problém s tím, že nebudou všechna patra zaplněná – domnívají se (zřejmě na základě své životní zkušenosti), že stavba musí mít všechna patra plná, nebo hledají pro horní patra jinou velikost podlaží, aby byla i horní patra zcela vyplněna. Například Růžena strukturaci prvních 4 pater zvládla s pomocí rýsování bez problému, ale necelé nejvyšší podlaží ji zarazí.

> S: No tak, ee, v tom nejvyšším podlaží bude 12, počkat, jo 1, 2, 3, 4… *(spočte horní řadu).* Jo, 12 kostek a… A to ještě nevím… 59 děleno 12… 12 krát 5 je 60 a 4 krát 12 je 48, jo… Jo, takže podlaží tam bude 5, ne 4, 4 podlaží tam bude.
> T: 4 podlaží tam budou, hmm. A na to teda spotřebuješ kolik kostek?
> S: Ee, na to já spotřebuju 48. […]
> T: *(přitakává)* A když potřebuješ všech 59 teda spotřebovat? Tak co s tím zbytkem?
> S: (*přemýšlí*) Tak to nevím.

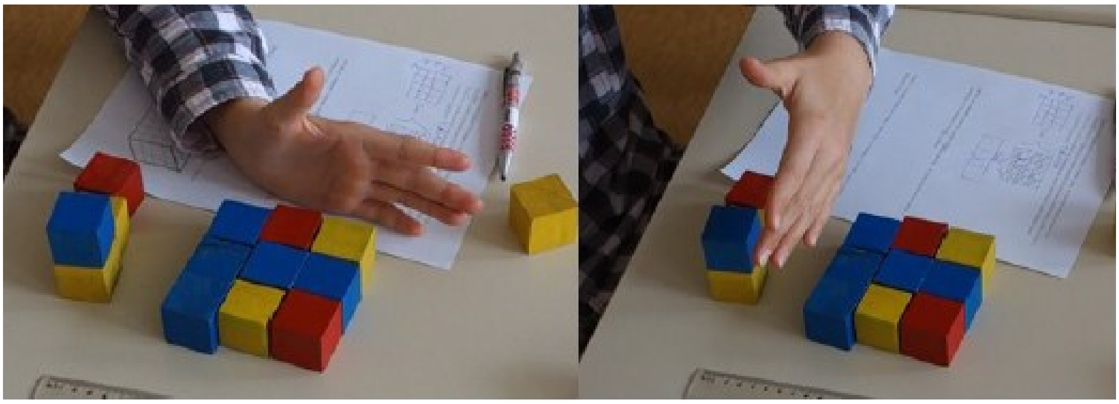
Petronela (6. ročník), která prostor do krychlových jednotek strukturovala naprosto suverénně, se rovněž potřebovala ujistit, že nemusí být poslední patro plné.

> S: Může tam být nějakej zbytek, nebo to musí být přesně?
> T: Ee, nemusí být všechna ta podlaží plná.
> S: No.
> T: Jo, ty kostky by se měly všechny použít, ale nemusí být všechna podlaží úplně plná.
> S: Takže můžu třeba jakoby, že mám ten základ těch 12 kostek (*tazatelka přitakává*) a pak nahoru můžu vyskládat jenom po jednom?

Simona (6.ročník) se snaží nalézt vhodnou velikost podlaží tak, aby jí vyšla všechna patra stejná (viz obr. 4.68).

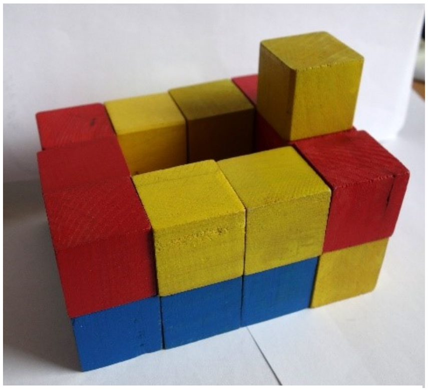
> S: .... že bych prostě měla ty čtyři jakoby patra *(není rozumět)*, právě že čtyři takhle a tři takhle, nebo naopak.... *(Simona ukazuje rukama – naznačuje rozšíření čtverce 3 x 3 do stran,*

tazatelka přitakává) .... takže mně by to právě nevyšlo těch devět kostek. Jakože by mi... že... když víme, že máme 59 kostek a musíme je všechny využít, ... *(tazatelka přitakává)* …



Obr. 4.68: Simona – hledání vhodné velikosti prvního podlaží

S: .... takže jakoby... že... to jakoby nejde vydělit dvěma.... *(tazatelka přitakává) …* nebo... počkej jako, že to nejde... jako, že to vydělíme jenom třemi.... *(tazatelka přitakává, Simona přemýšlí).*
T: Jo takhle. Že... že ti to jakoby nevychází dělitelný tím počtem kostek, co jsi tam měla, jo? Jako že by nevyšly celý ty podlaží?
S: To právě nó. Jakože....
T: A to ne...? Tak by tam byla díra.
S: Jo?
T: No může být. Pak tam bude někde kus chybět. To může být.
S: Jo?



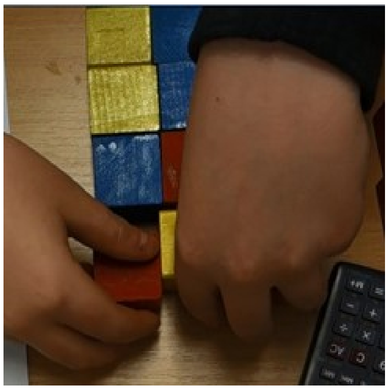
Obr. 4.69: Aniko – horní podlaží stavby s „komínem"

Tato nejistota žáků ohledně jiné velikosti posledního patra není dle mého soudu strukturačním problémem – projevují ji i žáci, kteří strukturují velmi dobře. Je pravděpodobné, že se žáci opírají o svou životní zkušenost – domy obvykle nemívají horní patro vykousnuté, a pokud děti staví z kostek, staví nejčastěji pyramidy či nějaké věže, často má jejich dům tvar „dutého kvádru" s plochou či šikmou střechou (např. z Lega[81]). To, že žáci pracují na základě vlastní zkušenosti, je dobře vidět na stavbě Aniko (6. ročník) která nejprve modeluje horní podlaží stavby jako obvodové zdi postavené z kostek a „komín" nahoře, jak ukazuje obr. 4.69.

[81] Zde se opírám o vlastní pozorování, neprováděla jsem systematické zkoumání tohoto jevu.

4.7.4.2. Chyby v přenosu a uchování informace

Do této kategorie jsem zařadila chyby (spíše kognitivního rázu) spočívající v tom, že žák nějakou informaci ignoruje, zapomene či nepřenese do analogické situace. Velmi často například žák nepracuje s nějakou částí zadání (informace mu nepřišla důležitá, neuchoval ji nebo nepřenesl do svého řešení). Tak žáci například zapomenou odpovědět na jednu z otázek v zadání úlohy H13, nebo neudělají druhý krok při výpočtu (zapomenou u úlohy H14 na to, že krabičky mohou být ve více patrech, apod.) To je běžná pozorovaná chyba způsobená tím, že pozornost má pouze velmi omezené zdroje; hlubší rozbor tohoto typu chyb by však přesahoval rámec této práce. V tomto oddílu jsem však chtěla upozornit na jiný jev. V několika případech se objevilo, že žák nepřenesl poznatek či informaci z jedné situace do jiné, zcela analogické situace, která se vyskytla pouhých několik minut poté.



Obr. 4.70: Max dává pryč tři

Příklad vidíme u Maxe (6. ročník) v rozhovoru, který následuje ihned potom, co Max s jistotou tvrdí, že ve stavbě 3 x 4 kostky je kostek sedm.

Obr. 4.71: Max – zbylé kostky

> T: Těchletěch sedm jo? (*také ukazuje na všech 12 kostek*)
> S: *(Přitakává) a* z těch 52 se pak eště se pak dá stavět eště ta věž.
> T: Po těch čtyřech, super. Co kdybych ti řekla, že ta plocha, na který se to staví, je 3 cm krát 3 cm? *(píše 3 cm x 3 cm*)
> S: Tak bych to musel postavit tak, takhle bych to musel postavit (*žák dává pryč 3 kostičky z původního prvního podlaží – viz obr. 4.70*)
> T: Ehm, ehm. A tam by se ti vešlo teda kolik kostek? *(zbyl mu tvar 3 x 3 kostky)*
> S: Tady je devět jich, jich je devět, tam bysem je tam pak, tam bych tam ... *(dále popisuje, jak by stavěl další podlaží)*

Maxovi zbylo po odebrání tří kostek ze sedmi devět, ale vůbec ho to nezarazilo. Jak jsem již psala v oddíle 4.7.2.1, počet kostek ve stavbě 3 x 3 kostky určil pravděpodobně pomocí nějakého prototypického uspořádání pro 9 objektů, nikoliv počítáním kostek. Zdá se tedy, že Max informaci o počtu kostek v původním prvním podlaží nepřikládá význam. Předpokládala jsem, že nový model s menšími rozměry by mohl vést ke konfliktu, a tím i k potřebě přehodnotit způsob určování počtu kostek, nicméně to se nestalo. Speciálně u tohoto žáka lze pozorovat podobné problémy opakovaně: například když počítá, kolik pater po 4 kostkách by se dalo postavit ze 48 kostek, přepočítá se u čísla 20: „48 44 40 36 32 28 24 20 18 14 10 6." Když ho tazatelka žádá, aby vyřešil úlohu pro stavbu s podstavou 3 x 3 a 25 kostkami, žák začne počítat s 29 kostkami, pak se opraví na 26 kostek, ale nakonec úlohu vyřeší pouze pro fyzicky přítomných 24 kostek. Jako by pro něj počty nebyly vůbec důležité (nebo si je nebyl schopen zapamatovat).

Podobně například Alena určí počet kostek v prvním podlaží modelu, ale hned vzápětí počítá s jiným číslem, konkrétně s číslem 14. Avšak její první pokus o určení kostek v podlaží dával výsledek 7, tedy číslo 14 nemohlo zůstat v paměti žákyně z předchozího výpočtu.

> T: Jo, bezva. Takže takhle by mohlo vypadat to první patro… *(Alena přitakává) … t*é tvojí stavby? Kolik tam máš kostiček?
> S: (*chvilku počítá*) 12.
> T: 12, fajn. A když by si měla k dispozici těch 59, kolik by si takových pater postavila?
> S: Tři.
> T: 3 patra? *(Alena přitakává)* Jak se na to přijde?
> S: 59 děleno 14
> T: 59 děleno 14, a těch 14 bylo?
> S: Těch kostiček, na to jedno patro.
> T: Jo, tady těch kostiček, co si spočetla. Já jsem myslela totiž, že jsme říkali 12, víš? Že to tak...
> S: Jo, 12.

Když pak Alena počítá počet pater ve stavbě, prohlásí, že z 59 kostek by postavila přesně 3 patra a nic by jí nezbylo. Následně řeší podobnou úlohu s větším prvním podlažím (počet kostek v něm určí jako 15). Ovšem vyjde jí, že by postavila rovněž 3 patra, ale navíc by jí zbylo 10 kostek. Nesprávnost numerických výpočtů je zjevná, ale žákyně buď situace nepropojuje, nebo nepracuje s principem kompenzace (větších pater mohu postavit méně).

5. Diskuse výsledků

V kapitole 4 jsem představila výsledky svého výzkumu – věnovala jsem se faktorům, které by mohly ovlivňovat úspěšnost v úlohách na obsah a objem: konkrétně vztahu mezi úspěšností a nenumerickým uvažováním, schopností strukturace a multiplikativním uvažováním (výzkumné otázky RQ1 až RQ3). Hlavní výzkumnou metodou byla kvantitativní analýza na základě písemných řešení žáků 4. až 9. ročníku v didaktickém testu. Dále jsem podrobněji popsala a kategorizovala obtíže žáků při řešení vybraných úloh zaměřených na strukturaci prostoru (výzkumná otázka RQ4). Při řešení této otázky jsem pracovala převážně kvalitativními metodami analýzy dat pořízených v rámci hloubkových rozhovorů s žáky. V této kapitole dám svá zjištění do souvislosti s dalšími výzkumy, analýzou učebnic a kurikulárními dokumenty. Diskuse je rozdělena do dvou oddílů: první oddíl je věnován zjištěním vztahujícím se k výzkumným otázkám RQ1 až RQ3 (oddíl 5.1) a druhý otázce RQ4 (oddíl 5.2).

5.1. Co ovlivňuje úspěšnost v úlohách na obsah a objem

U všech sledovaných faktorů (nenumerické uvažování, schopnost strukturace a multiplikativní uvažování) jsem nalezla souvislost s úspěšností ve výpočetních úlohách na obsah a objem. Tato souvislost se projevovala s různou silou korelace mezi proměnnými, přičemž nejtěsnější vztah se objevil mezi úspěšností a nenumerickým uvažováním (geometrickou představivostí) – podstatná až velmi silná korelace (Pearsonův korelační koeficient 0,591). To je plně v souladu s kvalitativně zaměřenými výzkumy (Battista, 2007; Rahim, Olson, 1998; Rahim, Siddo, 2012), kde autoři docházejí k závěru, že operace dekompozice a opětovné rekompozice tvaru je pro pochopení pojmu míry v geometrii zásadní.

Rovněž řada kvantitativně zaměřených výzkumů, které zkoumaly vztah prostorových schopností a úspěchu v matematice, mezi nimi nalezla podstatnou souvislost. Přehled relevantních výzkumů lze nalézt v článku (Pittalis, Christou, 2010). Autoři odkazují mj. na metaanalýzu zahrnující 75 výzkumných studií věnovaných vztahu prostorových schopností a matematických schopností žáka (Frieman, 1995, cit. podle Pittalis, Christou, 2010, s. 195—196). Korelace mezi těmito schopnostmi se pohybovaly mezi 0,3 a 0,45, což je sice pouze střední síla asociace, nicméně je třeba uvážit, že se nejednalo o matematické schopnosti žáka vztažené např. pouze ke geometrii, ale o obecné matematické schopnosti. Pittalis a Christou (2010) ve svém výzkumu prověřovali vztah dovedností žáka vztahujících se k „3D geometrickému uvažování“[82] a „prostorovým schopnostem“[83]. Pro můj výzkum je relevantní vztah prostorových schopností (tento konstrukt se nejvíce podobá konstruktu geometrické představivosti, který používám) s tou částí geometrického 3D uvažování, která se týká míry v geometrii. Autoři ukazují, že prostorové schopnosti mají silný vztah ke 3D geometrickému uvažování a nejsilnější právě k oblasti míry v geometrii. Prostorové schopnosti vystupují v jejich modelu jako velmi dobrý prediktor úspěšnosti ve výpočetních úlohách zaměřených na povrch a objem těles (což odpovídá výsledkům mého výzkumu) a autoři se domnívají, že by mohlo jít o příčinnou souvislost, tj. že zlepšení žáka v prostorových schopnostech povede ke zlepšení v oblasti určování míry.

Vztah mezi úspěšností ve výpočetních, resp. konceptuálních úlohách a schopností strukturace byl v rámci mých analýz rovněž shledán jako podstatný (Pearsonova korelace 0,514, resp. 0,483). Srovnáme tato zjištění opět s výsledky výzkumu Pittalise a Christoua (2010). Autoři uvádějí (s. 202) korelace mezi různými typy geometrického 3D uvažování. Korelace mezi proměnnou popisující strukturaci prostoru a proměnnou pro určování míry vychází 0,97, tedy extrémně silná. To je ovšem způsobeno tím, že úlohy použité pro měření schopnosti určovat objem a povrch těles zahrnovaly například i úlohu na výpočet povrchu tělesa sestaveného z krychlí, tedy typ úlohy, který já bych z výpočtu korelace vyloučila, neboť jde podle mého soudu o úlohu ve své podstatě strukturační. I když korelace zjištěná autory článku může být nadhodnocena, je nepochybné, že vztah mezi oběma proměnnými by zůstal i po vyloučení této úlohy velmi silný, což koresponduje s výsledky mého výzkumu.

To, že strukturace prostoru do krychlových či čtvercových jednotek bude hrát významnou roli v úspěšnosti žáků ve výpočetních úlohách na obsah a objem, bylo možno předpokládat rovněž na základě HUT pro obsah a objem autorů Outhredové a Mitchelmorea (2000), Battisty (2007) a Saramové a Clementse (2009). Nalezený vztah mezi strukturací a úspěšností ve výpočetních úlohách podporuje zařazení strukturace do této trajektorie a potvrzuje její důležitost pro pochopení obsahu a objemu.

Výsledky mého výzkumu v oblasti strukturace prostoru dále podpořily hypotézu Dorkové a Speerové (2013), které u studentů vysoké školy rovněž pozorovaly souvislost mezi strukturací prostoru pomocí krychlových jednotek a úlohami na objem (jejich úlohy na výpočet objemů zahrnují kromě objemu kvádru i objem a povrch válce nebo trojbokého hranolu).

Vztah mezi úspěšností ve výpočetních, resp. konceptuálních úlohách, a multiplikativním uvažováním se v mém výzkumu ukázal rovněž jako statisticky významný, ale pouze na úrovni slabé až střední korelace (nejslabší ze všech tří sledovaných schopností). To může

[82] Sem autoři řadí dovednosti studentů v úlohách souvisejících s kurikulem v oblasti 3D geometrie: schopnost pracovat s různými reprezentacemi 3D objektů (včetně schopnosti skládat a konstruovat sitě těles), schopnost strukturace pomocí krychlových jednotek, konceptualizace vlastností 3D objektů a schopnost počítat povrch a objem těles.

[83] Ty autoři popisují třífaktorovým modelem skládajícím se z prostorové představivosti (vizualizace), prostorové orientace (změny perspektivy) a prostorových vztahů (mentální rotace objektů).

být způsobeno také tím, že jsem úroveň multiplikativního uvažování žáka neměřila žádným speciálním testem, ale odvozovala pouze z kvalitativního okódování způsobu řešení jediné úlohy v testu. Lze nicméně konstatovat, že se podařilo na větším vzorku žáků ukázat, že vztah mezi těmito dvěma proměnnými existuje, což podpořilo naši hypotézu z předchozího výzkumu (Tůmová, Janda, 2014). Podobná zjištění lze nalézt například ve výzkumu Huangové (2014), kde lepší výsledky v úlohách na výpočet obsahu měli ti žáci, kteří vykázali dobrou úroveň multiplikativního uvažování. Je zajímavé, že ve výzkumu Huangové se tato závislost projevila u žáků ve 3. ročníku, ale rozdíl ve 4. ročníku již nebyl statisticky významný ($N = 34$). V mém vzorku mají žáci všech ročníků ($N = 386$), kteří vykázali dobrou úroveň multiplikativního uvažování (tj. úroveň „Dělení“), statisticky významně lepší výsledky v úlohách na obsah objem než žáci, jejichž úroveň multiplikativního uvažování byla nižší.

Další výzkumy, které by dávaly dané dvě proměnné do vztahu, se mi nepodařilo nalézt. Autoři většinou popisují opačný směr budování porozumění – tedy že je obsah (a zejména určování počtu čtverců, resp. krychlí na ploše či uvnitř nějakého prostoru) základním modelem pro násobení (Barmby et al. 2009; Confrey, 2015; Hejný, 2014) nebo ukazují, jak práce s prostorem strukturovaným do krychlových jednotek podporuje rozvoj multiplikativního uvažování žáka (Finesilver, 2017). Finesilverová poukazuje na bilaterální vztah a rozvoj obou dovedností: strukturace prostoru do krychlových jednotek a násobení (rozvoj v jedné oblasti podporuje rozvoj oblasti druhé a naopak). Strukturace prostoru určuje způsob výpočtu (strukturuje-li žák stavbu do pater, bude násobit počet kostek v patře počtem pater) a naopak i způsob výpočtu může ovlivňovat strukturaci. Žáci, kteří v úlohách na určení počtu kostek ve stavbě preferují strategii počítání po *n* krocích (např. po třech, tzv. *step counting*), budou pravděpodobně vnímat strukturu stavby tak, že se skládá z menších jednotek – např. jednotlivých sloupců. Z těchto výzkumů tedy vyplývá, že opravdu nelze nalezený vztah mezi multiplikativním uvažováním a úspěšností v úlohách na obsah a objem interpretovat jako vztah příčinný, jak tomu bylo například v případě nenumerického uvažování.

5.2. Chyby a obtíže žáků

V tomto oddíle se budu věnovat nejdůležitějším zjištěním týkajícím se obtíží žáků, které byly identifikovány v rámci hloubkových rozhovorů při řešení vybraných strukturačních úloh, případně se objevily v písemných řešeních didaktického testu jako dobře identifikovatelné chyby.

5.2.1. Strukturace a konvence

V rozhovorech s žáky se ukázalo, že jednou z překážek pro úspěšné vyřešení úlohy H13 je *určení vztahu mezi délkou strany obdélníku a počtem kostek*, které lze na daný rozměr položit. Někteří žáci byli schopni určit počet kostek u naznačené struktury pomocí násobení, ale nebyli schopni propojit rozměr strany s počtem kostek (tj. odvodit, kolik kostek se na danou stranu obdélníka vejde). Jiní žáci si naopak dovedli bez problémů spojit rozměr obdélníku s počtem kostek, které lze podél strany položit, ale nebyli schopni určit správný počet kostek ve stavbě (chyby v enumeraci). Domnívám se proto, že propojení rozměru s počtem kostek by mělo být samostatnou úrovní v HUT na přechodu mezi úrovní

2 Iterace jednotky a určení počtu jednotek a *3 Operace s numerickými mírami* v rámci Numerického uvažování. Autoři HUT pro obsah a objem sice zmiňují důležitost vztahu mezi délkou strany či hrany a rozměry jednotky (Outhred, Mitchelmore, 2000) nebo zahrnují schopnost určení vztahu mezi rozměrem a počtem jednotek do nejvyšší úrovně strukturace (Battista, 2007; Sarama, Clements, 2009)., ale tento krok není vyčleněn v HUT jako zvláštní úroveň. V mém výzkumu se ukázalo, že nahlédnutí tohoto vztahu je nutná, avšak nikoliv postačující podmínka pro práci s numerickými mírami. Domnívám se, že je opodstatněné doplnit tuto úroveň do používané HUT pro obsah a objem jako předstupeň k úrovni *3 Operace s numerickými mírami*.

V rozhovorech se rovněž projevila *absence konkrétních jednotek* v zadání jako jedna z hlavních překážek pro úspěšné vyřešení úlohy H13. Při psaní testu se na rozměr jednotky dotazovali žáci ve 21 ze 60 testovaných tříd a strategii narýsování struktury prvního podlaží zvolilo jen mizivé procento žáků. Naproti tomu v rozhovorech (kde jednotky uvedeny byly) to byla jedna z nejčastějších řešitelských strategií. Podobnou tendenci žáků popsaly Vondrová a Havlíčková (2015, s. 154–155) u řešení konstrukčních úloh (i když tam šlo o doplnění číselné velikosti délek, zatímco v mém výzkumu šlo o to, že u číselně udaných rozměrů chyběly jednotky). Domnívám se, že uvedené problémy mohou souviset i s tím, jak se s jednotkami pracuje v učebnicích. V analyzované řadě učebnic z nakladatelství Alter jsou u všech úloh důsledně uváděny rozměry včetně jednotky a u vzorců, kde jednotky chybí, je zdůrazněno, že všechny rozměry musí být ve stejných jednotkách. Učebnice pracují pouze se standardním systémem jednotek. V učebnicích Hejného a kol. se s jednotkami pracuje v obecnější (abstraktnější) rovině: v některých úlohách jednotky nejsou uvedeny vůbec[84], obvody se běžně počítají i ve dřívkách, obsahy i povrchy ve čtverečcích, objemy v krychlích. Domnívám se, že posledně popsaný přístup k jednotkám může vést k obecnějšímu uchopení jednotky a jejích vlastností. Vzhledem k tomu, že jsem zadání úloh pro test modifikovala a uváděla později u jednotek rozměry, nejsem schopna posoudit, zda by se projevil významný rozdíl ve výskytu tohoto problému u žáků, kteří používali učebnice Hejného a kol., a kteří nikoliv. Tato oblast by vyžadovala hlubší zkoumání.

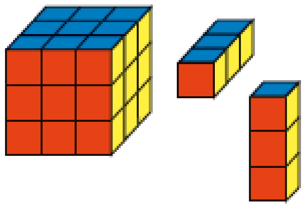
Podobně je tomu i se zápisem rozměrů krabičky pomocí *konvence 1 x 1 x 2* v úloze H14, který se pro žáky ukázal rovněž jako velmi komplikovaný. Udávání rozměrů v podobném tvaru je běžné třeba u prodejců nábytku, elektrických spotřebičů apod. (např. popis parametrů lednice obsahuje tyto údaje[85]: „Rozměry: V x S x H: 152,5 x 54 x 60 cm“). V učebnicích řady Alter na 1. stupni ani řady Prometheus na 2. stupni se s tímto zápisem nesetkáváme, i když autoři používají např. výčet rozměrů uvedený tabulkou (viz učebnice Odvárka a Kadlečka pro 6. ročník, s. 70). V učebnicích Hejného a kol. nalézáme tento způsob zápisu poměrně běžně[86]. Tento zápis navíc nepředepisuje orientaci jednotlivých rozměrů – je tedy invariantní vůči rotaci objektu (o problémech s konvencí pro umístění

[84] Např. učebnice pro 5. ročník, s. 38 a 82, a učebnice pro 4. ročník, s. 44, 50, 69.
[85] Zdroj: www.euronics.cz
[86] Např. učebnice pro 5. ročník, s. 40, nebo učebnice pro 4. ročník, s. 69.

jednotlivých rozměrů kvádru v prostoru ještě budu hovořit). Nezávislost zápisu na poloze dobře ilustruje například úloha na obr. 5.1. Užití této konvence v učebnicích se odráží i ve skutečnosti, že z osmi žáků z mých rozhovorů, kteří používali řadu učebnic autorů Hejný a kol., si neuměli poradit s touto konvencí pouze 3. Z osmi žáků, kteří používají jiné učebnice, jich mělo problém s touto konvencí 7.

3 Z krychle o rozměrech 3 x 3 x 3 lze vyříznout hranol 3 x 1 x 1 buď svisle, nebo ve směru předo-zadním, nebo levo-pravém.

Kolik celkem takových hranolů lze v krychli najít? Jaký je povrch krychle a jaký je povrch čtyř takových hranolů?



Obr. 5.1: Hejný et al., učebnice pro 4. ročník, s. 69, zápis kvádru 3 x 1 x 1

Když už jsem uvedla problém v práci s matematickou konvencí týkající se zápisu rozměrů kvádru, zmíním na tomto místě i další identifikovaný *problém s konvencí*, a to problém s *umístěním rozměrů kvádru či obdélníku*. Pozorovala jsem, že řada žáků (spolu s tím, že interpretuje výraz „obdélník o délce 4 cm šířce 3 cm“ jako kvádr o rozměrech 4 x 3 x 1) předpokládá, že délka obdélníku směřuje ve 3D prostoru vertikálně. To se ukázalo jako značná překážka pro řešení úlohy. Diskutovala jsem situaci s několika učiteli[87] a ukázalo se, že ani mezi učiteli nepanuje obecná shoda v tom, kde je v obdélníku délka a kde šířka. Někteří vázali umístění rozměrů na zakreslení obdélníku v prototypické poloze (to bylo ostatně patrné i v rozhovorech, kdy žáci zakreslovali první podlaží jako obdélník se stranami rovnoběžnými s okraji papíru a používali jasné pravidlo na umístění délky a šířky). Jiní učitelé na otázku, kde bude který rozměr, pokud obdélník natočím, uváděli, že délka je vždy ten delší z obou rozměrů nezávisle na poloze obdélníku. Je možné spekulovat, že pokud učitelé váží umístění rozměrů k prototypické poloze obdélníku a žáci tuto prototypickou polohu vidí nakreslenou na tabuli, mohou usoudit, že jeden z rozměrů obdélníku směřuje (ve 3D prostoru) vertikálně. Žádné výzkumy zabývající se konkrétně touto oblastí jsem nenašla, proto ji považuji za vhodné téma pro navazující výzkum.

I když *úspěšnost ve strukturačních úlohách* sama o sobě nebyla cílem žádné výzkumné otázky, srovnáme-li výsledky mého výzkumu s analogickými výsledky jiných autorů, může nám to poskytnout jednak informace o souběžné validitě použitých nástrojů (testů) a jednak srovnání s žáky z jiných zemí.

Srovnáme-li úspěšnost ve strukturačních úlohách H12 a H13 v našem testu s úspěšností v podobných úlohách v šetření TIMSS 2007 (viz Rendl, Vondrová, 2014, s. 45), lze konstatovat, že výsledky se významně neliší. Šetření TIMSS probíhalo v roce 2007 v období březen až květen, tedy v posledním čtvrtletí školního roku. Náš výzkum naopak proběhl v září bezprostředně po prázdninách, a proto bychom měli srovnávat s šetřením TIMSS

[87] Čtyři učitelé ze škol Slunečná a Za Rybníkem a tři učitelé z jiných škol.

spíše žáky 9. ročníků než ročníky osmé. Srovnáme-li úspěšnost žáků 9. ročníků v úloze H12 (situace, kdy je struktura krychliček znázorněna a žáci mají dopočítat chybějící krychle; úspěšnost 67,4 %) s úlohami M09-09 (*Kolik krychlí by bylo zapotřebí k zaplnění otvoru?*, přičemž je nakresleno těleso s otvorem tvaru kvádru sestavené z krychlí; úspěšnost 67,4 %) a M14-11 (*Kolik krychliček zůstalo v krychli, když se některé* – zadáním přesně určené – *krychličky odeberou?*; úspěšnost 68,1 %), vidíme, že jsou výsledky téměř shodné. Je však třeba mít na paměti, že vzorek žáků v mém výzkumu nebyl náhodně vybrán, a není tedy možno přímo srovnávat výsledky s výsledky z TIMSS. Pro úlohu H13 a jsem analogickou úlohu v žádném mezinárodním šetření nenalezla.

Nyní se podíváme na výsledky úlohy na určení počtu kostek ve stavbě tvaru kvádru (s rozměry 4 x 6 x 4) dané náčrtkem. Z 32 žáků, kteří úlohu řešili, 18 určovalo počet kostek ve stavbě tak, že spočetli pouze všechny viditelné stěny kostek (objevil se problém dvojího započtení a chybějící strukturace uvnitř stavby). Výsledky žáků v této úloze lze srovnat s výsledky uvedenými ve výzkumu Battisty a Clementse (1996), neboť ti v rozhovorech používali podobné zadání (s tím rozdílem, že u některých úloh měli respondenti k dispozici pevně spojený fyzický model stavby). Autoři pozorovali stejnou chybu pouze u 20 % žáků z 5. ročníku – to může být způsobeno tím, že jejich výzkumný vzorek tvořili žáci s nadprůměrnými výsledky v matematice. Autoři se odkazují ještě na další výzkumy (Ben-Chaim, Lappan, Houang, 1985, cit. podle Battista et al., 1996), kde byla pozorovaná úspěšnost v tomto typu úloh v 5. ročníku pouze 25 % a v 6. ročníku 40 %.

Výskyt tohoto typu chyby může opět souviset s používanými učebnicemi a látkou probíranou právě v matematice. U osmi z těch 32 žáků, kteří v rozhovorech řešili úlohu na počet kostek ve stavbě, třída právě probírala povrch kvádru, kde byl pro ně základní pomůckou model kvádru s vyznačenou čtvercovou sítí (tj. velmi podobný obrázku v zadání úlohy). Třináct ze zbylých 21 žáků pracuje podle učebnic Hejného a kol. a z nich se této chyby dopustili pouze 4 žáci. U zbylých osmi žáků se chyba projevila šestkrát. Jedná se o příliš malý vzorek na to, abychom mohli zobecňovat, je ovšem pravdou, že v učebnicích Hejného a kol. je celé jedno didaktické prostředí (krychlové stavby) věnováno právě stavbám z krychlí a úlohy na určování počtu krychlí v nějaké stavbě se vyskytují velmi často (opakují se mnohokrát během školního roku). V učebnicích Alter jsou úlohy na určování počtu kostek ve stavbě zařazeny na konci 5. ročníku a pak v rámci opakovacích úloh na konci některých dílů učebnic.

V rámci rozhovorů s žáky úloze na určení počtu kostek těsně předcházela úloha H13, u které žáci většinou určovali počet kostek ve stavbě správně. Domnívám se, že příčina spočívá v rozdílném způsobu zadání úloh – úloha H13 navádí na proces stavby (je zaměřena procesuálně – postavím první podlaží a na něj další, až dokud mi vystačí kostky), zatímco úloha „počet kostek ve stavbě“ je zadaná konceptuálně (stavba je prezentována jako hotový celek). To by odpovídalo i tomu, co píše Hejný (2014, s. 32) o vzniku konceptu z procesu. Jako by pro žáky obrázek stavby (doplněný výzvou ke spočtení kostek) neodkazoval na proces tvorby stavby z částí, jako tomu bylo v zadání úlohy H13, ale pouze na to, co je vidět na povrchu.

5.2.2. Oddělení reprezentací

Asi největší skupina identifikovaných chyb se vztahuje k problémům pramenícím z nepropojení jednotlivých typů reprezentace dané situace. Mezi identifikované typy chyb patří například záměna vzorců, náhodné operace s čísly apod. Nalezené typy chyb se shodují se zjištěními mnoha výzkumů v této oblasti (viz např. Dorko, Speer, 2013; Heredine-Kónya, 2015; Vondrová, 2015). Za zajímavé považuji to, že převážnou většinu problémů žáků lze interpretovat jako nepropojení různých typů reprezentací daného problému.

Mnoho autorů (Barmby et al., 2009; Duval, 1999, 2006; Presmeg, 2006 aj.) se shoduje na tom, že propojování různých reprezentací daného konceptu je klíčové pro jeho uchopení. Duval považuje schopnost flexibilně přecházet mezi různými registry reprezentací (koordinaci registrů reprezentací) za základní předpoklad pro matematické uvažování vůbec. V případě obsahu a objemu mohou různými reprezentacemi být: struktura uspořádaných jednotek, algoritmus na výpočet obsahu či objemu, algebraicky zapsaný vzorec pro výpočet, vizuální reprezentace – konkrétní zakreslení / znázornění různých geometrických situací, představa dané situace vytvořená v mysli žáka, slovní popis geometrické situace apod. Neschopnost propojit jednotlivé reprezentace je nazývána *kompartmentalizací*. Duval (2006) vysvětluje, že ke kompartmentalizaci dochází zcela přirozeně, a to proto, že matematické pojmy (objekty teoretického prostoru) nejsou přístupné přímo, ale vždy skrze nějakou sémiotickou reprezentaci (například pojem obdélník nám není přístupný přímo, ale pouze skrze nákresy obdélníků či jeho definici). Aby mohlo dojít k propojení reprezentací, musí nejprve dojít k osamostatnění daného pojmu od konkrétní reprezentace, pomocí které byl zaveden. Teprve pak může dojít k propojení tohoto pojmu s jinou reprezentací. Avšak k tomuto osamostatnění často nedojde, a tak žáci vnímají dvě různé reprezentace jako zástupce dvou různých objektů – vytvářejí si pro ně dvě různá mentální schémata (jazykem teorie generických modelů lze říci, že izolované modely zůstávají nepropojené a nevzniká generický model). Proto pro různé registry reprezentace mohou platit různá pravidla, aniž by to žákům způsobovalo nějaký vnitřní konflikt. Žáci mohou dobře pracovat s jedním typem reprezentace, zatímco s jiným ne, i když se vztahuje k témuž konceptu. Domnívám se, že kompartmentalizace přesně popisuje jevy pozorované v mém výzkumu, kdy žáci např. neuměli přiřadit geometrickou situaci ke slovnímu popisu v zadání úlohy nebo algoritmus výpočtu k dané geometrické situaci či trvali na určitém způsobu výpočtu, i když zjevně odporoval fyzicky vymodelované situaci. Rovněž jsem měla možnost pozorovat situace, kdy bych u žáka předpokládala vznik kognitivního konfliktu (např. případ Maxe, kdy od „sedmi" kostek odebral tři a zbylo mu devět), který ale nevznikl. Všechny tyto jevy ukazují na existenci problému kompartmentalizace u některých ze sledovaných žáků.

Další zajímavý úhel pohledu na tuto skupinu jevů nabízí pojem *pseudo-analytického uvažování*, jak ho popsal Vinner (1997). Autor rozlišuje dva přístupy k řešení problému – jeden analytický, který se zaměřuje na identifikaci typu a struktury daného matematického problému a podle toho se snaží najít odpovídající strategii řešení. Druhý způsob uvažování nazývá Vinner pseudo-analytický a spočívá v tom, že žák na základě určitých podobností, analogií či slovních signálů vybere z množiny dostupných algoritmů jeden, který pak pro řešení použije. Tento způsob uvažování vyžaduje daleko menší kognitivní úsilí než snaha pochopit strukturu problému. Trochu to připomíná rozdíl mezi myšlením rychlým (systém 1) a pomalým (systém 2), jak ho popisuje Kahneman (2012). Systém 1 je charakterizován jako automatický, rychlý, emocionální, asociativní, neuvědomovaný a téměř nás nezatěžuje, protože nepotřebuje ke svému fungování sebekontrolu. Tento systém je neustále v chodu, je intuitivní a jeho hlavní složkou je asociativní paměť. Jednání systému 1 je proto často heuristické a může vést k různým zkreslením. Systém 2 je naopak pomalý, analytický a musí mu být přidělena pozornost (vědomé duševní činnosti – jako např. složité výpočty). Tento systém je „líný“ a jeho zapojení vyžaduje sebekontrolu (pozornost), která je omezená a může se unavit i úplně vyčerpat. Je tedy jasné, že se pseudo-analytické uvažování (nebo též systém 1) bude objevovat v procesu řešení matematických problémů častěji než uvažování analytické, protože vyžaduje daleko méně kognitivního úsilí. Tento způsob uvažování není možné eliminovat (ani to není žádoucí, protože v mnoha případech je tento způsob uvažování efektivní). Vinner předpokládá, že tento způsob uvažování může dokonce vývojově předcházet uvažování konceptuálnímu.

To, co popisuje Vinner, můžeme dobře pozorovat v rozhovorech s žáky i ve výsledcích testu. Domnívám se, že např. kategorie chyb označená v oddíle 4.7.2.1 jako „operace se zadanými čísly“ by rozhodně spadala do této kategorie. Podíváme-li se na úlohu H4, 30 % ze všech identifikovaných chyb spočívalo v tom, že žák použil dvě čísla uvedená v zadání úlohy a s těmi provedl nějakou matematickou operaci – v tomto případě dělení. Tento výpočet téměř jistě nevznikl na základě analýzy struktury úlohy, neboť tyto údaje spolu v dané situaci nesouvisí a jejich podíl se nedá k zakreslené geometrické situaci nijak vztáhnout. Tento druh chyb tedy není výsledkem nějaké miskoncepce (chybného pojetí něčeho) ale spíše důsledkem práce v pseudo-analytickém módu (tedy nepoužití žádné koncepce).

Speciální skupinou chyb náležících do kategorie „nepropojení reprezentací“[88] tvoří chyby, které jsem zařadila do kategorie „vazba na konkrétní reprezentaci objektu“. Jedná se o situace, kdy žák nakládá s nákresem, jako kdyby to byl přímo ten objekt, na který náčrtek odkazuje, a tedy například měří rozměry z obrázku, i když je jasně uvedeno, že rozměry neodpovídají skutečnosti. Vondrová označuje jako příčinu těchto o obtíží narušení vazby mezi teoretickým prostorem a prostorem prostorově-grafických entit (Vondrová, 2015; Vondrová, Havlíčková, 2015). Vztahy mezi teoretickým prostorem a prostorem prostorově-grafických entit a nezbytnost přechodů mezi těmito světy při řešení geometrických úloh popisuje Labordeová (2005). Autorka uvádí, že náčrtky se mohou stát i překážkou při řešení úlohy – pokud z nich například začne žák odvozovat vlastnosti, které jsou vlastní pouze konkrétní grafické reprezentaci (to bylo patrné na případu Charloty, která chybně dokreslila o jednu řadu kostek ve struktuře víc, protože jinak by mezera mezi linkami vypadala příliš velká). Vztah mezi prostorově-grafickým a teoretickým prostorem je dále komplikován tím,

[88] Spíše by se měl použít termín „neoddělení reprezentace od teoretického objektu“, ale vzhledem k tomu, že toto neoddělení se projevuje problémy v propojování s dalšími reprezentacemi, ponechám tento typ obtíží pod označením „nepropojení reprezentací“.

že jsou konvencí dána implicitní pravidla pro to, co lze z obrázku vyčíst a co nikoliv – například kolinearitu bodů nebo to, že se dvě přímky protnou, lze vyčíst z obrázku, zatímco kolmost či rovnoběžnost vyžaduje speciální označení. Tyto konvence nebývají explicitně formulovány, a je tedy pro žáky obtížné se v pravidlech zorientovat. Vondrová a Havlíčková (2015) dále uvádějí, že vazba na prostor prostorově-grafických entit je překážkou ontogenetického původů. Práce v teoretickém prostoru vyžaduje značnou míru abstrakce, k čemuž se žáci 1. stupně dopracovávají až postupně. (To koresponduje i tím, co zmiňuje Duval, 2006, že nejprve musí dojít k odpojení teoretického objektu od konkrétní reprezentace, pomocí které byl zaveden.) Tento posun je patrný i ve výstavbě analyzovaných učebnic pro 1. stupeň – do 4. ročníku jsou uváděny prakticky výhradně úlohy, kde obrázky odpovídají měřítkem skutečným rozměrům, některé úlohy dokonce vyžadují změření údajů přímo z obrázku, ale tento úzus se postupně mění. V učebnicích pro 5. ročník již nalézáme řadu úloh, které jsou doprovázeny pouze náčrtkem. Od žáků 2. stupně se již očekává, že budou mezi těmito prostory rozlišovat. To, že se skutečně schopnost práce v teoretickém geometrickém prostoru mění mezi 1. a 2. stupněm, můžeme vidět například na chybách identifikovaných u úlohy H3 v testu. Výskyt strategie měření údajů z obrázku u úlohy H3 vykazuje jasný předěl mezi žáky, kteří jsou nebo právě dokončili 1. stupeň (ročníky 4 až 6, v průměru 13 žáků v ročníku), a žáky na 2. stupni (7. až 9. ročník, v průměru 2 žáci v ročníku).

Posledním jevem, o kterém se chci v této části zmínit, je nízké využívání grafických metod. Na tuto skutečnost upozorňuje například Kuřina (2011) nebo Divišová (2012). Míra využívání těchto metod závisí do značné míry na typu úlohy. Pokud se u úlohy nabízí přímé užití nějakého vzorce či postupu, jako je tomu v úlohách H5 a H15 (úlohy mohou připomínat klasické úlohy na přímou úměrnost), je využití těchto metod nízké. To odpovídá opět užití pseudo-analytického způsobu uvažování, jak ho popisuje Vinner (1997). U úlohy H13 a H14 je situace jiná (úlohy patří mezi nestandardní a žáci nemají k podobnému typu úloh přiřazen standardní vzorec) – v úloze H14 je dokonce poměr výpočetních a grafických strategií téměř vyrovnaný.

6. Závěr

V práci jsem se zabývala čtyřmi výzkumnými otázkami. První tři z nich zjišťovaly souvislost mezi úspěšností v úlohách na výpočet obsahu a objemu a třemi různými schopnostmi žáků: nenumerickým uvažováním, schopností strukturovat prostor pomocí čtvercových či krychlových jednotek a úrovní multiplikativního uvažování. Jako další cíl jsem si stanovila zkoumat strategie žáků při řešení úloh na obsah a objem a nejčastější chyby, které lze při řešení těchto úloh pozorovat. Domnívám se, že jsem výzkumné otázky zodpověděla.

V teoretické části práce jsem podrobně popsala dvě konstruktivistické teorie poznávacího procesu – hierarchický interakcionismus a teorii generických modelů včetně jejich srovnání. Za jeden z přínosů práce pokládám sestavení hypotetických učebních trajektorií pro obsah a objem na základě důkladného prostudování pěti různých zdrojů (konkrétně Piagetových výzkumů, výzkumu autorů Outhredové a Mitchelmorea, Battisty, Saramové a Clementse a projektu TurnonCCmath). Tyto trajektorie mohou sloužit jako podklad pro autory učebnic i tvůrce kurikula.

V rámci hledání odpovědí na výzkumné otázky jsem dále navrhla úlohy a sestavila proměnné, které jsem použila k měření jednotlivých konstruktů – tj. úspěšnosti v úlohách na obsah a objem, nenumerického uvažování, schopnosti strukturace a multiplikativního uvažování. Než jsem přistoupila ke zjišťování vztahů mezi proměnnými, ověřila jsem u těchto proměnných jejich reliabilitu a validitu. Zjištěné vztahy mezi proměnnými se pohybovaly od podstatné až velmi silné korelace pro nenumerické uvažování (geometrickou představivost) až po slabou až střední korelaci pro multiplikativní uvažování. Geometrická představivost a strukturace prostoru se ukázaly jako faktory se silným vztahem k úspěšnosti ve výpočetních i konceptuálních úlohách na obsah a objem, a i když nemohla být prokázána přímá příčinná souvislost, je pravděpodobné, že aktivity rozvíjející prostorovou představivost a strukturaci prostoru pomocí jednotek budou mít za důsledek zlepšení konceptuálního pochopení pojmů obsah a objem. Dostatek prostoru ve výuce by tedy měl být věnován jak strukturaci prostoru do jednotek, tak i například různým transformacím útvarů a těles, které zachovávají obsah a objem (tj. dekompozici a následné rekompozici útvarů).

V mém výzkumu se dále ukázalo, že řada žáků ještě v 5. a 6. ročníku neurčovala počet kostek ve stavbě či počet čtverců v obdélníku pomocí násobení, ale nesystematickým počítáním – bude pro ně tedy obtížné uvidět souvislost mezi vzorcem pro obsah a strukturací prostoru do jednotek. Výpočty a vzorce by bylo proto vhodné zavádět až v okamžiku, kdy mají žáci dostatek zkušeností se strukturací a enumerací jednotek a kdy může dojít k propojení způsobu výpočtu s geometrickou situací. Na relativně pozvolném zvyšování úspěšnosti v úlohách na strukturaci a enumeraci jednotek je vidět, že uchopování pojmů obsah a objem je dlouhodobý proces, který si žáci osvojují postupně, a je tedy nutné se opakovaně vracet k jeho zakotvení ve strukturaci.

V souvislosti se zkoumáním poslední výzkumné otázky považuji za nejdůležitější několik zjištění. Předně je to doplnění hypotetické učební trajektorie pro objem a obsah o úroveň popisující propojení mezi délkami stran či hran a počtem jednotek, které lze do uvedeného rozměru naskládat. Dále se ukázalo, že naprostá většina identifikovaných překážek pro úspěšné vyřešení úloh spočívá v nedostatečném propojení mezi různými reprezentacemi (tzv. kompartmentalizaci). Obecná didaktická doporučení, jak kompartmentalizaci předcházet, uvádí ve svém článku Presmeg (2006): propojovat již existující poznatky s novými, využívat úlohy speciálně zaměřené na propojování vizuálních a numerických registrů reprezentací, předkládat studentům problémy dobře řešitelné pomocí náčrtku či vyžadující interpretaci náčrtku, využívat analogie a metafory z běžné zkušenosti žáků, využívat a nechat žáky vytvářet statické a dynamické simulace pomocí ICT.

Další zajímavé zjištění se týkalo problému žáků při práci s konvencemi týkajícími se umístění rozměrů obdélníku ve 3D prostoru. Mnoho žáků umisťuje délku obdélníku vertikálně a / nebo obdélník považuje za kvádr. Konvence užívané učiteli ohledně umístění rozměrů by vyžadovaly podrobnější výzkum stejně jako fakt, který můj výzkum naznačil, a sice že by tyto miskoncepce mohly souviset s typem používaných učebnic. Proces „abstrahování“ jednotky (tj. práce s obecnou jednotkou, určování vlastností typických pro všechny jednotky daného typu) by také zasloužil hlubší zkoumání. Je možné, že i zde bude velký vliv používaných učebnic.

Předkládaný výzkum má samozřejmě svá omezení. Předně, vzorek testovaných žáků byl vybrán na základě dostupnosti, a tedy zobecnitelnost výsledků není taková jako u náhodného vzorku. Na druhou stranu předkládané výsledky jsou v souladu s výzkumy dalších autorů, což mluví ve prospěch jejich souběžné validity. U výzkumné otázky RQ3 byla úroveň multiplikativního uvažování měřena pouze na základě kvalitativního kódování způsobu výpočtu u jedné úlohy. Domnívám se, že při lepším měření tohoto konstruktu by se projevila i silnější souvislost s úspěšností v úlohách na obsah a objem. Další omezení je vlastní každému kvalitativnímu výzkumu podobného typu – je možné, že jiný badatel by v žákovských řešeních či rozhovorech s žáky nalezl ještě jiné jevy a interpretoval by je jiným způsobem.

Práce na výzkumu pro mě byla nesmírně přínosná a obohacující. Zejména oceňuji, že jsem mohla pracovat jak s kvantitativními, tak s kvalitativními metodami a v obou jsem zaznamenala podstatný posun. V kvantitativní části si cením zejména dalších praktických zkušeností s faktorovou analýzou a lineární regresí. Co se týká kvalitativního zpracování dat, musím konstatovat, že práce na tomto výzkumu zcela změnila můj přístup k tomuto typu zkoumání. Mé zaměření na počátku práce bylo ryze kvantitativní, ale když jsem se potýkala s omezenou interpretovatelností písemných řešení a marně hloubala nad tím, jak to daný žák počítal či co tím myslel, viděla jsem, že při tomto způsobu analýzy dat ztrácíme mnoho podstatných informací. Naproti tomu pestrá paleta jevů identifikovaných v kvalitativním výzkumu mi doslova učarovala (a to i když se nedala vložit do programu SPSS a přetvořit v tabulky či grafy).

7. Seznam použitých informačních zdrojů

Amthauer, R., Brocke, B., Liepmann, D., Beauducel, A. (do češtiny upravila Plháková, A.) (2005). *Test struktury intelligence I-S-T 2000 R – Příručka*. Praha: Testcentrum.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., Suggate, J. (2009). The array representation and primary children´s understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217–241.

Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M., Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 227–260.

Barrett, J. E., Clements, D. H., Sarama, J., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 28–54.

Barrett, J. E., Cullen, C., Sarama, J., Clements, D. H., Klanderman, D., Miller, A. L., Rumsey, C. (2011). Children's unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 43, 637–650.

Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students´ development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 185–204.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In Lester, F. K. Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Battista, M. T., Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258–292.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503–532.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education – A review. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 257–269.

Bond, T. G., Parkinson, K. (2010). Children's understanding of area concepts: Development, curriculum and educational achievement. *Journal of Applied Measurement*, *11*(1), 60–77.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics 1970–1990.* [Edited and translated M. Cooper, N., Balacheff, R., Sutherland, Warfield, V.] Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruin, J. (2006). *Newtest: command to compute new test*. UCLA: Statistical Consulting Group. Dostupné z http://stats.idre.ucla.edu/stata/ado/analysis/.

Carrier, J. (2014), Student strategies suggesting emergence of mental structures supporting logical and abstract thinking: Multiplicative reasoning. *School Science and Mathematics*, *114*(2), 87–96.

Clark, F., Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41–51.

Clements, D. H., Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81–89.

Clements, D. H., Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In Clements, D. H., Sarama, J. (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 299–320). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, Associates.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., Myers, M. (2009). *Equipartitioning / splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories.* Paper presented at The 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece.

Confrey, J. (2015). *Research on Learning Trajectories in Mathematics and Science*. Dostupné z https://sudds.ced.ncsu.edu/wp-content/uploads/2017/02/02132015_NSF_Methods_Presentation_smaller.pdf.

Corcoran, T., Mosher, F. A., Rogat A. (2009). *Learning Progressions in Science: An Evidence-based Approach to Reform*. CPRE Research Report # RR-63. Dostupné z http://www.cpre.org/images/stories/cpre_pdfs/lp_science_rr63.pdf.

Cross, C.T., Woods, T.A., Schweingruber, H. (Eds.). (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: National Academies Press. Dostupné z www.nap.edu/catalog.php?record_id=12519.

Curry, M., Outhred, L. (2005). Conceptual understanding of spatial measurement. In Clarkson, P. et al. (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice. Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia [MERGA]* (pp. 265–272). Sydney: MERGA.

Daro, P., Mosher, F., Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education.

De Bock, D. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York, N.Y.: Springer.

De Vauss, D. (2002). *Analyzing Social Science Data*. London: SAGE.

Dembo, Y., Levin, I., Siegler, R.S. (1997). A comparison of the geometric reasoning of students attending Israeli ultraorthodox and mainstream schools. *Developmental Psychology*, *33*, 92–103.

Divišová, B. (2012). *Geometrické úlohy řešitelné bez výpočtu.* Disertační práce. Praha: PedF UK v Praze. Školitelka N. Vondrová.

Dorko, A., Speer, N. M. (2013). Calculus students' understanding of volume. *Investigations in Mathematics Learning*, *6*(2),48–68.

Dubinsky, E., Mcdonald, M. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275–282). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In Hitt, F., Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the 21st Conference of the North American Chapter of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3–26). Cuernavaca, Mexico: PME-NA.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Duschl, R., Maeng, S., Sezen, A. (2011). Learning progressions and teaching sequences: a review and analysis. *Studies in Science Education*, *47*(2), 123–182.

Eames L.C., Clements, D. H., Sarama, J. et al. (2014). Interactions among Hypothetical Learning Trajectories for Length, Area, and Volume Measurement. In *NCTM Research Conference*, April 2014. Dostupné z: http://nctm.confex.com/nctm/2014RP/webprogram/ExtendedAbstract/Session24890/NCTM%202014%20LAV%20Paper.pdf.

Finesilver, C. (2017). Between counting and multiplication: Low-attaining students' spatial structuring, enumeration and errors in concretely presented 3D array tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(2), 95–114.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., Merino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17.

Friedman, L. (1995). The space factor in mathematics: Gender differences. *Review of Educational Research*, *65*, 22–50.

Gavora, P. et al. (2010) *Elektronická učebnica pedagogického výskumu*. [online]. Bratislava: Univerzita Komenského. Dostupné z: http://www.e-metodologia.fedu.uniba.sk/.

Hendl, J. (2004). *Přehled statistických metod zpracování dat: analýza a metaanalýza dat*. Praha: Portál.

Hendl, J. (2008). *Kvalitativní výzkum: základní teorie, metody a aplikace*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál.

Hejný, M. (2007). Budování matematických schémat. In Hošpesová, A., Stehlíková N., Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (s. 81–122). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Herendiné-Kónya, E. (2015). The level of understanding geometric measurement. In Krainer, K., Vondrová, N. (Eds.), *CERME9: Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 536–542). Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Huang, H.-M. E., Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction, 21*(1), 1–13.

Huang, H.-M. E., Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, *2*(1), 10–26.

Huang, H.-M. E. (2014). Third- to fourth-grade students' conceptions of multiplication and area measurement. *ZDM Mathematics Education, 46*(3), 449–463.

Chvál, M., Procházková, I., Straková, J. (2015). *Hodnocení výsledků vzdělávání didaktickými testy*. Praha: ČŠI.

Izsák, A. (2004). Teaching and learning two-digit multiplication: coordinating analyses of classroom practice and individual student learning. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(1), 37–79.

Jacob, L., Mulligan, J. (2014). Using arrays to build towards multiplicative thinking in the early years. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *19*(1), 35–40.

Janík, T. (2005). Znalost jako klíčová kategorie učitelského vzdělávání. Brno: Paido.

Jirotková, D. (2007). Budování schématu síť krychle. In Hošpesová, A., Stehlíková N., Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (s. 147–180). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Jirotková, D., Kloboučková, J. (2013). Kritická místa matematiky na 1. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl, M., Vondrová N. et al. *Kritická místa matematiky základní školy očima učitelů* (s. 19–61). Praha: PedF UK v Praze.

Kahneman, D. (2012). *Myšlení, rychlé a pomalé*. Praha: Jan Melvil Publishing.

Kalchman, M., Koedinger, K. R. (2005). Teaching and learning functions. In National Research Council (Ed.), *How Students Learn* (pp. 351–393). Washington, D. C.: National Academies Press.

Kamii, C., Kysh, J. (2006). The difficulty of "length × width": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105–115.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 177–209.

Kospentaris, G., Spyrou, P., Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 105–127.

Kouba, V.L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147–158.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v ČB.
Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis scholae, 10*(2), 15–45.
Laborde, C. (2005) The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning in Geometry. In *Meaning in Mathematics Education* (pp. 159–179). New York: Springer-Verlag.
Lehrer, R., Kim, M.-J., Ayers, E., Wilson, M. (2014). Toward establishing a learning progression to support the development of statistical reasoning. In Maloney, A. P., Confrey, J., Nguyen, K. H. (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 31–59)*.* Charlotte: Information Age Publishers.
McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological bulletin*, *86*(5), 889–918.
Molnár, J., Perný, J., Stopenová, A. (2006). *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji*. Praha, JČMF.
National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: U.S. Department of Education.
Nguyen, K. H. (2010). *Investigating the role of equipartitioning and creating internal units in the construction of a learning trajectory for length and area*. A dissertation submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University.
Nováková, E., Vondrová N. (2015). Tematické okruhy Číslo a početní operace, Číslo a proměnná. In Fuchs, E., Zelendová, E. (Eds.), *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání* (s. 8–41). Praha: Národní ústav pro vzdělávání.
Osborne, J., Waters, E. (2002). Four assumptions of multiple regression that researchers should always test. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, *8*(2), *1–5*.
Outhred, L. N., Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 144–167.
Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. New York: Norton.
Pittalis, M., Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191–212.
Plšková, Z. (2010). *Rozvoj prostorové představivosti žáků ZŠ*. Disertační práce. Universita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta. Školitel: A. Stopenová. Dostupné z: http://theses.cz/id/ht91sr/.
Potari, D., Spiliotopoulou, V. (1996). Children's approaches to the concept of volume. *Science Education, 80*(3), 341–360.
Presmeg, N. C. (2006). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., Stehlíková N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 19-34). Praha: PedF UK v Praze.

Rabušic, L., Mareš, P. (2002). *Měření (síly) asociace mezi dvěma spojitými proměnnými: korelační koeficienty a grafy*. Dostupné z http://is.muni.cz/el/1423/podzim2004/SOC418/SPSS_8_korelace.pdf.

Rahim, M. H., Olson, A. (1998). Qualitative patterns in plane geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(3), 373–389.

Rahim, M. H., Siddo, R. A. (2012). High school student-teachers attempts to justify mathematical propositions utilizing spatial structuring on shape transform. *Research in Mathematical Education*, *16*(2), 107–123.

Rendl, M., Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, *24*(1), 22–57.

Říčan, P. (2007). *Psychologie osobnosti: [obor v pohybu]*. Praha: Grada.

Sarama, J.A., Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J., Van Dine, D. W., McDonel, J.S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43*(5), 667–680.

Sherin, B., Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 347–395.

Slezáková, J. (2011). *Geometrická představivost v rovině*. Disertační práce. Universita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta. Školitel J. Molnár. Dostupné z http://theses.cz/id/op6350/?furl=%2Fid%2Fop6350%2F;so=nx;lang=en.

Strauss, A., Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Newbury Park, CA: Sage.

Tarr, J. E., Chávez, Ó., Reys, R. E., Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics*, *106*(4), 191–201.

Tomášek, V., Basl, J., Janoušková, S. (2016). *Mezinárodní šetření TIMSS 2015: národní zpráva*. Praha: Česká školní inspekce.

Tůmová, V., Janda, D. (2014). Vliv používání vizualizace a matematických operací na úspěšnost žáků v úlohách týkajících se objemu a obsahu. In Bastl, B., Lávička, M. (Eds.), *Sborník z konference setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2014* (s. 225–230). Plzeň: Vydavatelský servis.

Van Dooren, W., De Bock, D. Janssens, D., Verschaffel L. (2005). Students´ overreliance on linearity: an effect of school-like problems? In Chick, H. L., Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 265–272). Melbourne: PME.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 97–129.

Vygotskij, L. S. (2004). *Psychologie myšlení a řeči*. [Uspořádal, úvodním slovem a komentáři opatřil J. Průcha.] Praha: Portál.

Vondrová, N., Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl, M., Vondrová, N. et al. *Kritická místa matematiky základní školy očima učitelů* (s. 63–126). Praha: PedF UK v Praze.

Vondrová, N., Novotná, J., Tichá, M. (2015). Didaktika matematiky: historie, současnost a perspektivy s důrazem na empirické výzkumy. In Stuchlíková, I., Janík, T. et al. *Oborové didaktiky: vývoj – stav – perspektivy* (s. 93–122). Brno: Masarykova univerzita.

Vondrová, N. (2015). Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahu útvarů a objemů těles. In Vondrová, N., a Rendl, M. et al. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 253–318). Praha: Karolinum.

Vondrová, N., Havlíčková, R. (2015). Konstrukční úlohy v řešeních žáků napříč ročníky základní školy. In Vondrová, N., a Rendl, M. et al. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 133–180). Praha: Karolinum.

Wilder, J. (2014). *How children quantify area*. Disertační práce. Birmingham: University of Alabama. Dostupné z http://contentdm.mhsl.uab.edu/u?/etd,1840.

Wright, V. (2014). Towards a hypothetical learning trajectory for rational number. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(3), 635–657.

Young-Loveridge, J. (2005). Fostering multiplicative thinking using array-based materials. *Australian Mathematics Teacher*, *61*(3), 34–40.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students´ failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behaviour*, *25*(3), 224–239.

Seznam analyzovaných učebnic

Blažková, R., Vaňurová, M., Matoušková, K., Staudková, H. (2010). *Matematika pro 3. ročník základních škol (1. – 3. díl): učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter.

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M. (2010). *Matematika pro 4. ročník základních škol (1. – 3. díl): učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Všeň: Alter.

Hejný, M., Jirotková D., Slezáková-Kratochvílová, J. (2007). *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy.* 1. vyd. Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková D., Slezáková-Kratochvílová, J., Michnová J. (2008). *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy.* 1. vyd. Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková D., Slezáková-Kratochvílová, J., Michnová J. (2009). *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy.* 1. vyd. Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková D., Bomerová, E. (2011). *Matematika: učebnice pro 4. ročník základní školy.* 1. vyd. Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková D., Bomerová, E., Michnová, J. (2011). *Matematika: učebnice pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus.

Justová, J. (2010). *Matematika pro 5. ročník základních škol (1. – 3. díl): učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Všeň: Alter.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2009). Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1. díl: *Opakování z aritmetiky a geometrie*. 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2009). *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 3. díl: Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle a kvádr*. 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2010). *Pracovní sešit k učebnicím matematiky pro 6. ročník.* 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2010). *Matematika pro 7. ročník ZŠ, 3. díl: Shodnost, středová souměrnost, čtyřúhelníky, hranoly*. 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2012). *Pracovní sešit k učebnicím matematiky pro 7. ročník.* 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2005). *Matematika pro 8. ročník ZŠ, 1. díl: Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, Výrazy*. 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2005). *Matematika pro 8. ročník ZŠ, 3. díl: Kruh, kružnice, válec, Konstrukční úlohy. 1*. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2005). *Pracovní sešit k učebnicím matematiky pro 8. ročník.* 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2006). *Matematika pro 9. ročník ZŠ, 2. díl: Funkce, podobnost, goniometrické funkce*. 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2006). *Matematika pro 9. ročník ZŠ, 3. díl: Jehlany, kužely, koule, Finanční matematika*. 1. vyd. Praha: Prometheus.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2006). *Pracovní sešit k učebnicím matematiky pro 9. ročník.* 1. vyd. Praha: Prometheus.

8. Seznam příloh

Přílohy

P1. Přehled zkratek používaných v textu

Zkratka	Význam	Kapitola či oddíl
2D	Rovina (dvoudimenzionální prostor)	
3D	Prostor (třídimenzionální prostor)	
Dotest	Dodatečné testování	Viz oddíl 4.1.3
HI	**H**ierarchický **I**nterakcionismus	Viz oddíl 2.2.1.
Hlavní test	Úlohy H1–H16	Viz oddíl 3.2
HUT	**H**ypotetická **U**čební **T**rajektorie	Viz oddíl 2.1
JP	**J**. **P**iaget	Označení autora
MB	**M**. **B**attista	Označení autora
NMAP	**N**ational **M**athematics **A**dvisory **P**anel	Viz oddíl 2.3.1
OM	**O**uthredová a **M**itchelmore	Označení autorů
Předtest	Úlohy U1–U20	Viz oddíl 3.2.
RQ1 – RQ4	Výzkumné otázky	Viz oddíl 2.7
SC	**S**aramová a **C**lements	Označení autorů
TCC	**T**urnon**cc**math	Viz oddíl 2.4.5
TGM	**T**eorie **G**enerických **M**odelů	Viz oddíl 2.2.2
TIMSS	**T**rends in **I**nternational **M**athematics and **S**cience **S**tudy	Viz oddíl 2.3.2

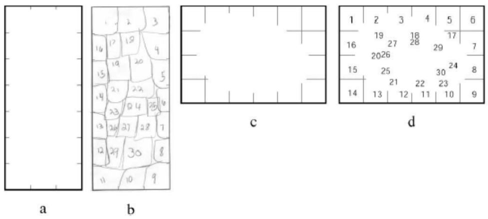
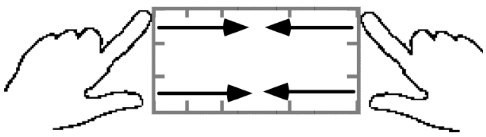
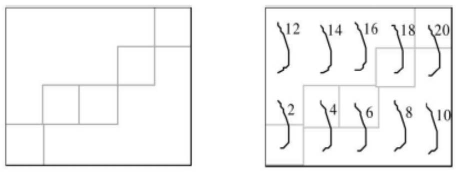
P2. Proměnné používané v korelačních analýzách a lineárním regresním modelu

Není-li uvedeno jinak, jsou proměnné vypočteny jako procentuální úspěšnost – tedy počet bodů aktuálně dosažený v zahrnutých úlohách vydělený maximálním dosažitelným počtem bodů v těchto úlohách. Proměnné jsou řazeny abecedně, pouze dummy proměnné vytvořené pro určitou proměnnou jsou uvedeny přímo za touto proměnnou a mají předponu „D_“.

Označení proměnné	**Typ a hodnoty**	**Zahrnuté úlohy (#)**	**Interpretace, účel zavedení a omezení pro jejich použití**	Zdroj
CONC	Kardinální ⟨0;1⟩	(6) H3–H6, H15–H16	Měří konceptuální pochopení obsahu a objemu. Nezahrnuje úlohy, které více než 10 % žáků řešilo pomocí strukturace prostoru a/nebo (mentální) manipulace	Expertní posouzení + analýza strategií
CALC	Kardinální ⟨0;1⟩	(9) H2–H6, H13–H16	Úspěšnost v úlohách, které se dají řešit nějakým výpočtem či pomocí vzorce	Původní návrh použitý při tvorbě testu
CALC bez H13 a H14	Kardinální ⟨0;1⟩	(7) H2–H6, H15–H16	Modifikece proměnné CALC s vyloučením úloh H13 a H14 (aby mělo smysl určovat korelaci se strukturačními úlohami)	Modifikace CALC
CALC bez H13	Kardinální ⟨0;1⟩	(8) H2–H6, H14–H16	Modifikece proměnné CALC s vyloučením úlohy H13 (aby mělo smysl určovat korelaci s multiplikativním uvažováním)	Modifikace CALC
F_CONC	Kardinální ⟨0;1⟩	(7) H4–H6, H13–H16	Úlohy vztahující se k faktoru 1 provedené FA, tj. zjišťující konceptuální pochopení obsahu a objemu (není rozlišeno, zda a do jaké míry lze při řešení využít strukturaci prostoru)	Faktorová Analýza
F_CONC bez H13	Kardinální ⟨0;1⟩	(6) H4–H6, H14–H16	Modifikace proměnné F_CONC s vyloučením úlohy H13, aby mělo smysl určovat korelaci multiplikativním uvažováním)	Modifikace F_CONC
Index_STR	Kardinální {0;1;2; ;8}	(2) H12-H13	Proměnná měří schopnost strukturace pomocí úspěšnosti v úlohách H12 a H13. (bodování H12: všechny podúlohy + bodování H13 na škále 0-5)	
Kód_DIV	Ordinální {0;1;2 ;3;4}	H13	Kvalitativní hodnocení úrovně multiplikativního uvažování na základě způsobu určení počtu pater v úloze H13. Hodnoty od 0 do 4 odpovídají úrovním HUT. Pouze pro žáky, kteří H13 řešili.	
Kód_DIV1	Ordinální {-1;0;1;2 ;3;4}	H13	Pro žáky, kteří úlohu neřešili, byl zaveden kód –1. Zahrnuje i informaci, zda žák úlohu H13 řešil či nikoliv	Modifikace Kód_DIV
D_KÓD_DIV =3a4	Dichotomická 0/1	H13	Je rovna 1 pro žáky, kteří počet pater ve stavbě v úloze H13 zjišťují buď postupným násobením nebo dělením	Dummy
D_Kód_DIV1 a2	Dichotomická 0/1	H13	Je rovna 1 pro žáky, kteří počet pater ve stavbě v úloze H13 zjišťují buď odhadováním, počítáním po jedné nebo postupným přičítáním	Dummy

Označení proměnné	**Typ a hodnoty**	**Zahrnuté úlohy (#)**	**Interpretace, účel zavedení a omezení pro jejich použití**	Zdroj
Kód_STR	Ordinální {-1;0; 1;2 ;3;5}	H13	Kvalitativní ohodnocení nákresu prvního podlaží doplněné o hodnocením způsobu řešení. Je třeba zahrnout pouze žáky, kteří úlohu H13 řešili	
Kód_STR0	Ordinální {-1;0; 1;2 ;3;5}	H13	Pro žáky, kteří úlohu H13 neřešili, zaveden zvláštní kód 0, stejný jako pro ty, u kterých neumíme o strukturaci rozhodnout	Modifikace Kód_STR
Kód_STR2	Ordinální {-2;-1;0; 1;2 ;3;5}	H13	Pro žáky, kteří úlohu H13 neřešili, zaveden zvláštní kód –2 (nejhorší úroveň strukturace). Zahrnuje i informaci, zda žák úlohu H13 řešil či nikoliv	Modifikace Kód_STR
D_kSTR=-1	Dichotomi cká 0/1	H13	Je rovna 1 pro žáky, kteří v úloze H13 nebyli schopni zakreslit správnou strukturaci	Dummy
D_kSTR=0	Dichotomi cká 0/1	H13	Je rovna 1 pro žáky, u kterých nejsme schopni rozhodnout o úrovni strukturace (např. chybí obrázek)	Dummy
D_kSTR=1a2	Dichotomi cká 0/1	H13	Je rovna 1 pro žáky, kteří buď zakreslovali strukturaci v obdélníku po jedné kostce nebo pomocí soustavy svislých a vodorovných linek.	Dummy
D_kSTR=3	Dichotomi cká 0/1	H13	Je rovna 1 pro žáky, kteří zobrazili strukturaci krychlových jednotek ve 3D nákresu.	Dummy
D_kSTR=5	Dichotomi cká 0/1	H13	Je rovna 1 pro žáky, u kterých pozorujeme implicitní strukturaci (již ji nepotřebují znázorňovat).	Dummy
Představivos t_TOT	Kardinální ⟨0;1⟩	(36) U1–U20, H8–H12 (podúlohy)	Úlohy vztahující se ke všem testovaným typům nenumerického uvažování	Faktorová analýza
Ročník	Kardinální {6;7;8;9}		Ročník, který žák navštěvuje. Zachycuje věk žáka	
Změna_STR AT	Kardinální ⟨0;1⟩	(4) U1, U7, U10, U15	Schopnost změny strategie/pohledu při řešení	Faktorová Analýza
Známka	Kardinální {1;2; … ;5}		Známka z matematiky (bohužel u cca čtvrtiny respondentů chybí)	
Známka=1	Dichotomi cká 0/1		Je rovna 1 pro žáky, kteří uvedli, že mají známku z matematiky 1	Dummy
Známka=2	Dichotomi cká 0/1		Je rovna 1 pro žáky, kteří uvedli, že mají známku z matematiky 2	Dummy
Známka=3	Dichotomi cká 0/1		Je rovna 1 pro žáky, kteří uvedli, že mají známku z matematiky 3	Dummy
Známka=4;5	Dichotomi cká 0/1		Je rovna 1 pro žáky, kteří uvedli, že mají známku z matematiky 4 nebo 5	Dummy

P3. Battista (2004) – HUT pro obsah – strukturace

Úroveň – obsah	Popis	Obrázek / popis typických chyb
Úroveň 1: Chybí strukturace a organizace jednotek do pole	Žáci ještě nejsou schopni organizovat jednotky do větších celků nebo lokalizovat a organizovat všechny jednotky do 2-dimenzionálního pole (struktury).	
Úroveň 2: Počátek používání větších celků při strukturaci pole	Žáci začínají používat uspořádání jednotek do větších celků (řady, sloupce) a rozpoznávat stejné složeniny/ celky zejména na okrajích struktury (např. horní a dolní řada). Střed pole zůstává nedostatečně strukturován.	
Úroveň 3: Odstranění problémů s vícenásobným započtením jednotek	Koordinace jednotlivých perspektiv – rozeznávají stejnou jednotku z různých úhlů pohledu a díky tomu jí nezapočítávají vícekrát (například čtverce v rozích).	V krajním sloupci 6, v posledním také 6, v horní řadě 4 (ale ty dva krajní už jsou započteny ve sloupcích). Problém se strukturou uvnitř obdélníku.
Úroveň 4: Při strukturaci pole užívají co největších celků, ale koordinace ještě není zcela přesná	Uspořádání jednotek do sloupců či řad, ale ještě nejsou přesně schopni tyto celky správně umístit uvnitř obdélníku. Žák opakovaně používá řadu dlaždic ve směru sloupce, ale umístění jednotlivých řad není přesné.	Problémy s umístěním řad – např. jen odhadují.
Úroveň 5: Strukturace je zcela jasná, ale vyskytují se numerické chyby při určení počtu jednotek (nepoužívají při počítání co největší celky)	Umístění všech jednotek do sloupců/ řad je jasné, ale často dojde k numerické chybě při jejich počítání. (Práce s celky je ještě nesystematická / nedůsledná – např. zapomenou, kde skončili s počítáním, nebo nepoužívají co největší celky, aby minimalizovali možnost chyby). Jejich strategie ještě nejsou zobecnitelné na větší pole.	 Počítá po jednom, nebo např. po dvou a často se vyskytnou chyby.
Úroveň 6: Strukturace je zcela jasná a koordinace větších celků zcela rozvinutá. Jsou schopni počítat i bez opory v konkrétním materiálu	Pracují bezchybně s řádky/ sloupci či vrstvami. Počty jednotek jsou schopni určit i bez smyslové/ manipulativní opory.	

Úroveň – obsah	Popis	Obrázek / popis typických chyb
Úroveň 7: Schéma strukturace je natolik abstraktní, že umožňuje pochopení vztahu mezi prostorovým uspořádáním a numerickým procesem. Žáci jsou schopni užívat i jiné jednotky než čtvercové	Počet dlaždic nahlíží jako počet řad krát počet sloupců. Umí pracovat i s balíčky (např. vyplnit obdélník dlaždicemi o rozměru 1 x 2) – zobecnění na práci s jednotkami, které nejsou čtvercové nebo na jednotky poloviční velikosti.	

P4. Turnonccmath – HUT pro délku, obsah a objem (stručný výtah)

Ročník	Délka	Obsah	Objem
Předškolní věk	1. Identifikace atributu (popis a rozlišení různých měřitelných prostorových vlastností objektů v neformálním jazyce) 2. Princip zachování (zachování délky při transformacích jako posunutí, otočení a zrcadlení) 3. + 4. Přímé a nepřímé porovnávání (porovnávání délky dvou objektů, které mohou být umístěny vedle sebe + porovnávání délky dvou objektů, které nemohou být přiblíženy k sobě, pomocí třetího předmětu, porovnávání 3 předmětů)	1. Identifikace atributu (popis a rozlišení různých měřitelných prostorových vlastností objektů v neformálním jazyce)	1. Identifikace atributu (popis a rozlišení různých měřitelných prostorových vlastností objektů v neformálním jazyce; objem jako množství vody/písku/rýže, které se do předmětu vejde)
1. ročník	5. Měření bez mezer a překryvů (pokud čáru pokryji *n* stejnými jednotkami bez mezer a překryvů, má délku *n*; nejprve pokrývání pomocí více exemplářů dané jednotky, poté iterace jedné jednotky & omezení jen na případy, kde vychází počet jednotek celé číslo)	2. Princip zachování (zachování obsahu při transformacích jako posunutí, otočení a zrcadlení) 3. + 4. Přímé a nepřímé porovnávání (seřazení 2 až 3 předmětů podle obsahu – jeden objekt zcela překrývá objekt druhý; porovnávání obsahu předmětů, které nemohu položit na sebe pomocí třetího předmětu – např. listu papíru)	
2. ročník	5. Měření bez mezer a překryvů (měření pomocí standardních nástrojů – pravítka či metru, intervaly na pravítku představují opakující se jednotku; měření pokud je pravítko přiloženo ke kraji objektu jiným číslem než nulou) 6. Princip kompenzace (opakované měření délky objektu za pomoci různých jednotek – čím kratší jednotky tím víc jich	---	2. Princip zachování (zachování objemu při transformacích jako posunutí, otočení a zrcadlení, ale ne při „roztažení“) 3. + 4. Přímé a nepřímé porovnávání (srovnávání objemu dvou předmětů pomocí různých strategií: vizuální srovnání, vložení jednoho předmětu do druhého, srovnávání objemu jednotlivých částí, použití třetího předmětu pro porovnání vložením jednoho do druhého)

Ročník	Délka	Obsah	Objem
	bude potřeba; měření pomocí smíšených jednotek – m i cm; odhady vzdáleností, délek pomocí vlastních jednotek – např. prst = 1 cm, dlaň = 10 cm) 7. Aditivní Princip (určení o kolik je jeden předmět delší než jiný; slovní úlohy na porovnávání délek předmětů uvedených v různých jednotkách – s využitím sčítání a odčítání; pochopení aditivity u délky – dělení na stejné části a opětovné složení; práce s číselnou osou)		
3. ročník	8a. Vztah mezi obsahem a obvodem	5. Měření bez mezer a překryvů (dělení plochy na stejně velké díly a určování jejich počtu; pokud plochu pokryji *n* stejnými jednotkami bez mezer a překryvů, má obsah *n*; užití vlastních jednotek + zavedení standardních jednotek; – vše pro obdélníky/ čtverce) 6. Princip kompenzace (opakované měření obsahu útvaru za pomoci různých jednotek – čím menší jednotky tím víc jich bude potřeba; srovnávání počtu jednotek pro různé velikosti jednotky) 7. Aditivní Princip (rozložení plochy na menší nepřekrývající se obdélníky a opětovné složení) 8. Užití násobení (pro celá čísla) (zjišťování obsahu pomocí kachlíčkování – počet čtverců v řadě = délka strany a, počet čtverců ve sloupci = délka strany b, propojení na násobení; ilustrace distributivity násobení pomocí obsahů) 8a. Vztah mezi obsahem a obvodem (obdélníky	5. Měření bez mezer a překryvů (objem kapaliny) (měření a odhady objemu pomocí standardních jednotek g, kg a l; srovnávání objemů sklenic s různou podstavou, vztah objemu, velikosti podstavy a výšky kapaliny) 7. Aditivní Princip (objem kapaliny) –(slovní úlohy na zjištění součtu či rozdílu objemů ve stejných jednotkách)

Ročník	Délka	Obsah	Objem
		a mnohoúhelníky se stejným obsahem, ale různým obvodem)	
4. ročník	8a. Vztah mezi obsahem a obvodem (užití vzorců pro obvod a obsah při řešení slovních úloh) 8b. Převody jednotek (vzájemný vztah mezi jednotkami délky, vztah části a celku – souvislost se zlomky)	8a. Vztah mezi obsahem a obvodem (užití vzorců pro obvod a obsah při řešení slovních úloh)	8b. Převody jednotek (vzájemný vztah mezi jednotkami objemu kapalin resp. jednotkami hmotnosti, převody – souvislost se zlomky a desetinnými čísly)
5. ročník		8. Užití násobení (necelá čísla) (využití znalostí o výpočtu obsahu k modelování násobení zlomků; určení obsahu obdélníku se stranami délky < 1) 8b. Převody jednotek (vzájemný vztah mezi jednotkami obsahu)	5. Měření bez mezer a překryvů (vyplňování kvádru pomocí stejně velkých kostek a určování jejich počtu; objem jako počet kostek potřebných k vyplnění bez mezer a překryvů; užití vlastních jednotek; zavedení standardních jednotek + vztah s jednotkami délky a obsahu) 6. Princip kompenzace (opakované měření objemu za pomoci různých jednotek – čím menší jednotky tím víc jich bude potřeba; srovnávání počtu jednotek pro různé velikosti jednotky) 7. Aditivní Princip (zachování objemu při dělení na nepřekrývající se části a opětovném složení, porovnávání a zjišťování objemů rozdělením na části) 8. Užití násobení (pro celá čísla) (zjišťování objemu kvádru jako počtu kostek – počet kostek na šířku = délka strany *a*, počet kostek na délku = délka strany *b*, počet kostek na výšku = délka strany *c*; strukturace do vrstev + propojení na celočíselné násobení; ilustrace asociativity násobení pomocí objemů; vzorec pro objem, kvádry se stejným objemem, ale různými rozměry)
6. ročník		8c. Určení obsahu pro jiné tvary než obdélníky. (trojúhelníky, lichoběžníky + mnohoúhelníky, které se dají rozložit a předchozí tvary; výpočet založen na	8. Užití násobení (necelá čísla) – (zjišťování objemu kvádrů, které nemají celočíselné rozměry – užití jednotek, které vzniknou jako kvádry s rozměry např. ½, ¼ atd.; určení objemu takto vzniklé jednotky)

Ročník	Délka	Obsah	Objem
		dekompozici a aditivním principu) 8d. Povrch těles (sítě těles a určení povrchu tělesa pomocí sítě – krychle, kvádr, trojboký hranol)	8b. Převody jednotek (vzájemný vztah mezi jednotkami objemu)
7. ročník	8c. Určení obvodu pro jiné tvary než obdélníky (kruh)	8c. Určení obsahu pro jiné tvary než obdélníky. (kruh) 8d. Povrch těles (síť válce)	8c. Určení objemu pro jiná tělesa než kvádry. (různé hranoly a tělesa rozložitelná na kvádry a hranoly – aditivní princip; vztah mezi obsahem podstavy a objemem)
8. ročník		8d. Povrch těles (koule, kužel).	8c. Vzorce pro objem pro jiná tělesa (válec, kužel, koule).

P5. Přehled škol účastnících se testu

Testování se zúčastnily primárně školy, se kterými Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy spolupracuje. Jedná se o školy v Praze. Z důvodu zachování anonymity jednotlivých škol uvádím pouze, zda se škola nalézá spíše v centru či na okraji Prahy, počet žáků, a zda má škola nějakou specializaci. Školy byly pro další zpracování dat označeny kódem a pseudonymem. Vše je uvedeno v tabulce dole. Počet žáků (tam, kde nebyl přímo uveden na stránkách školy) je vypočten na základě počtu tříd a jejich průměrné obsazenosti. Pokud je ve sloupci specializace uvedeno písmeno A, znamená to, že škola má nějakou specializaci, která ovšem nemusí být nutně matematická a nemusí se týkat všech tříd.

Kód	Pseudonym	Centrum / okraj	Počet žáků ve škole cca	Specializace	Počet testovaných tříd	Počet testovaných žáků
BD	Bedlová	Centrum	750	A	6	76
BT	Brusinková	Centrum	500		10	107
CK	Citroníková	Centrum	500		9	70
KR	Krásná	Centrum	400		6	97
LK	Lístková	Centrum	450	A	6	72
SN	Slunečná	Okraj	600		13	143
VS	Veselá	Centrum	450	A	6	86
ZR	Za Rybníkem	Okraj	600		6	96

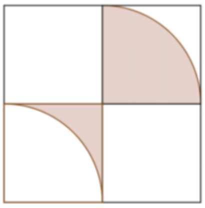
P6. Úlohy použité pro pilotní testování

Uvádím pouze verze testu pro druhý stupeň. Úlohy jsou očíslovány tak, jak byly později očíslovány v hlavním testu. Verze pro první stupeň se lišila pouze tím, že úlohy H4–H6, H10, H11 a H14–H16 byly vypuštěny.

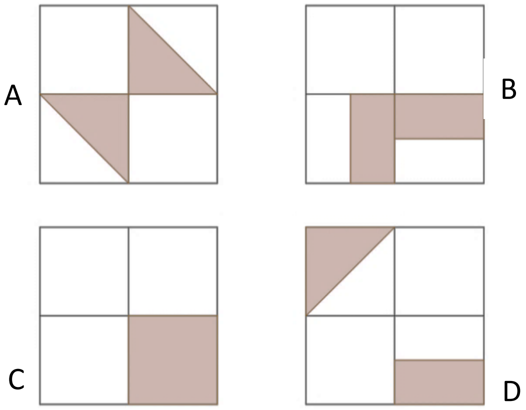
Pilotní test – Obsah   ročníky 5+

Jméno: Škola: Třída:

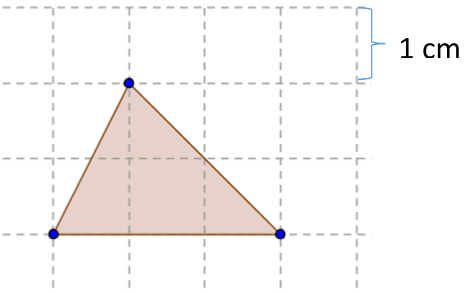
H1. Na obrázku:



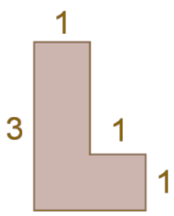
je vybarvena část čtverce. Na kterém z následujících obrázků je vybarvena stejná část čtverce? Zaškrtni a zdůvodni.



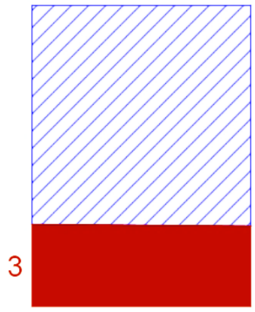
H2. Spočti obsah trojúhelníku, když víš, že vzdálenost dvou sousedních uzlů v síti je 1 cm. Nakresli dva další útvary se stejným obsahem.



H3. Určete obvod a obsah útvaru:



H4. Na obrázku je plánek zahrady. Vyšrafovaný čtverec představuje trávu a hnědý obdélník záhon. Vypočtěte plochu záhonu, víte-li, že plocha trávy (vyšrafovaný čtverec) je 64 m^2 a kratší strana záhonu je dlouhá 3 m.



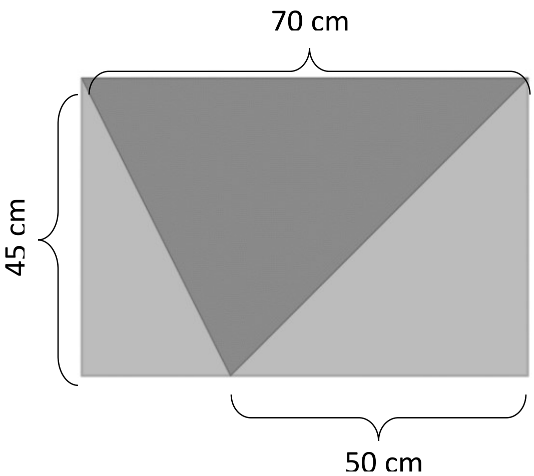
H5. Na vydláždění koupelny bylo použito 300 ks dlaždic o rozměru 10 x 10 cm, kolik kusů dlaždic budu potřebovat, když nové dlaždice mají rozměr:

a) 20 x 20 cm

b) 2 x 2 cm?

Popiš, jak jsi postupoval. Spáry mezi dlaždicemi neuvažuj (jako kdyby žádné nebyly).

H6. Vašek vyřízl z obdélníkové desky vybarvený trojúhelník. Kamarád Pepa ho hubuje, že víc než polovinu desky vyhodí. Vašek se ale brání, že odřezky jsou určitě menší než polovina. Kdo z nich má pravdu a proč?



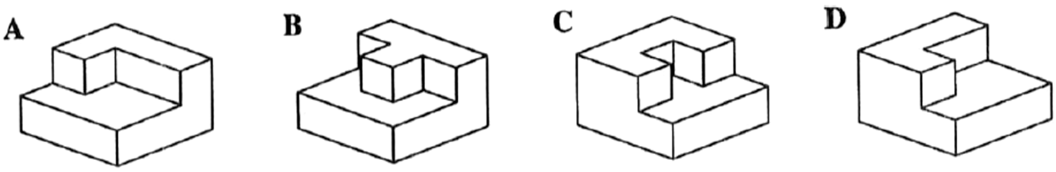
Pilotní test – Objem   ročníky 5+

Jméno: Škola: Třída:

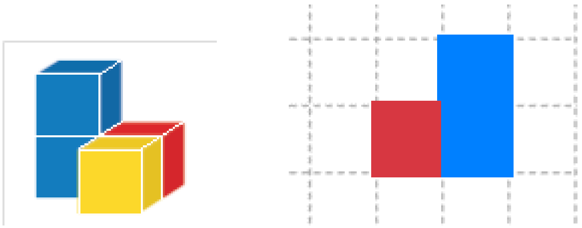
Známka z matematiky na konci školního roku: ……

Tvůj nejoblíbenější předmět: ………………………………………………………..

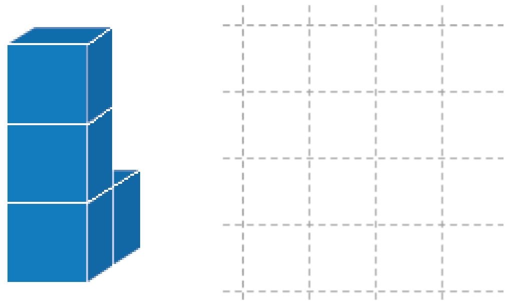
H7. Která dvě tělesa po spojení vytvoří krychli? ____________



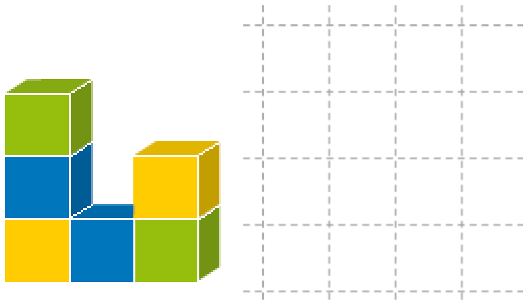
H9. Nakresli, jak by vypadala krychlová stavba při pohledu **zezadu**. Příklad:



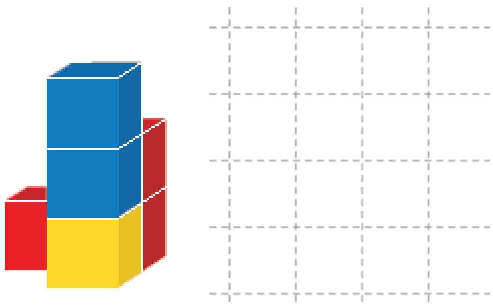
i)



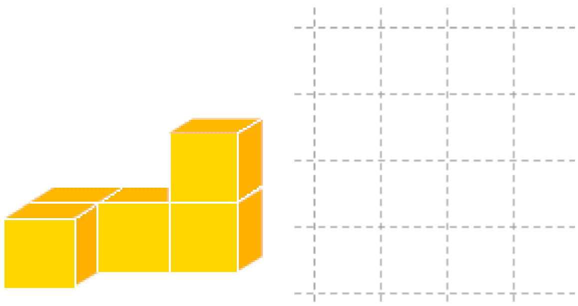
ii)



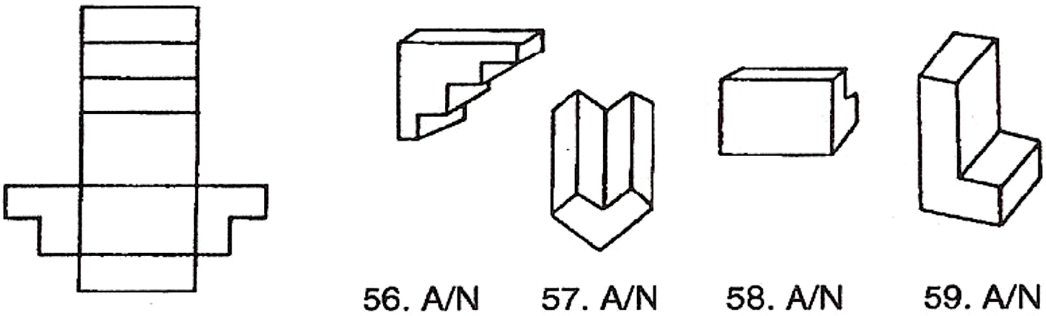
iii)



iv)

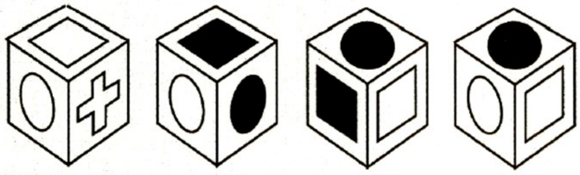


H8. Na obrázku je rozložená krabička, jak by vypadala ta krabička složená. Zaškrtni u každé možnosti 56. – 59. buď A (= ano, tak by mohla vypadat) nebo N (= ne, tak nevypadá).



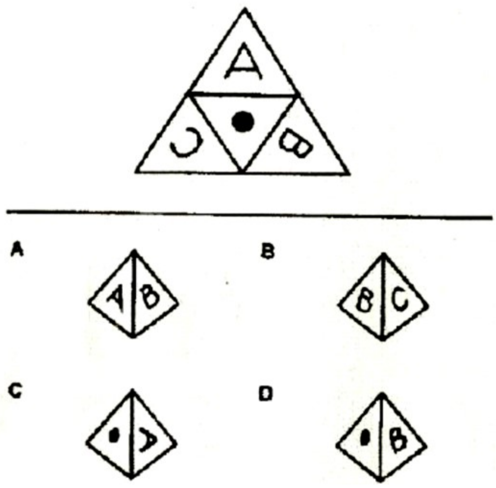
56. A/N 57. A/N 58. A/N 59. A/N

H10. Která krychle nepatří mezi ostatní? Škrtni jí.

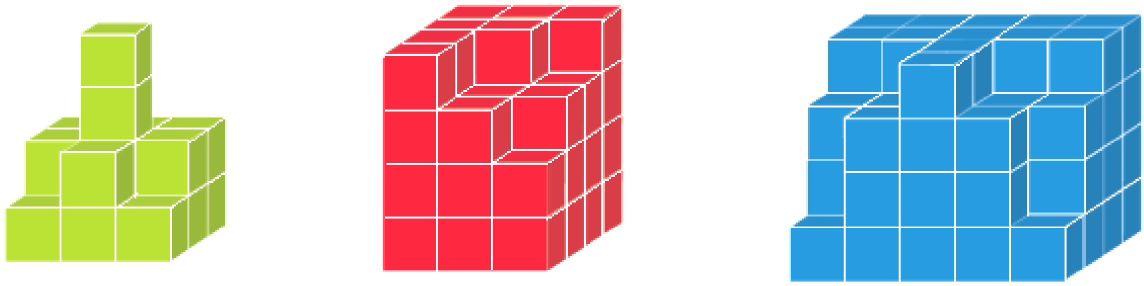


A B C D

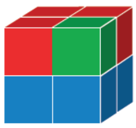
H11. Který čtyřstěn A, B, C, D není výsledkem složení nakreslené sítě tělesa? Škrtni ho.

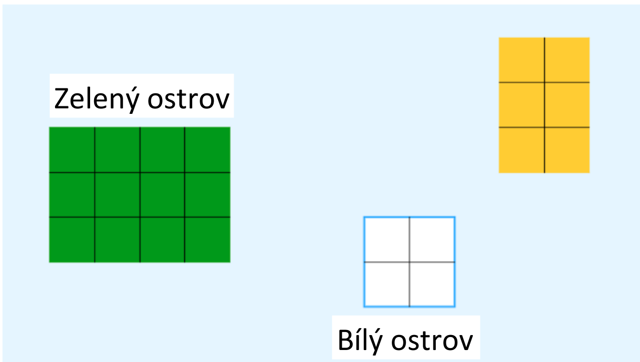


H12. Zelená stavba má v prvním podlaží 9 kostek, červená 12 a modrá 20. Urči, kolik nejméně kostek musíš doplnit ke každé stavbě, aby vznikl zcela vyplněný kvádr.



H13. Na obrázku jsou ostrovy. Děti na nich staví domy:





Zelený dům zabírá celý zelený ostrov o rozměru 4 x 3 a má 3 podlaží.

a) Kolik kostek bylo potřeba na jeho stavbu?
b) Jaká by byla nejmenší výška stavby, kdybychom ze stejného počtu kostek chtěli postavit dům na bílém ostrově o rozměrech 2 x 2?

Zdůvodni.

P7. Instrukce pro zadavatele testu

Test OBSAH OBJEM je součástí širšího projektu zaměřeného na výzkum budování těchto pojmů u žáků v průběhu celé ZŠ (zejména pak v období od 3. do 9. ročníku). Cílem této fáze projektu je zmapovat problémová místa v chápání pojmů obsah a objem se zřetelem k věku žáků – konkrétně jaký typ úloh je pro žáky problematický, jak souvisí úspěšnost v řešení výpočetních úloh s úspěšností v úlohách zaměřených na představivost a zda se úspěšnost v řešení obou typů úloh zvyšuje s věkem. Výsledky testu nebudou v žádném případě používány ke srovnávání jednotlivých škol, ale bude pracováno s výsledky za jednotlivé ročníky souhrnně.

Test se skládá ze dvou částí: první – skládání útvarů – je zaměřena na představivost v rovině. Test je časově omezený na 10 minut. Druhá část – obsah a objem – obsahuje úlohy výpočetní (obsah, obvod a objem) společně s úlohami na prostorovou představivost. Předpokládaný čas: 35 minut pro 1. stupeň a 45 minut pro 2. stupeň. Pro 2. stupeň lze první část testu – skládání útvarů provést v jiné vyučovací hodině (jiném dni). Do výzkumu budou zařazeni pouze ti žáci, u kterých budou k dispozici obě části testu.

Test bude zadáván ve druhém zářijovém týdnu, aby se otestovala dlouhodobá paměť žáků a minimalizoval vliv toho, co žáci z geometrie právě probrali. Pokud není v matematice probíráno učivo z geometrie, lze provedení testu posunout i do třetího zářijového týdne.

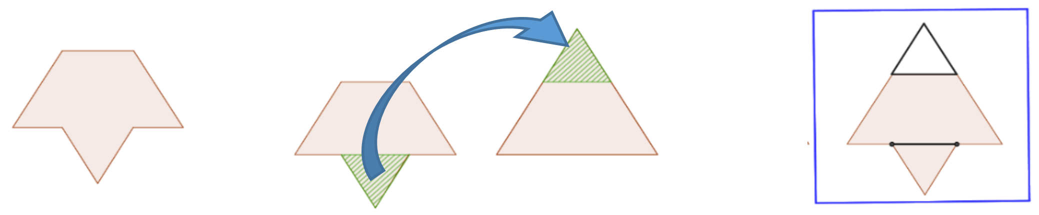
<u>Obecné pokyny k zadávání</u>:

- Žáci musí pracovat samostatně – jednotlivci.
- Žáci mohou používat kalkulačku.
- Všechny poznámky a pomocné výpočty ať žáci píší do testu – nesmí mít nic, co neodevzdají.
- Žáci nemusí stihnout vyřešit všechny úlohy – dodržte, prosím, v obou částech čistý čas na práci.
- Upozorněte žáky, že testy jsou tištěny oboustranně.
- Výsledky testu mohou být použity i pro potřeby školy – pokud budete chtít znát výsledky testů a dát žákům zpětnou vazbu, prosím dejte mi vědět, výsledky vám zašlu.
- Oba díly testu prosím podepsat (Jméno, škola, třída), ujistěte žáky, že výsledky testů nijak neovlivní jejich hodnocení, ale že jsou součástí širšího projektu; proto by se měli snažit úlohy řešit.
- Do testovacího protokolu zapisujte všechny případné dotazy žáků a v jakém smyslu jste na ně odpovídali.

<u>Pokyny k zadávání první části – skládání obrazců</u> (čas: **10 minut**):

- Před rozdáním testu vysvětlete princip (pomocí komentáře i obrázku): v testu najdete 20 mnohoúhelníků, vaším úkolem je nakreslit jednu čáru pomyslného řezu (střihu) tak, aby po rozstřižení a přeskládání částí vznikl rovnostranný trojúhelník. Řez musí spojovat dva vrcholy mnohoúhelníku. Dále zakreslete místo, kam ustřižená část patří. Příklad:

Zadání: Představím si: Dokreslím:



- Ujistěte se, že žáci vědí, co je to rovnostranný trojúhelník. Při vysvětlování zadání zajistěte, aby se pojem zopakoval, aby nedošlo k tomu, že nebudou neúspěšní kvůli tomu, že nevědí, co je rovnostranný trojúhelník, a ne kvůli nedostatečné představivosti.
- Žáci mnohoúhelníky nikam nepřekreslují, pouze do obrázků dokreslují. Prosím zvýraznit výsledek, aby bylo zřejmé, co je finální verze.
- Čistý čas na list s 20 mnohoúhelníky je **10 minut**. Pokud někdo odevzdá řešení dřív, prosím zapište na jeho test čas odevzdání (pokud nebude čas zapsán, má se za to, že žák využil celých 10 minut).

<u>Pokyny k zadávání druhé části – obsah objem</u> (čas: 35 **min** 4. a 5. ročník, **45 min** 2. stupeň):

- Pokud se žáci dotazují na pojem obsah, můžete dát následující nápovědu (označte ji v testovacím protokolu): obsah udává velikost plochy
- Pokud se žáci dotazují na pojem obvod, můžete dát následující nápovědu (označte ji v testovacím protokolu): obvod je jako délka plotu.
- Pokud se žáci dotazují na pojem čtyřstěn, můžete dát následující nápovědu (označte ji v testovacím protokolu): čtyřstěn je jako střecha poskládaná ze 3 trojúhelníků, která je umístěna na dalším trojúhelníku
- Jakékoli další dotazy zapisujte. Nápovědy, prosím, minimalizujte. Odlište, zda šlo o nápovědu konkrétnímu žákovi nebo celé třídě.

Testovací protokol pro test OBSAH OBJEM – září 2015

Datum		**Čas psaní testu od - do**	
Jméno zadávajícího:			
Škola: **Třída:**			
Používané učebnice matematiky (autor, nakladatelství):		**Chci získat výsledky testu mé třídy?** Ano / Ne	
V následující části zatrhněte, vyberte z možností ano/ ne nebo dopište			
Skládání útvarů	**Proběhlo vysvětlení principu testu na ilustrativní úloze**	☐	
	Proběhlo vysvětlení/ připomenutí pojmu rovnostranný trojúhelník (vyberte): **ze strany žáků:** ☐ **ze strany učitele:** ☐		
	Další otázky (prosím vypište, na co dalšího se žáci ptali, a stručný obsah Vaší odpovědi):		
Obsah	**Žáci se ptali na význam pojmu obsah.** **Použita nápověda: „velikost plochy"**	**Ano / Ne** ☐	
	Žáci se ptali na význam pojmu obvod. **Použita nápověda „obvod = délka plotu"**	**Ano / Ne** ☐	
	Další otázky (prosím vypište, na co dalšího se žáci ptali, a stručný obsah Vaší odpovědi):		
Objem	**Žáci se ptali na význam pojmu čtyřstěn.** **Použita nápověda „stříška ze 3 trojúhelníků na 4. trojúhelníku"**	**Ano / Ne** ☐	
	Další otázky (prosím vypište, na co dalšího se žáci ptali, a stručný obsah Vaší odpovědi):		

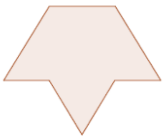
P8. Předtest 4 a 5 ročník

Jméno: Škola: Třída:

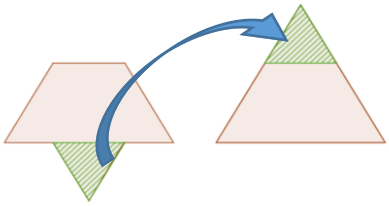
Čistý čas na řešení 10 minut. Hodnocení: za každou správně vyřešenou úlohu 1 bod.

V testu najdete 20 mnohoúhelníků, vaším úkolem je **nakreslit jednu čáru pomyslného střihu** tak, aby po rozstřižení a přeskládání částí vznikl rovnostranný trojúhelník. Řez musí spojovat dva vrcholy mnohoúhelníku. Dále zakreslete místo, kam ustřižená část patří. Příklad:

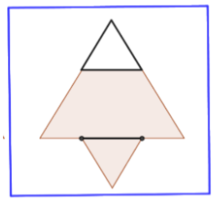
Zadání:



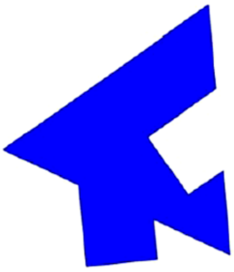
Představím si:



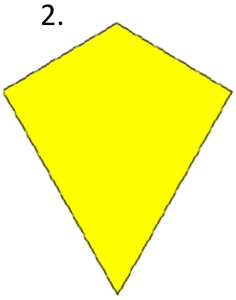
Dokreslím:



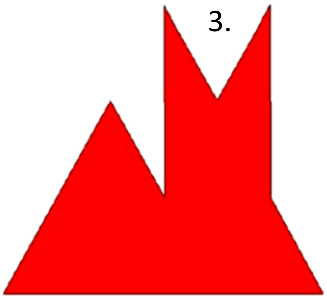
1.



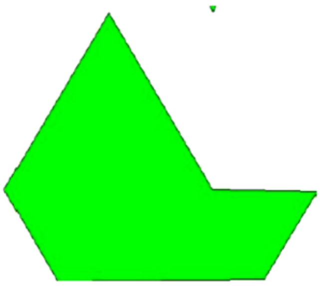
2.



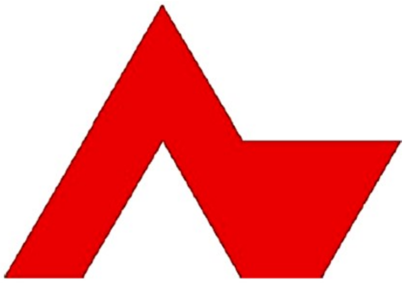
3.



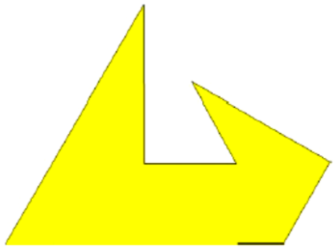
4.



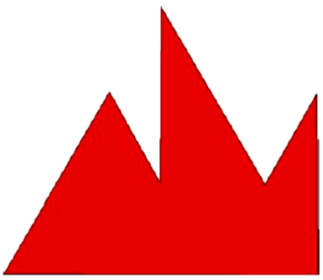
5.



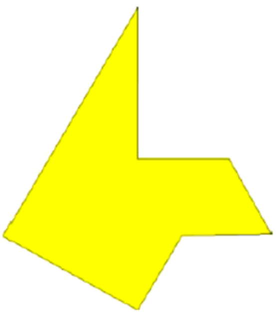
6.



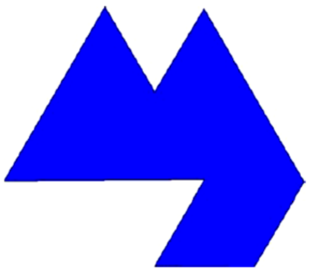
7.



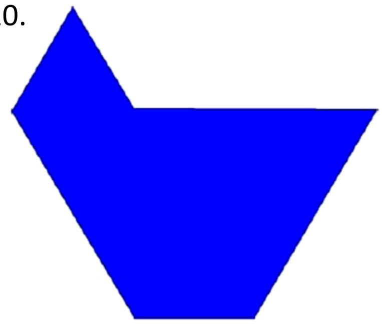
8.



9.

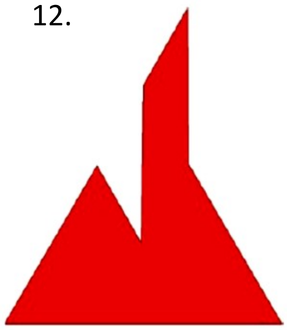


10.

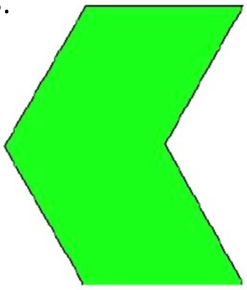


11.

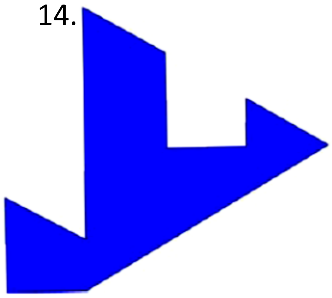
12.



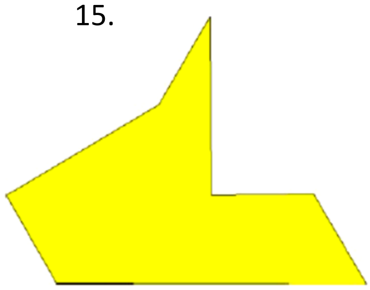
13.



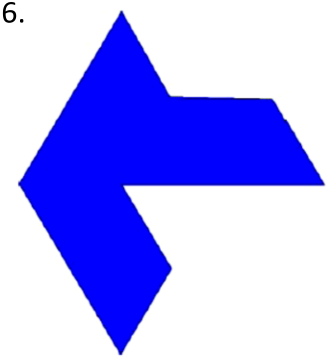
14.



15.

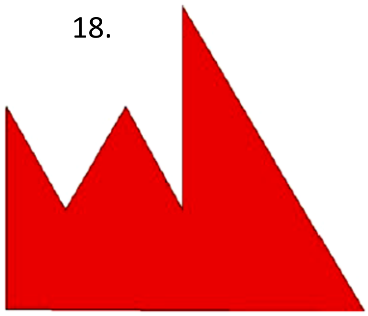


16.



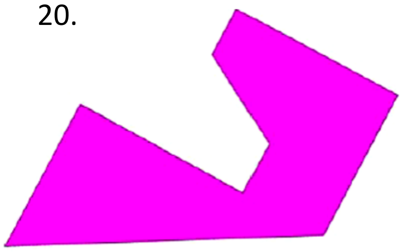
17.

18.



19.

20.



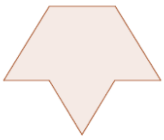
P9. Předtest 6–9 ročník

Jméno: ______________________ Škola: ______________________ Třída:

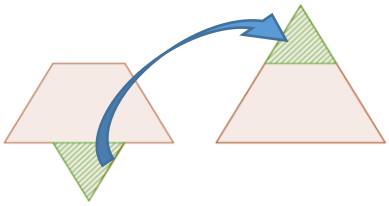
Čistý čas na řešení 10 minut. Hodnocení: za každou správně vyřešenou úlohu 1 bod.

V testu najdete 20 mnohoúhelníků, vaším úkolem je **nakreslit jednu čáru pomyslného řezu** (střihu) tak, aby po rozstřižení a přeskládání částí vznikl rovnostranný trojúhelník. Řez musí spojovat dva vrcholy mnohoúhelníku. Dále zakreslete místo, kam ustřižená část patří. Příklad:

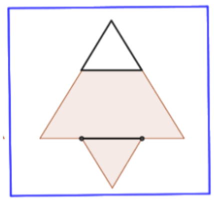
Zadání:



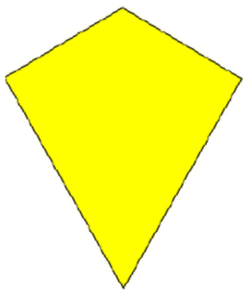
Představím si:



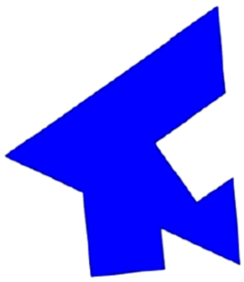
Dokreslím:



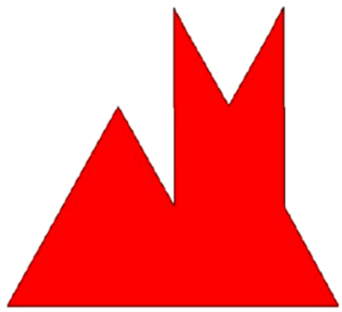
1.



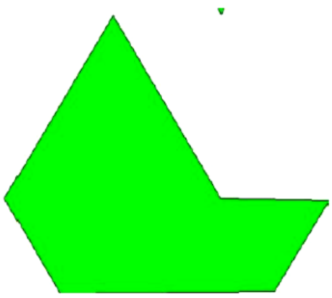
2.



3.

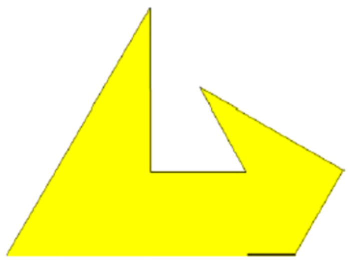


4.

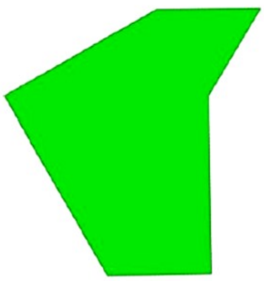


5.

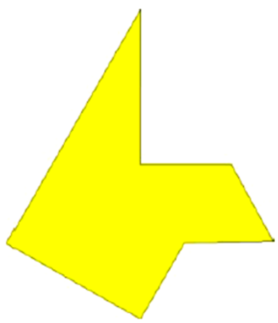
6.



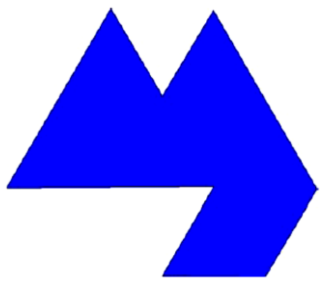
7.



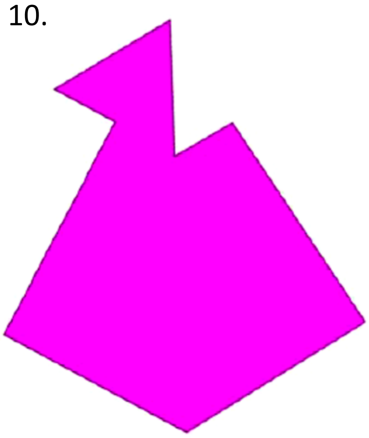
8.



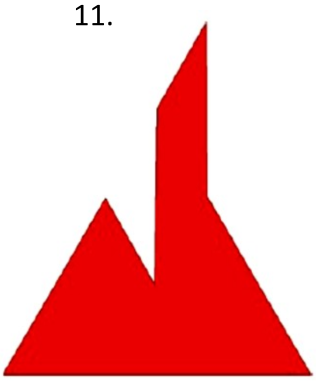
9.



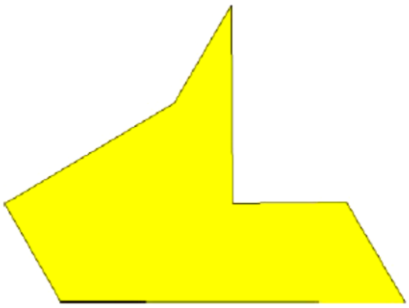
10.



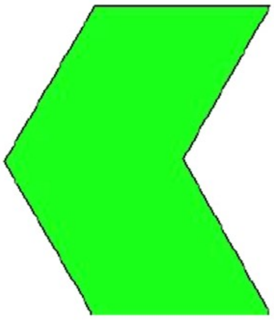
11.



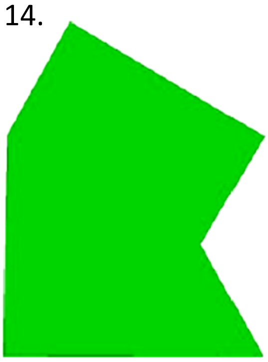
12.



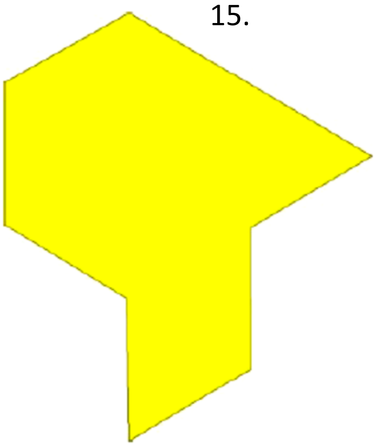
13.



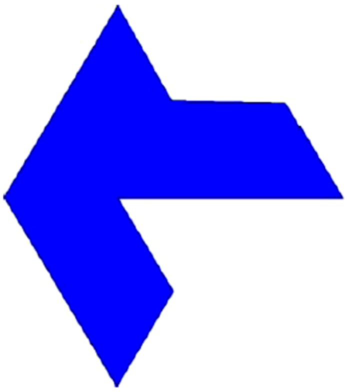
14.



15.



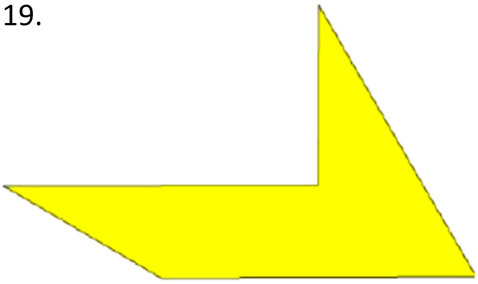
16.



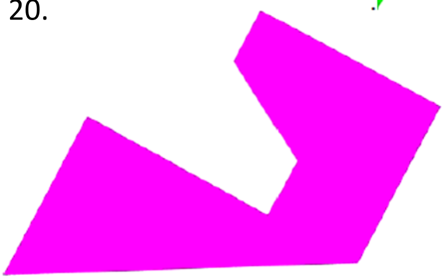
17.

18.

19.



20.

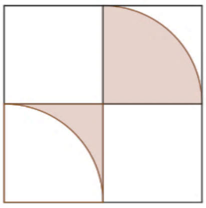


P10. Hlavní test 4 a 5 ročník

Jméno: Škola: Třída:

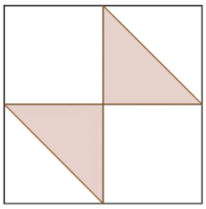
Známka z matematiky na konci školního roku:

Obrázek 1 vlevo:

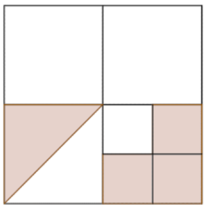


1. Má vybarvená část čtverce dole stejný obsah jako část čtverce vybarvená na obrázku 1 vlevo? Zakroužkuj u každého z následujících obrázků.

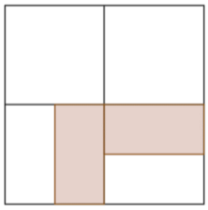
Ano / Ne



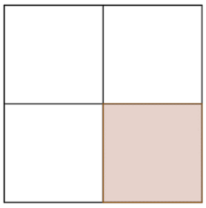
Ano / Ne



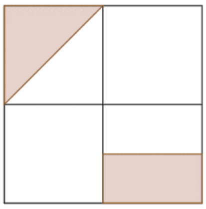
Ano / Ne



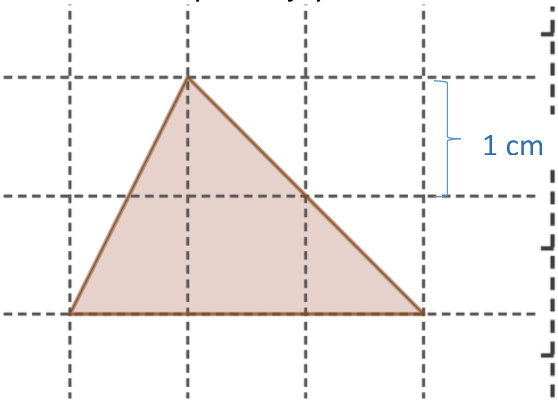
Ano/ Ne

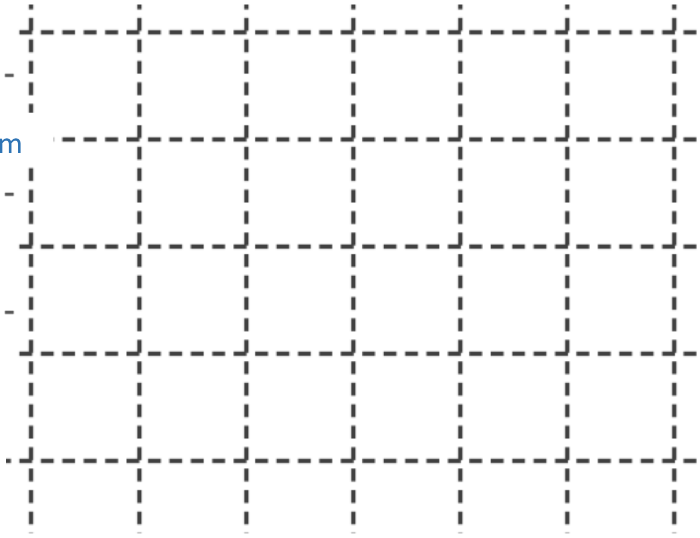


Ano/ Ne

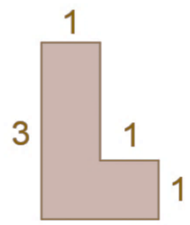


2. Urči obsah trojúhelníku, když víš, že strana nejmenšího čtverce v mříži je 1 cm. Nakresli dva další útvary se stejným obsahem.

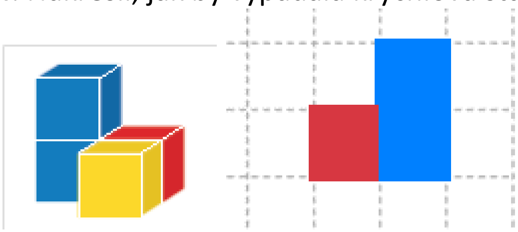




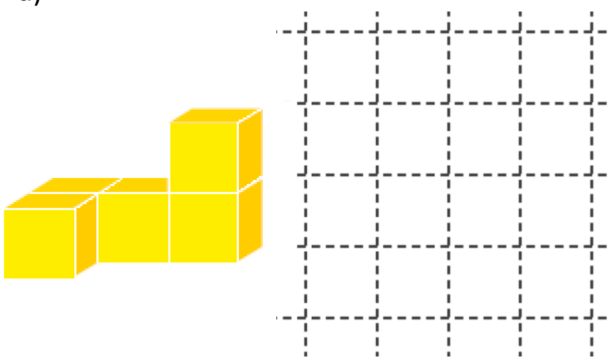
3. Urči obvod a obsah útvaru na obrázku:



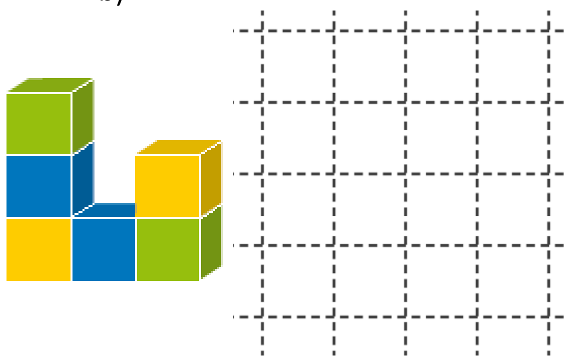
4. Nakresli, jak by vypadala krychlová stavba při pohledu **zezadu**. Příklad:



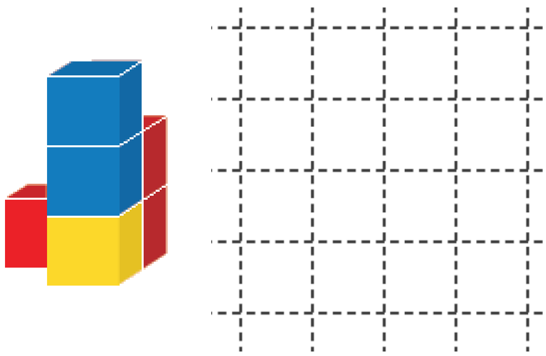
a)



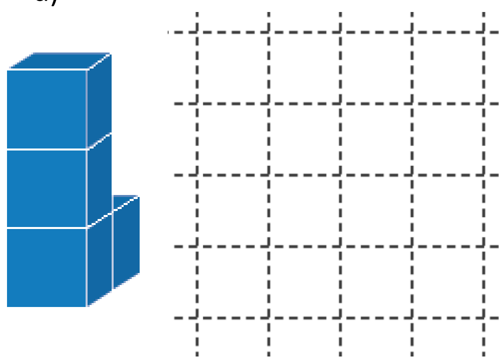
b)



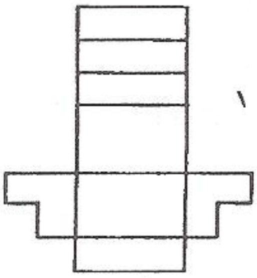
c)



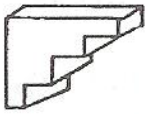
d)



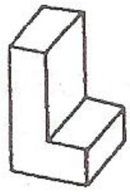
5. Na obrázku vlevo je rozložená krabička. Jak by vypadala tato krabička složená? Zakroužkuj u každé možnosti buď Ano (= tak by mohla vypadat) nebo Ne (= tak nemůže vypadat).



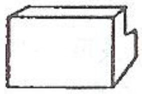
Ano / Ne



Ano / Ne



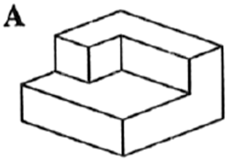
Ano / Ne



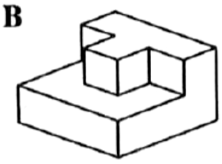
Ano / Ne

6. Která dvě tělesa vytvoří po spojení zcela vyplněnou krychli? ………………….

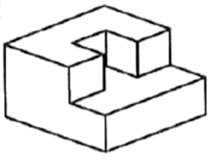
A



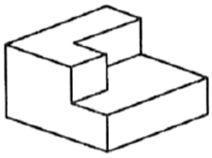
B



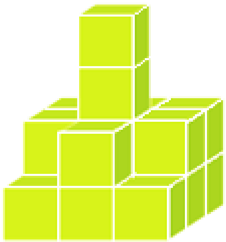
C

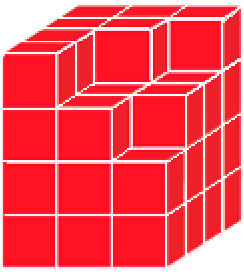


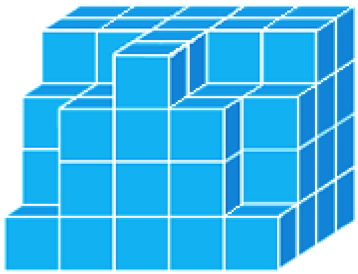
D



7. Zelená stavba má v prvním podlaží 9 kostek, červená 12 a modrá 20. Urči, kolik <u>nejméně</u> kostek musíš doplnit ke každé stavbě, aby vznikl zcela vyplněný kvádr. (Tedy, kdyby stavba byla v co nejmenší krabici, kolik kostek musíš doplnit, aby byla krabice zcela zaplněná?)







Zelená: ……………… Červená: …………………. Modrá: ………………..

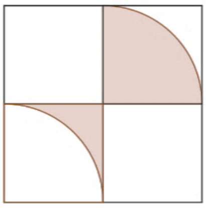
8. Máš přesně 59 kostek o hraně 1, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 a šířce 3? Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

P11. Hlavní test 6–9 ročník

Jméno: Škola: Třída:

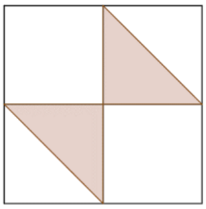
Známka z matematiky na konci školního roku:

Obrázek 1 vlevo:

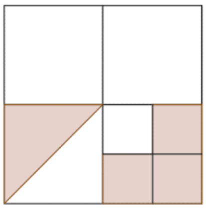


H1. Má vybarvená část čtverce dole stejný obsah jako část čtverce vybarvená na obrázku 1 vlevo? Zakroužkuj u každého z následujících obrázků.

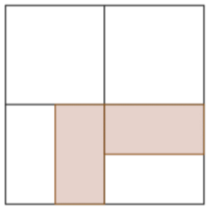
Ano / Ne



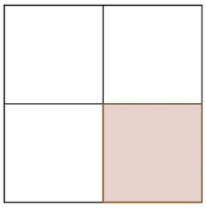
Ano / Ne



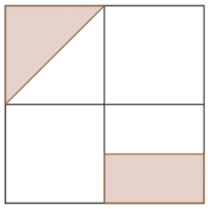
Ano / Ne



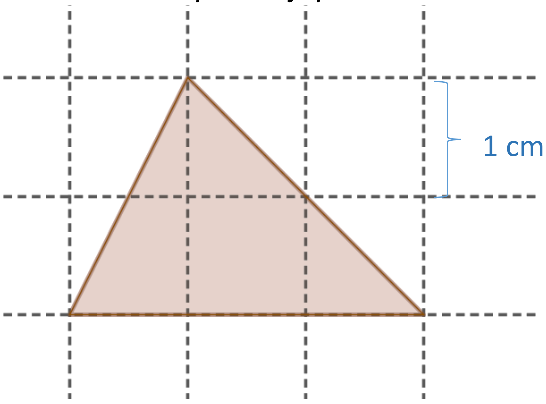
Ano/ Ne

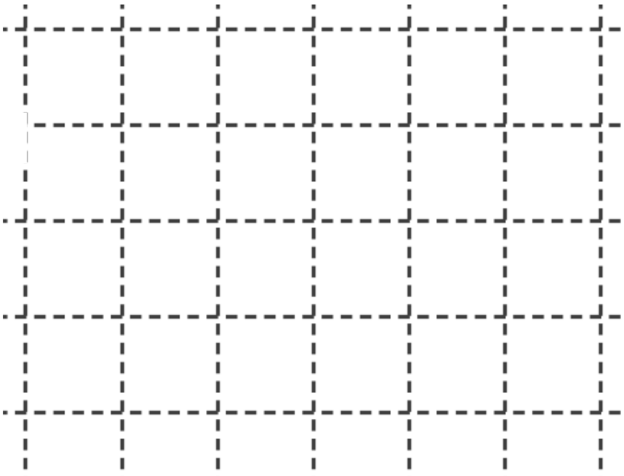


Ano/ Ne

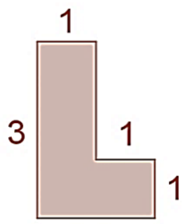


H2. Urči obsah trojúhelníku, když víš, že strana nejmenšího čtverce v mříži je 1 cm. Nakresli dva další útvary se stejným obsahem.

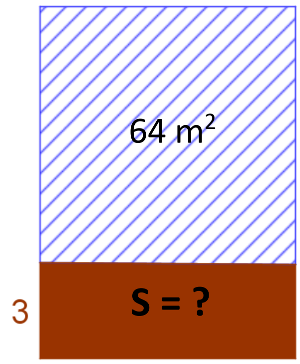




H3. Urči obvod a obsah útvaru na obrázku:

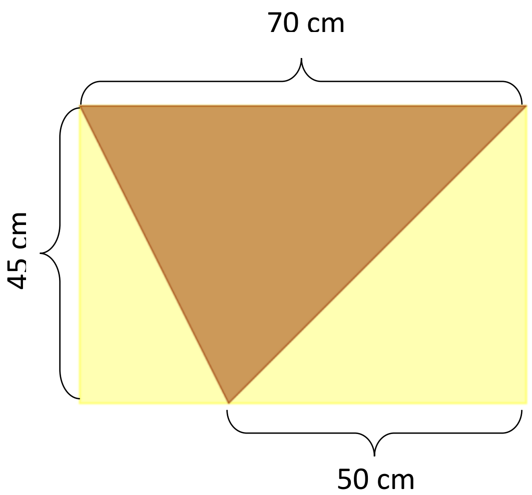


H4. Na obrázku je plánek zahrady. Vyšrafovaný ČTVEREC představuje trávu a plně vybarvený obdélník záhon. Vypočti plochu záhonu, když víš, že plocha trávy (vyšrafovaný čtverec) je 64 m^2 a kratší strana záhonu je dlouhá 3 m.

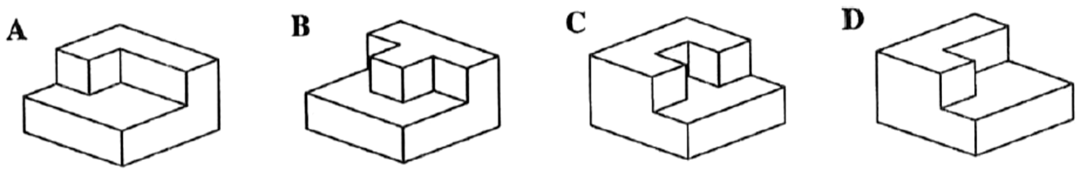


H5. Na vydláždění koupelny bylo původně použito 300 ks dlaždic o rozměru 10 x 10 cm. Kolik kusů dlaždic budu potřebovat na rekonstrukci koupelny, když nové dlaždice mají rozměr 20 x 20 cm? Spáry mezi dlaždicemi neuvažuj (jako kdyby žádné nebyly).

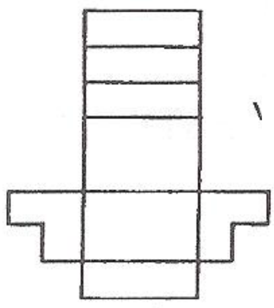
H6. Vašek vyřízl z obdélníkové desky vybarvený trojúhelník (viz obrázek). Kamarád Pepa ho hubuje, že víc než polovinu desky vyhodí. Vašek se ale brání, že odřezky jsou určitě menší než polovina. Kdo z nich má pravdu a proč?



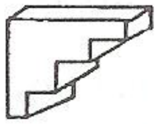
H7. Která dvě tělesa vytvoří po spojení zcela vyplněnou krychli? ....



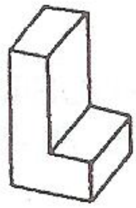
H8. Na obrázku vlevo je rozložená krabička. Jak by vypadala tato krabička složená? Zakroužkuj u každé možnosti buď Ano (= tak by mohla vypadat) nebo Ne (= tak nemůže vypadat).



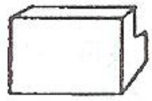
Ano / Ne



Ano / Ne

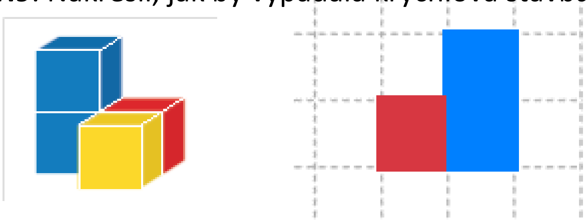


Ano / Ne

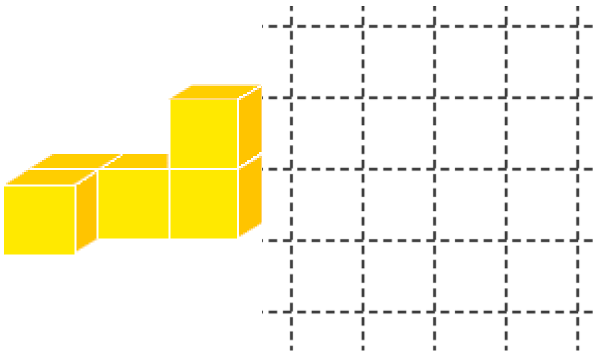


Ano / Ne

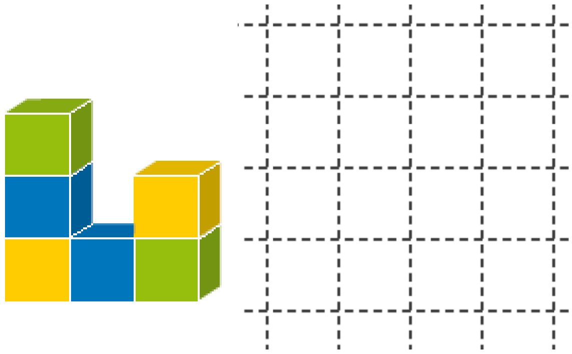
H9. Nakresli, jak by vypadala krychlová stavba při pohledu **zezadu**. Příklad:



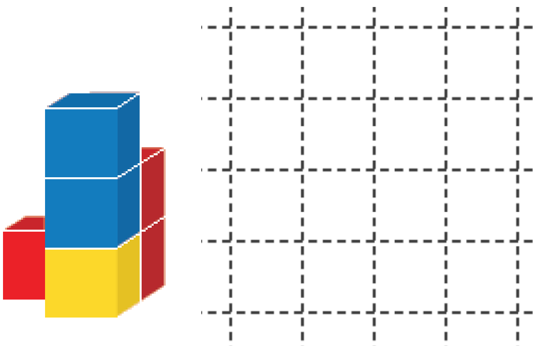
a)



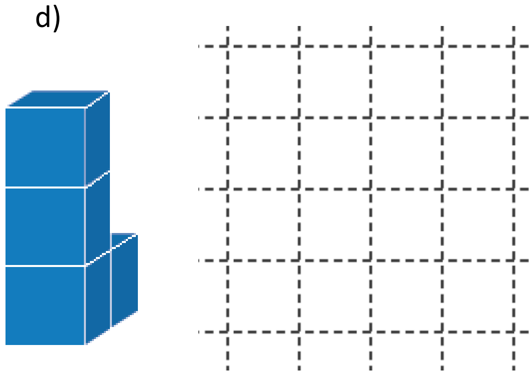
b)



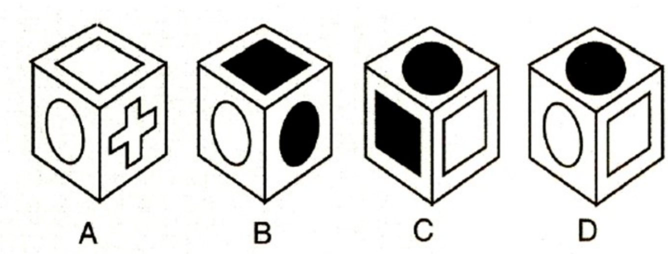
c)



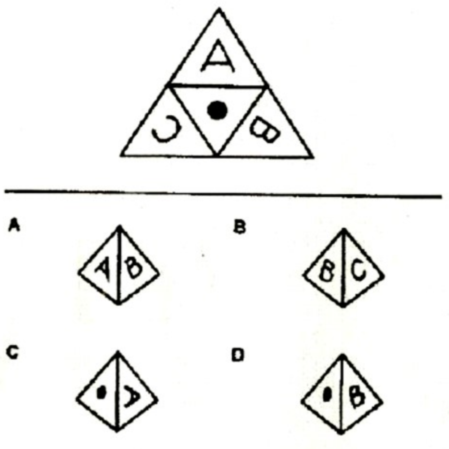
d)



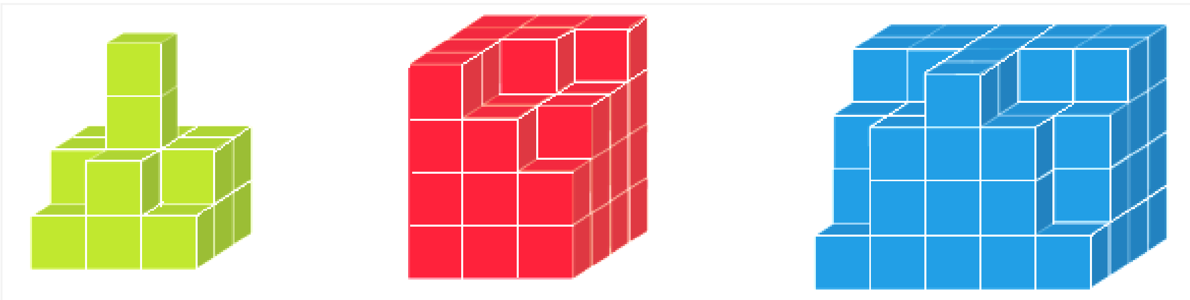
H10. Na obrázcích A-D mají být různé pohledy na tutéž krychli. Na jeden obrázek se ale vloudila jiná krychle. Najdi ji a škrtni.



H11. Který čtyřstěn A, B, C, D není výsledkem složení nakreslené sítě tělesa? Škrtni ho.



H12. Zelená stavba má v prvním podlaží 9 kostek, červená 12 a modrá 20. Urči, kolik nejméně kostek musíš doplnit ke každé stavbě, aby vznikl zcela vyplněný kvádr. (Tedy, kdyby stavba byla v co nejmenší krabici, kolik kostek musíš doplnit, aby byla krabice zcela zaplněná?)



Zelená: ……………… Červená: …………………. Modrá: ………………..

H13. Máš přesně 59 kostek o hraně 1, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 a šířce 3? Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

H14. Kolik nejvíc krabiček o rozměrech 2 x 1 x 1 dm naskládám do krychlové krabice o hraně 6 dm tak, aby šla zavřít? Napiš postup řešení.

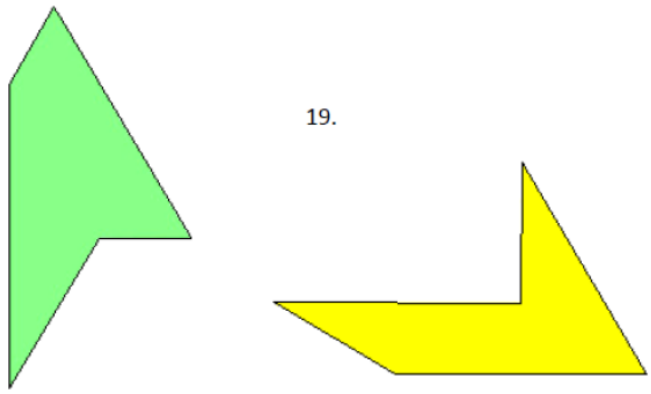
H15. V krabici je bez mezer naskládáno 100 kostek o hraně 12 cm. Kolik kostek o hraně 4 cm bychom potřebovali na vyplnění stejné krabice? Napiš postup řešení.

H16. Váza má tvar kvádru se dnem o rozměru 9 x 12 cm. Spočtěte, jak vysoko by sahala hladina vody ve váze, pokud bychom jí do vázy nalili přesně 1 litr.

(Pomůcka: 1 l = 1 dm^3 = 1 000 cm^3)

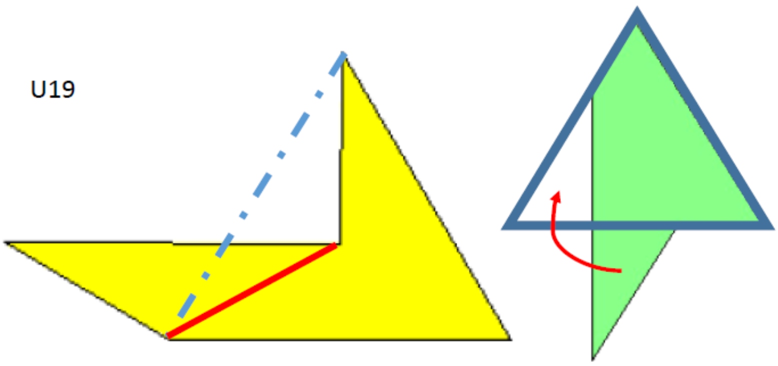
P12. Problematicky vyhodnotitelné úlohy z předtestu

Úlohy U18 a U19 (viz obr. p1) se ukázaly jako obtížně vyhodnotitelné nebo nesprávně zadané. Případným zájemcům o použití testu bych je doporučila vynechat a nahradit jinými úlohami.



Obr. p1: Zadání úloh U18 a U19 z předtestu

Jediné řešení úlohy U18 (na obr. p1 vpravo), nesplňuje podmínky zadání – řez totiž nespojuje dva vrcholy mnohoúhelníku, ale vede z vrcholu do středu strany. Tato nesrovnalost mi bohužel při pilotáži unikla. Hodnotili jsme tedy nalezení tohoto (nesprávného) řešení jako správnou odpověď. Žáků, kteří řešení nenalezli právě kvůli tomu, že se snažili přesně dodržet podmínky zadání, nebylo mnoho. Úspěšnost v této úloze může být tedy nepatrně podhodnocená, ale toto zkreslení by nemělo být významné.



Obr. p2: Řešení úloh U19 a U18

Úloha U19 připouští dvě řešení (viz obr. p2 vlevo), ale u jednoho řezu (na obrázku označen čerchovaně) je sporné, zda spojuje 2 vrcholy – pokud řez prodloužíme, vede úsečka mezi dvěma vrcholy, nicméně řez sám vede z vrcholu k bodu ležícímu na straně mnohoúhelníku. Původně jsme hodnotili nalezení čerchovaného řezu polovinou bodu a nalezení druhého řešení jedním bodem, což dávalo úspěšnost úlohy pouze 17 %. Domnívám se však, že je toto hodnocení úspěšnosti podhodnocené – nějaké řešení úlohy našlo téměř 27 % žáků. V dalších analýzách tedy pracujeme s hodnocením obou řešení jako správných (tj. hodnotíme jedním bodem). Úspěšnost úlohy tak vychází na 27 %.

P13. Přehled žáků účastnících se rozhovorů

Tabulka obsahuje základní informace o žácích, se kterými byly natočeny rozhovory. Pseudonym si často volil žák sám (což jsem, kde to bylo možné, respektovala) a odpovídá genderu. Dále je uveden ročník (v době natočení rozhovoru), obecné označení školy, kam žák chodil, a známka z matematiky, kterou žák uvedl (u většiny žáků byla uvedená známka ještě konzultována s učitelem; někde je uveden příznak „+“ nebo „–“ u těch žáků, kde učitel uváděl například „lepší jednička“ nebo „velmi slabá dvojka“ apod.). Známka se většinou vztahovala k poslednímu pololetnímu vysvědčení (tj. leden 2017). Sloupec s označením H14 obsahuje informaci, zda žákovi byla předložena k řešení úloha H14 (tedy zda předchozí úlohy vyřešil dostatečně rychle). Podobně sloupec označený „Kostky ve stavbě“ obsahuje číslo 1, pokud žákovi byla předložena úloha na určení počtu kostek ve stavbě zadané obrázkem. Důležité je i pořadové číslo natáčeného rozhovoru, neboť formát vedení rozhovoru se mezi jednotlivými cykly lišil, jak je popsáno v oddíle 3.4.[89] V kolonce učebnice je symbol H u těch žáků, kteří déle než rok pracovali s učebnicemi Hejného a kol.

Pseudonym	**Pořadí rozhovoru**	**Škola**	**Ročník**	**Učebnice**	**Známka**	**Řešil H14**	**Kostky ve stavbě**
Adam	8	Slunečná	5		1–	1	
Alena	43	Za Rybníkem	5		2–		1
Amálka	3	Slunečná	6		2–		
Anda	30	Brusinková	6	H	2		1
Aniko	12	Slunečná	6		2		
Atina	31	Brusinková	6	H	2	1	1
Ctirad	24	Brusinková	5	H	2–		
Dan	41	Za Rybníkem	5		2		1
Daniela	38	Za Rybníkem	5		1		1
Denisa	48	Za Rybníkem	6		2		1
Dina	32	Brusinková	6		2		
Dominika	2	Slunečná	6		3+		
Dušan	55	Za Rybníkem	6		1+	1	1
Eda	35	Brusinková	6	H	1–		
Erika	53	Za Rybníkem	6		2		1
Filip	4	Slunečná	5		2		
FilipM	7	Slunečná	5		2	1	
Filomena	56	Za Rybníkem	6		1–		1
Franta	23	Brusinková	5	H	1	1	
Hana	44	Za Rybníkem	5		1		1
Helena	49	Za Rybníkem	6		2		1
Hynek	36	Za Rybníkem	5		1	1	1
Charlotta	29	Brusinková	6	H	2–		1

[89] Od 7. rozhovoru byly v zadání úlohy H13 uvedeny rozměry v cm, od 13. rozhovoru byla doplněna varinta úlohy H13 s rozměrem podstavy 5 x 4, od rozhovoru číslo 20 dostávali rychlí žáci za úlohu určit počet kostek ve stavbě a od rozhovoru 25 určovali počet kostek ve stavbě na nákresu všichni.

Pseudonym	Pořadí rozhovoru	Škola	Ročník	Učebnice	Známka	Řešil H14	Kostky ve stavbě
Igor	34	Brusinková	6	H	1		1
Jirka	17	Brusinková	5	H	2		
Josef	18	Brusinková	5	H	1	1	1
Julie	46	Za Rybníkem	5		1		1
Kateřina	51	Za Rybníkem	6		1		1
Kristýna	26	Brusinková	6	H	1		1
Lenka	40	Za Rybníkem	5		2		1
Leny	27	Brusinková	6	H	1	1	1
Lukas	33	Brusinková	6	H	2	1	1
Lumír	21	Brusinková	5	H	1	1	1
Martin	14	Brusinková	5	H	1+		
Maruška	1	Slunečná	6		2+	1	
Matiáš	6	Slunečná	5		2		
Max	9	Slunečná	5		2		
Michaela	47	Za Rybníkem	5		2–		1
Michal	45	Za Rybníkem	5	H	1	1	1
Mikuláš	28	Brusinková	6	H	2	1	1
Oldrich	15	Brusinková	5	H	2		
Oskar	25	Brusinková	6	H	2		1
Pavel	11	Slunečná	6		2+		
Pepa	20	Brusinková	5	H	1	1	1
Petr	10	Slunečná	6		3	1	
Petronela	57	Za Rybníkem	6		1		1
Radka	19	Brusinková	5	H	1		
Rebeca	5	Slunečná	5		1	1	
Roman	37	Za Rybníkem	5		2		1
Rozárka	16	Brusinková	5	H	1		
Růžena	52	Za Rybníkem	6		2		1
Simona	50	Za Rybníkem	6		1		
Světlana	13	Brusinková	5	H	2		
Tonda	39	Za Rybníkem	5		1		
Vanesa	42	Za Rybníkem	5		1		1
Veronika	22	Brusinková	5	H	2–		
Viktorie	54	Za Rybníkem	6		2–		1

P14. Schéma vedení polostrukturovaného rozhovoru a podklady pro zadávání úloh

Vybavení: kostky (24 ks), pravítko, tužka, pero, kalkulačka, stativ, kamera

Netřeba nutit žáka, aby úlohu úspěšně dořešil – potřebuji pouze vědět, kde má problémy a jaké, nechci chyby re-edukovat. Vždy se snažit, aby žák odcházel s pocitem, že odvedl kus dobré práce – zdůraznit, že mě zajímá jeho způsob přemýšlení, ne jestli výsledek nakonec bude správně.

Úloha	**Reakce žáka**	**Nápověda (dodržovat pořadí nápověd !)**	**Přechod na úlohu**
Všechny	Nerozumí zadání	Přečti si to ještě jednou. Jaké informace ti připadají důležité? Co ti tam říkají / Co víš? Co znamená…?	
H13	Neví, jak řešit	Jak by vypadalo první podlaží? Uměl bys to nakreslit? Kolik se ti tam vejde kostek? Jaké jsou rozměry podlahy /1. podlaží? Manipulativa fyzické kostky.	35 (nebo méně) kostek podlaha 3 x 3
	Chybný počet kostek v prvním podlaží	Zjistit důvod: miskoncepce vs. stavba = volný prostor uvnitř? Manipulativa.	35 (nebo méně) kostek podlaha 3 x 3
	Ví, že má dělit, ale technicky to neumí	Ověřit, že pro podstavu 3 x 3 by počítal správně. Navést na kontrolu pomocí násobení – Kolik máš kostek v 1. podlaží? Kolik v prvních dvou podlažích?	59 kostek podlaha 3 x 3 35 kostek podlaha 3 x 3
	Počítá bez nákresu	Nakresli mi prosím, jak by vypadalo první podlaží.	Počet kostek ve stavbě a H14
	Vypočte pomocí nákresu bez obtíží		Počet kostek ve stavbě a H14
Počet kostek ve stavbě		Ujasnění si postupu výpočtu, aby bylo jasné, co žák počítá.	H14
H14	Neví, jak řešit	Uměl bys to nakreslit? Jak bude vypadat balíček? Jak vypadá krabice? Dovedl bys balíček vymodelovat z kostek (představ si, že mají hranu 1 dm)?	Analogická úloha s obrázkem
	Shání vzorec pro objem Záměna se vzorcem pro povrch	K čemu ho potřebuješ? Jaký je tvůj plán? Šlo by to i bez vzorce (nákresem)? Co je objem? Jak se měří? Jaké má jednotky?	

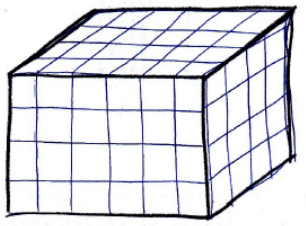
Úloha	Reakce žáka	Nápověda (dodržovat pořadí nápověd !)	Přechod na úlohu
	Nezohlední, že balíček je kvádr	Jaké jsou rozměry balíčku? Ukaž mi, jak jsou tam položeny. Manipulativa – balíček vymodelovat ze dvou kostek (lze i zabalením dvou kostek do papíru).	
H16	Neví, jak řešit	Uměl bys to nakreslit? Jak vypadá váza? Uveď nějaký příklad něčeho, co je litr? (Jak je to velké… *krabice mléka*)	
	Neumí spočíst výšku	Kdyby v té váze byla voda do výšky 10 cm, uměl bys spočíst, kolik by jí tam bylo (objem)? Jak jsi to počítal? Zkus to třeba pro jinou výšku hladiny?	
	Neumí převádět litry a cm^2	Nápověda (Pomůcka: 1 l = 1 dm^3 = = 1 000 cm^3)	

Následuje finální podoba zadání používaná pro rozhovory od pořadového čísla 25.

Úloha 1: Máš přesně 59 kostek o hraně 1 cm, ze kterých musíš postavit co NEJNIŽŠÍ stavbu. Podlaha prvního podlaží je tvořena obdélníkem o délce 4 cm a šířce 3 cm. Kolik podlaží tvé stavby bude zcela zaplněno a kolik kostek bude v nejvyšším podlaží?

Úloha 1a. Jak by se odpověď změnila, kdyby největší plocha, na které stavíš první patro, mohla být 5 cm na délku a 4 cm na šířku?

Úloha 2: Z kolika kostek je stavba načrtnutá na obrázku? (Uvnitř nejsou žádná prázdná místa.)



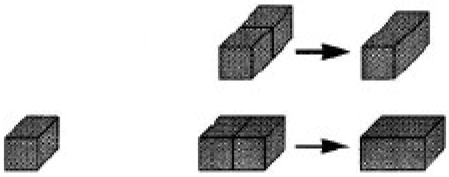
Úloha 4: Kolik nejvíc krabiček o rozměrech 2 x 1 x 1 dm naskládáš do krychlové krabice o hraně 8 dm tak, aby šla zavřít? Vysvětli své řešení.

Úloha 16: Váza má tvar kvádru se dnem o rozměru 10 x 8 cm. Vypočti, jak vysoko by sahala hladina vody ve váze, pokud bys jí do vázy nalil přesně 1 litr.

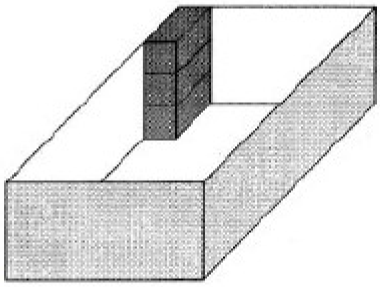
Pro ty žáky, kteří měli problém pracovat se zadáním úlohy 4 (H14), byla připravena následující návodná úloha:

Kolik balíčků potřebuji k vyplnění krabice?

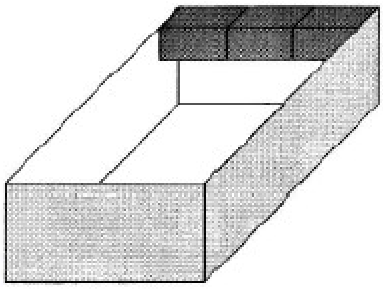
Balíček má rozměry 1x1x2 dm, tedy ho mohu poskládat ze dvou krychlí o hraně 1 dm:



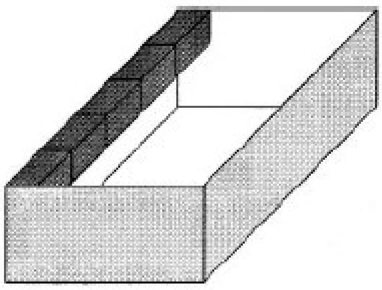
Do krabice se vejdou: 3 balíčky na výšku:



Pak by se vešly 3 balíčky na šířku:



Nebo 5 balíčků na délku:



P15. Vybrané kvalitativní jevy sledované u úloh v hlavním testu

V tabulce uvádím výběr jevů, které jsem u jednotlivých úloh sledovala. Nejsou zde ovšem uvedeny jevy sledované u všech otevřených úloh – např. zda žák úlohu řešil, nebo jeho bodové hodnocení či různé výsledky a mezivýsledky výpočtu. Také zde neuvádím kódy pro strategie a chyby, neboť ty jsou podrobně rozebrány v oddíle 4.7.

Označení kódu	**Hodnota**	**Význam kódu**
H2. Výsledek není, ale lze tušit správný	1	Pokud, žák neuvedl obsah trojúhelníku, ale podle zakreslených útvarů je jasné, že za obsah považuje 3 čtverečky (U2.útvary = 5), jinak 0
H2. útvary	5	5… dva útvary s obsahem 3 cm^2 (žádný není shodný s původním trojúhelníkem)
	4	4 … pokud správně nakreslené oba útvary k nesprávně vypočtenému obsahu
	3	3… dva útvary s obsahem 3 cm^2 právě jeden shodný s původním trojúhelníkem, nebo navzájem shodné)
	2	2… alespoň jeden útvar se shoduje s vypočteným obsahem a je neshodný s původním trojúhelníkem.
	1	1... jeden nebo dva útvary oba shodné s původním trojúhelníkem
	0	0… nenakresleno nebo nakreslen útvary s jiným obsahem než spočteným a než 3 cm^2
H3.obv.vzor	0	Žádný vzoreček s proměnnými se tam nevyskytuje
	1	V řešení objevuje vzoreček pro obvod (správný, s proměnnými)
	2	Chybný vzorec s proměnnými
H3.obs.vzor	0	Žádný vzoreček s proměnnými se tam nevyskytuje
	1	V řešení objevuje vzoreček pro obsah (správný, s proměnnými)
	2	Chybný vzorec s proměnnými
H4. obvod	1	1 pokud se místo obsahu objevuje výpočet obvodu; jinak nebo prázdné
H4. vzorec	1	Pokud se objevuje vzorec s proměnnými (písmeny)
H5. náčrt. Malá.ve.velké	0	Prázdné … bez oobrázku
	1	Správný náčrtek málá dlaždice nakreslena uvnitř velké (vejdou se 4)
	2	Jiný náčrtek (jsou vedle sebe, stejně velké, nebo 2 malé uvnitř 1 velké a pod.
H6.obs.T (správně)	0	0… žádný vzorec
	1	1… správně použit vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku
	2	2… chybný výpočet obsahu trojúhelníku
H6. vhled	1	Zdůvodnění pomocí vhledu (dokreslení příčky)
H16.neumí.inv	1	1 pokud je patrné, že není schopen vyjádřit ze vzorce objemu výšku
Index odvahy_Tot		Počet úloh ze 16 možných, které žák řešil (resp. ke kterým něco napsal)
Index odvahyCALC		Kolik výpočetních úloh z 9 možných žák řešil

P16. Výsledky faktorové analýzy pro úlohy na geometrickou představivost

Na základě výsledků faktorové analýzy pro úlohy hlavního testu byly úlohy H8–H12 identifikovány jako úlohy přispívající k faktoru geometrické představivosti. Proto byly zařazeny do jedné skupiny s úlohami předtestu a byla zkoumáma struktura tohoto sloučeného testu. Do analýzy tedy bylo zahrnuto 20 úloh použitých v předtestu U1–U20 a jednotlivě všechny podúlohy úloh H8–H12 z hlavního testu. Jako nejlépe interpretovatelná vychází faktorová analýza pro 7 faktorů, provedená metodou hlavních komponent, s rotací VARIMAX. Výsledky jsou prezentovány v tabulce dole, příslušnost k jednotlivým faktorům je zvýrazněna barevně.

Tab. p1: Výsledky faktorové analýzy - korelace proměnných a jednotlivých faktorů

Rotated Component Matrixa							
	Component						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
H8.1					0,606		
H8.2					0,733		
H8.3					0,67		
H8.4					0,685		
H9.a				0,763			
H9.b				0,793			
H9.c				0,768			
H9.d				0,544			
H11.A			0,737				
H11.B			0,732				
H11.C			0,64				
H11.D			0,818				
H12.Z.OK							0,613
H12.C.OK							0,781
H12.M.OK							0,722
B01_H10						0,444	
U1						0,747	
U2		0,667					
U3	0,35	0,447					
U4		0,573					
U5		0,719					
U6		0,726					
U7						0,472	
U8	0,327	0,491					
U9		0,689					
U10						0,636	
U11	0,497	0,455					
U12	0,633	0,362					
U13	0,651						
U14	0,653						
U15	0,391					0,467	
U16	0,448						
U17	0,548					0,349	
U18	0,647						
U19	0,618						
U20	0,627						

Extrahované faktory vysvětlují více než 50 % variability dat a jsou dobře interpretovatelné. Jak už jsem uváděla, většina úloh z předtestu má vztah k jednomu z prvních dvou faktorů, důvodem tohoto rozdělení se zdá být umístění úlohy na první či na druhé stránce testu. Je pravděpodobné, že si žáci nechali méně času na úlohy na druhé straně listu (u řady respondentů je na druhé straně více úloh neřešených než na straně první). Ostatně test byl díky časovému omezení postaven tak, aby někteří žáci všechny úlohy ani nestihli vyřešit. To se ostatně ukázalo i v přehledu úspěšnosti jednotlivých úloh. Například úloha 11 má vysokou korelaci s faktorem 1 i 2 a jedná se o první úlohu řešitelnou „obvyklou“ strategií na druhé straně testovacího listu. Faktor 6 silně koreluje s úlohami U1, U7, U10 a U15, které vyžadují schopnost změny strategie či pohledu na řešení úlohy (viz oddíl 4.2.2).

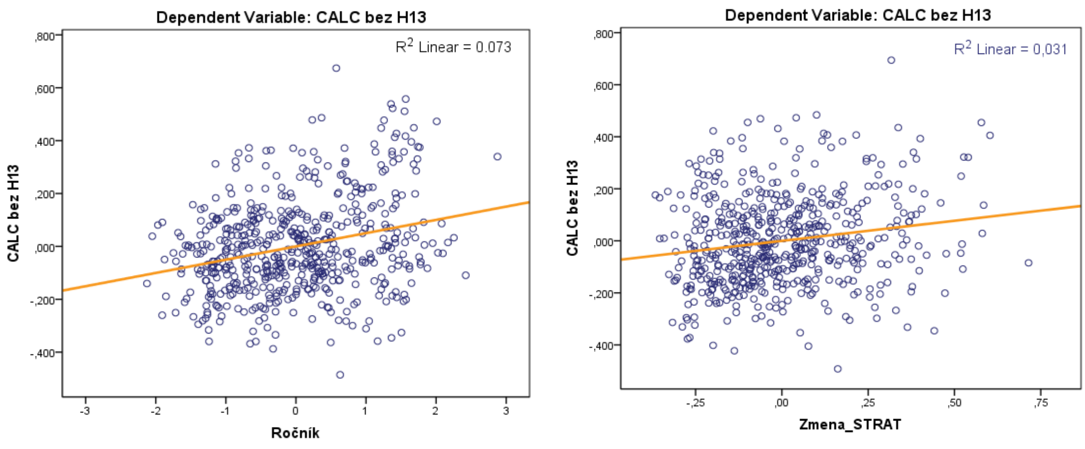
Ostatní 4 faktory, které se zde objevily, se vztahují vždy k podúlohám jedné úlohy z hlavního testu – tedy faktor 3 se vztahuje k úloze H11 a schopnosti představit si objekt na základě jeho sítě (důležitá je orientace jednotlivých stěn). Faktor 5 se vztahuje k úloze H8, která je zadáním podobná jako úloha H11, ale v úloze H8 je hlavním rozlišovacím prvkem tvar objektu, zatímco orientace jeho stěn nehraje žádnou roli. Tyto dvě úlohy korelují každá s jiným faktorem i v případě, že snížíme počet faktorů (testováno pro 6 a 5 faktorů). Při pěti faktorech náleží podúlohy z H8 ke stejnému faktoru jako podúlohy H12 a H11 zůstává jako oddělený faktor. To naznačuje, že schopnosti potřebné k vyřešení úloh H8 a H11 se opravdu liší. Faktor 4 se vztahuje k úloze H9 – schopnost představit si objekt z jiného pohledu (mentální rotace objektu, případně změna perspektivy) a faktor 7 se vztahuje k úloze H12 (doplnění zobrazené strukturace prostoru).

Skutečnost, že podúlohy úloh z hlavního testu korelují každá s jiným faktorem, naznačuje, že úlohy H8–H12 z hlavního testu měří každá jiný aspekt prostorové představivosti. Tím by se vysvětlila nízká vnitřní konzistence této části hlavního testu.

P17. Ověření předpokladů pro lineární regresní model pro predikci úspěšnosti

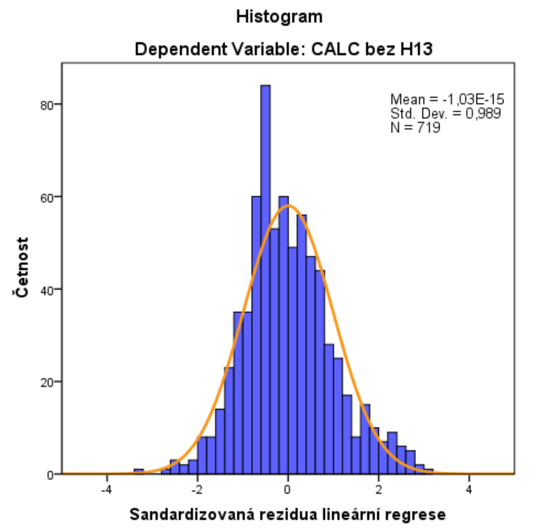
Předpoklady tvorby lineárního regresního modelu jsem ověřovala s využitím knihy (Hendl, 2004) a dále podle (de Vauss, 2002, s. 343–344):

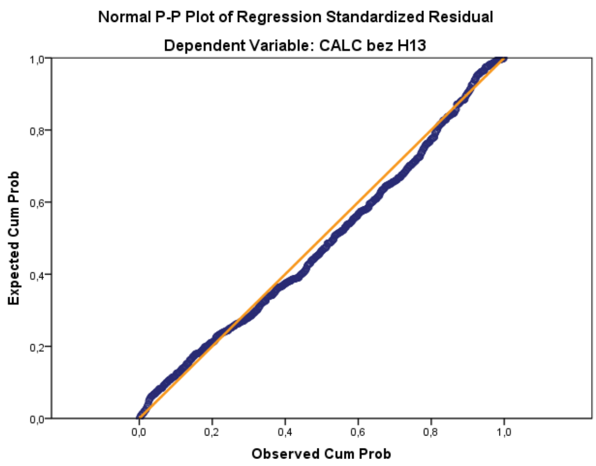
1. Závisle proměnná „CALC bez H13“ je proměnná kardinální (měřena na intervalové úrovni).
2. Prediktory jsou buď kardinální proměnné, nebo byl z ordinálních proměnných vytvořen odpovídající počet proměnných dichotomických (dummy proměnné).
3. Multikolinearita byla ověřena v SPSS pomocí *Variance Inflation Factor (VIF).* Tento faktor je vypočten jako převrácená hodnota koeficientu tolerance $(1-R^2)$, který udává variabilitu dané proměnné, která není vysvětlena variabilitou ostatních prediktorů. Obvykle je požadováno, aby VIF byl menší než 10 (lépe 5) – tedy ostatní proměnné by neměly vysvětlovat více jak 90 % variability dané proměnné. Během testování modelu byly vyřazeny proměnné, které tuto podmínku nesplňovaly – například proměnná „Předtest“ vysoce koreluje s proměnnou „Představivost_TOT“, protože je použita při jejím výpočtu. Z těchto dvou proměnných jsem zařadila pouze proměnnou „Představivost_TOT“, protože zachycuje více aspektů nenumerického uvažování. Hodnoty *VIF* u všech sledovaných proměnných byly menší než 4. Proměnná Kód_DIV=0 byla rovněž vyloučena, neboť je odvoditelná z ostatních proměnných.
4. Odlehlé hodnoty: z dat jsem odstranila výsledky jednoho žáka (ZR.7C.10) – jedná se o velmi nadaného žáka, který si ovšem při psaní testu nevšiml vnitřních stránek testu, kde byly umístěny úlohy na nenumerické uvažování a strukturaci. Ve výpočetních úlohách je tedy tento žák výborný, ale hodnota prediktorů je zkreslená díky tomu, že úlohy včas nenašel. Jinou extrémní hodnotu program SPSS neidentifikoval[90].
5. Lineární vztah prediktorů jsem prozkoumala pro některé proměnné již při hledání odpovědí na výzkumné otázky RQ1 až RQ3. Pro ostatní proměnné byla prověřena pomocí bodových grafů pro prediktory a závisle proměnnou „CALC bez H13“. Jak takový graf vypadá pro proměnné „Ročník” a „Změna_STRAT“, ukazuje následující obrázek.



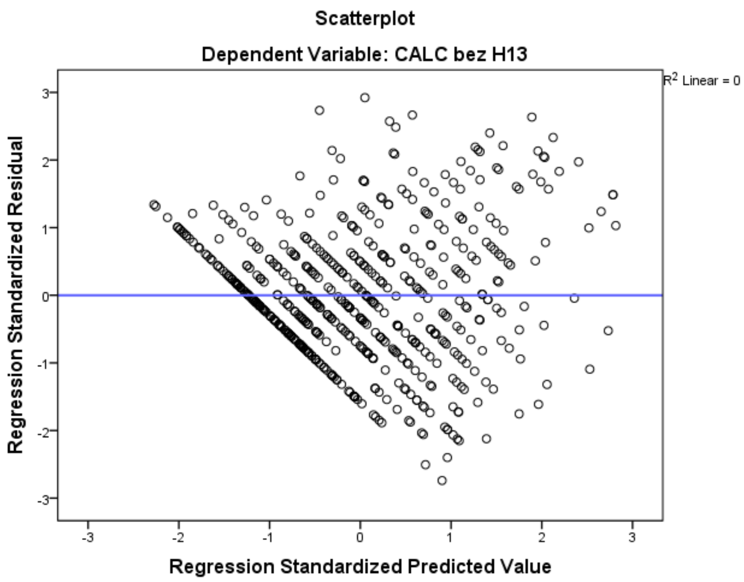
[90] Za extrémní hodnotu je považován případ, kdy velikost absolutní hodnoty rezidua přesáhla trojnásobek směrodatné odchylky.

6. Reziduální hodnoty mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou. Tento předpoklad jsem ověřila pomocí histogramu reziduálních hodnot a P-P grafu kumulovaných pravděpodobností. Histogram poměrně dobře kopíruje křivku normálního rozdělení a Q-Q graf (resp. P-P graf) se příliš neodchyluje od příslušné diagonály (viz obrázky níže). Předpoklad normality reziduí je tedy splněn.





7. Homoskedasticita: rozptyl v datech jedné proměnné by měl být víceméně shodný pro všechny hodnoty druhé proměnné. Osborne a Waters (2002) doporučují prověřit graf závislosti standardizovaných reziduí na standardizované predikci závislé proměnné. Tento graf by měl vykazovat náhodné rozdělení kolem hodnoty 0. Z grafu dole vidíme, že problém by mohl být v levé části grafu, kde se vyskytují pouze kladné hodnoty reziduí. Problémem je patrně vysoké procento žáků, kteří dosáhli 0 % v proměnné „CALC bez H13“ (tato proměnná nerozlišuje dobře mezi slabšími žáky) – pro mnohé z těchto žáků predikuje regresní model zápornou úspěšnost (neboť některé proměnné použité jako prediktory rozlišují dobře i mezi slabšími žáky – například proměnná „Představivost_TOT“), a tedy velikost reziduí je pro tyto žáky nutně pouze kladná. V pravé části grafu lze již vidět náhodný vzorec rozmístění bodů. Na základě vizuální kontroly tohoto grafu tedy nelze homoskedasticitu dat zamítnout.

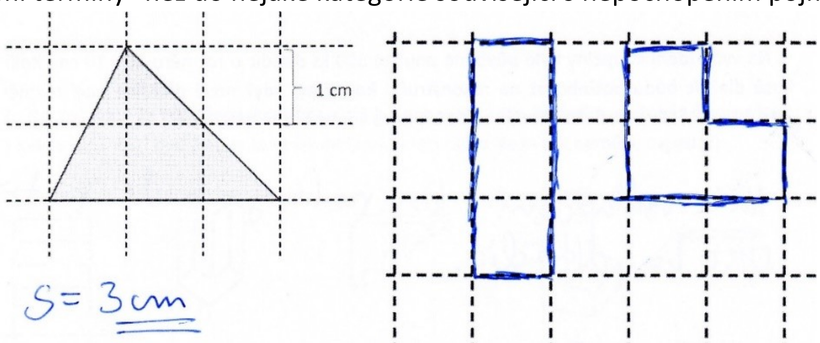


P18. Obtíže žáků při řešení jednotlivých úloh v testu

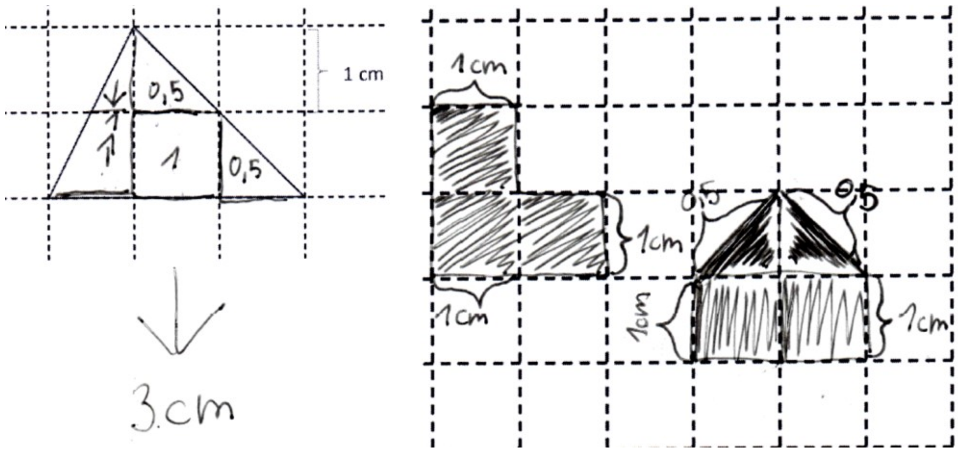
Při mapování strategií a chyb žáků identifikovaných na základě písemných řešení testu, jsem provedla detailní analýzu těchto písemných řešení společně se zařazením a klasifikováním chyb do kategorií, kterém používám i pro analýzu rozhovorů. Vzhledem ke značnému rozsahu této analýzy ji zde nebudu uvádět celou, ale uvádím pouze ty části analýzy, na které přímo odkazuji v textu práce. V rámci této přílohy rovněž uvádím některé informace a souvislosti, které by svou povahou náležely spíše do diskuse. Je to proto, že by z důvodu přehlednosti a zachování jasné strukturační linie v diskusi takto podrobně diskutovány být nemohly.

H2 – označení jednotky obsahu jako cm a obsah trojúhelníku jako pět čtverečků

Jednou z nejčastějších chyb u této úlohy je uvedení nesprávných jednotek u jinak správně spočteného obsahu. Zejména žáci 1. stupně používali v hojné míře jako jednotku čtverec, což jsem považovala za správné řešení. Tato chyba se však týká případů, kdy byl výsledek zapsán jako 3 cm. Většinou není uveden postup, ale z toho, že téměř všichni tito žáci nakreslili dva neshodné útvary s obsahem 3 čtverečky (viz obr. p3 a obr. p4), lze usuzovat, že se jedná pouze o opomenutí či chybný název správné jednotky. Tento typ chyb bych zařadila spíše do kategorie „Chybná práce s matematickými termíny“ než do nějaké kategorie související s nepochopením pojmu obsah.

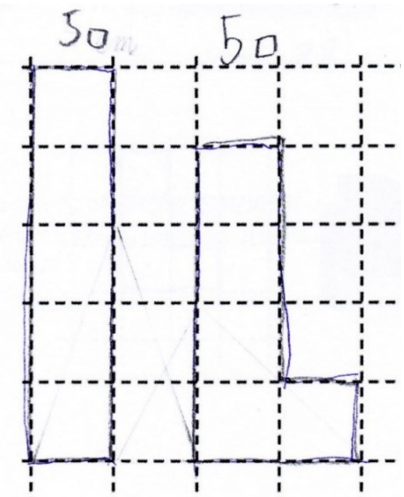


Obr. p3: (LK.7B.06) chybně uvedená jednotka obsahu



Obr. p4: (BD.6D.13) chybně popsaná jednotka může souviset i s popisem v zadání úlohy

Jednou z chyb, kterou se na základě písemných řešení žáků v úloze H2 podařilo identifikovat, jsou chyby při určování počtu čtverečků, které pokrývají zadaný trojúhelník. Tyto případy jsem identifikovala na základě zakreslených útvarů, a to zejména v případě, že se jednalo o útvary s obsahem o přesně 5 čtvercích (3 žáci). Žákyně 5. ročníku sice na otázku obsahu trojúhelníku neodpověděla, ale jako útvary shodného obsahu nakreslila dva pravoúhelníky o obsahu 5 čtverců, jak ukazuje obr. p5. Lze tedy předpokládat, že 5 čtverců považuje za obsah zadaného trojúhelníku – pravděpodobně započítává všechny čtverce, do kterých trojúhelník zasahuje. Jiná žákyně 6. ročníku určila obsah trojúhelníku jako 5 cm a uprostřed každého čtverce, do kterého trojúhelník zasahuje, udělala tečku (což naznačuje, že počítala celé čtverečky a nikoliv centimetry).



Obr. p5: (BT.5B.08) útvary shodného obsahu

Nález těchto chyb souhlasí s informacemi v článku Kamiové a Kyshové (2006), které odkazují na podobnou úlohu, ve které 19 % amerických žáků udělalo právě tuto chybu. V řešení našich žáků se nejedná o příliš frekventovanou chybu (pravděpodobně by byl výskyt častější, kdyby se jednalo o otázku typu výběr z možností a odpověď 5 čtverečků by byla nabídnuta jako jedna z nich). Je pravděpodobné, jak tvrdí i autorky článku, že tito žáci pracují s jednotkou obsahu jako s nedělitelnou (je to pro ně jeden celek, který nelze rozdělovat) a/nebo si neumí představit menší jednotky jiného tvaru pokrývající danou jednotku. V tom případě by tyto problémy žáků spadaly do kategorie „Nedostatky ve strukturaci“ (práce s jinou jednotkou než čtvercovou).

H5 a H15 obtíže žáků při řešení úlohy (vztah jednotek)

U obou těchto úloh je převládající chybnou strategií výpočtu linearizace – délka strany se zdvojnásobí, tedy se zdvojnásobí i obsah. Převládající strategií, která vedla k úspěšnému vyřešení úlohy, byl v obou případech výpočet – a to buď výpočet obsahů malé a velké dlaždice, nebo výpočet objemů velké a malé kostky. Pomocí náčrtku vyřešilo úlohu H5 správně 21 žáků (ze 113 úspěšných řešitelů) a úlohu H15 pouze 7 žáků (ze 31 úspěšných řešitelů).

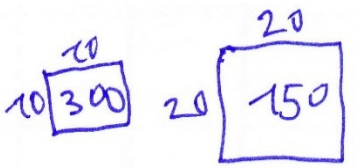
Přehled nejfrekventovanějších chyb (jsou uvedena vždy procenta z počtu řešitelů v daném ročníku) zobrazují přehledně tab. p2 a tab. p3.

Tab. p2: Přehled identifikovaných chyb při řešení úlohy H5

Jev/Ročník	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celkem**
Počet testovaných v ročníku	236	203	133	175	747
Řešil H5	126	131	87	135	479
H5 Správné řešení	13	27	23	50	113
Nelze identifikovat	4	1	0	3	8
Identifikované chyby – % z celkového počtu identifikovaných chyb					
Linearizace	60 %	66 %	*56 %*	61 %	61 %
Chyba při grafickém řešení	6 %	4 %	6 %	17 %	8 %
Operace se zadanými údaji	18 %	17 %	33 %	20 %	21 %
Jen první krok: vypočte obsah velké dlaždice, ale dále chyba	16 %	13 %	5 %	2 %	10 %
Celkem identifikovaných chyb (100 %)	**109**	**103**	**64**	**82**	**358**

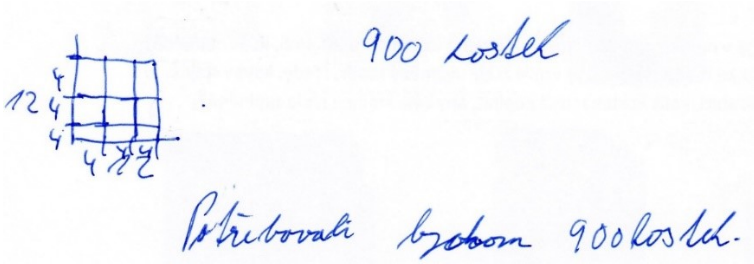
Tab. p3: Přehled identifikovaných chyb při řešení úlohy H15

Jev/Ročník	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celkem**
Počet testovaných v ročníku	236	203	133	175	747
Řešil H15	76	102	63	102	343
H15 Správné řešení		2	8	21	31
Identifikované chyby – % z celkového počtu identifikovaných chyb					
Linearizace	66 %	66 %	65 %	69 %	67 %
Chyba při řešení náčrtkem	3 %	2 %	0 %	9 %	4 %
Operace se zadanými údaji	30 %	28 %	24 %	9 %	23 %
Jiný vzorec – záměna OBS místo OBJ	1 %	3 %	11 %	11 %	6 %
Chyba ve výpočtu	0 %	1 %	0 %	2 %	1 %
Celkem identifikovaných chyb (100 %)	**76**	**100**	**55**	**81**	**312**



Obr. p6: (LK.6A.08) H5 zakreslení dlaždic, obsahy nedány do souvislosti

Chyby při řešení náčrtkem spočívají v tom, že si žák zakreslí dlaždice odděleně a nedá do souvislosti jejich obsahy (viz obr. p6) nebo zakreslí velkou dlaždici nikoliv jako čtvercovou ale jako obdélníkovou o rozměru 10 x 20 (nikoliv 20 x 20, jak je požadováno v zadání). V úloze H15 si někteří žáci zakreslili první podlaží větší krychle pokryté malými krychlemi (jak je ukázáno na obr. p7), což je vedlo k úvaze, že malých krychlí bude devětkrát více. Tito žáci si sice uvědomili nelinearitu úlohy, ale pravděpodobně nezkoordinovali ve svých úvahách třetí rozměr. Chyby v této kategorii by se daly zařadit do kategorie „Nedostatky ve strukturaci" („Práce s jednotkou": žák si dlaždice či kostky zakreslí, ale nenahlíží jejich vzájemný vztah).



Obr. p7: (DB.9D.06) zakreslení vztahu malých a velkých kostek v úloze H15

Za povšimnutí stojí i to, že převážná většina žáků se ani nepokusila si situaci znázornit, což by mohlo poukazovat na ještě závažnější nedostatky ve strukturaci a též na sklon řešit úlohy automaticky či podle určitého signálu. Nějaký náčrtek si k úloze udělalo pouze 50 žáků u H5 (ze 479, kteří se o řešení pokusili) a u H15 je to pouze 18 ze 343 řešitelů. Řešení pomocí náčrtku u úlohy H15 nalézáme téměř výhradně u žáků 9. ročníků, u úlohy H5 je rozložení tohoto způsobu řešení rovnoměrnější, což pravděpodobně souvisí se znatelně vyšší obtížností zakreslení 3D situace.

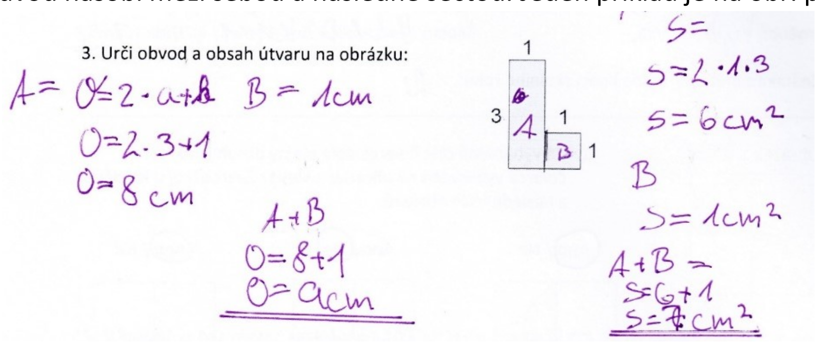
Hlavní obtíže žáků u těchto úloh tedy souvisí nejen s kategorií „Neschopnost propojit operace a geometrickou situaci" ale rovněž s kategorií „Nedostatky ve strukturaci".

Příklady chyb zařazených do kategorie „Nepropojení geometrické situace a výpočtu" u jednotlivých úloh

V tab. 4.29 v hlavní části je uveden přehled procentuálního zastoupení identifikovaných chyb, které náleží do kategorie „Nepropojení geometrické situace a výpočtu". Tento typ chyb je v písemných řešení žáků nejsnáze identifikovatelný a představuje téměř u všech úloh z testu minimálně 60 % identifikovaných chyb. V následující části uvedu některé konkrétní příklady z žákovských řešení.

Chyby „z nepropojení“ u úlohy H2: sem náleží použití chybného vzorce (48 ze 106 identifikovaných chyb) – nejčastější je záměna za vzorec pro obvod $S = a + b + c$, nebo vzorec užívající násobení všech stran $S = a \cdot b \cdot c$. Druhý zmíněný vzorec pravděpodobně vzniká následkem zobecnění vzorce pro obsah obdélníku, který pak často chybně slouží jako prototyp pro výpočet obsahu jakéhokoliv útvaru. Jak uvádí Herediné-Kónyová (2013), žáci v jejím výzkumu často projevovali přesvědčení, že obsah musí být výsledkem součinu stran (některých, případně všech). Od sedmého ročníku k těmto chybným vzorcům přibude ještě vzorec $S = a \cdot v_a$. Další variantou chyby spočívající v záměně obsahu a obvodu je určování obsahu jako počtu čtverečků, přes které vede hranice útvaru (16 žáků ze 106), a určování délek stran pomocí měření a následné vypočtení obvodu namísto obsahu (8 žáků). Celkem tedy 70 ze 106 identifikovatelných chyb.

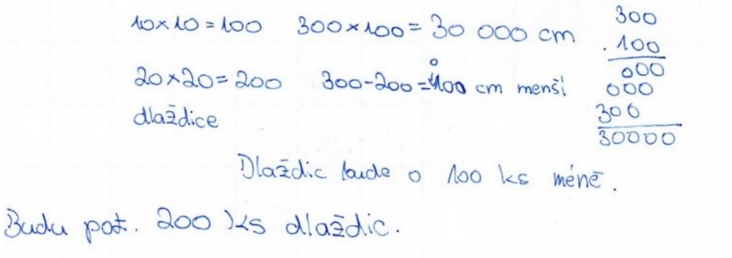
Chyby „z nepropojení“ u úlohy H3-obsah: 89 chyb ze 142 identifikovaných spočívá právě v použití chybného vzorce. Toto číslo ovšem nezahrnuje 18 žáků, kteří správně spočetli obsah i obvod, ale výsledky označili chybným názvem. Velmi často jde o vynásobení všech nebo alespoň některých délek stran útvaru, případně dvojnásobek součtu některých stran; rovněž se objevují vzorce, kde se délky stran po dvou násobí mezi sebou a následně sečtou. Jeden příklad je na obr. p8.



Obr. p8: (LK.7A.09) H3 „nesmyslný" vzorec pro obsah i obvod

Chyby „z nepropojení“ u úlohy H4: sem zařazuji dva typy chyb, které považuji za mírně odlišné – prvním je použití chybného vzorce a druhým je provedení matematické operace s čísly za zadání úlohy. Nejčastěji pozorovanou chybou je záměna obsahu za obvod, kdy žáci místo hledání odmocniny vydělí zadaný obsah trávníku čtyřmi (92 ze 181 identifikovatelných chyb). U 16 žáků nalézáme i vzorce, které pravděpodobně vznikly na základě vzorce pro obsah (pouze byla operace sčítání zaměněna za násobení): S = $a \cdot b \cdot a \cdot b$ nebo S = $a \cdot b \cdot 2$. Nejčastěji je ale v kategorii chybných vzorců vzorec pro obsah obdélníku S = $a \cdot b$, který ovšem k vyřešení úlohy nevede. Celkem 55 žáků použilo k výpočtu délky strany čtverce nějakou operaci se zadanými údaji – nejčastěji dělení (počítají tedy obvykle 64 : 3).

Chyby „z nepropojení“ u úloh H5 a H15: u obou úloh nalézáme poměrně velké procento řešitelů, kteří k výpočtu použili zadané údaje („Operace se zadanými údaji“) a dosadili je do (pro hodnotitele zdánlivě zcela náhodné) matematické operace či vzorce. Tento druh chyby jsem identifikovala u 75 ze 358 chybných řešení v úloze H5 a u 71 ze 312 chyb v úloze H15. Některé způsoby výpočtu připomínají například obsah (malé a velké dlaždice u úlohy H5), ale jsou pak použity ve výpočtu, který situaci neodpovídá. Například výpočty typu: 300 – 200 = 100 – zdá se, že žák 7. ročníku (VS.7B.03) odčítá od počtu dlaždic obsah jedné velké dlaždice a výsledek interpretuje jako počet velkých dlaždic, které bude potřebovat. Nebo žákyně 8. ročníku násobí počet malých dlaždic délkou strany velké dlaždice a výsledek interpretuje jako počet dlaždic, který bude potřeba (BT.8B:03). Řešení žákyně 6. ročníku na obr. p9 je dostatečně okomentováno již samotnou autorkou.

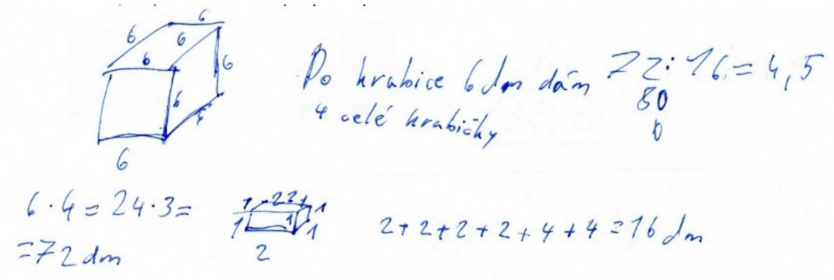


Obr. p9: (LK.6A.11) chybný výpočet v úloze H5

Nejčastěji pozorovanou chybou však byla „linearizace“ – tedy řešení typu „rozměr je dvakrát větší, tedy budu potřebovat dvakrát méně dlaždic“, která se objevila u 217 žáků u úlohy H5 a 208 žáků u úlohy H15.

Chyby „z nepropojení“ u úlohy H6: nejčastější chybou u této úlohy je užití obvodu, a nikoliv obsahu k porovnání velikosti desek (87 ze 180 identifikovatelných chyb). Dalších 45 žáků počítá obsah trojúhelníkové části desky chybně (nejčastěji vynásobením délek všech stran nebo nevydělením součinu strany a výšky dvěma). Celkem 41 žáků používá zdánlivě náhodnou operaci se zadanými údaji.

Chyby „z nepropojení“ u úlohy H14: téměř polovina žáků řešila tuto úlohu graficky (tedy představou či znázorněním kladení krabiček do velké krabice), tedy téměř polovina ze 148 identifikovaných chyb se váže ke grafickým řešením. Skupina chyb označená jako „Operace se zadanými údaji“ obsahuje 41 chybných řešení – například výpočty typu: 6 : (1 · 2 · 1) = 3, kdy žák dělí délku hrany krabice objemem balíčku (jako kdyby nebyla zadaná hrana krabice ale již přímo její objem). Nalézáme rovněž tento zápis: 2 x 1 x 1 · 3 = 6 x 3 x 3 dm s odpovědí 3 krabičky. Jako kdyby 3 krabičky znamenaly, že se každý její rozměr zvětší třikrát. Výpočet žáka 8. ročníku na obr. p10 možná představuje součet délek všech hran (tj. kostry) a následné dělení jednoho výsledku druhým.



Obr. p10: (BT.8B:08) výpočet počtu krabiček v úloze H14

U dalších 19 žáků jsem zaznamenala, že místo objemu krabičky počítali její povrch a tím pak dělili povrch celé krabice. Osm žáků spočetlo (správně) pouze objemy krabice a krabičky, ale v řešení dál nepokračovalo, jako kdyby nevěděli, jak dál postupovat.

Chyby „z nepropojení“ u úlohy H16: nejčastějším chybným řešením z celkového počtu 153 identifikovatelných chyb je zde řešení nedokončené – žáci spočtou obsah podstavy (42 žáků), případně zakreslí alespoň náčrtek (45 žáků), ale dál nevědí, jaký výpočet použít. Dalších 29 žáků zadané údaje dosadí do nějaké operace nebo zcela chybného vzorce (například i do vzorce pro výpočet objemu válce).