Petr Čoupek

Stochastic Evolution Equations

Posudek oponenta disertační práce

Disertační práce Petra Čoupka je věnována stochastickým evolučním rovnicím s Volterrovým šumem. Řídícím procesem tedy nemusí být gaussovský proces, neřkuli (frakcionální) Brownův pohyb, ale proces, obecnější, proces, který má danou kovarianční strukturu a regularitu trajektorií. Nicméně frakcionální Brownův pohyb patří mezi *klasické* příklady Volteroova procesu a tak se často v práci objevuje tam, kde je třeba porovnat nové výsledky se známými, ukázat příklady či protipříklady.

Práce je členěna velmi logicky do tří hlavních kapitol a několika dodatků. V první kapitole se čtenář seznámí s Volterrovými procesy a zejména s konstrukcí stochastického integrálu vzhledem k těmto procesům. To je zcela základní krok ke studiu existence řešení stochastických diferenciálních rovnic řízených těmito procesy. Jednou z klíčových otázek je samozřejmě prostor (stochasticky) integrovatelných funkcí. Jako obvykle se začíná s funkcemi po částech konstantními, pro něž je přirozenou definicí integrálu lineární kombinace přírůstků řídícího procesu a poté je definice integrálu rozšířena na obecnější funkce. Tomuto rozšíření a základním vlastnostem integrálu vzhledem k Volterrovým procesům je věnována první část první kapitoly. Ve druhé části jsou pak uvedeny různé příklady Volterrových procesů.

Samotné stochastické evoluční rovnice jsou studovány ve druhé a ve třetí kapitole. Zde se již pracuje s nekonečně-rozměrnými (cylindrickými) Volterrovými procesy a hlavní rozdíl je v prostoru integrovaných operátorů. Zatímco ve druhé kapitole se autor věnuje teorii v Hilbertových prostorech, ve třetí kapitole přijdou ke slovu prostory L^P pro $p \geq 1$. I zde je nutné začít teorií stochastického integrálu v nekonečně-rozměrných prostorech, definovat mild řešení a ukázat jeho existenci a vlastnosti. Zejména se autor věnuje regularitě řešení a existenci stacionárního rozdělení.

V dodatcích je uvedeno téměř vše podstatné pro teorii, která v práci není hlouběji rozvedena, ale která je nutná pro pochopení tvrzení a důkazů.

Práce působí velmi vyzrálým a vyváženým dojmem. Autor rozšiřuje pokročilé výsledky školitele netriviálně a s porozuměním. Některé výsledky již byly publikovány v časopisech a předvedeny na seminářích a konferencích. Zde bych podotkl, že je škoda, že autor se v práci stále drží velmi technického a precizního výkladu a občas neposkytne trochu neformálnější vhled do problematiky. Z vlastní zkušenosti s jeho přednáškami na semináři a Robustu vím, že je toho schopen a to velmi dobře schopen. Proto je mi líto, že v práci tuto svou schopnost neuplatnil; odborná stránka práce tím dotčena není, ale výkladu a čtenářově pohodlí by občasné neformálnější vysvětlení problematiky prospělo.

Několik dotazů a kritičtějších slov na adresu práce:

- Dodatky jsou výborné, ale občas bych volil větší provázanost s hlavním textem, přinejmenším přesným odkazem na dodatky.
- V práci se občas vyskytuje podle mého nadbytečné značení. Například ve vzorci (1.7) se vyskytuje $\mathcal{R}(a, b; \mathcal{H})$, to je však totéž jako $L^\infty(a, b; \mathcal{H})$. To zbytečně zatěžuje čtenářovu paměť, která již tak musí být neustále osvěžována častým listováním k definicím jednotlivých symbolů a pojmů.
- Na straně 22: jaký význam má ϵ v definici K^ϵ, když se na pravé straně nevyskytuje? A jak pak platí nerovnost pro $|\partial K^\epsilon / \partial t|$, kde se na pravé straně ϵ vzalo?
- Jaký je přesně argument pro záměnu integrálů a řady v rovnosti (2.3)?
- Ve větě 2.15 na straně 33 mi není jasné, jak se násobí $g(r, s)\phi(s)$. Vypadá to, že se násobí dvě hodnoty v Hilbertově prosotru V, nemá zde být skalární součin? Z podobného důvodu mi je nejasná definice elementárního operátoru G na straně 56.
- Krok 1 důkazu věty 2.19: ve vzorci (2.13) nemusí být vpravo $\mathrm{e}^{r(\omega-\lambda+\eta)}$, kde $\eta > 0$? Tak by mi to alespoň vycházelo při použití (C.4).
- V použití Hölderovy nerovnosti v první nerovnosti vzorce (2.18): nevyžaduje toto, aby $\mu(E) = 1$?
- Na straně 41 9-10 řádek shora. Lze ukázat, jak je možné zbavit se $S(t - x)$? Toto se týká i nerovnosti na čtvrtém řádku na straně 44.

- Je nějaký triviální a hezký příklad významu (2.23) pro chování $S(r)$ při $r \to \infty$?
- Na straně 47 nahoře: proč lze z $|S(t)x|_V \to 0$ s.j. vyvodit $\mathbb{E}|S(t)x|_V \to 0$?
- Na straně 54 uprostřed. Nejsem schopen dopočítat se k uvedené beta funkci.
- V poznámce na straně 55: není mi úplně jasné, jak naložit s podmínkou $\beta \in (1, H + 1/2]$ pro Wienerův proces, kde $H = 1/2$.
- Pro důkaz důsledku 3.3 by bylo vhodné uvést, že elementární operátory tvoří hustou podmnožinu v prostoru γ.
- Na straně 59 jsem nebyl schopen dojít je stejným mocninám na pátém řádku. Jsem přesvědčen, že chyba je na mé straně, ale zajímalo by mne, kde ji dělám.
- Na straně 66, je dovoleno, aby proces šumu η byl v prostoru bílám šumem? Tedy že by operátor Φ nějakým způsobem byl degenerovaný?
- V práci je několik nepříjemných překlepů ve vzorcích, například v podmínce (W) na straně 42. Ale je jich více.

Uvedené připomínky nemají podstatný vliv na celkově vynikající úroveň práce. Většinou jde asi jen o nedorozumění mezi autorem a čtenářem pokud jde o značení či zamlčené kroky výpočtu.

Práci hodnotím velmi kladně, autor bezesporu prokázal schopnost nejenom samostatně pracovat na těžkém tématu, ale z několika rozhovorů a vystoupení na seminářích jsem si odnesl přesvědčení, že doktorand do této problematiky skutečně dokázal proniknout a získal nadhled, který není v této fázi vždy obvyklý. Také schopnost sdělit své výsledky ostatním je u Petra Čoupka nadprůměrná. Můj závěr je tedy takový, že předložená práce **splňuje požadavky na disertační práci na MFF UK** a patří k nadprůměrným.

doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
15. září 2017