Posudek školitele na doktorskou disertační práci:

P. Čoupek: Stochastic Evolution Equations

V posledních přibližně patnácti letech začaly být řadou autorů studovány stochastické evoluční (parciální diferenciální) rovnice, v nichž řídící proces nemá charakter bílého šumu. Odráží to podobný velmi výrazný trend ve vývoji teorie obyčejných stochastických diferenciálních rovnic. Základním příkladem takového procesu je frakcionální Brownův pohyb - zde už existuje řada prací zabývajících se chováním řešení příslušných rovnic. V poslední době jsou ale uvažovány i jeho zobecnění (zejména multifrakcionální Brownův pohyb). Zajímavý je případ, kdy řídící proces není gaussovský, typickým příkladem je Rosenblattův proces. V těchto případech řídící procesy nejsou semimartingaly a jejich trajektorie nemají konečnou variaci, takže je nutno nejdříve definovat pojem stochastického integrálu vůči takovým integrátorům. Nabízí se tedy možnost vybudovat teorii integrálu a posléze stochastický rovnic v jisté obecnosti, která by zahrnovala tyto zajímavé speciální případy. Důležitým společným znakem těchto procesů je tzv. volterrovskost, tj. jejich kovariance je definována pomocí integrálního jádra volterrovského typu.

Disertační práce kolegy Čoupka je založena na třech publikacích (Ref. [12]-[14]), z nichž práce [13] už vyšla, ostatní dvě jsou k datu vzniku tohoto posudku v recenzním řízení (na práci [14] jsme obdrželi recenzní posudek, který doporučuje publikaci po menších úpravách). Práce [13] je společná s mnou a práce [14] společná se mnou a Martinem Ondrejátem. Z mého hlediska odvedl kolega Čoupek v přípravě všech těchto publikací podstatnou část práce, můj přínos byl spíše ideový a při řešení některých konkrétních problémů. Kolega Ondreját je mj. specialistou na stochastickou analýzu v Banachových prostorech a v práci [14] přispěl zejména důkazem lemmatu o hyperkontraktivitě (v disertaci citována v příloze jako Věta D.3. V disertaci jsou práce v podstatě přepsány a upraveny tak, aby se sjednotil výklad a odstranily případné duplicity. Sjednocení technických předpokladů je ovšem poněkud na úkor jejich přehlednosti.

Krátce k obsahu jednotlivých kapitol: V kapitole 1 jsou shrnuty základní definice a výsledky týkající se jednorozměrného Volterrova procesu a stochastického integrálu. Jsou rozlišeny dva stupně regularity procesu (regulární a α - regulární), v obou případech jsou odvozeny postačující podmínky na integrandy, zaručující integrovatelnost . Jsou uvedeny některé vlastnosti takto definovaného stochastického integrálu a příklady procesů, na něž lze budovanou teorii použít.

Kapitola 2 se zabývá lineárními stochastickými rovnicemi v Hilbertových prostorech. Je zaveden pojem cylindrického Volterrova procesu a nekonečně rozměrný stochastický integrál. Studium lineárních rovnic je fakticky zkoumáním vlastnosti stochastického konvolučního integrálu. Je studována jeho existence a regularita. Tím je za příslušných předpokladů (které přirozeně rozšiřují dřívější teorii pro obyčejný a frakcionální Brownův pohyb) dokázána existence a regularita řešení lineárních stochastických evolučních rovnic. Pro regulární řídící volterrovské procesy jsou podmínky na koeficienty mnohem restriktivnější, než v případě silnějšího předpokladu α-regularity. K důkazu spojitosti (příp. hoelderovskosti) řešení je použitá klasická faktorizační technika, která ovšem dává lepší výsledky pro gaussovský šum. Je ovšem ukázáno (přibližně řečeno), že žije-li proces v konečném Wienerově chaosu vůčí nějakému gaussovskému isonormálnímu procesu, platí díky hyperkontraktivitě stejný výsledek jako v gaussovském případě. To pak lze aplikovat na případ Rosenblattova procesu. Dále v této sekci jsou dokázány některé limitní výsledky. Řešení studovaných rovnic není markovské a nelze tedy použít běžných technik k nalezení invariantní míry, ale podobně jako v teorii náhodných dynamických systémů lze metodou přezdívanou někdy jako "remote start method"dokázat existenci striktně stacionárního řešení a rovněž konvergenci v distribuci libovolného řešení k příslušnému stacionárnímu rozdělení (to vše za přirozeného předpokladu stability). Je zde uveden zajímavý příklad rovnice s frakcionálním Brownovým pohybem, kde s rostoucím Hurstovým indexem stacionární řešení přestává existovat.

Poslední kapitola je pak, zhruba řečeno, přenesením výsledku na situaci, kdy stavovým prostorem je prostor L^p na vhodném prostoru s mírou (a tedy není Hilbertův). Toto přenesení vyžaduje použití dosti odlišných důkazových technik kvůli komplikacím s definicí stochastického integrálu v Banachově prostoru. Obecné výsledky jsou pak aplikovány na stochastické rovnice vedení tepla a vlnové (resp. obecnější parabolické i hyperbolické).

Kolega Čoupek postupoval při práci na disertaci velmi samostatně a vnesl do uvedených výsledků řadu zajímavých nápadů. O svých výsledcích obsažených v disertaci referoval na některých konferencích a školách a jeho práce evidentně vzbudila zájem. Například výsledky obsažené v první části disertace (na základě článku [13]) jsou částečně využívány v navazující publikaci o optimálním LQ řízení stochastických parciálních diferenciálních rovnic s volterrovským šumem, jehož jsem spoluautorem spolu s manželi Duncanovými. Tento zájem lze rovněž ilustrovat pozváním Petra Čoupka k e stáží na Kansaské univetě, na jehož realizaci se pracuje. Rovněž kolegové z University of Edinburgh (Gyongy, Šiška) mají perspektivně zájem o stáž Petra Čoupka na jejich pracovišti. Věřím tedy, že se v těchto případech i dalšími kontakty může otevřít perspektiva plodné spolupráce v této oblasti, která i u nás má svou tradici.

Doporučuji předloženou disertační práci Petra Čoupka k obhajobě.

V Praze, 24.8.2017

Bohdan Maslowski