Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Posloupnosti - rozšiřující učební text

Sequences - extended reading

Karel Hamšík

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous Ph. D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednoobor

Praha 2017

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Posloupnosti- rozšiřující učební text* vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 3. 7. 2017 ....

podpis studenta

Poděkování:

Rád bych poděkoval Mgr. Dereku Pilousovi Ph.D. za velmi cenné rady a připomínky k jednotlivým částem práce, dále pak za rychlou komunikaci a celkovou zpětnou vazbu během zpracovávání jednotlivých kapitol.

Anotace

Cílem této práce je zavést a podrobněji rozebrat pojem *posloupnost*. Dále uvést základní charakteristiky tohoto zobrazení a pojmů, které se s ním úzce pojí (např. limita). V úvodních částech jsou uvedeny základní definice a věty, které jsou pro práci s tímto pojmem důležité. V dalších částech jsou rozebrány případy posloupností, které již spadají i do jiných matematických oborů než je *matematická analýza*.

V dalších částech jsou potom rozebrány konkrétní situace a příklady na výpočty limit posloupností, chování posloupnosti včetně řešení. Vždy se jedná o konkrétní typ problému, který se v dané části textu rozebírá.

Klíčová slova: posloupnost, limita posloupnosti, příklady na výpočet limit, diferenční rovnice, konvergence, divergence.

Annotation

Abstract The aim of the thesis is to introduce and elaborate arithmetic sequences, and establish main characteristics of this projection and terms that are closely related to it (e.g. limit). In the introduction, definitions and statements that are crucial for working with this term are stated. Further, the reader is introduced to progressions, that belong into different mathematical fields than mathematical analysis.

Further, particular situations and calculations of sequences limits and its behaviour, including the solution, are elaborated. It always considers one particular type of a mathematical problem that the text concentrates on.

Keywords: Sequences, limit of sequence, difference, convergence, divergence, sequence monotony.

Obsah

Úvod **8**

1 Číselné posloupnosti **9**

1.1 Číselné posloupnosti 9

1.2 Diference posloupnosti 16

1.2.1 Aritmetika diferencí 16

1.2.2 Aplikace diferencí 18

1.2.3 Vyšší řády diference 20

2 Limita číselné posloupnosti **24**

2.1 Okolí bodu 24

2.1.1 Okolí bodu 24

2.2 Limita číselné posloupnosti 25

2.2.1 Základní věty o limitách 27

2.2.2 Vztahy mezi omezeností, monotonií a existencí limity 28

2.2.3 Věty o limitě součtu součinu 28

2.2.4 Limitní přechod v nerovnosti 31

2.2.5 Číslo e 32

2.2.6 Vybrané posloupnosti 33

2.2.7 Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence 36

2.2.8 Limita geometrické posloupnosti 37

2.3 Limity posloupností s mocninami a odmocninami 38

2.4 Podílové a odmocninové kritérium 44

2.4.1 Podílové kritérium 45

2.4.2 Dominanční řada 48

2.4.3 Odmocninové kritérium 50

2.5 Limity posloupností s parametrem 51

2.6 Posloupnosti částečných součtů 55

2.7 Limity posloupností a geometrie 57

3 Nečíselné posloupnosti **62**

3.1 Posloupnosti bodů v $\mathbb{E}^r$ 62

3.2 Posloupnosti matic 64

3.2.1 Invertibilnost posloupností matic 65

3.2.2 Diference posloupnosti matic 67

4 Analogie s funkcemi **69**

4.1 Konvexní a konkávní posloupnost 69

4.2 Diferenční rovnice 74

4.3 Posloupnosti dvou proměnných 79

4.3.1 Limita posloupnosti dvou proměnných 86

4.3.2 Příklady na diferenci vice promennych 89

Závěr **92**

Užité značení **92**

Literatura **93**

Úvod

Matematická analýza je jednou ze stěžejních partií matematiky. Zabývá se studiem matematických objektů, jako jsou funkce, posloupnosti, nekonečné číselné řady, variační počet, integrální počet a mnoha dalších. V tomto textu se budeme věnovat teorii posloupností a pokusíme se tuto teorii rozšířit o informace, které se standardně při běžném studiu tohoto tématu neobjevují. Dále ukážeme praktické příklady na použití znalostí z teorie posloupností např. v geometrii.

Text je určen studentům matematiky, jakožto rozšiřující učební text týkající se posloupností, proto předpokládáme, že čtenář je se základy teorie posloupností seznámen. Pro úplnost jsou v jednotlivých kapitolách vždy uvedeny potřebné definice a věty, které jsou pro práci s tímto typem zobrazení podstatné. Jelikož se jedná o rozšiřující učební text, jsou ke každé zkoumané problematice přidány řešené příklady, týkající se konkrétního problému. Práce je rozdělena do čtyř kapitol, z nichž první dvě jsou věnovány číselným posloupnostem a jejich limitám. Další dvě kapitoly jsou rozšiřující. Věnujeme se v nich typům posloupností, které jsou nadstavbou posloupností číselných.

Téma posloupnosti jsem si zvolil proto, že matematická analýza je mou oblíbenou oblastí matematiky, dále proto abych se pokusil ukázat, že toto téma lze rozšíti dále, než je běžně probíraná látka na vysoké škole. Konkrétně se jedná o nečíselné posloupnosti, které jsou rozebrány v kapitole 3, a analogii s reálnými funkcemi jedné a dvou proměnných. Tato analogie je rozvedena ve čtvrté kapitole tohoto textu.

Kapitola 1

Číselné posloupnosti

Zobrazení $f : \mathbb{N} \to M$, kde M je neprázdná množina se nazývá *posloupnost*. Tato definice je nejobecnější, jelikož množina M není blíže specifikována. V této části se budeme zabývat typem posloupností, které zobrazují z množiny $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_k$) do číselné množiny. Nejčastěji půjde o množiny $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$. Zobrazení $\mathbb{N} \to M$, kde M je číselná množina se nazývá *číselná posloupnost*.

1.1 Číselné posloupnosti

Definice 1. Jestliže každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno číslo $a_n \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), potom říkáme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost** reálných (komplexních) čísel. Číslo a_n nazveme **n-tým členem** této posloupnosti.

Existují dva základní způsoby zápisu posloupností:

- **Explicitně** : $a_n = (-1)^n$, $a_n = \frac{n+1}{n+4}$, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ a tak podobně.
- **Rekurentně**: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n(n+1) \Rightarrow a_2 = 2,\ a_3 = 6,\ \ldots$

Poznámka: Někdy se pro explicitní vyjádření užívá označení *vzorec pro $n-$tý člen.*

Obecně lze každé explicitní vyjádření převést na rekurentní, ale ne všechna rekurentní můžeme převést na explicitní vyjádření posloupnosti.
Příklad: Mějme posloupnost zadanou explicitně: $a_n = n$. Tuto posloupnost lze vyjádřit rekurentně například takto: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1$.

Definice 2. Nechť $\mathbb{N}$ je množinou přirozených čísel a $k \in \mathbb{N}$. Označením $\mathbb{N}_k$ budeme rozumět nekonečnou podmnožinu přirozených čísel takovou, že $\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N},\ n \geq k\}$.

Tato definice je užitečná při zavádění pojmu *číselná posloupnost* z toho důvodu, že umožňuje omezení definičního oboru posloupnosti na nekonečnou podmnožinu $\mathbb{N}$.
Příklad: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost taková, že $a_n = \sqrt{n^2 - 12n}$. Tato posloupnost není definována pro $n \in \{1, 2, \dots, 11\}$. V tomto případě bychom za definiční obor posloupnosti brali množinu $\mathbb{N}_{12}$.

Věta 1.1.1. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se rovná posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro všechna přirozená čísla n platí rovnost $a_n = b_n$.

Důkaz. Zřejmý. □

Definice 3. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a a_n je její $n-$tý člen. Pak člen a_{n-1} nazýváme *předchůdcem členu* a_n a člen a_{n+1} je *následníkem* členu a_n.

Poznámka: První člen posloupnosti a_1 (případně a_0 pokud je definičním oborem posloupnost $\mathbb{N}_0$) nemá předchůdce.[1]

Definice 4. Množinou všech členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{x \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C});\ \exists n \in \mathbb{N} : x = a_n\}$$

Poznámka: Pokud budeme potřebovat vypsat několik členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ budeme to značit následovně: $(a_1,\ a_2,\ \dots,)$ Příkladem může být např. $a_n = (-1)^n$ pro jejíž množinu členů platí:
$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1\}$ nebo $b_n = n$ pro jejíž množinu členů platí: $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{N}\}$.
Poznámka: Posloupnost $a_n = n$ se nazývá *identická posloupnost.*
Abychom správně pochopili vlastnosti číselných posloupností, je účelné si nyní zavést některé *topologické pojmy*, týkající se množiny $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

Definice 5. Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R},\ \mathcal{M} \neq \emptyset$. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je **omezená zdola**, jestliže $\exists a \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \mathcal{M} : x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou množiny** $\mathcal{M}$.
Analogicky bychom definovali pojem **omezená shora** resp. **horní závora**.

Definice 6. Množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ se nazývá **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Definice 7 (Alternativní definice omezené množiny)**.** Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je **omezená**, pokud $\exists k \in \mathbb{R}^+$ takové, že $\forall x, y \in \mathcal{M} :\ |x - y| \leq k$.

[1] Tento fakt vychází z *Peanových axiomů*

Definice 8 (Axiom infima množiny). [2] Budiž $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje **jediné** číslo $\lambda \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

1. $\forall x \in \mathcal{M}: \ x \geq \lambda$,
2. $\forall \lambda' \in \mathbb{R}, \ \lambda' > \lambda \ \exists x \in \mathcal{M} : x < \lambda'$.

Číslo λ značíme symbolem $\inf \mathcal{M}$ a čteme **infimum** $\mathcal{M}$.

Poznámka: Axiom infima říká, že mezi dolními závorami neprázdné zdola omezené množiny existuje největší dolní závora.

Definice 9 (Axiom suprema množiny). (Analogicky jako infimum) Budiž $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ neprázdná, shora omezená množina. Pak existuje **jediné** číslo $\Lambda \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

1. $\forall x \in \mathcal{N}: \ x \leq \Lambda$,
2. $\forall \Lambda' \in \mathbb{R}, \Lambda' < \Lambda \ \exists x \in \mathcal{N} : x > \Lambda'$.

Číslo Λ značíme symbolem $\sup \mathcal{N}$ a čteme **supremum** $\mathcal{N}$.

Věta 1.1.2. Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ je **omezená** množina. Pak $\exists \inf \mathcal{M} \ \wedge \ \exists \sup \mathcal{M}$.

Důkaz. Plyne z definicí infima, suprema a omezené množiny. □

Definice 10 (Vnitřní bod množiny). Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}$ je **vnitřním bodem množiny** $\mathcal{M}$, jestliže $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset \mathcal{M}$.

Definice 11 (Otevřená množina). Množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ se nazývá **otevřená** v $\mathbb{R}$, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Definice 12 (Vnitřek množiny). Vnitřkem množiny $\mathcal{M}$ rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny $\mathcal{M}$. Vnitřek množiny $\mathcal{M}$ budeme značit Int$\mathcal{M}$.

Definice 13 (Hraniční bod množiny). Nechť $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Řekneme, že x je hraničním bodem množiny $\mathcal{M}$, pokud $\forall \varepsilon > 0$ platí:

$$U_\varepsilon(x) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset \ \wedge \ U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset.$$

[2] Je nezvyklé značit axiomy jako definice. Ve skutečnosti se nejedná o pravý axiom, ale o součást definice reálných čísel. Značení převzato z [2]. Stejně tak axiom suprema množiny.

Poznámka: Hraničním bodem množiny $\mathcal{M}$ je tedy takový bod, v jehož každém okolí jsou prvky jak z $\mathcal{M}$ tak i mimo tuto množinu.

Definice 14 (Hranice množiny)**.** Hranicí množiny $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ rozumíme množinu všech hraničních bodů $\mathcal{M}$. Značíme ji $\partial\mathcal{M}$.

Definice 15 (Uzávěr množiny)**.** Uzávěrem množiny $\mathcal{M}$ rozumíme množinu $\mathcal{M} \cup H(\mathcal{M})$. Uzávěr množiny $\mathcal{M}$ značíme $\overline{\mathcal{M}}$.

Definice 16 (Uzavřená množina)**.** Řekneme, že množina $\mathcal{M}$ je v $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body (tj. $\partial\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, neboli $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$).

Definice 17. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Příklad: Posloupnost $a_n = (-1)^n$ je omezená, jelikož pro všechna přirozená n platí, že

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

Příklad: Posloupnost $a_n = n^2$ je omezená zdola a není omezená shora, protože

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq n^2 < +\infty.$$

Definice 18. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je

- **neklesající**, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$,
- **rostoucí**, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí nebo klesající.

Příklad: Ukažme, že posloupnost $a_n = \frac{1}{n^2}$ je klesající.
Řešení: Jelikož je $a_n = \frac{1}{n^2}$ pak člen $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1}$. Má-li být tato posloupnost klesající, musí podle definice 18 pro všechna přirozená n platit nerovnost $a_{n+1} < a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n, \\ \frac{1}{n^2+2n+1} &< \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Jelikož jsou pro všechna přirozená n jmenovatele v daných výrazech nezáporné, můžeme jimi nerovnost vynásobit, aniž bychom museli měnit znaménko nerovnosti. Po této úpravě získáme nerovnost ve tvaru:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n, \\ n^2 &< n^2 + 2n + 1, \\ 0 &< 2n + 1. \end{aligned}$$

Jelikož pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že $2n + 1 > 0$, je tímto prokázáno, že zadaná posloupnost je klesající.

Definice 19. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí rep. klesající na množině $M \subset \mathbb{N}$, pokud $\forall n \in M : a_{n+1} > a_n$ resp. $a_{n+1} < a_n$. Analogicky pro nerostoucí, neklesající na M.

Příklad: Posloupnost daná předpisem $a_n = |n - 5|$ je klesající na $\{1, 2, 3, 4\}$ a rostoucí na $\mathbb{N}_5$.

Definice 20 (Periodická posloupnost)**.** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Řekneme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *periodická*, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+k}$. Číslo k se nazývá *periodou* posloupnosti.

Příkladem takové posloupnosti je např. $a_n = (-1)^n$, která má periodu[3] dva, případně konstantní posloupnost $a_n = A \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, která má periodu jedna.
Příklad: Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou následujícím způsobem:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}; a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tato posloupnost má následující členy:

$$a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ a_3 = \frac{\beta}{\alpha},\ a_4 = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{1}{\alpha},\ a_5 = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{\beta},$$

[3]Periodou je myšleno přirozené číslo k.

$$a_6 = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\beta},\ a_7 = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{1}{\beta}} = \alpha = a_1,\ a_8 = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\beta}} = \beta = a_2$$

Jak vidno jde o posloupnost, která je *periodická* s periodou $k = 6$. Jinými slovy pro tuto posloupnost platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+6}$. Příklad: Mějme nyní posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou následujícím způsobem:

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{a_{n+1}}; a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Tato posloupnost má následující členy

$$a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ a_3 = \frac{\beta}{\alpha},\ a_4 = \frac{\beta}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^2}{\alpha},\ a_5 = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\beta^2}{\alpha}} = \frac{\alpha^2}{\beta^3}$$

$$a_6 = \frac{\beta^5}{\alpha^3},\ a_7 = \frac{\alpha^5}{\beta^8},\ a_8 = \frac{\beta^{13}}{\alpha^8},\ a_9 = \frac{\alpha^{13}}{\beta^{21}},\ \ldots$$

Nyní si zadefinujeme pomocnou posloupnost $\varphi(n)$, která každému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřadí součet exponentů čísel α a β, příslušných tomuto n- tému členu. V našem případě tedy dostaneme $\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 3,\ \varphi(5) = 5, \varphi(6) = 8,\ \varphi(7) = 13,\ \varphi(8) = 21,\ \ \ldots$

Všimněme si, že pokud posloupnost $\varphi(n)$ bereme jako posloupnost čísel, jedná se o Fibonacciho posloupnost. O této posloupnosti se ještě zmíníme v pozdějším textu.[4]

Příkladem posloupnosti, která není ani rostoucí ani klesající může být posloupnost daná předpisem $a_n = (-1)^n$, která má členy s pravidelně se střídajícími znaménky. Posloupnost, která pravidelně střídá znaménka svých členů se nazývá **alternující**.

Poznámka: Posloupnost $a_n = (-1)^n$ je možné zapsat i jiným způsobem. Jedním z nich je například $a_n = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$.

Definice 21 (Složená posloupnost)**.** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost *přirozených čísel*, tedy $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pak posloupností $(a_n \circ b_n)_{n=1}^{\infty}$ rozumíme posloupnost $(a_{b_n})_{n=1}^{\infty}$. Jde tedy o posloupnost, která je indexována podle členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Odtud plyne nutnost aby $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zobrazovala do přirozených čísel.

Poznámka: Jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti přirozených čísel, pak skládání těchto posloupností není komutativní. Jinými slovy obecně neplatí, že $(a_n \circ b_n)_{n=1}^{\infty} = (b_n \circ a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Příklad: $a_n = n + 1$ a $b_n = n^2$, pak $a_n \circ b_n = n^2 + 1$, ale $b_n \circ a_n = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
Tyto posloupnosti se nerovnají.

[4] část 4.2 vztah 4.9

Definice 22 (Maximum resp. minimum posloupnosti)**.** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Řekneme, že číslo $M \in \mathbb{R}$ je maximem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pokud $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} = M \ \wedge \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$. Číslo M označujeme $\max a_n$.

Řekneme, že číslo $m \in \mathbb{R}$ je minimem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pokud $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} = m \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m$. Číslo m označujeme $\min a_n$.

1.2 Diference posloupnosti

V této části se budeme zabývat vlastnostmi operátoru, který nazveme *diference posloupnosti.*

Definice 23. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Diferencí posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rozumíme posloupnost $(\Delta_n(a_n))_{k=1}^{\infty}$ definovanou předpisem:

$$(\Delta_n(a_n))_k := a_{k+1} - a_k. \tag{1.1}$$

Poznámka: V zápisu diference se vyskytují tři indexy. Index u názvu posloupnosti (a_n) je součástí standardního značení posloupnosti. Index u znaku diference (Δ_n) říká podle které proměnné danou diferenci tvoříme; nemá tedy význam proměnné, za kterou by bylo možné dosadit její hodnotu, ale je pouhým nápisem, podobně jako např. x v zápisu parciální derivace $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. U posloupností jedné proměnné nemá tento index praktický význam, neboť je vždy shodný s indexem u názvu proměnné. Zavádím jej kvůli konzistenci se značením diferencí posloupností více proměnných (viz 4.3). Index k jen standardně označuje pořadí členů ve výsledné diferenční posloupnosti.

U posloupností jedné proměnné budou zpravidla stejné všechny tři indexy. Pro přehlednost zápisu poslední z nich vynecháváme spolu se závorkami, u nichž je uveden.

1.2.1 Aritmetika diferencí

Věta 1.2.1. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí, že

$$\Delta_n(c \cdot a_n) = c \cdot \Delta_n(a_n) \tag{1.2}$$

Důkaz. Podle definice rozepíšeme

$$\Delta_n(c \cdot a_n) = c \cdot a_{n+1} - c \cdot a_n,$$

$$\Delta_n(c \cdot a_n) = c \cdot (a_{n+1} - a_n),$$

$$\Delta_n(c \cdot a_n) = c \cdot \Delta_n(a_n).$$

□

Věta 1.2.2. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti, potom platí, že

$$\Delta_n(a_n \pm b_n) = \Delta_n(a_n) \pm \Delta_n(b_n). \tag{1.3}$$

Důkaz. Podle definice diference posloupnosti rozepíšeme

$$\Delta_n(a_n \pm b_n) = a_{n+1} \pm b_{n+1} - (a_n \pm b_n),$$

$$\Delta_n(a_n \pm b_n) = a_{n+1} \pm b_{n+1} - a_n \mp b_n,$$

$$\Delta_n(a_n \pm b_n) = a_{n+1} - a_n \pm b_{n+1} \mp b_n,$$

$$\Delta_n(a_n \pm b_n) = \Delta_n(a_n) \pm \Delta_n(b_n).$$

□

Poznámka: Díky platnosti (1.3) a (1.2) můžeme říci, že Δ_n je *lineární operátor.*

Věta 1.2.3. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti, potom platí, že

$$\Delta_n(a_n \cdot b_n) = b_{n+1} \cdot \Delta_n(a_n) + a_n \cdot \Delta_n(b_n). \tag{1.4}$$

Důkaz. Opět podle definice diference rozepíšeme

$$\Delta_n(a_n \cdot b_n) = a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n,$$

$$\Delta_n(a_n \cdot b_n) = a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n + a_nb_{n+1} - a_nb_{n+1},$$

$$\Delta_n(a_n \cdot b_n) = a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_{n+1} + a_nb_{n+1} - a_nb_n,$$

$$\Delta_n(a_n \cdot b_n) = b_{n+1} \cdot (a_{n+1} - a_n) + a_n \cdot (b_{n+1} - b_n),$$

$$\Delta_n(a_n \cdot b_n) = b_{n+1} \cdot \Delta_n(a_n) + a_n \cdot \Delta_n(b_n).$$

□

Poznámka: Pokud bychom v předešlém vztahu zvolili přičtení a odečtení výrazu $a_{n+1}b_n$ dostali bychom, že

$$\Delta_n(a_n \cdot b_n) = a_{n+1} \cdot \Delta(b_n) + b_n \cdot \Delta_n(a_n).$$

Věta 1.2.4. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti a $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$, potom platí, že

$$\Delta_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{b_n \cdot \Delta_n(a_n) - a_n \cdot \Delta_n(b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}}. \tag{1.5}$$

Důkaz. Podle definice diference rozepíšeme

$$
\begin{aligned}
\Delta_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n},\\
\Delta_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{a_{n+1}\cdot b_n - a_n\cdot b_{n+1}}{b_n\cdot b_{n+1}},\\
\Delta_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{a_{n+1}\cdot b_n - a_n\cdot b_{n+1} + a_n\cdot b_n - a_n\cdot b_n}{b_n\cdot b_{n+1}},\\
\Delta_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{b_n\cdot(a_{n+1}-a_n) - a_n\cdot(b_{n+1}-b_n)}{b_n\cdot b_{n+1}},\\
\Delta_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{b_n\cdot\Delta_n(a_n) - a_n\cdot\Delta_n(b_n)}{b_n\cdot b_{n+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Poznámka: Pokud bychom v tomto případě do čitatele přičetli a odečetli výraz $a_{n+1}\cdot b_{n+1}$, dostali bychom vztah

$$\Delta_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{b_{n+1}\cdot\Delta_n(a_n) - a_{n+1}\cdot\Delta_n(b_n)}{b_n\cdot b_{n+1}}$$

1.2.2 Aplikace diferencí

Poznámka: Následující část se týká pouze posloupností reálných čísel.

Diferenci posloupnosti resp. operátor $\Delta_n(a_n)$ můžeme využít při zkoumání chování posloupnosti.

Jelikož podle definice rostoucí posloupnosti platí, že $\forall n \in \mathbb{N}_k : a_{n+1} > a_n$, pak platí, že $\Delta_n(a_n) > 0$. Je-li $\Delta_n(a_n) < 0$, pak je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je na $\mathbb{N}_k$ klesající. V případě, že je mezi $\Delta_n(a_n)$ a 0 neostrá nerovnost, pak je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro $n \in \mathbb{N}_k$ neklesající resp. nerostoucí.

Příklad: Ukažme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ daná předpisem $a_n = \frac{1}{n}$ je klesající.

Řešení: Má-li být posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ klesající, pak $\forall n \in \mathbb{N}_k$ musí platit, že $\Delta_n(a_n) < 0$. Pokud na danou posloupnost použijeme operátor $\Delta_n(a_n)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
\Delta_n\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n},\\
\Delta_n\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{n-(n+1)}{n\cdot(n+1)},\\
\Delta_n\left(\frac{1}{n}\right) &= -\frac{1}{n^2+n}.
\end{aligned}
$$

Jmenovatel výrazu je kladný pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a tedy $\Delta_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$. Daná posloupnost je tedy klesající.

Příklad: Určeme, pro která $n \in \mathbb{N}$ splňuje posloupnost daná předpisem $a_n = n^3 - 6n^2 + 8$ následující nerovnosti: $a_{n+1} > a_n$ a $a_{n+1} < a_n$.

Řešení: Jelikož je $a_n = n^3 - 6n^2 + 8$ je $a_{n+1} = (n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 8$. Člen a_{n+1} rozepíšeme

$$(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 8 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 6(n^2 + 2n + 1) + 8 = n^3 - 3n^2 - 9n + 3,$$

$$\Delta_n(a_n) = a_{n+1} - a_n = n^3 - 3n^2 - 9n + 3 - (n^3 - 6n^2 + 8),$$

$$\Delta_n(a_n) = 3n^2 - 9n - 5.$$

Získali jsme tedy kvadratickou rovnici. Jelikož nevíme, jestli jsou kořeny této rovnice přirozená čísla, vyřešme ji pro proměnnou $x \in \mathbb{R}$.

$$D = 9^2 - 4 \cdot (-5 \cdot 3) = 81 + 60 = 141$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{141}}{6}.\ \text{Jelikož je } 11 < \sqrt{141} < 12, \text{ pak člen } \frac{9 - \sqrt{141}}{6} \text{ neleží v } \mathbb{N}.$$

Zajímá nás tedy jen člen $\frac{9+\sqrt{141}}{6}$. Díky přibližné hodnotě $\sqrt{141}$ můžeme určit, mezi jakými přirozenými čísly se n_1 nachází.

$$\frac{9+11}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3},$$
$$\frac{9+12}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2},$$
$$3 < \frac{10}{3} < \frac{7}{2} < 4.$$

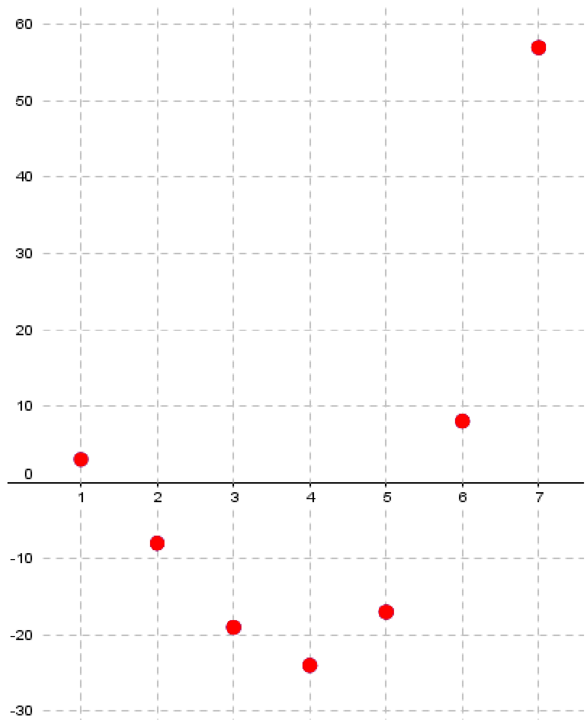
Máme tedy určeno, že n_1 se nachází mezi čísly 3 a 4. Mezi těmito čísly však není žádné přirozené číslo. Z toho plyne, že

$$\Delta_n(a_n) \begin{cases} < 0 \text{ pro } n \in \{1, 2, 3\}, \\ > 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}_4. \end{cases}$$

Platí tedy, že $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \ \wedge a_4 < a_5 < a_6 < \ldots$.

Jelikož je $a_3 > a_4 < a_5$ je člen a_4 minimem dané posloupnosti a toto minimum je rovno $4^3 - 6 \cdot 4^2 + 8 = -24$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy rostoucí pro $n \geq 4$ a klesající pro $n \in \{1, 2, 3\}$.

Poznámka: Následující věta se týká výpočtu limity číselné posloupnosti. Tato látka je vysvětlena v následujících odstavcích (část 2.2). Doporučujeme tedy proto se k této větě vrátit později.



Obrázek 1.1: Část grafu dané posloupnosti $a_n = n^3 - 6n^2 + 8$

Věta 1.2.5 (Stolzova věta). [5] Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti, přičemž $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost, rostoucí nade všechny meze. Pak pokud existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, pak existuje i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a tyto limity jsou si rovny.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n(a_n)}{\Delta_n(b_n)}.$$

Příklad: Určeme následující limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3}.$$

Užitím Stolzovy věty získáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}.$$

1.2.3 Vyšší řády diference

Stejně jako jsme v úvodu zavedli diferenci posloupnosti, můžeme zavést i diference vyšších řádů.

[5]Důkaz viz http://people.fjfi.cvut.cz/pelanedi/StolzNove.pdf citováno dne 3.7.2017

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Symbolem $\Delta_n^{(2)}(a_n)$ budeme rozumět následující výraz

$$\Delta_n^{(2)}(a_n) := \Delta_n(\Delta_n(a_n)) \tag{1.6}$$

a budeme jej nazývat *druhou diferencí* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Pokud bychom chtěli rozepsat druhou diferenci pomocí členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, dostali bychom následující výraz:

$$\Delta_n^{(2)}(a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n. \tag{1.7}$$

Příklad: Určeme první a druhou diferenci posloupnosti dané předpisem $a_n = \sin(n)$.

Řešení: Podle definice diference můžeme napsat, že $\Delta_n(\sin(n)) = \sin(n+1) - \sin(n)$. Tuto diferenci lze upravit

$$\sin(n) \cdot (\cos(1) - 1) + \sin(1) \cdot \cos(n).$$

Tento tvar však není příliš přehledný. Pokud použijeme vzorec

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

získáme požadovanou diferenci v přehlednějším tvaru:

$$\Delta_n(\sin(n)) = 2\sin\left(\frac{n+1-n}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n+1+n}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Druhou diferenci posloupnosti $(\sin(n))_{n=1}^{\infty}$ získáme obdobným způsobem, užitím vzorce

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$$\Delta_n^{(2)}(\sin(n)) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta_n\left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\right),$$
$$\Delta_n^{(2)}(\sin(n)) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\sin\left(\frac{n + \frac{3}{2} - n - \frac{1}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{n + \frac{3}{2} + n + \frac{1}{2}}{2}\right)\right),$$
$$\Delta_n^{(2)}(\sin(n)) = -4\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)\sin(n+1).$$

Stejným způsobem bychom odvodili následující vztahy:

$$\Delta_n(\cos(n)) = -2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right),$$
$$\Delta_n^{(2)}(\cos(n)) = -4\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos(n+1).$$

Pomocí goniometrických vzorců a výše uvedených vztahů lze odvodit platnost následujících tvrzení:

$$\Delta_n(\mathrm{tg}(n)) = \frac{2\sin(1)}{\cos(1)+\cos(2n+1)},$$
$$\Delta_n(\cot(n)) = \frac{-2\sin(1)}{\cos(1)-\cos(2n+1)}.$$

Definice 24. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a k je přirozené číslo. Symbolem $\Delta_n^{(k)}(a_n)$ budeme rozumět k-tou diferenci posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$$\Delta_n^{(k)}(a_n) := \underbrace{\Delta_n(\Delta_n(\ldots\Delta_n(a_n))}_{k \text{ krát}}\ldots).$$

Věta 1.2.6. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a k je přirozené číslo. Potom platí, že

$$\Delta_n^{(k)}(a_n) = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^l a_{n+k-l}. \tag{1.8}$$

Důkaz. Pro $k=1$ dostaneme platné tvrzení: $\Delta_n(a_n) = a_{n+1} - a_n$. Předpokládejme, že vztah (1.8) je platný, pak musí platit, že

$$\Delta_n^{(k+1)}(a_n) = \Delta_n\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^l a_{n+k-l}\right).$$

$$\Delta_n(\Delta_n^{(k)}(a_n)) = \Delta_n\left(a_{n+k} - \binom{k}{1}a_{n+k-1} + \binom{k}{2}a_{n+k-2} + \ldots + (-1)^k\cdot\binom{k}{k}a_n\right),$$
$$\Delta_n(\Delta_n^{(k)}(a_n)) = a_{n+k+1} - a_{n+k}\cdot\left(1+\binom{k}{1}\right) + a_{n+k-1}\cdot\left(\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-1}\cdot a_{n+1}\cdot\left(\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right) + (-1)^k\cdot a_n\cdot\binom{k}{k}.$$

Nyní využijeme platnost následujícího vztahu[6]

$$\forall k,l\in\mathbb{N},\ k>l:\binom{k}{l}+\binom{k}{l+1}=\binom{k+1}{l+1}.$$

Můžeme tedy napsat, že

$$\Delta_n(\Delta_n^{(k)}(a_n)) = a_{n+k+1}\cdot\binom{k+1}{0} - a_{n+k}\cdot\binom{k+1}{1} + a_{n+k-2}\cdot\binom{k+1}{2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k\cdot a_{n+1}\cdot\binom{k+1}{k} + (-1)^{k+1}\cdot a_n\cdot\binom{k+1}{k+1}.$$

Z této rovnosti plyne, že

$$\Delta_n(\Delta_n^{(k)}(a_n)) = \Delta_n^{(k+1)}(a_n) = \sum_{l=0}^{k+1}\binom{k+1}{l}\cdot(-1)^l\cdot a_{n+k+1-l}$$

Tím je věta dokázána. □

[6]Platnost tohoto vztahu lze ověřit přímým výpočtem.

Poznámka: Nultou diferencí posloupnosti budeme označovat $\Delta_n^{(0)}(a_n)$ a budeme pod tímto pojmem rozumět člen a_n.

Věta 1.2.7. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a a_n je její n- tý člen. Potom pro člen a_{n+k}, kde $k \in \mathbb{N}$ platí následující vztah:

$$a_{n+k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \Delta_n^{(k-l)}. \tag{1.9}$$

Důkaz. Metoda důkazu spočívá ve vyjadřování $n+j-$tého členu, pomocí diference, tedy podle věty (1.2.6) pro $j \in \widehat{k}$.[7] □

[7] Označením $\widehat{k}$ rozumíme množinu $\{1, 2, \dots, k-1, k\}$

Kapitola 2

Limita číselné posloupnosti

V této kapitole se budeme zabývat pojmem *limita číselné posloupnosti* a metodami jejich výpočtu. Uvedeme přehled platných vět, které jsou pro praktické výpočty důležité.

2.1 Okolí bodu

Jelikož je číselná posloupnost zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$, můžeme se ptát, jak se budou chovat členy dané posloupnosti v případě, že zvolená čísla n rostou nade všechny meze. Tento problém nám objasňuje právě termín *limita číselné posloupnosti*.

Abychom však mohli termín limity definovat naprosto přesně, je účelné zavést některé nové objekty. V první řadě je nutné definovat pojem *okolí bodu*.

2.1.1 Okolí bodu

Definice 25 (Okolí bodu)**.** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Okolím bodu x_0 o poloměru $\varepsilon > 0$ rozumíme množinu

$$U_\varepsilon(c) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Dále je možné rozlišovat okolí pravé a levé. Levé okolí značíme $U_\varepsilon^-(x_0)$, pravé $U_\varepsilon^+(x_0)$ přičemž $U_\varepsilon^-(x_0) := (x_0 - \varepsilon;\ x_0\rangle$ a $U_\varepsilon^+(x_0) := \langle x_0;\ x_0 + \varepsilon)$. Sjednocením pravého a levého okolí dostáváme tzv. **okolí úplné**.

Poznámka: Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, lze okolí tohoto bodu zapsat jako otevřený interval

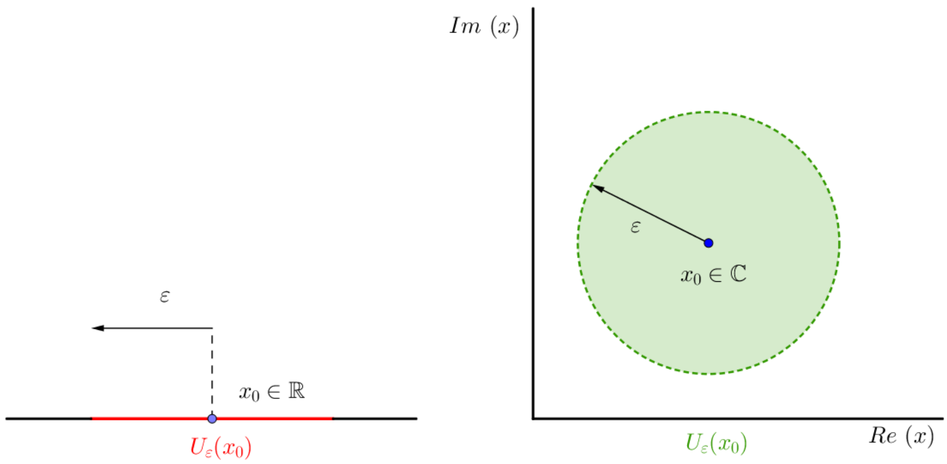
$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon).$$

Definice 26 (Prstencové okolí)**.** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Prstencovým okolím bodu x_0 o poloměru $\varepsilon > 0$ rozumíme množinu $P_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$. V případě, že $x_0 \in \mathbb{R}$ lze prstencové okolí zapsat jako sjednocení dvou otevřených intervalů takto:

$$P_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon;\ x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon).$$

Příklad: $A = 4,\ B = 1$. Zvolme $k = \frac{A-B}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$ a tedy $U_k(4) = (\frac{5}{2}; \frac{11}{2})$ a $U_k(1) = (-\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$. Již tato dvě okolí jsou disjunktní, zvolíme- li $\varepsilon < \frac{3}{2}$ výsledná okolí musí být také disjunktní.
Poznámka: Okolí komplexního čísla již není možné zapsat pomocí intervalu, jelikož množina komplexních čísel není na rozdíl od reálných čísel uspořádaná.

Problematika komplexní posloupnosti, kterou lze chápat jako zvláštní případ posloupnosti bodů v prostoru je vysvětlena v části 3.1. Na následujícím obrázku jsou znázorněny okolí reálného a komplexního čísla.



Obrázek 2.1: Grafické znázornění okolí prvku z $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$

Věta 2.1.1 (Rozlišitelnost bodů pomocí okolí)**.** Mějme $A, B \in \mathbb{R} \wedge A \neq B$. Potom existují okolí $U_\varepsilon(A)$ a $U_\varepsilon(B)$ tak, že $U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B) = \emptyset$.

Důkaz. Jelikož je A různé od B, pak jistě existuje $k \in \mathbb{R};\ k = \frac{|A-B|}{2}$. Nyní stačí zvolit $\varepsilon \leq k$. Dostaneme tak jednotlivá okolí bodů A a B, jejichž průnik je prázdná množina. $\square$

2.2 Limita číselné posloupnosti

V této části uvedeme základní teoretické poznatky, týkající se *limity číselné posloupnosti.* Jednotlivé věty jsou převzaty z [4], [2].

Definice 27 (Vlastní limita číselné posloupnosti)**.** Řekneme, že reálná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **vlastní limitu** rovnu reálnému číslu $A \in \mathbb{R}$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, \; n > n_0(\varepsilon) : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Definice 28 (Nevlastní limita číselné posloupnosti 1)**.** Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu** rovnu $+\infty$ a označujeme $a_n \to +\infty$, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n \in \mathbb{N}, \; n > n_0(\varepsilon) : |a_n| > \varepsilon.$$

Definice 29 (Nevlastní limita číselné posloupnosti 2)**.** Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu** rovnu $-\infty$ a označujeme $a_n \to -\infty$, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n \in \mathbb{N}, \; n > n_0(\varepsilon) : a_n < -\varepsilon.$$

Jinými slovy: pokud má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, pak pro každé kladné ε existuje nějaké přirozené $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechny indexy větší než $n_0(\varepsilon)$ $(n > n_0(\varepsilon))$ platí, že vzdálenost členů posloupnosti od dané limity je menší než ε. Díky tomu lze definici limity přepsat i takto:

Definice 30 (Limita číselné posloupnosti pomocí okolí)**.** Řekneme, že číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $A \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n \in \mathbb{N}, \; n > n_0(\varepsilon) : a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Jinými slovy: Pokud má číselná posloupnost limitu $A \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, pak pro libovolné okolí $U_\varepsilon(A) \in \mathcal{U}(A)$ o poloměru $\varepsilon > 0$ existuje nějaké pevné $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechny indexy $n \in \mathbb{N}, \; n > n_0$ se všechny členy posloupnosti nachází v daném okolí $U_\varepsilon(A)$.

Poznámka: Symbolem $\mathcal{U}(A)$ označujeme množinu všech okolí bodu A.

Důsledek: Z tohoto faktu plyne, že pokud má posloupnost limitu, pak mimo okolí limity $U_\varepsilon(A)$ leží **konečně mnoho** členů posloupnosti. Limita posloupnosti nám tedy nezávisí na konečném počtu členů. (Dokonce daná posloupnost nemusí být pro konečný počet prvků vůbec definována).

Fakt, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $A \in \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{R}^*$)[1] zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, případně zkráceně: $a_n \to A$.

Má-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu (tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \pm\infty$), pak takovou posloupnost

[1] $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ viz. Definice 31

označujeme jako **konvergentní**. V případě, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu ji označujeme jako **divergentní**.

Příklad: Mějme $a_n = \frac{1}{n}$. Ukažme, že limita této posloupnosti je rovna nule.

Řešení: Podle definice limity stačí pro každé $\varepsilon > 0$ nalézt index $n_0(\varepsilon)$ takový, že $\forall n > n_0(\varepsilon)$ platí, že $|a_n - A| < \varepsilon$. V našem případě hledáme n_0, splňující následující nerovnost:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

tedy $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Jelikož je $\varepsilon > 0 \wedge n > 0$, můžeme danou nerovnost upravit takto: $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$. Nyní stačí pro libovolné $\varepsilon > 0$ zvolit $n_0(\varepsilon)$ takto:

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil .^2$$

Pro všechna $n > n_0$ pak bude platit potřebná nerovnost.

2.2.1 Základní věty o limitách

Věta 2.2.1 (Jednoznačnost limity)**.** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz viz [4] str. 28.

Věta 2.2.2. Nechť pro dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : \ a_n = b_n$. Potom platí

1. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená právě tehdy, když posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená.
2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu právě tehdy, když posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu. (Vlastní či nevlastní, z $\mathbb{R}$ nebo i z $\mathbb{C}$)

Důkaz viz [4] str. 29.

Důsledek: Ve většině dalších vět můžeme předpoklad, že něco platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nahradit předpokladem, že to platí pro všechna $n > n_1$, kde n_1 je nějaké přirozené číslo. Dokonce nemusí být $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro konečně mnoho indexů vůbec definováno.

Věta 2.2.3. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \ b_n = a_n - a$.

Důkaz. Plyne přímo z definice limity.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Leftrightarrow |b_n| < \varepsilon$ □

[2] $\lceil\cdot\rceil$ je funkce nazývaná *horní celá část*.

Věta 2.2.4. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A;\ A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, pak je $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Důkaz viz [4] str. 29.

2.2.2 Vztahy mezi omezeností, monotonií a existencí limity

Věta 2.2.5. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz viz [4] str. 30.

Poznámka: Opačné tvrzení obecně neplatí: posloupnost $(\sin(n))_{n=1}^{\infty}$ je sice omezená, ale nemá limitu, stejně tak jako např. $a_n = (-1)^n$.

Věta 2.2.6. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$. Potom je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená zdola (shora) a není omezená shora (zdola).

Důkaz. Pokud je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak pro skoro všechna přirozená n platí, že $|a_n| > \varepsilon$ pro všechna kladná ε. Ať tedy zvolíme libovolné ε, vždy najdeme přelomový index $n_0(\varepsilon)$, od něhož dál budou všechny členy posloupnosti větší než ε. $\square$

Poznámka: Následující věta se týká pouze posloupností reálných čísel.

Věta 2.2.7. Každá monotónní posloupnost má limitu. Tato posloupnost je **vlastní** právě tehdy, když je posloupnost omezená. V tom případě je $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), je-li a_n neklesající (nerostoucí). Tato limita je **nevlastní** $\Leftrightarrow$ je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená. V tom případě je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$, je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neklesající (nerostoucí).

Důkaz viz [4] str. 30.

2.2.3 Věty o limitě součtu součinu

Věta 2.2.8. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě konvergentní posloupnosti. Potom platí:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$,
3. $\lim_{n\to\infty}(\gamma \cdot a_n) = \gamma \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$ pro každé $\gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$,
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n;\ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Důkaz této věty převedeme na následující lemmata, z nichž některá (2,3) mají samostatný význam. Důkaz těchto lemmat viz [4] str. 31-34.

Lemma 1. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Pak $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

Lemma 2. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a b_n je omezená posloupnost, pak je $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

Lemma 3. Nechť a_n je posloupnost reálných čísel, $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $p, q \in \mathbb{R}$ jsou takové, že $p < A < q$. Pak existuje $n_0(p,q) \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > n_0(p,q) : \ p < a_n < q$. Speciálně pro

$A > 0$ je $a_n > A/2 > 0$,

$A < 0$ je $a_n < A/2 < 0$,

$A \neq 0$ je $|a_n| > |A|/2 > 0$

pro $n > n_0$ dost velké. (Poslední tvrzení platí i pro posloupnost komplexních čísel).

Lemma 4. Nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0, \ b \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Potom je $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$.

Pro důkaz věty 2.2.8 stačí použít větu 2.2.3, předchozí lemmata, a následující rovnosti:

$$(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b),$$

$$(a_n b_n - ab) = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a,$$

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}.$$

Následující lemmata se týkají posloupností reálných čísel, které mohou mít i nevlastní limity.

Lemma 5. Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená zdola (shora) a $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty(-\infty)$, pak je $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty(-\infty)$.

Důkaz viz [4] str. 33.

Lemma 6. Je-li $a_n \geq \alpha > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je kladná posloupnost a $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty(-\infty)$, pak je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty(-\infty)$.

Je-li $a_n \leq \beta < 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je záporná posloupnost a $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty(-\infty)$, pak je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty(+\infty)$.

Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty(-\infty)$, pak je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty(\mp\infty)$.

Důkaz viz [4] str. 34.

Poznámka: Ostatní případy se dokazují analogicky. Stačí si jen uvědomit, že z $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$ plyne $b_n > 1\ (b_n < -1)$ pro $n > n_1$, kde n_1 je pevně dané přirozené číslo.

Lemma 7. Nechť je $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$ (speciálně $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$), $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 0$.

Důkaz viz [4] str. 34.

Definice 31 (Rozšíření reálné osy)**.** Označíme $\mathbb{R}^*$ množinu $\mathbb{R} \cup \{+\infty,\ -\infty\}$ a pro každé $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$-\infty < a < +\infty,$$

$$a \pm \infty = \pm\infty,$$

$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro } a > 0,$$

$$a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ pro } a < 0,$$

$$a/(\pm\infty) = 0,$$

$$(\pm\infty)/a = \pm\infty \text{ pro } a > 0,$$

$$(\pm\infty)/a = \mp\infty \text{ pro } a < 0,$$

$$|\pm\infty| = +\infty,$$

$$+\infty + \infty = +\infty,\ -\infty - \infty = -\infty,$$

$$+\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,\ (-\infty) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty.$$

Poznámka: Nedefinujeme $0 \cdot (\pm\infty)$, $+\infty + (-\infty), \pm\infty / \pm\infty$, $a/0$ pro $a \in \mathbb{R}$. Důvod, proč jsou tyto výrazy nedefinovány, bude vysvětlen v konkrétních příkladech na výpočet limity posloupnosti např. v části 2.3.

Nyní můžeme zformulovat větu, která v reálném případě zobecňuje větu 2.2.8 i na případ nevlastních limit:

Věta 2.2.8'. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Potom platí:

- *a)* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,
- *b)* $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$,
- *c)* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n)$,

pokud pravé strany jsou v $\mathbb{R}^*$ definovány;

- je-li $b_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n > 0\ (< 0),$ pak $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = +\infty\ (-\infty)$,
- je-li $b_n < 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n > 0\ (< 0),$ pak $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = -\infty\ (+\infty)$,
- je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ b_n \neq 0$, kde b_n je pro nekonečně mnoho indexů kladné a pro nekonečně mnoho indexů záporné, pak posloupnost a_n/b_n **nemá** limitu.

Důkaz viz [4] str. 36.

2.2.4 Limitní přechod v nerovnosti

Poznámka: Tato část se týká pouze posloupností reálných čísel.

Věta 2.2.9. Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty},\ (b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity (vlastní či nevlastní).
Je-li $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$,[3] pak platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Důkaz viz [4] str. 38.

Poznámka: (**Důležité**) I v případě, že mezi posloupnostmi je ostrá nerovnost **musíme** mezi limitami nechat nerovnost neostrou.

Příklad: $a_n = 1 - 1/n,\ b_n = 1 + 1/n$. Tyto posloupnosti se pro žádná $n \in \mathbb{N}$ nerovnají, dále pro všechna přirozená n platí, že $a_n < b_n$. Přesto však platí rovnost limit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Důsledek: Z této věty dostáváme jiný důkaz pro jednoznačnost limity posloupnosti reálných čísel: kdyby $\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} a_n = b,\ a \neq b$, pak podle věty 2.2.9 musí být jak $a \leq b$, tak i $b \leq a$, a tedy $a = b$.

Věta 2.2.9 nám říká, že při limitním přechodu se nerovnost zachová nebo se znaménko nerovnosti pro limity změní na rovnost. Následující věta nám ze znalosti limit dvou posloupností umožní najít limitu další posloupnosti.

Věta 2.2.10 (O dvou policajtech)**.** Jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty},\ (b_n)_{n=1}^{\infty},\ (c_n)_{n=1}^{\infty}$ tři posloupnosti reálných čísel, pro které platí:

1. $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

[3] Opět stačí, aby tato vlastnost platila od nějakého $n_0 \in \mathbb{N}$.

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$,

potom také posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnu A.

Důkaz viz [4] str. 39.

2.2.5 Číslo e

Definice 32. Číslo e, jinak též *Eulerova konstanta*[4], je reálné číslo, definované jako následující limita:

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.1}$$

Věta 2.2.11. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel, splňující $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$. Pak platí následující rovnost

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Pokud má pravá strana smysl.

Důkaz viz [6] str. 33.

Lemma 8. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost s limitou $+\infty$, pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

Důkaz. Jelikož platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, můžeme danou rovnost přepsat takto:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

což je podle (2.1) rovno e. □

Toto tvrzení platí pro danou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. V jiných případech nemusí platit. Demonstrujme na příkladu: Nechť $a_n = n,\ b_n = n^2,\ c_n = \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n}$ a $d_n = \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{a_n}$. Máme tedy určit limity $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ a $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.
Limity těchto posloupností upravíme následovně:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{k_n}\right)^n.$$

[4]Číselná hodnota e je přibližně 2,718.

Jelikož je $\lim_{n\to} k_n = \mathrm{e}$, pak jistě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ je $k_n > 2$. Pro tato n tedy platí, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$$

Tím jsme ukázali, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$. Nyní zkoumejme druhou limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Tvar této posloupnosti upravíme následovně:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{l_n}}.$$

Jelikož je $\lim_{n\to\infty} l_n = \mathrm{e}$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$2 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 3.$$

Podle věty 2.2.9 a lemmatu 16 tedy platí, že

$$\lim_{n\to\infty} 2 \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} 3,$$

$$1 \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq 1,$$

a tedy podle věty o dvou policajtech je limita dané posloupnosti rovna jedné.

Všimněme si, že jsme po zaměnění posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dostali různé limity, ačkoli platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Příklad: Určete limitu posloupnosti dané předpisem:

$$a_n = \left(\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}\right)^{2n}.$$

Řešení: Jelikož víme, že $2+4+\cdots+2n = 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k = n^2+n$, můžeme předpis posloupnosti můžeme upravit následovně: $a_n = \left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)^{2n}$ resp. $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2$. Podle věty o limitě součinu posloupností tedy platí, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \mathrm{e}^2$.

2.2.6 Vybrané posloupnosti

Definice 33. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z množiny $\mathcal{M}$ a $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n, \ldots$ je *rostoucí* posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$ nazýváme *vybranou* posloupností z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad: $a_n = n,\ b_n = (n!)^2$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1, k_2, \dots$ takovou, že $b_n = a_{k_n}$. V tomto případě platí, že $b_n = a_{(n!)^2}$. Platí tedy, že všechny členy posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ nalezneme v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ale ne opačně.

Poznámka: Je-li $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, je zřejmě $k_n \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Následující věta má pro výpočty limit značnou důležitost.

Věta 2.2.12. Má-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{C}$) (vlastní či nevlastní), pak každá posloupnost z ní vybraná má také limitu A.

Důkaz viz [4] str. 40.

Poznámka: Této věty se dá využít pro důkaz existence i neexistence limity.

1) přímo: známe-li $\lim_{n\to\infty} a_n$, pak okamžitě najdeme limitu každé posloupnosti vybrané ze zadané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

1a) přímo: víme-li, že posloupnost a_n má limitu a je-li limita nějaké z ní vybrané rovna A, pak je rovna A i limita $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

2) nepřímo: podaří-li se nám z nějaké posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrat dvě posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} b_n \neq \lim_{n\to\infty} c_n$, potom původní posloupnost nemá limitu.

Věta 2.2.13. Z každé *neomezené* posloupnosti reálných čísel lze vybrat posloupnost, která má *nevlastní* limitu.

Důkaz viz [4] str. 41.

Lemma 9. (O posloupnosti vložených intervalů). Mějme posloupnost uzavřených, omezených intervalů $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle, \dots, \langle a_n, b_n\rangle, \dots$, pro něž platí: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (jinými slovy $\forall n \in \mathbb{N} : \langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$) Potom posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, dále $\langle a, b\rangle = \cap_{i=1}^{\infty}\langle a_i, b_i\rangle$. Je-li navíc $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ je $a = b$.

Důkaz viz [4] str. 41.

Věta 2.2.14 (Weierstrassova)**.** Z každé omezené posloupnosti reálných nebo komplexních čísel lze vybrat konvergentní vybranou posloupnost.

Důkaz viz [4] str. 42.

Definice 34. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Označme $\mathcal{P}(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ množinu všech prvků z $\mathbb{R}^*$, které jsou limitou nějaké vybrané posloupnosti z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Jinými slovy: Pokud je $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vybraná posloupnost z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a existuje $\lim_{n\to\infty} b_n$, pak $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathcal{P}(a_n,\ n \in \mathbb{N})$.
Potom platí následující věty (2.2.15, 2.2.16, 2.2.17), jejichž důkaz lze nalézt v [3].

Věta 2.2.15. Pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má příslušná množina $\mathcal{P}$ největší a nejmenší prvek z $\mathbb{R}^*$, které označujeme $\limsup a_n$ (limes superior a_n) nebo $\overline{\lim}\, a_n$ resp. $\liminf a_n$ (čteme limes inferior a_n) nebo $\underline{\lim}\, a_n$.

Důkaz viz [3] str. 65.

Věta 2.2.16. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n$.

Důkaz viz [3] str. 68.

Věta 2.2.17. Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora (zdola), potom platí

$$\limsup a_n = \lim_{k\to\infty} (\sup\{a_n\}_{n=k}^{\infty}),$$

$$\liminf a_n = \lim_{k\to\infty} (\inf\{a_n\}_{n=k}^{\infty}).$$

Není-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená shora resp. zdola, pak je $\limsup a_n = +\infty$ resp. ($\liminf a_n = -\infty$).

Příklad: Určete následující limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^n.$$

Řešení: Intuitivně víme, že daná posloupnost má limitu $+\infty$, otázkou je, jak to formálně dokázat. Nejjednodušší řešení nabízejí vybrané posloupnosti: můžeme si říci, že že posloupnost $b_n = n^n$ je vybraná z posloupnosti $a_n = n$. Protože víme, že pokud posloupnost a_n má limitu, pak každá posloupnost z ní vybraná má tutéž limitu, platí, že

$$\lim_{n\to\infty} n^n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Poznámka: Následující příklad se opírá jak o znalost limity vybrané posloupnosti, tak o užití podílového (odmocniného) kritéria pro výpočet limit (viz část 2.4, vztah 2.3).

Příklad: Určete následující limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{\frac{3^{n!}(n!)!}{(n!)^{n!}}}$$

Řešení: Využijeme znalosti toho, že pokud má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu, pak každá z ní vybraná má stejnou limitu. Víme, že $b_n = n!$ je vybraná z $c_n = n$ a můžeme tedy problém s výše uvedenou limitou převést na problém hledání limity následující:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{\frac{3^{n!}(n!)!}{(n!)^{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n n!}{n^n}}$$

Označme $a_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$. Protože je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+1)}{(n+1)\cdot(n+1)^n} =$$

$$= 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{\mathrm{e}}.$$

2.2.7 Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence

Definice limity posloupnosti nám říká, že číslo A je limitou dané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Abychom zjistili přímo z definice, zda daná posloupnost má limitu, museli bychom v podstatě přobrat všechna čísla a zkoumat, zda některé z nich není limitou. Následující nutná a postačující podmínka charakterizuje konvergentní posloupnosti pouze na základě chování jejích členů.

Věta 2.2.18 (Bolzanova-Cauchyova)**.** Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných nebo komplexních čísel je konvergentní tehdy a jen tehdy, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N} : (n > n_0(\varepsilon) \wedge m > n_0(\varepsilon)) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Důkaz rozdělíme na tři lemmata, jejichž důkazy nalezneme např. v [4] str. 44

Lemma 10. Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, pak splňuje B.-C. podmínku.

Lemma 11. Splňuje-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ B.-C. podmínku, pak je omezená.

Lemma 12. Splňuje-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ B.-C. podmínku, pak je konvergentní.

Příklad: Ukažme, že *identická posloupnost* nesplňuje B.-C. podmínku. Řešení: Pokud by tato posloupnost měla splňovat B.-C. podmínku, museli bychom pro všechna kladná ε nalézt přirozené číslo $n_0(\varepsilon)$ takové, že $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m > n > n_0(\varepsilon) : |m - n| < \varepsilon$.
Jelikož jsou čísla m, n přirozená, pak platí, že $\min\{|m-n|\} = 1$. Z toho plyne, že pro $\varepsilon \in (0, 1)$ nelze taková čísla m a n nalézt. Tento fakt je však v rozporu s tím, že $|m-n| < \varepsilon$ pro všechna

kladná ε.

Tím jsme ukázali, že identická posloupnost nesplňuje B.-C. podmínku a protože je rostoucí a limitu tedy má, musí být divergentní.

2.2.8 Limita geometrické posloupnosti

Definice 35. Číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, pokud pro všechna přirozená čísla n platí, že $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde $q \in \mathbb{R}$ je reálná konstanta, která se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti.

Poznámka: Konstantní nulovou posloupnost můžeme chápat jako zvláštní případ geometrické posloupnosti, přičemž q je libovolné reálné číslo a $a_1 = 0$.

Lemma 13. Nechť $a_n = q^n$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je :

- konstantní pro $q = 1$ nebo $q = 0$,
- rostoucí pro $q \in (1, +\infty)$,
- klesající pro $q \in (0, 1)$,
- alternující pro $q \in (-\infty, 0)$.

Důkaz. Pro $q = 1$ resp. $q = 0$ je důkaz zřejmý. Pokud je $q > 1$, pak platí, že $\Delta_n(q^n) = q^n \cdot (q - 1) > 0$. Tím jsme ukázali, že geometrická posloupnost s kvocientem větším než jedna má kladnou diferenci a je tedy rostoucí.

Nyní ukážeme, že posloupnost $a_n = q^n$ je klesající pro $q \in (0, 1)$. V tomto případě je $\Delta_n(q^n) = q^n \cdot (q - 1) < 0$, diference je tedy záporná a daná posloupnost je klesající.

Pro $q \in (-\infty, 0)$ je posloupnost alternující, jelikož ji lze přepsat takto:

$$q^n = (-1)^n \cdot |q|^n.$$

Posloupnost $(|q|^n)_{n=1}^{\infty}$ má kladné členy. Z toho plyne, že posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je alternující. □

Věta 2.2.19. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost tvaru $a_n = q^n$. Pak platí, že

- $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$ pro $q = 1$
- $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ pro $q \in (1, +\infty)$,
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $|q| < 1$ resp. $q \in (-1, 1)$,

- $\lim_{n\to\infty} q^n$ neexistuje pro $q \in (-\infty, -1\rangle$.

Důkaz povedeme v literatuře neobvyklým způsobem, který ukazuje užitečnost převedení některých pojmů z teorie funkcí do teorie posloupností. Podrobný výklad potřebných definic a vět najde čtenář v oddíle 4.1.

Důkaz. Pro $q = 1$ resp. $q = 0$ je daná geometrická posloupnost konstantní, tedy pro všechna přirozená čísla n platí, že $a_n = 1$ resp $a_n = 0$. Konstantní posloupnost má vlastní limitu, v tomto případě platí, že $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

Je- li $q \in (1, +\infty)$ pak víme, že $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost. Určíme nyní druhou diferenci této posloupnosti: $\Delta_n^{(2)}(q^n) = q^{n+2} - 2q^{n+1} + q^n = q^n \cdot (q^2 - 2q + 1) = q^n \cdot (q-1)^2$. Z toho plyne, že pro $q \in (1, +\infty)$ je $\Delta_n(q^n) > 0 \ \wedge \ \Delta_n^{(2)}(q^n) > 0$. Daná posloupnost je tedy ostře rostoucí a ryze konvexní (viz definice 44). Z toho podle věty 4.1.4 plyne, že pro taková q je $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Případ, kdy $q \in (-1, 1)$, rozdělíme na dvě části:

1. $q \in (0, 1)$: $\Delta_n(q^n) < 0$, posloupnost je tedy klesající. Dále víme, že pokud je $q \in (1, +\infty)$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Pokud je $q \in (0, 1)$, pak $\frac{1}{q} \in (1, +\infty)$ a tedy
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

2. $q \in (-1, 0)$ budeme řešit následovně: Pro libovolné $q \in \mathbb{R}$ platí, že
$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n.$$
Jelikož $q \in (-1, 0)$, pak $|q| \in (0, 1)$. Pro tato q je $\lim_{n\to\infty} |q|^n = -\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Z toho podle věty o dvou policajtech plyne, že $q^n \to 0$ pro $q \in (-1, 0)$.

V případě, že $q \in (-\infty, -1\rangle$, budeme postupovat následovně: z posloupnosti $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ vybereme posloupnost kladných členů $(q^{2n})_{n=1}^{\infty}$. Její kvocient je $q^2 \geq 1$, tudíž podle předchozího je $q^{2n} \geq 1$. Jelikož je $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ pro tato q podle předchozího lemmatu alternující, jsou ostatní členy této posloupnosti záporné, a tedy $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ nesplňuje B.-C. podmínku. □

2.3 Limity posloupností s mocninami a odmocninami

V této části se zaměříme na metody výpočtu limit posloupností ve kterých se vyskytují mocniny/ odmocniny a ukážeme si jakými způsoby se dají takové příklady řešit.

Prvním přístupem který v takových případech uplatníme (pokud to půjde), bude vytýkání dominantního členu.

Příkladem na užití vytýkání dominantních členů může být limita posloupnosti $a_n = n^2 - n$. Ze znalosti grafu kvadratické funkce sice intuitivně víme, že daná posloupnost poroste nade všechny meze a její limita bude tedy rovna $+\infty$. Ukazuje se , že kdybychom přímo dosadili, dostali bychom výraz $\infty - \infty$, který však není definovaný.

Pokud z dané posloupnosti vytkneme nejvyšší mocninu n dostaneme, že

$$a_n = n^2 - n = n^2 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)$$

Nyní díky limitě součinu posloupností dostaneme, že daná posloupnost má limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty \cdot 1 = +\infty.$$

Příklad: Určete limitu posloupnosti dané předpisem $a_n = \dfrac{n^2 - 4n + 1}{n + 2}$.

Řešení: Pokud bychom přímo dosadili, dostali bychom výraz $\frac{\infty - \infty}{\infty}$, který však není definovaný. Musíme se tedy poohlédnout po jiném způsobu řešení, protože nemůžeme problém vyřešit pomocí rozdělení limity podílu na podíl limit.

Pokud z čitatele i jmenovatele vytkneme nejvyšší mocninu n, dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 1}{n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot (1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2})}{n \cdot (1 + \frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2}{n}}_{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}}}_{c_n}$$

Jelikož je $b_n = \frac{n^2}{n} = n$ a $c_n = \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}}$ je $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ můžeme limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rozdělit na součin limit posloupností $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí rovnost: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty} c_n = \infty \cdot 1 = +\infty$.

Poznámka: Na určení limity posloupnosti $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsme již mohli použít větu o limitě podílu posloupností, neboť čitatel i jmenovatel konvergují k 1. Všimněme si, že daná limita by se nezměnila i v případě, že bychom čitatel pozměnili na $n^2 - \alpha n + \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Po vytknutí členu n^2 bychom dostali:

$$n^2 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}\right)}_{k_n},$$

kde limita posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je podle věty o limitě součtu rovna 1, nezávisle na parametrech α, β. Můžeme tedy prohlásit, že limita posloupnosti, zadané jako podíl polynomů proměnné n, je ovlivněna pouze stupni polynomů v čitateli a jmenovateli, případně koeficienty před nejvyššími mocninami.

Cvičení: Ověřte platnost následujících tvrzení:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 100n + 2}{-n^2 + 421n - 2} = -1,$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^3 + 11)^{50}}{6n^{50} - 3^{50}n^{150} + 1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{50},$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{j=1}^{25}(\alpha_j n^j)}{n^{26}} = 0;\ \forall j \in \widehat{25}:\ \alpha_j \neq 0,$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n^6 - 2n^5 + 6n^3}{n^5 - 4n}$ neexistuje,

- $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{n^4 - 2n^3 + n^2 - 543}{n^3 + n^5} = 0.$

Dále si ukážeme některé chybné postupy, které se při výpočtu limit vyskytují:

Zadání: $a_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 1}.$

Chybně:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(n^2 + 3n + 1)}{\lim_{n\to\infty}(n^2 + 1)} = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Správně:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Zadání: $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$

Chybně:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{\lim_{n\to\infty} n} = 1^\infty = 1 \text{ (nedefinováno).}$$

Správně:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Zadání: $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}.$

Chybně:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 1} = \infty - \infty = 0 \text{ (nedefinováno).}$$

Správně:

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}=\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(1-\frac{1}{n})}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}=\frac{1}{2}.$$

V posledním příkladu jsme hledali limitu posloupnosti, v níž se vyskytují odmocniny. Tento typ úloh lze řešit standardně dvěma způsoby:

- Jsou-li odmocniny stejného stupně a posloupnosti pod odmocninami nejsou tzv *asymptoticky ekvivalentní* (tj. limita jejich podílu není rovna jedné) můžeme použít vytýkání *dominantního členu*[5], tedy takového, po jehož vytknutí má zbytek konečnou nenulovou limitu.
  Příklad: $a_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n})=$
  $=\lim_{n\to\infty}(n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right))=\lim_{n\to\infty}n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\infty\cdot 1=+\infty.$
- Jsou-li odmocniny stejného stupně a posloupnosti pod nimi jsou asymptoticky ekvivalentní, pak musíme danou posloupnost upravit. Nejčastějším postupem je rozšíření jako v předešlém případě. Tento postup si demonstrujeme na obecnější úloze.

Příklad: Mějme posloupnost $a_n=\sqrt{An^2+Bn+C}-\sqrt{Dn^2+En+F}$, kde $A>0\wedge D>0$ jsou kladná reálná čísla. (Touto podmínkou jsme zajistili, že jde o posloupnost definovanou pro skoro všechna $n\in\mathbb{N}$.) Zkoumejme nyní její limitu.

1. $A\neq D:$ $\lim_{n\to\infty}a_n$ určíme vytknutím dominantního členu:
   $\lim_{n\to\infty}\sqrt{An^2+Bn+C}-\sqrt{Dn^2+En+F}=$
   $=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\sqrt{A+\frac{B}{n}+\frac{C}{n^2}}-\sqrt{D+\frac{E}{n}+\frac{F}{n^2}}\right)\right)=$
   $=\lim_{n\to\infty}n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{A+\frac{B}{n}+\frac{C}{n^2}}-\sqrt{D+\frac{E}{n}+\frac{F}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot(\sqrt{A}-\sqrt{D}).$
   Pro $A>D$ je hledaná limita rovna $+\infty$, pro $A<D$ je hodnota limity rovna $-\infty$.

2. Pro $A=D=\alpha>0$ má daná posloupnost má nyní tvar

$$a_n=\sqrt{\alpha n^2+Bn+C}-\sqrt{\alpha n^2+En+F}.$$

[5] viz 2.4.2

V tuto chvíli již nemůžeme použít vytýkání dominantního členu, protože by nás tento postup přivedl k výrazu $+\infty \cdot 0$, který není definovaný. Danou posloupnost tedy musíme vynásobit „vhodnou jedničkou“, tedy rozšířit tak, aby bylo v čitateli možno použít vzorec $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$, který odstraní odmocniny v původním výrazu za tu cenu, že se přesunou do jmenovatele, nyní však již v součtu.

$$\text{Původní výraz: } \sqrt{\alpha n^2 + Bn + C} - \sqrt{\alpha n^2 + En + F},$$
$$\text{budeme rozšiřovat výrazem: } \sqrt{\alpha n^2 + Bn + C} + \sqrt{\alpha n^2 + En + F}.$$

Pokud tímto výrazem rozšíříme zadanou posloupnost, čímž dostaneme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ve tvaru:

$$a_n = \frac{\alpha n^2 + Bn + C - \alpha n^2 - En - F}{\sqrt{\alpha n^2 + Bn + C} + \sqrt{\alpha n^2 + En + F}} = \frac{Bn - En + C + F}{n \cdot \left(\sqrt{\alpha + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2}} + \sqrt{\alpha + \frac{E}{n} + \frac{F}{n^2}}\right)} =$$
$$= \frac{n \cdot (B - E + \frac{C}{n} - \frac{F}{n})}{n \cdot \left(\sqrt{\alpha + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2}} + \sqrt{\alpha + \frac{E}{n} + \frac{F}{n^2}}\right)}.$$

V tomto tvaru už můžeme použít větu o limitě součinu posloupností a dostaneme, že hledaná limita je $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{B-E}{2\sqrt{\alpha}}$.

Závěr:
$a_n = \sqrt{An^2 + Bn + C} - \sqrt{Dn^2 + En + F}$, kde $A > 0 \wedge D > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty \text{ pro } A < D, \\ +\infty \text{ pro } A > D, \\ \frac{B-E}{2\sqrt{\alpha}} \text{ pro } A = D = \alpha > 0. \end{cases}$$

Poznámka: Všimněme si, že hodnota limity v žádném případě vůbec nezávisí na hodnotě parametrů $C, F \in \mathbb{R}$.
Příklad: Určete limitu posloupnosti $a_n = \sqrt{4n^2 - 100n + 23} - \sqrt{4n^2 + 50n - 120}$.
Řešení: Vidíme, že koeficienty u členu n^2 jsou stejné a tedy nelze použít vytýkání dominantního členu n. Pokud bychom postupovali rozšířením daného výrazu vhodnou jedničkou zjistili bychom, že $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{75}{2}$.

Obdobným způsobem lze řešit limity všech posloupností tvaru $a_n = \sqrt[k]{P(n)} - \sqrt[k]{Q(n)}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $P(n), Q(n)$ jsou polynomy proměnné n. Vždy bychom užívali následujícího vztahu:

$$\forall k \in \mathbb{N} : a^k - b^k = (a-b) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (a^{k-1-j} \cdot b^j)$$

Příklad: Určete limitu posloupnosti $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 + n}$.

Řešení: Opět máme situaci, že koeficienty před nejvyššími mocninami n v jednotlivých odmocninách jsou stejné a tedy nám selže metoda vytýkání nejvyšší mocniny, dále vidíme, že v této posloupnosti se vyskytují třetí odmocniny, kterých se potřebujeme vhodnou úpravou zbavit.

Využijeme předchozí věty o podílu polynomů:

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \underbrace{(a^2 + ab + b^2)}_{\text{rozšiřující výraz}}.$$

Danou posloupnost budeme tedy v čitateli i jmenovateli násobit výrazem

$$\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3 + n^2} \cdot \sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt[3]{(n^3 + n)^2}.$$

Po této úpravě dostaneme danou posloupnost do tvaru

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^3 + n^2 - n^3 - n}{\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + n^2)} \cdot \sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt[3]{(n^3 + n)^2}} = \\ &= \frac{n^2 - n}{\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + n^2)} \cdot \sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt[3]{(n^3 + n)^2}}. \end{aligned}$$

V tento moment už můžeme použít vytýkání nejvyšší mocniny, protože výraz ve jmenovateli obsahuje pouze součty, a tedy nebudeme dělit nulou.

$$\frac{n^2 \cdot (1 - \frac{1}{n})}{n^2 \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} \right)}_{3}}$$

a tedy hledaná limita je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Úlohy, ve kterých se vyskytují různé odmocniny řešíme obdobným způsobem, pouze si dané odmocniny musíme upravit na stejné. Pro názornost uvedeme konkrétní příklad:

Mějme posloupnost $a_n = \sqrt[3]{n^3 - n^2} - \sqrt{n^2 + 1}$. V tomto případě se v posloupnosti vyskytuje druhá a třetí odmocnina. Hledanou úpravou bude tedy mocnina takového stupně, který je dělitelný dvěma i třemi, v úvahu proto připadají všechna čísla tvaru $\{6k\}; k \in \mathbb{N}$, avšak pro jednoduchost výpočtu je užitečné použít nejmenší společný násobek daných čísel.

Zvolme tedy za hledanou odmocninu $\sqrt[6]{}$ a upravme zadanou posloupnost. Víme, že pro $n \in \mathbb{N}_k$ platí:

$$\sqrt[3]{n^3 - n^2} = \sqrt[6]{(n^3 - n^2)^2} \text{ a } \sqrt{n^2 + 1} = \sqrt[6]{(n^2 + 1)^3}.$$

Danou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tedy můžeme přepsat jako:

$$a_n = \sqrt[6]{(n^3 - n^2)^2} - \sqrt[6]{(n^2 + 1)^3}$$

a dále můžeme pokračovat podle předchozího postupu. V tomto případě budeme využívat následující vztah: $a^6 - b^6 = (a - b) \cdot (a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$.

(Výsledkem limity je: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3 - n^2} - \sqrt{n^2 + 1}) = -\frac{2}{5}$).

V této chvíli bychom měli mít základní aparát na počítání limit posloupností s mocninami a odmocninami.

Příklady na procvičení

Spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 123n^2 + n - 120}{-2n^3 + n^2 - 101n + 3} =$ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 \cdot (3n-2)^3 \cdot (n^2+1)^4}{(n+3)^6 \cdot (2n+1)^7} =$ $\left(\dfrac{27}{128}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{3n+3} - \sqrt{4n+1}} =$ $\left(\sqrt{6} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 5n}{\sqrt{n^4+1} - \sqrt{2n^4+3}} =$ $\left(1 - \sqrt{2}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4 + n^2} - \sqrt{n^2 + 12n} =$ (-24)
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} =$ (1)

2.4 Podílové a odmocninové kritérium

V této části se seznámíme s metodou výpočtu limity posloupností, u kterých selhávají postupy doposud používané (rozšiřování, vytýkání dominantních členů apod.) a z něhož se následně odvodí tzv. *řada dominancí pro posloupnosti*.

2.4.1 Podílové kritérium

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je kladná posloupnost reálných čísel. Dále nechť $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists q \in \mathbb{R}^+$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$. Z tohoto tvrzení plyne, že $\frac{a_2}{a_1} < q \Rightarrow a_2 < a_1 \cdot q$; $\frac{a_3}{a_2} < q \Rightarrow a_3 < a_2 \cdot q < a_1 \cdot q^2$; $\dots$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_{n+1} < a_n \cdot q < a_1 \cdot q^n$. Podle věty 2.2.9 platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} \leq a_1 \cdot \lim_{n\to\infty} q^n.$$

Jelikož je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost s kladnými členy a $q \in \mathbb{R}^+$, pak $a_1 \cdot q^n$ je také posloupnost s kladnými členy.

Díky větě 2.2.19 víme, že

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leq q < 1, \\ 1 \text{ pro } q = 1, \\ +\infty \text{ pro } q > 1. \end{cases}$$

Pokud tedy platí, že $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q;\ q \in (0;1)$, pak je limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rovna nule. Analogicky pokud pro všechna přirozená n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Tím jsme odvodili základ tzv. *podílového kritéria*. Zbývá provést jedno zobecnění: protože limita posloupnosti nezáleží na libovolném konečném počtu jejích členů, stačí, aby podmínka $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ resp. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$ platila pouze pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.4.1. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je kladná posloupnost.

- Nechť $\exists q < 1\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Nechť $\exists q > 1\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > q$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Důkaz. Plyne z předchozího odvození. □

Důsledek: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je kladná posloupnost a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$. Je-li $p < 1$, pak je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Je-li $p > 1$, pak je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Důkaz. Je-li $p < 1$, pro všechna n větší než nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{p+1}{2} = q < 1$, čímž jsou splněny předpoklady věty 2.4.1 □

Funkčnost tohoto kritéria můžeme ukázat přímo na geometrické řadě:
Mějme posloupnost $a_n = q^n;\ q \in (0; +\infty)$ a zkoumejme limitu podílu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Víme, že $q \in \mathbb{R}^+$ a tedy daná posloupnost je posloupností s kladnými členy a lze tedy použít podílové kritérium. Dále víme, že $a_n = q^n \Rightarrow a_{n+1} = q^{n+1}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{q^n} = q \Rightarrow$ je- li $q > 1$ je hledaná limita rovna $+\infty$, je-li $0 < q < 1$, pak je hledaná limita rovna 0, což přesně odpovídá vlastnostem limity geometrické posloupnosti.

Příklad: Určete limitu posloupnosti $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$.

Řešení: Daná posloupnost je kladná pro všechna přirozená n a lze tedy užít podílového kritéria.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n}{2^{n+1} \cdot (n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Jelikož jsme zjistili, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = 0$.

Poznámka: V tomto případě bylo možné určit limitu dané posloupnosti přímo, příklad slouží jako ilustrace použití podílového kritéria.

Příklad: Určete limitu posloupnosti $a_n = \dfrac{n!(3n)!}{(4n)!}$.

Řešení: Daná posloupnost je posloupností s kladnými členy a tedy můžeme podílové kritérium použít:

$$a_n = \frac{n!(3n)!}{(4n)!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)!(3n+3)!}{(4n+4)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(3n+3)!}{(4n+4)!} \cdot \frac{(4n)!}{n!(3n)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(3n+3)!(4n)!}{n!(3n)!(4n+4)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}$$

V tuto chvíli už můžeme použít vytknutí dominantního členu v čitateli i jmenovateli:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})3n((1+\frac{1}{n}))3n(1+\frac{2}{3n})3n(1+\frac{1}{3n})}{4n(1+\frac{1}{n})4n(1+\frac{3}{4n})4n(1+\frac{2}{4n})4n(1+\frac{1}{4n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{27n^4}{256n^4} = \frac{27}{256}.$$

Zjistili jsme tedy, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27}{256} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka: V případě, že výsledkem podílového kritéria je číslo 1, nelze pomocí této metody určit hodnotu hledané limity posloupnosti.

Nástin poznámky:

Nechť $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$. Víme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$.

$a_n = n \Rightarrow a_{n+1} = n+1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1 \wedge b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$.

Nalezli jsme tedy dvě posloupnosti s kladnými členy a s různými limitami, jejichž podíl $n+1$ a n-tého členu konverguje k jedné, z čehož plyne platnost poznámky.

Podílové kritérium lze použít i při zkoumáním limit posloupností, závislých na reálném parametru.

Příklad: Určete limitu posloupnosti $a_n = \dfrac{\delta^n\ n!}{n^n}$ v závislosti na parametru $\delta \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro začátek si δ omezíme jen na interval $(0;\ +\infty)$ z důvodu, aby daná posloupnost měla jen kladné členy.

$$a_n = \frac{\delta^n n!}{n^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{\delta^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\delta^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{n+1}}{\delta^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \delta \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\delta}{\mathrm{e}} = q.$$

Výsledkem podílového kritéria je tedy číslo $\frac{\delta}{\mathrm{e}}$ z čehož plyne, že limita dané posloupnosti je rovna $+\infty$ pro $\delta \in (\mathrm{e};\ +\infty)$, nebo rovna 0 pro $\delta \in (0;\ \mathrm{e})$.

Nyní můžeme zodpovědět otázku, proč jsme si v zadání příkladu zvolili $\delta \in \mathbb{R}$. Jelikož víme, že $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$ (pokud mají obě strany smysl), pak musí platit, že pro $\delta \in (-\mathrm{e};\ 0)$ lze danou posloupnost přepsat jako $b_n = (-1)^n \cdot \frac{\delta_2^n\ n!}{n^n}$, kde $\delta_2 \in (0; \mathrm{e})$

Pro takto zvolené δ_2 pak platí, že $b_n = (-1)^n \cdot a_n$.

Platí tedy, že $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} |(-1)^n \cdot a_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$. Jelikož je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladná posloupnost tak platí, že $|a_n| = a_n$. Jelikož $a_n \to 0$ pro $\delta \in (0; \mathrm{e})$, pak i $b_n \to 0$ pro $\delta_2 \in (0;\ \mathrm{e})$ a posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tedy konverguje k nule pro všechna $\delta \in (-\mathrm{e}; \mathrm{e})$[6].

Poznámka: Pokud bychom číslo e do zkoumaného intervalu zahrnuli, dostali bychom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a tedy pomocí tohoto kritéria nelze o limitě rozhodnout. Situaci kdy $\delta = \mathrm{e}$ můžeme rozebrat pomocí *Stirlingova vzorce*.

Stirlingův vzorec

Tento vzorec byl odvozen skotským matematikem *Jamesem Stirlingem* a slouží k aproximaci faktoriálu pro dostatečně velká čísla.

$$n! = \Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \tag{2.2}$$

Poznámka: $\Gamma(n+1)$ je označení *Gamma funkce*, která je definována následujícím způsobem:

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty x^n \cdot \mathrm{e}^{-nx} dx.$$

[6] V případě, že $\delta = 0$ nelze užít podílové kritérium. Přesto je limita posloupnosti rovna nule, jelikož jde o konstantní nulovou posloupnost.

Pomocí Stirlingova vzorce tedy můžeme výraz $\mathrm{e}^n n!$ přepsat jako následovně:

$$\mathrm{e}^n n! \approx \mathrm{e}^n \cdot \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n.$$

Pokud se nyní vrátíme ke zkoumání limity posloupnosti $a_n = \dfrac{\mathrm{e}^n \cdot n!}{n^n}$, pak aproximací podle Stirlingova vzorce dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^n \cdot n!}{n^n} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} = +\infty.$$

Závěrem příkladu tedy můžeme říci, že posloupnost $a_n = \frac{\delta^n n!}{n^n}$ konverguje k 0 pro $\delta \in (-\mathrm{e};\ \mathrm{e})$, pro $\delta \in \langle \mathrm{e};\ +\infty)$ je rovna $+\infty$ a pro $\delta \in (-\infty;\ -\mathrm{e}\rangle$ neexistuje.

Poznámka: V případě, že zkoumaná posloupnost obsahuje členy s faktoriály a víme s jistotou že je pro s.v.n. kladná, je podílové kritérium velmi cenným nástrojem na určení její limity.

Podílové kritérium lze zobecnit následujícím způsobem:
Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná číselná posloupnost, splňující $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$. Pak existuje-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{R}$, pak mohou nastat čtyři případy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} = +\infty \text{ pro } q > 1, \\ = 0 \text{ pro } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje, pro } q \leq -1, \\ \text{nelze pomocí tohoto kritéria určit pro } q = 1. \end{cases}$$

2.4.2 Dominanční řada

V této části si odvodíme tzv. dominanční řadu pro posloupnosti.

Definice 36 (Asymptotická dominance)**.** Mějme dvě kladné, reálné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je *asymptoticky dominantní* vůči $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ a píšeme $a_n \ll b_n$. V případě, že $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *asymptoticky dominantní* vůči $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a značíme $b_n \ll a_n$.

Lemma 14. Pro reálné posloupnosti platí následující řada:

$$n^k \ll q^n \ll n! \ll n^n, \text{ kde } \ k \in \mathbb{R} \text{ a } q \in (1, +\infty).$$

Pro důkaz tohoto tvrzení užijeme *podílové kritérium.*

1. Chceme ukázat, že $n^k \ll q^n$ pro $k \in \mathbb{R}$ a $q > 1$. Podle definice $\ll$ musí platit, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$. V rozhodování o pravdivosti tohoto tvrzení nám pomůže podílové kritérium. Označme $a_n = \frac{n^k}{q^n}$, pak $a_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^k}{n^k}}_{1} \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{q^n}{q^{n+1}}}_{1/q} = \frac{1}{q}$.
Podle předpokladu je $q > 1$ a tedy je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokázali jsme tedy, že $\forall k \in \mathbb{R}$ a $\forall q \in (1, +\infty)$ je $n^k \ll q^n$.

$\square$

2. Vezměme $a_n = \frac{n!}{n^n}$, pak je $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Chceme určit limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$
Jelikož $\frac{1}{\mathrm{e}} < 1$ je tímto platnost vztahu $n! \ll n^n$ dokázána.

$\square$

3. Vezměme $a_n = \frac{q^n}{n!}$, pak je $a_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!}$. Opět budeme určovat limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} = 0$. Jelikož platí nerovnost $0 < 1$, je tímto platnost vztahu $q^n \ll n!$ pro $q \in (1, +\infty)$ dokázána.

$\square$

Lemma 15. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti, splňující $a_n \ll b_n \wedge b_n \ll c_n$, pak také $a_n \ll c_n$.

Důkaz: Má-li být $a_n \ll b_n$, pak platí, že $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$. Podle stejného předpokladu: $b_n \ll c_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = +\infty$. Chceme ukázat, že pokud obě tvrzení platí, je také $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = +\infty$.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{c_n}{b_n}}_{+\infty} \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{b_n}{a_n}}_{+\infty} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$\square$

2.4.3 Odmocninové kritérium

Věta 2.4.2. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$, pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{2.3}$$

Důkaz věty viz [6] str. 25-26.

Upozornění: V tomto případě nás zajímá pouze číselný výsledek $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, který už neporovnáváme s jedničkou.

Lemma 16. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní kladná posloupnost, pak platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Důkaz. Jelikož je v tomto případě $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konstantní, kladná posloupnost, lze užít rovnosti ze vztahu 2.3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c}{c} = 1.$$

$\square$

Příklad: Určeme limitu posloupnosti $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Řešení: Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je kladná pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Opět tedy využijeme rovnosti 2.3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Příklad: Určeme limitu posloupnosti $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Řešení: Opět využijeme stejnou rovnost. Platí tedy, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

Zajímavým příkladem je limita následující posloupnosti:

Příklad: Určeme limitu posloupnosti $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Řešení: Danou posloupnost upravíme:

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

V tuto chvíli můžeme použít odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2.5 Limity posloupností s parametrem

V této části se budeme zabývat metodami výpočtu limit číselných posloupností, v nichž se bude vyskytovat reálný parametr $x \in \mathbb{R}$. Tento typ číselných posloupností budeme označovat $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$.

Problematika zkoumání limit posloupností s parametrem je komplikovanější, než zkoumání limit číselných posloupností, které neobsahují proměnnou[7]. Musíme totiž rozlišit všechny případy parametru $x \in \mathbb{R}$ a určit pro která x má daná posloupnost jakou limitu, případně pro jaká x má vůbec smysl takový problém řešit. Tento problém budeme demonstrovat na následujícím příkladu:

Příklad: Určete limitu posloupnosti na základě parametru $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} (x^2 + x - 1)^n$$

Řešení: Ačkoli se na první pohled zdá, že jde o komplikovaný případ, uvědomme si, že proměnná n se vyskytuje pouze v exponentu dané posloupnosti. Danou posloupnost tedy můžeme chápat jako geometrickou s kvocientem $q = x^2 - x - 1$.
Z předešlých částí víme, že

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \text{ pro } q > 1, \\ 1 \text{ pro } q = 1, \\ 0 \text{ pro } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje pro } q \leq -1. \end{cases}$$

V našem případě tedy stačí určit, pro která $x \in \mathbb{R}$ nabývá q které hodnoty.

[7]Posloupnosti s parametrem jsou ve skutečnosti posloupnosti funkcí, kterým se však v tomto textu nevěnujeme. Budeme tedy funkční posloupnosti brát jako zvláštní případ číselných posloupností.

1. $q > 1$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &> 1, \\ x^2 - x - 2 &> 0, \\ (x+1) \cdot (x-2) &> 0. \end{aligned}$$

   Z tohoto rozpisu plyne, že pro $x \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$ je $q > 1$ a tedy je pro tato x limita posloupnosti rovna $+\infty$.

2. $q = 1$

   Využijeme předchozí výpočet, jen místo nerovnosti budeme řešit rovnost. Jelikož jsou všechny úpravy ekvivalentní, dostáváme: $q = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1,\ 2\}$. Pro tato x je daná posloupnost konstantní a má limitu 1.

3. $q < -1$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &< -1 \\ x^2 - x &< 0 \\ x \cdot (x-1) &< 0 \end{aligned}$$

   Z tohoto rozpisu plyne, že pro $x \in (0,\ 1)$ je $q < -1$ a tedy pro tato x limita neexistuje.

4. Pro $x \in (-1,\ 0) \cup (1,\ 2)$ je $q \in (-1,\ 1)$ a tedy je limita posloupnosti pro tato x rovna 0.

Závěrem tedy můžeme shrnout

$$\lim_{n\to\infty} (x^2 - x - 1)^n = \begin{cases} +\infty \text{ pro } x \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty), \\ 1 \text{ pro } x \in \{-1,\ 2\}, \\ 0 \text{ pro } x \in (-1,\ 0) \cup (1,\ 2), \\ \text{neexistuje pro } x \in \langle 0,\ 1 \rangle. \end{cases}$$

Definice 37 (Obor konvergence)**.** Nechť $a_n(x)$ je číselná posloupnost s parametrem $x \in \mathbb{R}$. Oborem konvergence posloupnosti $a_n(x)$ budeme rozumět množinu

$$\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n(x) \in \mathbb{R}\}. \tag{2.4}$$

Pod pojmem obor konvergence posloupnosti tedy rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro které daná posloupnost konverguje.

Poznámka: Pro předchozí příklad by platilo, že $\mathcal{O} = \langle -1,\ 0) \cup (1,\ 2\rangle$. Pokud bychom se ptali na obor konvergence posloupnosti $a_n(x) = x^n$, dostali bychom obor konvergence $\mathcal{O} = (-1,\ 1\rangle$.

Příklad: Jako další příklad můžeme uvažovat posloupnost $a_n(x) = \sin^n(x),\ x \in \mathbb{R}$ a máme za úkol zjistit obor konvergence $\mathcal{O}$. Jelikož $\sin : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ a $a_n = \sin^n(x)$, je pro pevně zvolené $x_0 \in \mathbb{R}$ geometrickou posloupností s koeficientem $\sin(x_0)$, stačí rozmyslet, pro jaká $x_0 \in \mathbb{R}$ je daná posloupnost konvergentní resp. divergentní, případně kdy nemá limitu. Ze znalosti oboru hodnot dané funkce vyplývá, že daná posloupnost nemá limitu pro ta x_0, v nichž je $\sin(x_0) = -1$. V ostatních případech jde o konvergentní posloupnost. Naším úkolem je tedy určit takovou množinu $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ takovou, že $\forall x \in \mathcal{A} : \sin(x_0) = -1$. Hledaný obor konvergence bude potom ve tvaru $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$. Řešíme tedy rovnici $\sin(x) = -1$. Snadno rozmyslíme, že

$$\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

Obor konvergence dané posloupnosti je tedy

$$\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

Příklad: Určete, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ je posloupnost $a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (x^2 - 3)^k$ konvergentní.

Řešení: Rozepišme prvních několik členů posloupnosti:

$a_1 = (x^2 - 3),\ a_2 = (x^2 - 3) \cdot (x^2 - 3)^2 = (x^2 - 3)^3, \ldots, a_k = (x^2 - 3) \ldots \cdot (x^2 - 3)^{k-1} \cdot (x^2 - 3)^k$.

n-tý člen posloupnosti lze tedy zapsat jako $a_n = (x^2 - 3)^{\sum_{k=1}^{n} k}$ a je tedy roven

$$a_n = (x^2 - 3)^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Jelikož je $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2+n}{2} = +\infty$ může být daná posloupnost konvergentní pouze pokud $|x^2 - 3| < 1$. Tento jev nastane právě tehdy, když $2 < |x^2| < 4$. Hledaným oborem konvergence je tedy sjednocení intervalů $\mathcal{O} = (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

Poznámka: Body $\pm\sqrt{2}$ do oboru konvergence nepatří, protože $a_n(\pm\sqrt{2}) = (-1)^{\frac{n^2+n}{2}}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N} : 2|(n^2 + n)$.[8] Platí, tedy, že $((-1)^{\frac{n^2+n}{2}})_{n=1}^{\infty}$ má členy:$(-1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots)$.

Příklad: Určeme následující limitu: $\lim_{n \to \infty}(1 + nx)$.

[8] Označení, že číslo 2 dělí výraz $n^2 + n$

Řešení: Opět se jedná o posloupnost s parametrem x. Musíme tedy rozhodnout, jak se daná posloupnost bude chovat v závislosti na tomto parametru. Platí, že $\Delta_n(1+nx)=x$. Daná posloupnost je tedy rostoucí pro $x\in(0,\infty)$, klesající pro $x\in(-\infty,0)$ a konstantní pro $x=0$. Pro určení limity můžeme použít vytýkání dominantního členu: $a_n=n\cdot(x+\frac{1}{n})$. Z této úpravy plyne, že $\lim_{n\to\infty}(1+nx)=x\cdot\infty$. Platí tedy, že pro $x\in(0,\infty)$ je $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$, pro $x\in(-\infty,0)$ je $\lim_{n\to\infty}=-\infty$. V případě, že $x=0$ je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konstantní posloupnost tvaru $a_n=1$ a má pro toto x limitu rovnu jedné.

V zadání posloupnosti s parametrem však nemusí být všechny členy obsahující x bezprostředně svázány s proměnnou n viz následující příklad:

Příklad: $a_n(x)=(x-5)(x-2)^n$. Pokud bychom chtěli určit limitu této posloupnosti, museli bychom si ujasnit, jakých hodnot nabývá výraz $(x-5)$ pro která $x\in\mathbb{R}$. V tomto případě bychom dostali, že

$$\lim_{n\to\infty}(x-5)(x-2)^n=\begin{cases}-\infty \text{ pro } x\in(3,5)\cup(5,\infty),\\ 0 \text{ pro } x\in(1,3)\cup\{5\},\\ \text{neexistuje pro } x\in(-\infty,1\rangle\cup\{3\}.\end{cases}$$

V případě, že $x=5$ je $a_n(x)$ konstantní nulovou posloupností.

2.6 Posloupnosti částečných součtů

V této části se budeme zabývat typem posloupnosti, který se týká posloupností součtů členů posloupnosti $a_n \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Uvedeme však jen několik příkladů jelikož je tato problematika velmi podrobně rozebrána v teorii číselných řad[9].

Definice 38. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Posloupnost částečných součtů členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ označme $(S_n)_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost má n-tý člen tvaru:

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m. \tag{2.5}$$

Pro bližší představu uvedeme rozpis prvních několika členů posloupnosti $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \dots,\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Věta 2.6.1. Jestliže $\forall n \in \mathbb{N} :\ a_n > 0$, pak posloupnost $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, příslušná této posloupnosti je rostoucí.

Důkaz. Má-li být posloupnost $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí, musí platit, že $\Delta_n(S_n) > 0$. Pokud tento výraz rozepíšeme, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\Delta_n(S_n) &= S_{n+1} - S_n, \\
\Delta_n(S_n) &= \sum_{m=1}^{n+1} a_m - \sum_{m=1}^{n} a_m, \\
\Delta_n(S_n) &= a_{n+1} + \underbrace{\sum_{m=1}^{n} a_m - \sum_{m=1}^{n} a_m}_{0}, \\
\Delta_n(S_n) &= a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Podle předpokladu je však $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$ a tedy je i člen $a_{n+1} > 0 \Rightarrow \Delta_n(S_n) > 0$. Posloupnost částečných součtů je tedy rostoucí. □

Díky větě (2.6.1) víme, že posloupnost částečných součtů posloupnosti s kladnými členy je rostoucí a tím pádem musí mít limitu. Zbývá jen rozhodnout, jestli je tato limita vlastní či nevlastní. V případě, že $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, řekneme, že S_n potažmo řada $\sum a_n$ je **konvergentní.** V případě, že $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, řekneme, že posloupnost S_n resp. řada $\sum a_n$ **diverguje** k $+\infty$.

[9] [5] kapitola 10

Příklad: Zajímavým příkladem je určit součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (tzv. *harmonické řady*).

Řešení: Snadno určíme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} > 0$ a příslušná posloupnost S_n je tedy rostoucí.

K určení součtu využijeme odhad, který jako první předvedl Mikuláš Oresme:[10]

$$S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{n}{2}$$

Díky nerovnosti $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ a větě (2.2.9) platí, že $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} \geq \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{n}{2})$ a tedy je $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je tedy roven $+\infty$.

Dalším užitečným příkladem, je určit součet geometrické řady, tedy sečíst všechny členy geometrické posloupnosti $a_n = q^n$.

Jelikož z vlastnosti limity geometrické posloupnosti víme, že $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ pro $q \in (1, +\infty)$, budeme se zabývat pouze případem, že $q \in (0, 1)$.

Zkoumejme tedy $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$; $q \in (0, 1)$. Pokud vyjádříme n-tý člen posloupnosti částečných součtů, dostaneme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n.$$

Z vlastnosti dělení polynomu polynomem víme, že

$$(1 - q^n) : (1 - q) = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}.$$

Z tohoto faktu plyne následující rovnost:

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n.$$

Jelikož uvažujeme $q \in (0, 1)$, je $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-q^n}{1-q} + q^n) = \frac{1}{1-q}$.

V případě, že bychom chtěli sčítat ne od nuly, ale od jedničky, museli bychom tento vztah upravit:

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} (q^k) - 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} q^k\right) = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}.$$

Pro součet geometrické řady s kvocientem $q \in (0, 1)$ tedy platí následující vztah:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ resp. } \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}. \tag{2.6}$$

[10]Mikuláš Oresme byl francouzský scholastický umělec narozen mezi 1320 -1330 v Normandii – 11. července 1382 Lisieux, Francie, přispěl i do rozvoje matematiky.

2.7 Limity posloupností a geometrie

Příklad: Mějme pravidelný n úhelník o straně $a \in \mathbb{R}^+$. Tento n úhelník se skládá z $n \in \mathbb{N}_3$ shodných, rovnoramenných trojúhelníků o stranách $a, r, r \in \mathbb{R}^+$. Velikost úhlu naproti straně a je pro každé n roven $|\angle BCA| = \frac{2\pi}{n}$. Naším úkolem bude zjistit obsah tohoto n-úhelníku v závislosti na n.

Jelikož se útvar skládá z n shodných trojúhelníků, musí platit, že celkový obsah útvaru je roven

$$S = n \cdot S_\triangle$$

Nyní spočtěme obsah jednoho z trojúhelníků. Víme, že pro libovolný trojúhelník platí $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$. Pomocí Pythagorovy věty snadno dopočteme, že $a = \sqrt{r^2 - v^2}$ a pomocí funkce cos jistě platí, že $\cos(\frac{\pi}{n}) = \frac{v}{r} \Rightarrow v = r \cdot \cos(\frac{\pi}{n})$. Dostáváme tedy následující vztahy:

$$\begin{aligned}
S_\triangle &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot v, \\
S_\triangle &= \sqrt{r^2 - v^2} \cdot v, \ v = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \\
S_\triangle &= \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \\
S_\triangle &= r^2 \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}}_{|\sin(\frac{\pi}{n})|} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \\
S_\triangle &= r^2 \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Jelikož počítáme obsah útvaru, který je vždy nezáporný, nemusíme brát v potaz absolutní hodnotu u $\sin(\frac{\pi}{n})$. Dále víme, že $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$. Díky platnosti tohoto vztahu dostaneme, že

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Pokud chceme určit obsah celého n-úhelníku, musíme obsah trojúhelníku vynásobit jejich počtem.

Dostáváme tedy, že hledaný obsah je roven

$$S = n \cdot S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot n.$$

Zkoumejme nyní, jak se bude tento obsah chovat v případě, že $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot n \\
\lim_{n\to\infty} S &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot n \\
\lim_{n\to\infty} S &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot n \cdot \frac{2\pi}{2\pi} \\
\lim_{n\to\infty} S &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \\
\lim_{n\to\infty} S &= \pi \cdot r^2
\end{aligned}$$

Uvažujme nyní stejný n-úhelník, ale v tomto případě zkoumejme, jak se bude chovat obvod tohoto útvaru. Obvod vzniklého n-úhelníka se skládá z n úseček o délce a. Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_3$ platí

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{a}{2r} \Rightarrow a = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Chceme-li spočítat limitní obvod tohoto útvaru, musíme určit následující limitu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n &= \lim_{n\to\infty} 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n \cdot \frac{\pi}{\pi}, \\
\lim_{n\to\infty} 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n &= 2\pi r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}, \\
\lim_{n\to\infty} 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n &= 2\pi r.
\end{aligned}$$

[11] Příklad: Jako další příklad posloupností v geometrii uvedeme spirálu. Vezměme úsečku $|AB| \in \mathbb{E}^2$. Nad touto úsečkou sestrojme půlkružnici k_0. Dále nalezněme střed $S_{AB} = A_1$ a sestrojme půlkružnici nad průměrem A_1B. Dále najděme střed $S_{A_1B} = A_2$ a celý postup opakujme stále dál. Je-li poloměr původní kružnice $r_0 \in \mathbb{R}^+$ pak poloměr druhé kružnice je $r_1 = \frac{r_0}{2}$, $r_2 = \frac{r_1}{2} = \frac{r_0}{4}, \ldots, r_k = \frac{r_0}{2^k}, \ldots$. Příslušné obvody jednotlivých půlkružnic jsou potom podle vztahu pro obvod rovny $O_0 = \frac{2\pi r_0}{2} = \pi r_0 \Rightarrow O_k = \pi r_k = \pi \frac{r_0}{2^k}$. Je vidět, že posloupnost obvodů O_n je klesající posloupnost s limitou $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = 0$. Pokud bychom chtěli určit celkovou délku spirály, která vznikne z jednotlivých půlkružnic, dostaneme:

$$O = \sum_{n=0}^{\infty} O_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi r_0}{2^n} = \pi r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Dostali jsme tedy součet geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1/2$, který je podle 2.6 roven jedné. Zjistili jsme tedy, že číselná řada reprezentující součet délek jednotlivých oblouků

[11]Využili jsme faktu, že $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$, kde $y = \frac{\pi}{n}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} = 0$

je konvergentní a má součet $O = 2\pi r_0,\ r_0 \in \mathbb{R}^+$.

Uvažme nyní další příklad: Mějme rovnoramenný trojúhelník $ABC,\ |AC| = |BC| = b \in \mathbb{R}^+,\ |AB| = a \in \mathbb{R}^+ \wedge b > a/2$. Zkoumejme nyní co se bude dít s těžištěm trojúhelníku, pokud pro jeho strany bude platit: $a_n = \frac{a}{n},\ b_n = b$.

Pro popis situace se hodí zavést body trojúhelníku do kartézské soustavy. Můžeme bez újmy na obecnosti přiřadit souřadnice následujícím způsobem:

$A = [-\dfrac{a}{2}, 0],\ B = [\dfrac{a}{2}, 0],\ C = [0, b]$. Pro příslušné $n \in \mathbb{N}$ pak bude platit, že $A_n = [-\frac{a}{2n}, 0], B_n = [\frac{a}{2n}, 0], C_n = [0, b]$.Z analytického vyjádření těžiště trojúhelníku zadaného třemi body plyne, že $T_n = \dfrac{A_n + B_n + C_n}{3}$. Pro x-ovou a y-ovou souřadnici těžiště tedy platí

$$T_n(x) = \frac{-\frac{a}{2n} + \frac{a}{2n} + 0}{3} = 0,$$
$$T_n(y) = \frac{0 + 0 + b}{3} = \frac{b}{3}.$$

Platí tedy, že $\lim_{n\to\infty} T_n = [\lim_{n\to\infty} T_n(x), \lim_{n\to\infty} T_n(y)] = [0, b/3]$.

V tomto případě se ukazuje, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ se těžiště trojúhelníka nezmění.

Uvažme však nyní druhou stránku problému: Jestliže $A_n = [-\frac{a}{2n}, 0], B_n = [\frac{a}{2n}, 0]$ pak vzdálenost bodů $|A_nB_n|$ bude pro pevné n rovna $\frac{a}{n}$. Z toho plyne, že $\lim |A_nB_n| = 0$ a můžeme říci, že pro $n \to \infty$ je $A \to B$ resp. $B \to A$. V takovém případě se tedy z trojúhelníku stává úsečka CS_{AB}, která má však těžiště $T = \dfrac{C + S_{AB}}{2} = [0, b/2]$.

Dostali jsme se tedy do problému, jelikož $b \neq 0$ je nemožné aby $\frac{b}{2} = \frac{b}{3}$. Tento problém demonstruje, že ne ve všech případech nám nezáleží na pořadí limit. Jinými slovy v našem případě:

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\Delta ABC) \neq T(\lim_{n\to\infty} \Delta A_nB_nC_n).$$

Příklad: Uvažme úsečku $|AB|$ délky $a \in \mathbb{R}^+$. Tuto úsečku rozdělme na třetiny a nad středním dílem sestrojme ramena rovnostranného trojúhelníka. Celý postup opakujme. (Viz. obrázek) Tímto postupem dostaneme jednu stranu *Kochovy vločky.* Vezmeme-li obvod této křivky v jednotlivých krocích jako členy číselné posloupnosti (viz. obrázek 2.3), zjistíme, že jde o rostoucí posloupnost, přesněji o geometrickou posloupnost s koeficientem $q = \frac{4}{3}$, která je jistě rostoucí. Budeme- li zkoumat limitu této posloupnosti snadno se přesvědčíme, že $\lim_{n\to\infty} (\frac{4}{3})^n \cdot a = +\infty$. Tento fakt ukazuje, že Kochova křivka je případem křivky, která má nekonečný obvod.

Zkoumejme nyní obsah tohoto útvaru. V prvním kroku jde o obsah rovnostranného trojúhelníku o straně a. Ve druhém se k tomuto obsahu přičtou tři rovnostranné trojúhelníky o straně

$\frac{a}{3}$. V dalším kroku budeme přičítat 12 trojúhelníků o straně $\frac{a}{9}$. Tímto způsobem budeme pokračovat stále dál. Víme, že pro libovolný rovnostranný trojúhelník platí, že $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Pro celkový obsah tohoto útvaru platí, že

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n,$$

kde S_1 je obsah původního trojúhelníku a S_k je obsah trojúhelníků vzniklých při $k-$tém kroku. Nyní tento obsah určíme:

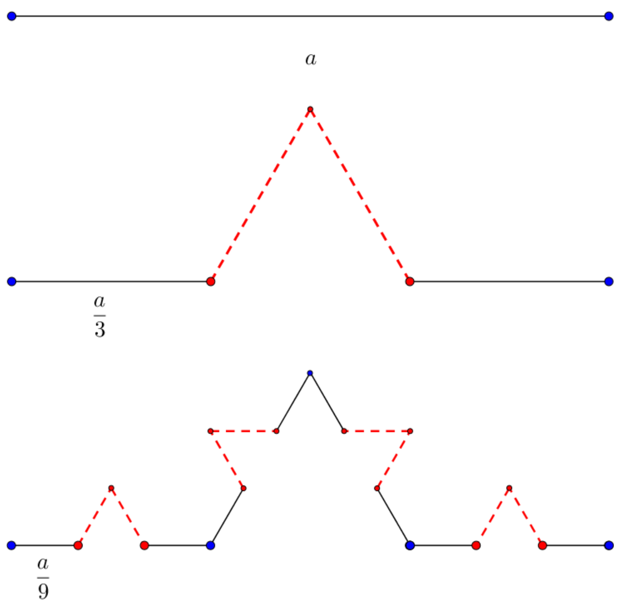
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{36} + 12 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{324} + \ldots = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \ldots\right).$$

Výraz v závorce je součtem geometrické řady s kvocientem $q = \frac{4}{9}$, který již podle (2.6) umíme určit. Můžeme tedy napsat, že

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{a^2 \cdot 2\sqrt{3}}{5}.$$

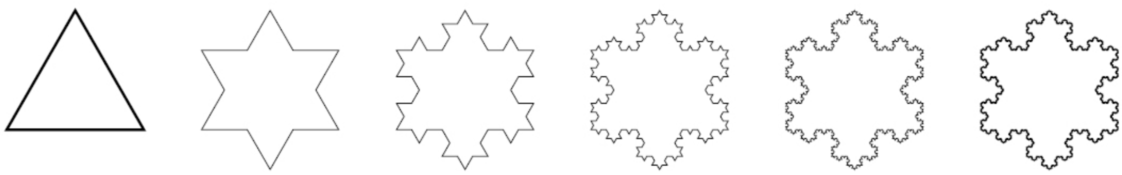
Tímto jsme ukázali, že *Kochova vločka* je geometrický útvar, který má konečný obsah, ale nekonečný obvod. [12]

[12] Zdroj obrázku 2.3: http://www.cosmicriver.net/blog/the-koch-snowflake (dne 3.7.2017)



$$O_1 = a$$
$$O_2 = \frac{4}{3}\,a$$
$$O_3 = \frac{16}{9}\,a$$
$$\vdots$$
$$O_k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} a$$

Obrázek 2.2: Grafické znázornění změn strany Kochovy vločky



Obrázek 2.3: Grafické znázornění Kochovy vločky

Kapitola 3

Nečíselné posloupnosti

Doposud jsme se zabývali posloupnostmi, které zobrazovali z množiny $\mathbb{N}$ do číselné množiny $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. V této kapitole se budeme věnovat posloupnostem, které zobrazují do jiných než číselných množin.

3.1 Posloupnosti bodů v $\mathbb{E}^r$

Doposud jsme se zabývali posloupnostmi, které zobrazovali množinu $\mathbb{N}$ nebo nějakou její podmnožinu do množiny $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Obecně se tyto posloupnosti označují jako číselné posloupnosti. V této části textu se budeme zabývat tipem posloupností, které zobrazují množinu $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{E}^r$.[1] Pod označením $\mathbb{E}^r$ rozumíme množinu všech uspořádaných r-tic

$$x \in \mathbb{E}^r \Rightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_r);\ \forall i \in \widehat{r} : x_i \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

na níž je definována **vzdálenost** ρ. Dvojice $\{\mathbb{E}^r, \rho\}$ se nazývá **metrický prostor**.

$$\rho(x, y) := \|x - y\|, \tag{3.2}$$

kde $\|x - y\|$ je *Eukleidovská norma.*

Posloupnost bodů v $\mathbb{E}^r$ označujeme $x^{(n)}$. Pod tímto označením rozumíme

$$x^{(n)} = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)), \tag{3.3}$$

kde $x_i(n)$ je reálná číselná posloupnost.

Posloupnost $x^{(n)}$ je tedy zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^r$.

[1] r-rozměrný Eukleidovský prostor.

Příklad: Nechť $r = 2$, pak příkladem posloupnosti bodů v $\mathbb{E}^2$ může být např

$$x^{(n)} = (n - 2, n + 2).$$

Členy této posloupnosti jsou tedy uspořádané dvojice.

$$x^{(1)} = (-1, 3),\ x^{(2)} = (0, 4),\ x^{(3)} = (1, 5), \ldots,\ x^{(k)} = (k - 2, k + 2), \ldots$$

Poznámka: U posloupnosti bodů nemá smysl zavádět pojmy rostoucí, klesající posloupnost, jelikož množina r-tic není uspořádaná, podobně jako množina komplexních čísel.

Definice 39 (Okolí bodu v $\mathbb{E}^r$)**.** Nechť $x^{(0)} \in \mathbb{R}^r$. Okolím bodu $x^{(0)}$ o poloměru ε rozumíme množinu

$$U_\varepsilon(x^{(0)}) = \{x \in \mathbb{E}^r | \rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon\}$$

Definice 40 (Limita posloupnosti bodů)**.** Nechť $x^{(n)}$ je posloupnost bodů z $\mathbb{E}^r$. Řekneme, že posloupnost $x^{(n)}$ má limitu $x^{(0)} \in \mathbb{E}^r$ pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0(\varepsilon) : \rho(x^{(n)}, x^{(0)}) < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Pokud má tedy bodová posloupnost vlastní limitu, pak pro každé kladné ε existuje index $n_0(\varepsilon)$ takový, že pro všechny indexy větší než $n_0(\varepsilon)$ je vzdálenost následujících členů (bodů) posloupnosti od limitního $x^{(0)}$ menší než ε.
I v tomto případě lze definici limity popsat i pomocí okolí bodu:

Definice 41 (Vlastní limita v $\mathbb{E}^r$)**.** Řekneme, že $x^{(n)}$ má vlastní limitu $x^{(0)} \in \mathbb{R}^r$ pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0(\varepsilon) : x^{(n)} \in U_\varepsilon(x^{(0)}).$$

Definice 42 (Nevlastní limita v $\mathbb{E}^r$)**.** Nechť $x^{(n)} \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^r$. Řekneme, že $x^{(n)}$ má nevlastní limitu $+\infty$ (resp. $x^{(n)}$ diverguje k ∞), pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n > n_0(\varepsilon) : \rho(x^{(n)}, x') > \varepsilon,$$

kde x' je ve všech složkách konstantní nulová posloupnost.

Poznámka: U posloupnosti bodů nerozlišujeme nevlastní limity na $\pm\infty$. Pokud zjistíme, že limita posloupnosti $x^{(n)}$ je nevlastní, řekneme, že posloupnost diverguje k ∞.

Věta 3.1.1. Nechť $x^{(n)} \in \mathbb{N} \to \mathbb{E}^r$. Tato posloupnost má vlastní limitu právě tehdy, když $\forall i \in \widehat{r} : x_i(n) \to L_i \in \mathbb{R}$. Jinými slovy pokud má mít posloupnost bodů vlastní limitu, tj. konverguje k nějakému konečnému bodu, pak všechny složky posloupnosti $x^{(n)}$ jsou konvergentní číselné posloupnosti.

Poznámka: Jako speciální případ posloupnosti bodů v metrickém prostoru můžeme brát komplexní posloupnost jedné proměnné. Stačí uvážit že $x_1(n) = \mathrm{Re}(a_n)$ a $x_2(n) = \mathrm{Im}(a_n)$.

3.2 Posloupnosti matic

V této části se budeme zabývat posloupnostmi matic, a jejich determinanty[2].

Poznámka: Jelikož budeme pracovat s maticemi, musíme si dát pozor na to, kde se v danou chvíli pohybujeme. Matice jsou totiž vždy tvořeny nad *číselným tělesem* T, pro které platí, že $T \setminus \{0\}$ je *Abelova grupa*. Nemůžeme tedy připustit výskyt $\pm\infty$, protože není definováno $\infty - \infty$.

Definice 43. Nechť T je těleso a $\mathbb{A}$ je matice tipu $m \times n$ nad tělesem T. Nechť pro všechna $i \in \widehat{m}$ a $j \in \widehat{n}$ je a_{ij} reálná číselná posloupnost, tj. $a_{ij}(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Posloupností matic budeme tedy rozumět následující obdélníkové schéma:

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & \dots & a_{1n}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & \dots & a_{2n}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(n) & a_{m2}(n) & \dots & a_{mn}(n) \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Pro názornost v příkladech se budeme zabývat převážně maticemi tipu 2×2. Příklad:

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} n & 2n \\ -n & n+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

Určíme-li z každého členu této posloupnosti determinant příslušné matice, získáme *číselnou posloupnost*. V tomto případě: $\det \mathbb{A}_n = n \cdot (n+1) - (-n \cdot 2n) = 3n^2 + n$. Je vidět, že $\lim_{n\to\infty}(\det \mathbb{A}_n) = +\infty$. Pokud, každou posloupnost v matici $\mathbb{A}_n$ nahradíme její limitou,

[2] [1] část 14

získáme „matici“[3]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} \infty & \infty \\ -\infty & \infty \end{pmatrix},$$

jejíž determinant je skutečně roven $+\infty$. V případě, že bychom za $a_{21}(n)$ zvolili identickou posloupnost, dostali bychom se do následující situace:

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} n & 2n \\ n & n+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}_n) = n^2 + n - 2n^2 = -n^2 + n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\det \mathbb{A}_n) = -\infty.$$

Pokud bychom však hledali determinant limitní matice, dostali bychom

$$\det\left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{A}_n\right) = \begin{vmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{vmatrix}.$$

Tento determinant však nelze určit. Nabízí se tedy otázka, v jakém případě lze zaměnit pořadí determinantu a limity.

Věta 3.2.1. Nechť $(\mathbb{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost čtvercových matic řádu m podle definice 43. Pokud platí, že $\forall i, j \in \widehat{m} : \lim_{n\to\infty} a_{ij}(n) \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n\to\infty}(\det \mathbb{A}_n) = \det\left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{A}_n\right).$$

Důkaz. Pokud je splněn předpoklad, že všechny limity posloupností v matici $\mathbb{A}_n$ jsou reálná čísla, můžeme pomocí definice rozepsat limitu determinantu:

$$\lim_{n\to\infty}(\det \mathbb{A}_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(\pi)(\mathbb{A}_{i,\pi(i)})_n\right) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(\pi)\left(\lim_{n\to\infty}(\mathbb{A}_{i,\pi(i)})_n\right) = \det\left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{A}_n\right).$$

Jelikož je m konečné, přirozené číslo a všechny limity posloupností z matice jsou vlastní, stačí použít větu o součtu resp. součinu limit posloupností. Tím je věta dokázána. □

3.2.1 Invertibilnost posloupností matic

Jak víme, čtvercová matice řádu m je invertibilní (tj. existuje k ní matice inverzní), právě tehdy, když je její determinant nenulový. Pro tuto matici platí, že: $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \cdot (\operatorname{adj} \mathbb{A})^T$. Můžeme tedy utvořit matici inverzní k libovolné čtvercové matici, o níž víme s jistotou, že má nenulový determinant.

Příklad: Uvažme posloupnost matic

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} n & 1 \\ n & 1 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}.$$

[3] Nejedná se o matici, jelikož prvky $\pm\infty$ nejsou z tělesa.

Jelikož je $\det(\mathbb{A}_n) = \frac{1}{n}$, je tento determinant nenulový pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a tedy pro všechna přirozená čísla je inverzní maticí k matici $\mathbb{A}_n$ matice $\mathbb{A}_n^{-1}$, která má tvar:

$$\mathbb{A}_n^{-1} = n \cdot \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n^2} & -1 \\ -n & n \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom ale vzali v úvahu limitní matici tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{A}_n = \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \infty & 1 \\ \infty & 1 \end{pmatrix},$$

zjistíme, že nelze daný determinant určit (dostali bychom výraz $\infty - \infty$). Tato posloupnost matic tedy nemá limitu.

Z tohoto faktu plyne, že invertibilnost členů posloupnosti matic **není** uzavřená na limitu.

Dalším příkladem může být následující posloupnost matic:

$$\mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} \cos(n) & -\sin(n) \\ \sin(n) & \cos(n) \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\det \mathbb{A}_n) = \lim_{n\to\infty} (\cos^2(n) + \sin^2(n)) = \lim_{n\to\infty} (1) = 1$$

Vidíme, že limita determinantu každého členu posloupnosti matic je roven jedné, pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Na druhou stranu víme, že $\lim_{n\to\infty} \cos(n)$ ani $\lim_{n\to\infty} \sin(n)$ neexistují. Není tedy možné vyslovit všeobecně platnou formuli.

Věta 3.2.2. Nechť $(\mathbb{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost matic a nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\det \mathbb{A}_n \in \mathbb{R}$. Vezměme nyní číselnou posloupnost $(b_k)_{k=1}^{\infty} := (\det(\mathbb{A}_n^k))_{k=1}^{\infty}$. Pak platí, že pokud je $\det \mathbb{A}_n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, pak posloupnost $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ konverguje k nule.

Důkaz. Pro determinant obecné čtvercové matice $\mathbb{F}$ platí, že $(\det(\mathbb{F}))^k = \det(\mathbb{F}^k)$, kde $k \in \mathbb{N}$. Dále víme, že pokud je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ determinant $\mathbb{A}_n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, je každý člen posloupnosti $\mathbb{A}_n$ *regulární* maticí.

Budeme-li však danou posloupnost umocňovat a z výsledné matice určíme determinant, získáme *geometrickou* posloupnost $b_k = (\det(\mathbb{A}_n^k))_{k=1}^{\infty}$, kde $\det(\mathbb{A}_n)$ je koeficient geometrické posloupnosti. Z předchozí části víme, že $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Leftrightarrow q \in (-1, 1)$. Tuto vlastnost však koeficient $\det(\mathbb{A}_n)$ splňuje. Platí tedy, že pokud je pro všechna přirozená čísla n determinant matice $\mathbb{A}_n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ je $\lim_{k\to\infty} \det(\mathbb{A}_n^k) = 0$ a daná posloupnost regulárních matic konverguje k singulární. □

Příklad: Mějme matici

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ \beta & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ a α je pevně zvolené. Určete, pro která β bude posloupnost $(\mathbb{A}^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergovat k singulární matici. Řešení: Určeme determinant matice: $\det \mathbb{A} = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$. Podle předchozí věty musí platit, že $\det \mathbb{A} \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

- $\det \mathbb{A} \neq 0 \Rightarrow \beta \neq \alpha$.
- $\det \mathbb{A} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{\beta}{\alpha} < 1$, musí tedy platit, že $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$. To je však splněno pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.
- $\det \mathbb{A} > -1 \Rightarrow -\frac{\beta}{\alpha} > -2$. Tuto nerovnost můžeme upravit na $\beta < 2\alpha$.
- Pokud je α pevně zvolené, kladné reálné číslo, pak pro všechna $\beta \in (0, \alpha) \cup (\alpha, 2\alpha)$ bude posloupnost $(\mathbb{A}^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergovat k singulární matici.

Poznámka: Posloupnost $(\mathbb{A}^n)_{n=1}^{\infty}$ můžeme chápat jako speciální případ geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \mathbb{A}$.

Příklad: Mějme matici $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Určeme pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ bude posloupnost $(\mathbb{A}^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergovat k singulární.

Řešení: Snadno určíme determinant matice: $\det \mathbb{A} = 1 - \alpha^2$. Můžeme tedy říci, že $(\mathbb{A}^n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k singulární matici, pokud $\alpha \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3.2.2 Diference posloupnosti matic

Stejně jako u číselných posloupností, tak i u posloupností matic můžeme pracovat s diferencí. Budeme ji definovat standardně: $\Delta_n(\mathbb{A}_n) := \mathbb{A}_{n+1} - \mathbb{A}_n$. Jelikož jsou všechny prvky matice $\mathbb{A}_n$ číselné posloupnosti a členy matic se sčítají resp. odečítají *po složkách*, můžeme vyslovit následující větu:

Věta 3.2.3. Nechť $(\mathbb{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost matic, $(\mathbb{A}_n)_{ij} = a_{ij}(n)$, pak platí

$$(\Delta_n(\mathbb{A}_n))_{ij} = \Delta_n((\mathbb{A}_n)_{ij}).$$

Důkaz. Jelikož je $\Delta_n(\mathbb{A}_n) = \mathbb{A}_{n+1} - \mathbb{A}_n$, pak platí, že

$$\Delta_n(\mathbb{A}_n) = \begin{pmatrix} a_{11}(n+1) & \dots & a_{1m}(n+1) \\ a_{21}(n+1) & \dots & a_{2m}(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(n+1) & \dots & a_{nm}(n+1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}(n) & \dots & a_{1m}(n) \\ a_{21}(n) & \dots & a_{2m}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(n) & \dots & a_{nm}(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(n+1) - a_{11}(n) & \dots & a_{1m}(n+1) - a_{1m}(n) \\ a_{21}(n+1) - a_{21}(n) & \dots & a_{2m}(n+1) - a_{2m}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(n+1) - a_{n1}(n) & \dots & a_{nm}(n+1) - a_{nm}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_n(a_{11}) & \dots & \Delta_n(a_{1m}) \\ \Delta_n(a_{21}) & \dots & \Delta_n(a_{2m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_n(a_{n1}) & \dots & \Delta_n(a_{nm}) \end{pmatrix}$$

$\square$

Kapitola 4

Analogie s funkcemi

4.1 Konvexní a konkávní posloupnost

Poznámka: Tato část se týká pouze posloupností reálných čísel.

Podobně jako se u funkcí jedné reálné proměnné zkoumají lokální, globální extrémy, zkoumá se i *konvexnost* resp. *konkávnost* funkce. Zde se pokusíme tyto dva pojmy zavést i pro reálné číselné posloupnosti.

Definice 44. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je v bodě $n_0 \in \mathbb{N}$ **konvexní**, pokud $\forall \{n_0 - 1, n_0, n_0 + 1\} \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n_0} \leq \frac{a_{n_0+1} + a_{n_0-1}}{2} \tag{4.1}$$

Definice 45. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je v bodě n_0 **konkávní**, pokud $\forall \{n_0 - 1, n_0, n_0 + 1\} \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n_0} \geq \frac{a_{n_0+1} + a_{n_0-1}}{2} \tag{4.2}$$

V případě, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje vlastnost (4.1) resp. (4.2) pro všechna $n \in I \subset \mathbb{N}$, pak řekneme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvexní resp konkávní na množině I.

Definice 46. V případě, že ve vztazích (4.1), (4.2) platí **ostré** nerovnosti, pak hovoříme o **ryze konvexní** resp. **ryze konkávní** posloupnosti.

Věta 4.1.1. (Druhá diference a konvexnost/ konkávnost)

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Tato posloupnost je na množině $I \subset \mathbb{N}$ ryze konvexní resp. ryze konkávní, pokud $\forall n \in I$ je

$$\Delta_n^{(2)}(a_n) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow a_n \text{ konvexní} \\ < 0 & \Rightarrow a_n \text{ konkávní} \end{cases} .$$

Důkaz. Pokud výraz (4.1) resp. (4.2) vynásobíme dvěma a převedeme všechny členy na pravou stranu nerovnice, dostaneme

$$a_{n_0+1} + a_{n_0-1} - 2a_{n_0} \lesseqgtr 0,$$

neboli

$$\Delta_n^{(2)} \lesseqgtr 0.$$

□

Poznámka: V případě, že bychom do výše uvedeného vztahu vzali v potaz neostré nerovnosti, hovořili bychom o konvexní resp. konkávní posloupnosti.

Příklad: Ověřte, že posloupnost $a_n = n^2 - 4n$ je ryze konvexní.

Řešení: Víme, že platí

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= (n-1)^2 - 4(n-1) = n^2 - 6n + 5, \\ a_n &= n^2 - 4n, \\ a_{n+1} &= n^2 - 2n - 3. \end{aligned}$$

$\Delta_n^{(2)}(a_n)$ má tedy následující tvar:

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(2)}(a_n) &= n^2 - 2n - 3 + n^2 - 6n + 5 - 2(n^2 - 4n), \\ \Delta_n^{(2)}(a_n) &= 2n^2 - 8n + 2 - 2n^2 + 8n, \\ \Delta_n^{(2)}(a_n) &= 2 > 0. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\Delta_n^{(2)}(a_n) > 0$ a daná posloupnost je tedy na celém $\mathbb{N}$ ryze konvexní.

Věta 4.1.2. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost, $I \subset \mathbb{N}$. Nechť $\forall n \in I$ je $\Delta_n^{(2)} = 0$, pak je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ na I buď konstantní, nebo lineární posloupností.

Důkaz. ◦ Budiž $a_n = K \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in I$. Pak je jistě $a_{n_0+1} = a_{n_0} = a_{n_0-1} = K$. Tím pádem je $a_{n_0+1} + a_{n_0-1} - 2a_{n_0} = K + K - 2K = 0 = \Delta_n^{(2)}$.

- Nechť $a_n = An + B,\ A, B \in \mathbb{R}$. Potom je $a_{n_0-1} = An + B - A$, $a_{n_0} = An + B$, $a_{n_0+1} = An + B + A$.

  $\Delta_n^{(2)} = An + B - A + An + B + A - 2(An + B) = 2An + 2B - 2(An + B) = 0.$

□

Příklad: Mějme posloupnost $a_n = (-1)^n$. Pro tuto posloupnost platí, že

$$a_n = \begin{cases} -1 \text{ pro } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ +1 \text{ pro } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Podle definice konvexní a konkávní posloupnosti je tedy daná posloupnost pro všechny liché členy (vyjma členu a_1) konkávní a pro všechny sudé konvexní. Této vlastnosti však nabývá pouze v jednotlivých bodech. Můžeme tedy říci, že posloupnost je bodově konvexní resp. konkávní, ale neexistuje žádná množina $I \subset \mathbb{N}$ taková, že by se tato vlastnost zachovala pro všechna $n \in I$.

Věta 4.1.3. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Pak platí, že je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvexní, pak $(-a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konkávní resp. je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konkávní, je $(-a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvexní.

Důkaz. Provedeme pro první případ (druhý je analogický).
Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je na $\mathbb{N}$ ryze konvexní, pak platí, že

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} > a_n.$$

Vezmeme-li nyní posloupnost $(-a_n)_{n=1}^{\infty}$, bude nerovnost vypadat takto

$$\frac{-a_{n+1} + (-a_{n-1})}{2} > -a_n \ / \cdot (-1)$$
$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} < a_n \Rightarrow (-a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je konkávní.}$$

Analogicky pro přechod konkávní na konvexní. □

Věta 4.1.4. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí resp. klesající reálná posloupnost. Nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$ platí (4.1) resp. (4.2). Pak platí, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ resp. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Důkaz. Provedeme pro případ konvexní posloupnosti. Pro konkávní případ je postup analogický.

Jelikož je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost, pak musí existovat $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Dále víme, že je- li tato posloupnost konvexní, pak pro skoro všechna $n > n_0$ je $a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} > 0$. Nyní tuto nerovnost upravíme

$$a_{n+2} > 2a_{n+1} - a_n,$$
$$a_{n+2} > a_{n+1} + \Delta_n(a_n).$$

Z faktu, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí plyne, že $\Delta_n(a_n) > 0$ a z předpokladu konvexnosti plyne, že $(\Delta_n(a_n))_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost a má tedy limitu. Díky zachování limity při posunutí víme, že má-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu L pak má stejnou limitu i posloupnost $(a_{n+k})_{n=1}^{\infty},\ k \in \mathbb{Z}$. Podle věty 2.2.9 tedy musí platit, že

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+2} \geq \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + \Delta_n(a_n)).$$

Označme $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ a $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(a_n) = L'$. Dostaneme tedy rovnost

$$L \geq L + L'.$$

Pokud by bylo L reálné číslo, dostali bychom, že $0 \geq L'$, kde $L' > 0$, protože $(\Delta_n(a_n))_{n=1}^{\infty}$ je kladná a rostoucí[1]. Tato možnost tedy nastat nemůže. Protože je podle předpokladu posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a zamítli jsme možnost že její limita je vlastní, zbývá pouze možnost, že $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Tím je věta dokázána. □

Podmínky, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a konvexní resp. klesající a konkávní jsou velmi podstatné. Ukažme na konkrétním příkladu, že posloupnost, která je rostoucí a konkávní může mít vlastní i nevlastní limitu.

Příklad: Vezměme dvě posloupnosti $a_n = -\frac{1}{n}$ a $b_n = \sqrt{n}$. Lze snadno určit, že $\Delta_n(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+n} > 0$ a $\Delta_n(\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$. Obě posloupnosti jsou tedy rostoucí. Pokud bychom zkoumali druhé diference těchto posloupností, řešili bychom postupně dvě nerovnice:

$$-\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} < 0,$$
$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} < 0.$$

První nerovnici bychom postupně upravili na tvar $n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$ resp. $0 < 1$, která je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

[1] Je-li libovolná posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ kladná a zároveň rostoucí, nemůže nastat, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Druhou nerovnost upravíme podrobněji:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+2}+\sqrt{n} &< 2\sqrt{n+1}/^2,\\
2n+2\sqrt{n^2+2n}+2 &< 4n+4/:2,\\
\sqrt{n^2+2n}+n+1 &< 2n+2,\\
\sqrt{n^2+2n} &< n+1/^2,\\
n^2+2n < n^2+2n+1 &\Rightarrow 0<1.
\end{aligned}$$

Druhá nerovnost je také splněna pro všechna přirozená n. Nyní tedy s jistotou víme, že obě posloupnosti jsou rostoucí a konkávní.

Snadno určíme limity daných posloupností:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Ukázali jsme tedy, že pouze na základě faktu že posloupnost je rostoucí a konvexní (případně klesající a konkávní), nelze nic říci o limitě této posloupnosti.

4.2 Diferenční rovnice

Pod pojmem **diferenční rovnice** rozumíme rovnici, ve které je hledaným výstupem nějaká číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, podobně jako v případě diferenciální rovnice je výstupem funkce $f(x)$.

Definice 47. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}, p_k \neq 0$, a nechť je dále $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel. Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty budeme rozumět rovnici

$$a_{n+k} + p_1 \cdot a_{n+k-1} + \ldots + p_k \cdot a_n = b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

kde neznámou je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (4.3) rozumíme každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující (4.3) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Chceme-li, aby řešení rovnice (4.3) splňovalo podmínky

$$a(1) = a_1, \; \ldots, a(k) = a_k, \tag{4.4}$$

kde čísla $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ jsou předem dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze**.

Pokud $\forall n \in \mathbb{N}: \; b_n = 0$, pak rovnice (4.3) má tvar

$$a_{n+k} + p_1 \cdot a_{n+k-1} + \ldots + p_k \cdot a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

Tato rovnice se nazývá **homogenní**.
Lineární diferenční rovnice jsou speciálním případem lineárních rovnic (lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic). Jejich levou stranu lze totiž interpretovat jako hodnotu lineárního zobrazení. Konkrétně se jedná o lineární zobrazení prostoru všech posloupností $\mathfrak{s}$ do $\mathfrak{s}$ definované předpisem

$$L((a_n)_{n=1}^{\infty}) = (a_{n+k} + p_1 \cdot a_{n+k-1} + \ldots + p_k \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}, \tag{4.6}$$

jehož linearitu není těžké ověřit.

Věta 4.2.1. Počáteční úloha (4.3),(4.4) má právě jedno řešení.

Důkaz viz [2] str. 362.

Věta 4.2.2. Množina řešení rovnice (4.5) tvoří vektorový prostor dimenze k prostoru $\mathfrak{s}$.

Důkaz viz [2] str. 362-363.

Následující pojem hraje klíčovou roli při hledání řešení diferenční rovnice.

Definice 48 (Charakteristický polynom)**.** Charakteristickým polynomem rovnice (4.5) rozumíme polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k, \tag{4.7}$$

kde λ je reálná, případně komplexní proměnná.

Věta 4.2.3. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu (4.7) s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$. Nechť $\xi_1, \ldots, \xi_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu (4.7) s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$, přičemž
$\xi_j = \mu_j(\cos\nu_j + i\sin\nu_j),\ \mu_j > 0, \nu_j \in \langle 0, 2\pi),\ j \in \widehat{l}$. Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení rovnice (4.5):

$$\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n\cos\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n\cos\nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n\cos\nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n\sin\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n\sin\nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n\sin\nu_1 n\}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\{\mu_l^n\cos\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n\cos\nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n\cos\nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n\sin\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n\sin\nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n\sin\nu_l n\}.
\end{array}$$

Důkaz resp. náznak důkazu viz [2] str. 364.

Poznámka: Bázi prostoru řešení rovnice (4.5) se říká **fundamentální systém řešení** rovnice (4.5).

Příklad: Nalezněte všechna řešení homogenní lineární diferenční rovnice

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = 0,$$

vyhovující podmínkám $a_0 = 2,\ a_1 = 4$.

Řešení: Charakteristický polynom dané rovnice je roven $\lambda^2 - 2\lambda - 8$ a má následující kořeny: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2$. Obecný tvar hledané posloupnosti je tedy $a_n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot (-2)^n$, kde

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li počáteční podmínky, získáme soustavu rovnic

$$C_1 + C_2 = 2$$
$$4C_1 - 2C_2 = 4.$$

Tato soustava má jediné řešení a sice $C_1 = \frac{4}{3},\ C_2 = \frac{2}{3}$. Hledaná posloupnost, splňující počáteční podmínku má tedy tvar

$$a_n = \frac{4}{3} \cdot 4^n + \frac{2}{3} \cdot (-2)^n.$$

Příklad: Určete předpis posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, splňující následující vlastnosti:

- $a_{n+2} = a_n$,
- $a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Řešení: Daná diferenční rovnice se dá přepsat na homogenní rovnici následovně:

$$y(n+2) - y(n) = 0.$$

a její charakteristický polynom má následující tvar: $\lambda^2 - 1 = 0$ (má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$). Hledaná posloupnost bude tedy ve tvaru $y(n) = C_1 + C_2 \cdot (-1)^n$. Pokud dosadíme počáteční podmínky dostaneme soustavu rovnic

$$C_1 - C_2 = \alpha$$
$$C_1 + C_2 = \beta,$$

která má řešení $C_1 = \dfrac{\alpha + \beta}{2},\ C_2 = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$. Hledaná posloupnost má tedy tvar

$$y(n) = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot (-1)^{n+1}$$

Následující věta popisuje tvar řešení všech rovnic (4.3).

Věta 4.2.4. Nechť posloupnosti $\{a_1(n), \ldots, a_k(n)\}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.5). Nechť posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ je řešením rovnice (4.3). Potom posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ řeší rovnici (4.3), právě když existují $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a_n = z_n + \sum_{i=1}^{k} c_i a_i(n)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Pokud posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ řeší rovnici (4.3), pak platí, že $L((a_n)_{n=1}^{\infty}) = (b_n)_{n=1}^{\infty}$. Pokud za a_n dosadíme, získáme

$$L(a_n) = L\left(z_n + \sum_{i=1}^{k} c_i a_i(n)\right).$$

Díky linearitě L můžeme tuto rovnost přepsat:

$$L(a_n) = L(z_n) + L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i a_i(n)\right).$$

Jelikož $\{a_1(n), \cdots, a_k(n)\}$ tvoří fundamentální systém, pak $L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i a_i(n)\right) = 0$. Dostáváme tedy rovnost, že $L(a_n) = L(z_n) = b_n$. Tím je věta dokázána. □

Řešení $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ z této věty se tradičně nazývá **partikulární** řešení. Následující věta říká, jak v některých případech toto partikulární řešení nalézt.

Věta 4.2.5. Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (4.3) splňuje pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \alpha^n (P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)), \tag{4.8}$$

kde $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (4.3) ve tvaru

$$z(n) = n^m \alpha^n (R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne vyššího než $\max\{\text{st } P,\ \text{st } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušného rovnici (4.5).

Důkaz viz [2] str. 366.

Příklad: Nalezněte řešení diferenční rovnice

$$a_{n+2} - a_n = n$$

Řešení: Pokusíme se danou úlohu vyřešit následujícím způsobem: Řekneme, že hledaná posloupnost je ve tvaru $a_n = An^2 + Bn + C,\ A, B, C \in \mathbb{R}$ (odhadneme tvar hledané posloupnosti). Tím pádem je

$a_{n+2} = A(n+2)^2 + B(n+2) + C = An^2 + n(4A + B) + 4A + 2B + C$. Pokud od tohoto výrazu odečteme $y(n)$ dostaneme

$$a_{n+2} - a_n = 4An + 4A + 2B.$$

Položme nyní pravou stranu výrazu rovnu pravé straně diferenční rovnice.

$$4An + 4A + 2B = n \Rightarrow 4A = 1 \ \wedge \ 4A + 2B = 0$$

$$4An = n \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$4A + 2B = 0$$

$$B = -2A$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

Partikulární řešení dané diferenční rovnice má tedy tvar

$$a_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Máme-li najít všechna řešení dané rovnice, musíme ještě určit řešení homogenní rovnice $a_{n+2} - a_n = 0$. Charakteristický polynom této rovnice je $\lambda^2 - 1 = 0$, a má tedy kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Obecné řešení dané rovnice je tedy $y(n) = C_1 + C_2 \cdot (-1)^n$. Danou rovnici tedy splňuje každá posloupnost tvaru

$$a_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \underbrace{C + C_1}_{C_1'} + C_2 \cdot (-1)^n, \ C_1', C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad: (Fibonacciho posloupnost) Určete předpis Fibonacciho posloupnosti.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \ a_1 = 1, \ a_2 = 1$$

Řešení: Danou rovnici upravíme na homogenní: $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.
Charakteristický polynom této rovnice má tvar $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, jehož kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Obecné řešení bude tedy ve tvaru

$$a_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Nyní budeme hledat řešení, vyhovující počátečním podmínkám $a_1 = 1, \ a_2 = 1$. Získáme tím soustavu rovnic

$$C_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$
$$C_1 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1,$$

která má řešení $C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \ C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Můžeme tedy napsat vyjádření Fibonacciho posloupnosti:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{4.9}$$

4.3 Posloupnosti dvou proměnných

Stejně jako pracujeme s funkcemi dvou proměnných, můžeme obdobně definovat i *číselnou posloupnost dvou proměnných* $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ která každé dvojici $[m_0, n_0] \in \mathbb{N}^2$ přiřadí číslo z $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$, podle toho o jakou posloupnost se jedná.

Poznámka: Stejně jako jsme u posloupností jedné proměnné mohli zúžit definiční obor $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}_k$ i zde můžeme v případě nutnosti omezit definiční obor posloupnosti dvou proměnných z množiny $\mathbb{N}^2$ na množinu $\mathbb{N}_{k,l} := \mathbb{N}_k \times \mathbb{N}_l$. U těchto posloupností se pokusíme, stejně jako v případě jedné proměnné, zkoumat *monotonii, limity, maxima, minima* atd.

Problém, který se u posloupností více proměnných ukazuje jako jeden ze zásadních je ten, že členu $[m_1, n_1] \in \mathbb{N}^2$ nelze jednoznačně přiřadit následník. Tento problém nám v případě posloupnosti jedné proměnné odpadá, neboť následník členu a_n je člen a_{n+1}.

Můžeme si pomoci tím, že si zadefinujeme *následník ve směru proměnné* tj. že jednu proměnnou budeme vnímat jako konstantu a druhé přiřadíme o jedna větší prvek.

Definice 49. Mějme posloupnost dvou proměnných $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ a $a_{m,n}$ je její člen. *Následníkem ve směru proměnné m* rozumíme člen $a_{m+1,n}$. *Následníkem ve směru proměnné n* rozumíme člen $a_{m,n+1}$ a *diagonálním následníkem* rozumíme člen $a_{m+1,n+1}$. (Pokud jsou příslušné členy definovány).

Příklad: Mějme bod $K \in \mathbb{N}^2 = [1,3]$ Následníkem ve směru proměnné m je $[2,3]$, ve směru proměnné n jde o $[1,4]$ a diagonální následník je $[2,4]$.

Definice 50. Mějme dvě rostoucí posloupnosti přirozených čísel $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ a $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$. *Vybraným směrem* posloupnosti $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ podle proměnné m nazveme posloupnost $(a_{\alpha_m,n})_{m,n=1}^{\infty}$, obdobně pro směr podle proměnné n by šlo o posloupnost $(a_{m,\beta_n})_{m,n=1}^{\infty}$.

Budeme-li zkoumat chování posloupnosti dvou proměnných z hlediska následníku ve směru, dostaneme se ke zkoumání vlastností posloupnosti *jedné proměnné*, přičemž druhá proměnná je chápána jako parametr z $\mathbb{N}$.

Tímto způsobem můžeme definovat posloupnost *rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající ve směru proměnné.*

Příklad: Mějme posloupnost dvou proměnných $a_{m,n} = m + n$.

- Zkoumejme nejdříve situaci, kdy n je pevně zvolené přirozené číslo a m je proměnná. Potom, je-li posloupnost $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ rostoucí ve směru proměnné m pak musí platit, že $a_{m+1,n} > a_{m,n}$. Jinými slovy musí platit nerovnost

  $$m + 1 + n > m + n.$$

  Po úpravě dostaneme, že $1 > 0$ a tato nerovnost jistě platí $\forall m \in \mathbb{N}$. Závěrem tedy můžeme říct, že posloupnost je rostoucí ve směru proměnné m.

- Obdobným postupem dokážeme, že daná posloupnost je rostoucí i ve směru proměnné n. Musí totiž platit, že $a_{m,n+1} > a_{m,n}$ neboli

  $$m + n + 1 > m + n \Rightarrow 1 > 0,$$

  což je stejná nerovnost jako v předchozím případě a daná posloupnost je tedy rostoucí i ve směru proměnné n.

Otázka, která se nyní nabízí je, jestliže z faktu, že daná posloupnost je rostoucí ve směru jak proměnné m tak n plyne, že je rostoucí ve všech *vybraných směrech*.
Tuto otázku můžeme zobecnit do následující věty:

Věta 4.3.1. Nechť má posloupnost dvou proměnných $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ stejnou monotonii podle proměnné m i n, pak každá posloupnost $(a_{\alpha_m,\beta_n})_{m,n=1}^{\infty}$ vybraná z $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ má stejnou monotonii.

Důkaz. (BÚNO $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je podle m i n rostoucí)
Víme, že $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ i $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou rostoucí posloupnosti. Pokud je $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ rostoucí podle proměnné m resp. n, pak musí platit, že $a_{\alpha_{m+1},\beta_n} > a_{\alpha_m,\beta_n}$ resp. $a_{\alpha_m,\beta_{n+1}} > a_{\alpha_m,\beta_n}$. Obecně se dá říci, že pokud je $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ rostoucí podle obou proměnných tak musí platit:

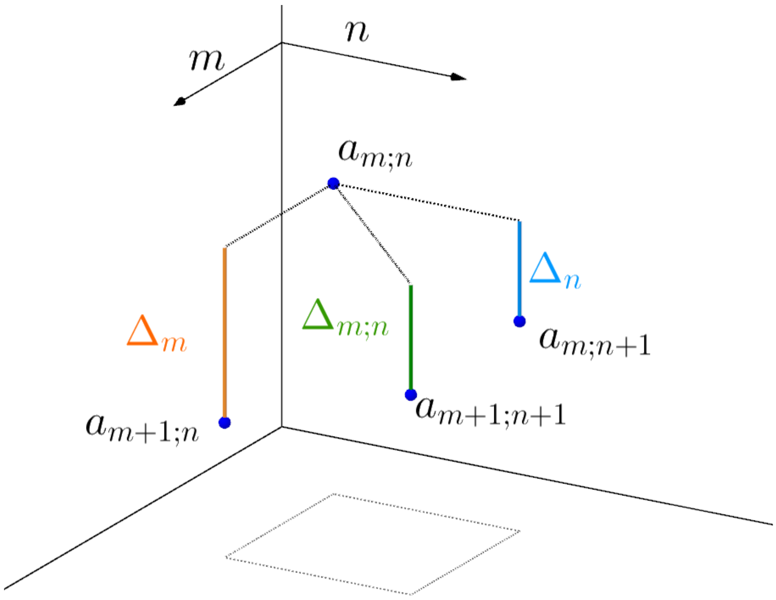
$$a_{\alpha_{m+1},\beta_{n+1}} > a_{\alpha_m,\beta_{n+1}}$$

$$a_{\alpha_{m+1},\beta_{n+1}} > a_{\alpha_{m+1},\beta_n}$$

$$a_{\alpha_{m+1},\beta_{n+1}} > a_{\alpha_m,\beta n}$$

pro každé $m, n \in \mathbb{N}$. □

Definice 51 (Diference ve směru proměnné)**.** Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je posloupnost dvou proměnných (m,n). Diferenci podle proměnné m budeme rozumět $a_{m+1,n} - a_{m,n}$ a budeme ji značit $\Delta_m(a_{m,n})$, diferenci podle n budeme analogicky rozumět $a_{m,n+1} - a_{m,n}$ a značit $\Delta_n(a_{m,n})$. Diagonální diferencí budeme rozumět výraz $a_{m+1,n+1} - a_{m,n}$ a budeme jej značit $\Delta_{m,n}(a_{m,n})$.



Obrázek 4.1: Grafický náhled diferencí podle proměnných.

Lemma 17 (Smíšená diference)**.** Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je posloupnost dvou proměnných. Pak platí, že

$$\Delta_m\left(\Delta_n(a_{m,n})\right) = \Delta_n\left(\Delta_m(a_{m,n})\right).$$

Důkaz.

$$\Delta_n(\Delta_m(a_{m,n})) = a_{m+1,n+1} - a_{m,n+1} - (a_{m+1,n} - a_{m,n}) = a_{m+1,n+1} + a_{m,n} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1}$$

$$\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = a_{m+1,n+1} - a_{m+1,n} - (a_{m,n+1} - a_{m,n}) = a_{m+1,n+1} + a_{m,n} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1}$$

□

Příklad: $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty} = \alpha m + \beta m \cdot n + \gamma n$. Zkoumejme diference podle jednotlivých proměnných: $\Delta_m(a_{m,n}) = \alpha(m+1) + \beta(m+1)n + \gamma n - \alpha m - \beta m \cdot n - \gamma n = \alpha + \beta n$
$\Delta_n(a_{m,n}) = \alpha m + \beta m(n+1) + \gamma(n+1) - \alpha m - \beta mn - \gamma n = \beta m + \gamma$

$\Delta_n(\Delta_m(a_{m,n})) = \alpha + \beta(n+1) - \alpha - \beta n = \beta$

$\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = \beta(m+1) + \gamma - \beta m - \gamma = \beta$ a tedy $\Delta_m(\Delta_n) = \Delta_n(\Delta_m)$

Pokud tedy platí, že $\Delta_m(\Delta_n) = \alpha \in \mathbb{R}$ pak $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ obsahuje člen $\alpha \cdot m \cdot n$

Lemma 18. Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je posloupnost dvou proměnných, pak platí, že

$$\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = \Delta_{m,n}(a_{m,n}) - \Delta_m(a_{m,n}) - \Delta_n(a_{m,n}).$$

Důkaz. Víme, že $\Delta_m = a_{m+1,n} - a_{m,n}$ a $\Delta_n = a_{m,n+1} - a_{m,n}$, pokud tyto výrazy sečteme, dostaneme: $\Delta_m + \Delta_n = a_{m+1,n} + a_{m,n+1} - 2a_{m,n}$.
Dále víme, že $\Delta_m(\Delta_n) = a_{m+1,n+1} + a_{m,n} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{m+1,n} + a_{m,n+1} = a_{m+1,n+1} + a_{m,n} - \Delta_m(\Delta_n)$. Dosadíme-li tento výraz do předchozího vztahu, dostaneme:

$$\Delta_m(a_{m,n}) + \Delta_n(a_{m,n}) = a_{m+1,n+1} + a_{m,n} - \Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) - 2a_{m,n} = \underbrace{a_{m+1,n+1} - a_{m,n}}_{\Delta_{m,n}(a_{m,n})} - \Delta_m(\Delta_n),$$

dostáváme tedy rovnost

$$\Delta_m(a_{m,n}) + \Delta_n(a_{m,n}) = \Delta_{m,n}(a_{m,n}) - \Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})),$$

resp.

$$\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = \Delta_{m,n}(a_{m,n}) - \Delta_m(a_{m,n}) - \Delta_n(a_{m,n}).$$

□

Věta 4.3.2 (Jednozančnost zadání posloupnosti)**.** Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je posloupnost dvou proměnných. Dále nechť známe všechny členy posloupností $a_{1,n}$ a $a_{m,1}$ a posloupnost dvou proměnných $\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n}))$, pak lze určit všechny členy posloupnosti $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ a tyto členy jsou jednoznačně určeny.

Důkaz. Využijeme rozpisu smíšené diference z lemmatu 17 a upravíme jej následovně:

$$a_{m+1,n+1} = \Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) - a_{m,n} + a_{m+1,n} + a_{m,n+1}.$$

Budeme postupovat *indukcí* přes obě proměnné. Jelikož známe všechny členy posloupností $a_{m,1}$ a $a_{1,n}$, známe tedy i člen $a_{1,1}$. První člen, který určíme je $a_{2,2}$, který podle předchozího vztahu musí být roven

$$a_{2,2} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,1})) - a_{1,1} + a_{2,1} + a_{1,2},$$

kde všechny členy na pravé straně rovnosti známe. Tím jsme určili člen $a_{2,2}$. Dále se pak musíme rozhodnout, jestli se budeme pohybovat ve směru proměnné m nebo n.

1. Pohybujme se ve směru proměnné n.

   Potřebujeme určit člen $a_{2,3}$, pro který podle předpokladu platí, že

$$a_{2,3} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,2})) - a_{1,2} + a_{2,2} + a_{1,3}.$$

   Zde opět známe všechny členy na pravé straně rovnosti. Tímto způsobem bychom určili hodnotu všech členů $a_{2,k}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a pro každý z těchto členů by platilo

$$a_{2,k} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,k-1})) - a_{1,k-1} + a_{2,k-1} + a_{1,k}.$$

2. Nyní se pohybujme ve směru proměnné m.

   Člen $a_{2,2}$ určíme stejně jako v případě 1. Nyní potřebujeme určit člen $a_{3,2}$, pro který podle předpokladu musí platit, že

$$a_{3,2} = \Delta_m(\Delta_n(a_{2,1})) - a_{2,1} + a_{3,1} + a_{2,2}.$$

   Člen $a_{4,2} = \Delta_m(\Delta_n(a_{3,1})) - a_{3,1} + a_{4,1} + a_{3,2}$ atd.

   Tímto způsobem bychom dopočetli všechny členy $a_{l,2}$, kde $l \in \mathbb{N}$ a pro všechny tyto členy by platilo, že

$$a_{l,2} = \Delta_m(\Delta_n(a_{l-1,1})) - a_{l-1,1} + a_{l,1} + a_{l-1,2}.$$

   Tímto postupem tedy lze postupně dopočítat libovolný člen dané posloupnosti. Pokud ve vyjádření hledaného členu postupně nahradíme všechny členy, které ve svých indexech neobsahují jedničku jejich vyjádřením, získáme hledaný člen vyjádřený pouze pomocí smíšených diferencí a členů s indexy obsahujícími jedničku.

   Každý člen této posloupnosti tedy lze vyjádřit pomocí členů $a_{m,1}$, $a_{1,n}$ a $\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n}))$.

$\square$

Příklad: Mějme posloupnost dvou proměnných $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$, zadanou podle předpokladů věty 4.3.2. Určeme člen $a_{2,4}$.
Řešení: Podle předpokladu rozepíšeme:

$$a_{2,4} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,3})) - a_{1,3} + a_{2,3} + a_{1,4},$$

$$a_{2,3} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,2})) - a_{1,2} + a_{2,2} + a_{1,3},$$

$$a_{2,2} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,1})) - a_{1,1} + a_{2,1} + a_{1,2}.$$

Nyní rozpis členu $a_{2,2}$ dosadíme do předpisu členu $a_{2,3}$. Získáme tím vztah

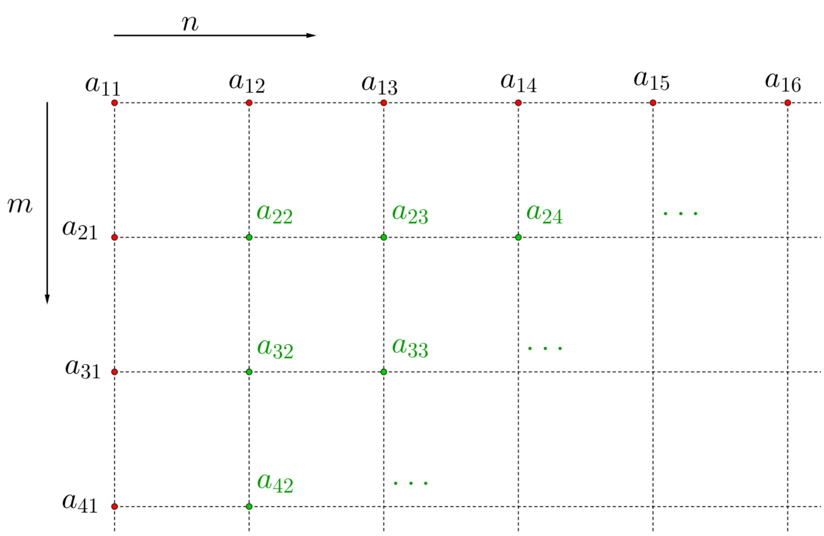
$$a_{2,3} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,2})) - a_{1,2} + a_{1,3} + \Delta_m(\Delta_n(a_{1,1})) - a_{1,1} + a_{2,1} + a_{1,2},$$
$$a_{2,3} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,2})) + \Delta_m(\Delta_n(a_{1,1})) + a_{1,3} + a_{2,1} - a_{1,1}.$$

Postup provedeme znovu, jen do vztahu pro $a_{2,4}$ dosadíme za člen $a_{2,3}$. Tím získáme vyjádření členu $a_{2,4}$ pouze pomocí smíšených diferencí a členů posloupností $(a_{m,1})_{m=1}^{\infty}$ a $(a_{1,n})_{n=1}^{\infty}$. Hledaný člen bude ve tvaru:

$$a_{2,4} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,1})) + \Delta_m(\Delta_n(a_{1,2})) + \Delta_m(\Delta_n(a_{1,3})) + a_{1,4} + a_{2,1} - a_{1,1}.$$

Tento člen je tedy pomocí výchozích údajů zadán jednoznačně. Stejným způsobem, tedy postupným vyjadřováním jednotlivých členů bychom určili např. bod $a_{3,3}$, pro který platí:

$$a_{3,3} = \Delta_m(\Delta_n(a_{1,1})) + \Delta_m(\Delta_n(a_{1,2})) + \Delta_m(\Delta_n(a_{2,1})) + \Delta_m(\Delta_n(a_{2,2})) + a_{1,3} + a_{3,1} - a_{1,1}.$$



Obrázek 4.2: Grafické znázornění situace

Věta 4.3.3. Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je posloupnost dvou proměnných. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. $\forall m, n \in \mathbb{N} : \Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = 0$,

2. $\exists\ (b_m)_{m=1}^{\infty},\ (c_n)_{n=1}^{\infty} : a_{m,n} = b_m + c_n$.

Důkaz. $(2 \Rightarrow 1)$ Je-li $a_{m,n} = b_m + c_n$, pak platí, že

$$\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = \Delta_m(\Delta_n(b_m + c_n)) = \Delta_m(\Delta_n(b_m) + \Delta_n(c_n)) = \Delta_m(c_{n+1} - c_n) = 0$$

$\Delta_n(b_m) = 0$ protože $(b_m)_{m=1}^{\infty}$ je posloupnost proměnné m a tedy při diferenci podle n ji bereme jako konstantu.

$(1 \Rightarrow 2)$ Položme $b_m = a_{m,1},\ c_n = a_{1,n}$ a $a'_{m,n} = b_m + c_n$. Ukážeme, že platí následující rovnost: $a'_{m,n} = a_{m,n}$.

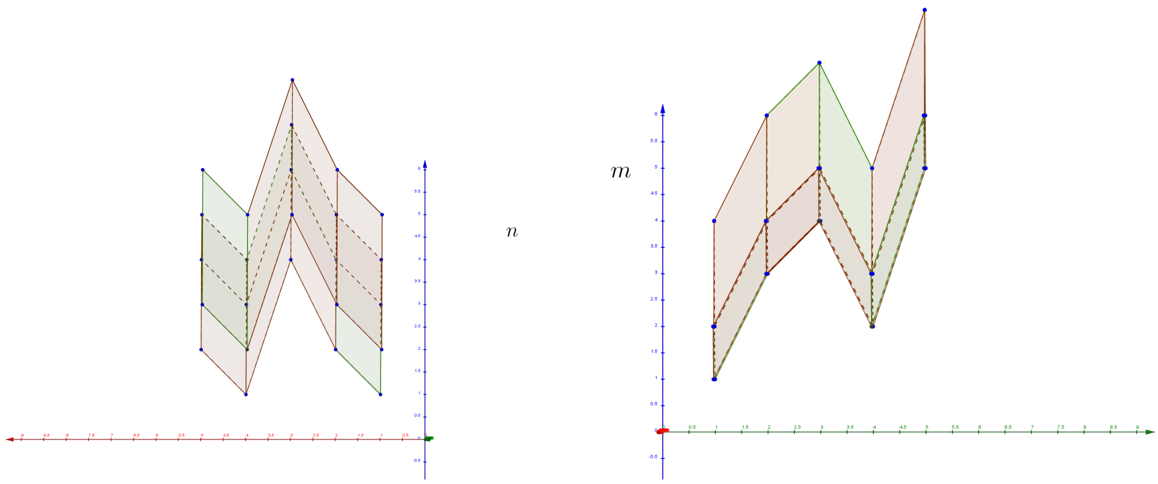
$$n = 1 : a'_{m,1} = a_{m,1} + a_{1,1} - a_{1,1} = a_{m,1},$$
$$m = 1 : a'_{1,n} = a_{1,1} + a_{1,n} - a_{1,1} = a_{1,n}.$$

Podle předchozí implikace je $\Delta_m(\Delta_n(a'_{m,n})) = 0$. Podle předpokladu platí,
že $\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = 0$. Z toho podle věty o jednoznačnosti plyne, že $a'_{m,n} = a_{m,n}$. □

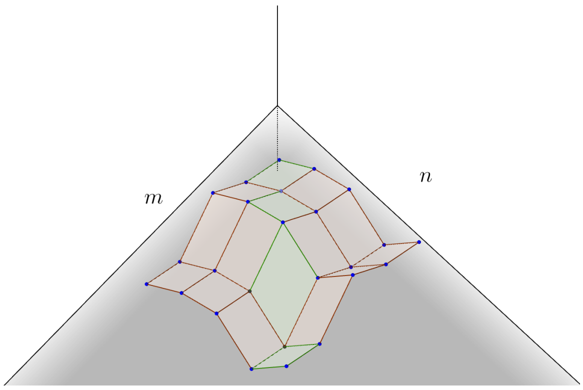
Poznámka: Tvrzení věty se dá přeformulovat tak, že pokud je $\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = 0$, pak platí následující rovnost

$$a_{m+1,n+1} + a_{m,n} = a_{m+1,n} + a_{m,n+1}.$$

Na následujících obrázcích je znázorněn pohled na graf posloupnosti dvou proměnných, která pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ splňuje, že $\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = 0$.



Obrázek 4.3: Náhled na graf posloupnosti z hlediska proměnné n (levá část) a m (pravá část).



Obrázek 4.4: Část grafu celé posloupnosti $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ splňující $\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n})) = 0$.

4.3.1 Limita posloupnosti dvou proměnných

Stejně jako jsme zkoumali limitu u číselné posloupnosti jedné proměnné n, můžeme se pokusit zkonstruovat obdobný pojem i pro posloupnost dvou proměnných. Budeme se snažit zjistit, k jaké hodnotě se blíží členy posloupnosti $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ v případě, že $m, n \to \infty$ (Pokud to je možné).

Úmluva: V této části budeme pod označením $\lim a_{m,n}$ rozumět limitu pro $m, n \to \infty$.

Definice 52. Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je posloupnost dvou proměnných. Řekneme že $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \mathbb{R}$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $[m, n] \in \mathbb{N}^2$, kde $m > m_0\ \vee\ n > n_0$ platí, že $|a_{m,n} - L| < \varepsilon$.

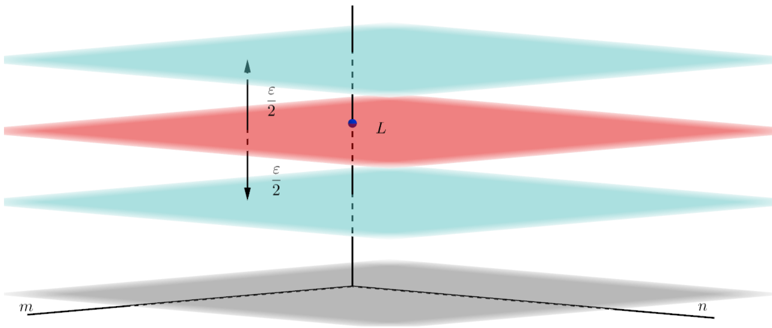
Všimněme si, že jako jsme u posloupnosti jedné proměnní požadovali platnost daného

tvrzení pro „skoro všechna“ $n \in \mathbb{N}$, tak i zde požadujeme platnost tvrzení pro ”skoro všechny uspořádané dvojice $[m, n] \in \mathbb{N}^2$”.
Příklad: Určeme limitu posloupnosti $a_{m,n} = \frac{1}{mn}$.
Řešení: Z předpisu posloupnosti plyne, že pro všechny dvojice $[m, n]$ je $a_{m,n} > 0$. Dále pomocí $\Delta_m(a_{m,n})$ resp. $\Delta_n(a_{m,n})$ zjistíme, že je daná posloupnost klesající ve všech směrech.
$\Delta_m(\frac{1}{mn}) = -\frac{1}{n(m^2+m)}$, $\Delta_n(\frac{1}{mn}) = -\frac{1}{m(n^2+n)}$. Předpokládejme, že platí: $\lim \frac{1}{mn} = 0$.
Nyní se toto tvrzení pokusíme dokázat pomocí definice

Chceme, aby pro všechna kladná ε existovaly přelomové indexy $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechny uspořádané dvojice $[m, n]$; $m > m_0 \vee n > n_0$ platilo $|\frac{1}{mn} - 0| < \varepsilon$. Danou nerovnost lze přepsat následujícím způsobem: $\frac{1}{\varepsilon} < mn$.
Jelikož je $a_{m,n} = mn$ ostře rostoucí ve všech směrech, určitě existují požadované indexy $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{\varepsilon} < m_0 n_0$ a pro všechny $[m, n] \in \mathbb{N}^2$ které splňují, že $m > m_0 \vee n > n_0$ je daná nerovnost splněna. Můžeme tedy říci, že $\lim \frac{1}{mn} = 0$.
Fakt, že $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ má limitu, lze zapsat také pomocí okolí:

Definice 53. Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost dvou proměnných, která má limitu $L \in \mathbb{R}^*$. Potom $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon(L) \in \mathcal{U}(L)$ takové, že pro skoro všechny dvojice $[m, n] \in \mathbb{N}^2$: $a_{m,n} \in U_\varepsilon(L)$.

Podle definice má tedy posloupnost $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, pokud vně libovolného okolí této limity leží pouze konečný počet členů této posloupnosti. V případě posloupnosti dvou proměnných to znamená, že existuje konečná množina uspořádaných dvojic, jejichž funkční hodnota nespadá do daného okolí. Další možností jak chápat limitu posloupnosti dvou proměnných je následující:
Pro pevně zvolené $m_0 \in \mathbb{N}$ vezměme posloupnost $(k_{m_0,n})_{n=1}^{\infty}$, která je však pro dané m_0



Obrázek 4.5: Okolí limity posloupnosti dvou proměnných

posloupností pouze proměnné n a zkoumejme limitu $\lim_{n\to\infty} k_{m_0,n}$. Pokud tento postup provedeme pro různá m_0, výsledné limity posloupnosti $(k_{m_0,n})_{n=1}^{\infty}$ nám tvoří *posloupnost limit* původní posloupnosti závislé na n.
Stejným způsobem bychom postupovali pro pevně zvolené $n_0 \in \mathbb{N}$, čímž bychom získali posloupnost $(l_{m,n_0})_{m=1}^{\infty}$ a pro daná n_0 bychom zkoumali limitu posloupnosti $\lim_{m\to\infty} l_{m,n_0}$. Pro názornost ukažme příklad.

Mějme posloupnost dvou proměnných danou předpisem $a_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Vezměme $m_0 \in \mathbb{N}$ jako pevně zvolenou konstantu, získáme tím posloupnost $(k_{m_0,n})_{n=1}^{\infty}$, která bude dána předpisem $k_n = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{n}$. Pro zvolené m_0 jistě platí, že $\lim_{n\to\infty} k_n = \frac{1}{m_0}$. Stejným způsobem zkonstruujeme pro pevně zvolené n_0 posloupnost $(l_{m,n_0})_{m=1}^{\infty}$, která bude tvaru $l_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{n_0}$. V tomto případě platí, že $\lim_{m\to\infty} l_m = \frac{1}{n_0}$. Nyní bychom za m_0 případně n_0 dosazovali přirozená čísla. V obou případech bychom získali posloupnost se členy $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\}$, která konverguje k nule. Pokud tedy chceme konstruovat limitu posloupnosti dvou proměnných takto, můžeme tuto limitu definovat následovně:

Definice 54. Nechť $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ je posloupnost dvou proměnných.
Označme $(k_m)_{m=1}^{\infty} = (\lim_{n\to\infty} a_{m,n})_{m=1}^{\infty}$ a $(l_n)_{n=1}^{\infty} = (\lim_{m\to\infty} a_{m,n})_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že posloupnost $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \mathbb{R}^*$, pokud

$$\lim_{m\to\infty} k_m = \lim_{n\to\infty} l_n = L.$$

Ukážeme, že definice limity posloupnosti dvou proměnných (52) a (54) neříkají totéž.
Příklad: Mějme posloupnost dvou proměnných danou předpisem

$$a_{m,n} = \begin{cases} 0 \text{ pro } m \neq n, \\ 1 \text{ pro } m = n. \end{cases}$$

Tato posloupnost bude mít limitu jen podle definice (54) protože libovolná posloupnost $(k_{m_0,n})_{n=1}^{\infty}$ resp. $(k_{m,n_0})_{m=1}^{\infty}$ budou konvergovat k nule[2]. Podle definice (52) tato limita neexistuje, protože když vynecháme libovolnou konečnou množinu dvojic $[m, n]$, bude přesto existovat nekonečně dvojic $[m_0, n_0]$ takových, že $m_0 = n_0$ a tedy mimo okolí limity bude ležet nekonečně mnoho členů této posloupnosti.

[2] V každé z nich je pouze jeden prvek nenulový.

4.3.2 Příklady na diferenci vice promennych

Příklad: Zkoumejme chování posloupnosti $a_{m,n} = \mathrm{e}^{-m^2+6m-n^2+4n}$.

Řešení: Definičním oborem této posloupnosti je celé $\mathbb{N}^2$.

$$\Delta_m(a_{m,n}) = \mathrm{e}^{-n^2+4n} \cdot \left(\mathrm{e}^{-m^2-2m-1+6m+6} - \mathrm{e}^{-m^2+6m}\right)$$
$$\Delta_m(a_{m,n}) = \mathrm{e}^{-n^2+4n} \cdot \left(\mathrm{e}^{-m^2+4m+5} - \mathrm{e}^{-m^2+6m}\right)$$

Jelikož je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ výraz $\mathrm{e}^{-n^2+4n} > 0$ musí být diference této posloupnosti podle proměnné m rovna nule právě tehdy když $\mathrm{e}^{-m^2+4m+5} - \mathrm{e}^{-m^2+6m} = 0$. Tento případ nestane, pokud $4m + 5 = 6m$ a tedy pro $m = \frac{5}{2}$. Tento člen však nenáleží množině $\mathbb{N}$, víme však, že $2 < \frac{5}{2} < 3$. Z tohoto faktu plyne, že

$$\Delta_m(a_{m,n}) > 0 \text{ pro } m \in \{1, 2\}$$
$$\Delta_m(a_{m,n}) < 0 \text{ pro } m \in \mathbb{N}_3$$

Pro konstantní přirozené číslo n_0 tedy platí, že $a_{1,n_0} < a_{2,n_0} < a_{3,n_0} > a_{4,n_0} > \dots$ $> a_{m,n_0} > \dots$ a daná posloupnost nabývá maxima v bodě $[m, n] = [3, n]$, kde $n \in \mathbb{N}$.

$$\Delta_n(a_{m,n}) = \mathrm{e}^{-m^2+6m} \cdot \left(\mathrm{e}^{-n^2-2n-1+4n+4} - \mathrm{e}^{-n^2+4n}\right)$$
$$\Delta_n(a_{m,n}) = \mathrm{e}^{-m^2+6m} \cdot \left(\mathrm{e}^{-n^2+2n+3} - \mathrm{e}^{-n^2+4n}\right)$$

Jelikož je pro všechna $m \in \mathbb{N}$ výraz $e^{-m^2+6m} > 0$ musí být diference této posloupnosti podle proměnné n rovna nule právě tehdy, když $\mathrm{e}^{-n^2+2n+3} - \mathrm{e}^{-n^2+4} = 0$. To nastane v případě, že $2n + 3 = 4n$ a tedy pro $n = \frac{3}{2}$. Ani tento člen však neleží v množině $\mathbb{N}$. Víme však, že $1 < \frac{3}{2} < 2$. Z tohoto faktu plyne, že

$$\Delta_n(a_{m,n}) > 0 \text{ pro } n = 1$$
$$\Delta_n(a_{m,n}) < 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}_2.$$

Pro konstantní $m_0 \in \mathbb{N}$ tedy platí, že $a_{m_0,1} < a_{m_0,2} > a_{m_0,3} > \dots > a_{m_0,n} > \dots$ a daná posloupnost má pro konstantní přirozené m_0 maximum v bodě $[m_0, 2]$

Pokud nyní spojíme tvrzení o maximech dané posloupnosti podle jednotlivých proměnných m, n, zjistíme, že $\max(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty} = a_{3,2} = \mathrm{e}^{-3^2+6\cdot3-2^2+4\cdot2} = \mathrm{e}^0 = 1$.

Příklad: Nalezněte minimum posloupnosti $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty} = m^2 - 5m + n^2 - 7n$.

Řešení: Úlohu budeme řešit použitím diferencí podle jednotlivých proměnných. Určíme, že $\Delta_m(a_{m,n}) = 2m - 4$ a $\Delta_n(a_{m,n}) = 2n - 6$. Podezřelým bodem z minima je tedy bod $[m_0, n_0] = [2, 3]$. Nyní určíme funkční hodnotu v daném bodě: $a_{2,3} = 2^2 - 5 \cdot 2 + 3^2 - 7 \cdot 3 = -18$.

Pozor: Lze snadno určit, že $a_{2,3} = a_{3,3} = a_{2,4} = a_{3,4}$. Ve všech těchto bodech nabývá posloupnost $m^2 - 5m + n^2 - 7n$ hodnoty -18. Z toho plyne, že nestačí jen najít body, v nichž jsou příslušné diference nulové k tomu, abychom získali extrém posloupnosti. Získáme tím pouze bod, který je z extrému podezřelý (tzv. *stacionární bod*). V tomto případě platí, že $\forall [m, n] \in \mathbb{N}^2 : a_{m,n} \geq -18$ a dané čtyři body jsou opravdu body globálního minima. Existují však i případy, kde tato vlastnost neplatí. Pokud tedy najdeme stacionární body dané posloupnosti, musíme prověřit hodnotu posloupnosti na určitém okolí stacionárního bodu. To provádíme z důvodu, že tohoto extrému může posloupnost nabývat ve více bodech.

Závěr

Cílem práce je zavést a podrobněji rozebrat, případně rozvést pojem posloupnost. Vzhledem k rozsahu tohoto tématu jsem se rozhodl uvést v první kapitole základní charakteristiku a vlastnosti tohoto zobrazení formou platných definic a vět. Dále jsem zavedl pojem diference číselné posloupnosti, u které jsem ukázal jaké má vlastnosti. Bohužel se mi nepodařilo tuto problematiku zcela rozebrat. Konkrétně se mi nepodařilo odvodit diferenci složené posloupnosti.

V další kapitole jsem se věnoval pojmu limita číselné posloupnosti, který jsem pomocí zdrojů rozebral důkladněji a pokusil sem se uvést ke každému typu tipu posloupnosti, u které byla zkoumána limita, uvést ilustrativní příklady, ujasňující postup řešení. Následující dvě kapitoly jsem věnoval rozšíření posloupností i na případy, kdy zobrazujeme do jiné než číselné množiny. První z nich byla věnována posloupnostem bodů v Eukleidovském prostoru a posloupnostem matic. Konkrétně posloupnosti matic se mi také nepodařilo příliš rozvinout.

Ve čtvrté kapitol jsem se zabýval analogií mezi posloupnostmi a reálnými funkcemi. Cílem bylo přenést některé pojmy z teorie funkcí na číselné posloupnosti. Konkrétně se jednalo o zavedení konvexnosti a konkávnosti pro posloupnosti jedné proměnné, dále pak zavedení posloupnosti dvou proměnných. Důvodem, proč bylo toto téma zařazeno je pokus demonstrovat chování funkcí dvou proměnných na teoreticky jednodušším případě. Bohužel rovněž teorii o posloupnostech dvou proměnných se mi nepodařilo vystavět na dost velké úrovni. Dalším zajímavým aspektem by byla např. teorie diferenčních rovnic pro posloupnosti dvou proměnných a metody jejich řešení.

Užité značení

$U_\varepsilon(A)$ .... Okolí bodu A o poloměru $\varepsilon > 0$

$P_\varepsilon(A)$ .... Prstencové okolí bodu A o poloměru $\varepsilon > 0$

$\mathcal{U}(A)$ .... Množina všech okolí bodu $\mathbb{A}$

$(a_n)_{n=1}^\infty$ .... Číselná posloupnost

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ .... Množina členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$

$\Delta_n(a_n)$ .... Diference číselné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$

$\Delta_n^{(2)}(a_n)$ .... Druhá diference číselné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$

$x^{(n)}$ .... Posloupnost bodů v $\mathbb{E}^r$

$(a_{m,n})_{m,n=1}^\infty$ .... Posloupnost dvou proměnných

$\Delta_m(a_{m,n})$ .... Diference posloupnosti dvou proměnných podle proměnné m

$\Delta_n(a_{m,n})$ .... Diference posloupnosti dvou proměnných podle proměnné n

$\Delta_m(\Delta_n(a_{m,n}))$ .... Smíšená diference posloupnosti dvou proměnných

(BÚNO) .... Bez újmy na obecnosti

Literatura

[1] J.Bečvář.:*Lineární algebra*(čtvrté vydání). MATFYZPRESS vydavatelství Matematicko fyzikální fakulty v Praze, Praha 2010. ISBN 978-80-7378-135-4

[2] V. Hájková, M. Johanis, O. John, O.F.K. Kalenda, M. Zelený.: *Matematika.* MATFYZPRESS vydavatelství Matematicko fyzikální fakulty v Praze, Praha,2012. ISBN 978-80-7378-193-7

[3] V. Jarník.:*Diferenciální počet II: Pokračování úvodu do počtu diferenciálního*. Vydavatelství Československé akademie věd v Praze, Praha,1953

[4] J. Kopáček.: *Matematická analýza nejen pro fyziky I.*(čtvrté přepracované vydání). MATFYZPRESS vydavatelství Matematicko fyzikální fakulty v Praze, Praha, 2004. ISBN 80-86732-25-8.

[5] J. Kopáček.: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.*(čtvrté vydání). MATFYZPRESS vydavatelství Matematicko fyzikální fakulty v Praze, Praha, 2004. ISBN 978-80-7378-282-5.

[6] [online] http://www.cynyc.net/PedF/MA%20I/Skripta%2026-01-2017.pdf