



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Kvorka

Teplotně-deformační vývoj ledové kůry na Enceladu

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Teplotně-deformační vývoj ledové kůry na Enceladu

Autor: Jakub Kvorka

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: Posledné roky priniesli úspešné vesmírne misie a množstvo dát spojených s topografiou ladových satelitov planét vyskytujúcich sa v Slnčnej sústave. Vďaka nameraným dátam sa otvára priestor pre vznik teórií predikujúcich dynamický stav vnútra telies, o ktorých je možné predpokladať, že obsahujú fázové rozhranie ľadu a vody. Jedným z možných prístupov k objasneniu topografie je vysvetlenie vychádzajúce z existencie podpovrchového oceána a jeho tepelnej produkcie, ktorá deformuje ladovú kôru pokrývajúcu teleso. Cieľom tejto práce je prvý pokus o zjednodušený matematický popis fázového rozhrania a teplotnej deformácie ladovej kôry, ktorý bude prepísaný do jazyka Fortran95 a dovoľí pomocou počítačového modelu skúmať vlastnosti a udržateľnosť takého systému. Výsledky práce, venované konkrétnym mesiacom Enceladus, Európa a Titan, naznačujú možnosť generovania topografie uvedeným mechanizmom len v prípade hrubozrnného ľadu tvoriaceho ladovú kôru, ktorá je v okolí hornej hranice elastická.

Klíčová slova: ladové mesiace, viskoelastická deformácia, Stefanov problém

Title: Deformation and thermal evolution of the ice shell on Enceladus

Author: Jakub Kvorka

Department: Department of Geophysics

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: In the last two decades, successful space missions to Jupiter and Saturn provided important data bearing information about topography and internal structure of icy bodies in the outer Solar System. Some of these bodies contain subsurface reservoirs of liquid water in contact with an outer shell made of solid ice. One of the possibilities how to explain the observed topography of a moon is to use its thermal production as the energy source that produces deformation of the ice crust covering the body. In this study, we develop a simplified mathematical model of thermal-mechanical evolution of the ice crust including the effect of phase transition at its bottom boundary. The appropriate system of partial differential equations is coded in Fortran95 and used to study the surface features developed in response to heat flux anomalies imposed on the top of the subsurface ocean. The results obtained for Enceladus, Europa and Titan show that the observed topography of these moons can be explained only for a large grain size and the ice crust behaving elastically near the upper boundary.

Keywords: icy satellites, viscoelastic deformation, Stefan problem

Rád by som poďakoval rodičom za ich finančnú a morálnu podporu môjho štúdia vrcholiaceho týmto počinom, pánovi prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc. za príkladné vedenie práce a pravidelné konzultácie približujúce jej zdarné ukončenie. Na záver chcem poďakovať všetkým, ktorí verili, že priletí sókl aj napriek tomu, že ľudia naokolo kričali „je to kaňa“.

Obsah

Úvod	3
1 Riadiace rovnice	4
1.1 Všeobecné integrálne vyjadrenie	4
1.2 Rovnica kontinuity	5
1.2.1 Špeciálny tvar rovníc plynúci z rovnice kontinuity	5
1.3 Pohybová rovnica	6
1.4 Zákon zachovania energie	6
1.5 Teplota	6
2 Mechanické a termálne vlastnosti ľadu	7
2.1 Vybrané mechanické a termálne parametre systému	7
2.2 Tepelná kapacita ľadu a tepelný tok	7
2.3 Viskozita	8
2.4 Viskoelastická reológia	8
3 Predpoklady teoretického modelu a linearizácia radiacích rovníc	9
3.1 Enceladus, Európa, Titan	9
3.2 Popis metódy a modelu	9
3.3 Vplyv deformácie na gravitačné pole telesa	10
3.4 Linearizácia vývoja napätia v systéme	10
3.4.1 Linearizácia napätia v ľadovej kôre	11
3.4.2 Linearizácia napätia v oceáne pod ľadovou kôrou	11
3.5 Linearizácia vývoja teploty v ľadovej kôre	12
3.6 Linearizácia geometrie hraníc	12
3.7 Linearizácia rovnice kontinuity	13
3.7.1 Rovnica kontinuity v objeme	13
3.7.2 Rovnica kontinuity na rozhraní	13
3.8 Linearizácia pohybovej rovnice	13
3.8.1 Pohybová rovnica v objeme	13
3.8.2 Linearizácia pohybovej rovnice rozhrania	14
3.9 Linearizácia zákona zachovania energie	15
3.9.1 Zákon zachovania energie v objeme	15
3.9.2 Zákon zachovania energie na rozhraní	15
3.9.3 Výpočet radiálnej zložky posunutia na rozhraní	17
3.10 Linearizácia spojitosti teploty na rozhraní	17
3.11 Linearizácia reologického modelu	17
3.11.1 Linearizácia teplotnej závislosti viskozity	17
3.11.2 Úprava napätovej závislosti viskozity	18
3.11.3 Úprava viskoelastickej reológie	18
4 Harmonický rozklad rovníc	19
4.1 Zhrnutie radiacích rovníc v linearizovanom tvare	19
4.2 Rozklad rovníc	20
4.2.1 Harmonický rozklad potenciálu V_δ	20

4.2.2	Rozklad objemových rovníc	21
4.2.3	Rozklad okrajových podmienok	21
4.2.4	Rozklad posunutia hraníc	22
4.2.5	Rozklad viskozity a reologického modelu	22
4.3	Harmonická analýza podmienok platnosti linearizácie	23
5	Numerická aproximácia a približné riešenie rovníc	24
5.1	Diskretizácia rovníc	24
5.1.1	Priestorová diskretizácia	25
5.1.2	Časová diskretizácia	26
5.1.3	Diskretizácie niektorých rovníc	26
5.2	Formálny zápis získanej sústavy lineárnych algebraických rovníc .	27
5.2.1	Sústava mechanických rovníc	27
5.2.2	Sústava teplotných rovníc	28
5.3	Numerická analýza podmienok linearizácie	28
6	Výsledky simulácií a diskusia	29
6.1	Testovanie programu	29
6.2	Enceladus	30
6.3	Európa	36
6.4	Titan	42
6.5	Diskusia	48
	Záver	50
	Zoznam použitej literatúry	51
A	Appendix 1	52
A.1	Teplota a tlak v počiatočnom stave stave	52
A.1.1	Teplota	52
A.1.2	Tlak	52
A.2	Škálovacia analýza	53
A.2.1	Analýza deformácie grav. poľa	54
A.2.2	Analýza variácie tlaku vody na spodnom rozhraní	54
A.2.3	Analýza linearizovanej pohybovej rovnice	54
A.2.4	Analýza linearizovanej rovnice vedenia tepla	55
B	Apendix 2	57
B.1	Sférické harmoniky a ich vlastnosti	57
B.2	Užitočné vzťahy	57
	Zoznam obrázkov	60
	Prílohy	62

Úvod

V posledných rokoch, najmä po objavoch sond Cassiny-Huygens a Galileo, ktoré priniesli nové poznatky ohľadne Saturnu, Jupitera a ich ľadových mesiacov, vzrástol záujem verejnosti o túto tematiku. Dôvod je prostý, získané dáta nasvedčujú, že na niektorých ľadových mesiacoch by sa mohli nachádzať podpovrchové oceány kvapalnej vody, v ktorých by hypoteticky mohli nastať podmienky pre vznik primitívneho mimozemského života.

Úvahy o možnosti života mimo zemský povrch však spadajú do záujmového okruhu biofyziky. V tejto práci sa nebudeme zaoberať priamo podpovrchovým oceánom, ale vytvoríme vnútorne konzistentný, teplotne-deformačný model ľadovej kôry, ktorá tento oceán obklopuje. Tento model má za cieľ ukázať možnosť vzniku a udržanie topografie ľadových mesiacov generovanej nehomogenitami v tepelnom toku z oceána pod ňou. Nadvižme na prácu Čadek et al. [2017], ktorá naznačuje, že pozorovaná topografia (hovoríme o už existujúcich dátach nameraných pre Enceladus a Titan) by mohla mať práve tento pôvod. V teoretickej časti práce prepojíme čisto mechanické výpočty z práce Čadek et al. [2017] so zjednodušenou verziou zákona zachovania energie, čo umožní, za určitých zjednodušujúcich predpokladov, prepojiť mechanické a termálne procesy prebiehajúce v ľadovej kôre.

Získaný teoretický model následne aplikujeme na ľadové mesiace, menovite Európu, Enceladus a Titan, čím získame predstavu o zmene výsledkov v závislosti na veľkosti a vlastnostiach študovaného telesa. Výsledky simulácií budú smerované k porovnaniu topografií pre rôzne nastavenia voľných parametrov ľadu ako napr. ohraňenie veľkosti viskozity (pre detaily viď Čadek et al. [2017]) a veľkosť ľadového zrna v ľadovej kôre, prípadne k interpretácií nameraných dát povrchovej topografie z hľadiska termálnych dejov prebiehajúcich v ľadovej kôre.

Práca je členená do tematicky uzavretých kapitol nasledovne - prvá kapitola je venovaná odvodeniu všeobecného matematického modelu, druhá kapitola pojednáva o všeobecných fyzikálnych vlastnostiach študovaného systému, v tretej kapitole bude na základe vlastností systému linearizovaný model z prvej kapitoly. Kapitoly 4 a 5 sú venované numerickej analýze modelu, menovite štvrtá kapitola pojednáva o harmonickom rozklade linearizovaných rovníc a v piatej kapitole sú rozložené rovnice podrobené radiálnej diskretizácii. Šiesta a posledná kapitola je venovaná prezentácii a diskusii výsledkov.

1. Riadiace rovnice

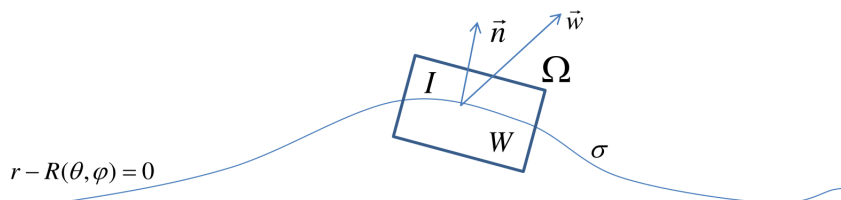
Nasledovné riadky pojednávajú o všeobecnom matematickom popise deformácie a tepelného vývoja dvojzložkového systému, v ktorom existuje v každom čase ostré rozhranie medzi oboma zložkami. Pre jednoduchosť využitia rovníc na popis deformácie ladových mesiacov v ďalších kapitolách budeme zložky nazývať voda a ľad bez újmy na všeobecnosti.

V ďalšom je vždy Ω uzavretá oblasť obsahujúca ľad (I) a vodu (W) oddelené plošným rozhraním σ popísaným implicitne v sférických súradniciach rovnicou

$$r - R(\theta, \phi) = 0, \quad (1.1)$$

kde trojica (r, θ, ϕ) reprezentuje sférické súradnice bodu v priestore, \vec{w} je rýchlosť rozhrania, \vec{n} vonkajšia normála k ploche definovanej rozhraním σ - viď *obrázok 1.1*. $[\Phi]_W^I$ je skok veličiny Φ na rozhraní ľadu a vody.

Obr. 1.1: K zavedeniu označenia.



Všetky veličiny vystupujúce v rovniciach považujeme za spojito diferencovateľné do 1. rádu v oblasti $\Omega \setminus \sigma$. Vzhľadom na všeobecnosť vybudovaného modelu je možné ho použiť aj pre horné rozhranie ladových mesiacov, t.j. rozhranie ľad/vákuum.

Materiálová derivácia D_t v objeme Ω je uvažovaná v Eulerovom zmysle

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla, \quad (1.2)$$

kde \vec{v} je aktuálna rýchlosť v danom bode kontinua všeobecne sa meníaca v čase aj v priestore. Materiálová derivácia na ploche σ je definovaná v zmysle Slattery et al. [2007] a označená D_t^σ . Pretože zavedenie materiálovej derivácie na povrchu dimenzie 2 v 3-rozmernom priestore vyžaduje osobitnú, netriviálnu, a pre potreby tejto práce zbytočnú, diskusiu, bude na tomto mieste vynechaná podrobnejšia definícia tohto pojmu, ktorú je možné nájsť v už zmienenej práci Slatteryho a spoluautorov v kapitole 1.2.7.

Gradient bude v ďalšom označený ∇ , divergencia $\nabla \cdot$ a dyadický súčin \otimes , analogické veličiny na ploche σ budú označené ∇_σ , resp. $\nabla_{\sigma \cdot}$.

1.1 Všeobecné integrálne vyjadrenie

Uvažujme v Ω/σ priestorovo a časovo závislú fyzikálnu veličinu ktorú v Ω/σ popisuje hustota ψ , tok Φ_ψ a hustota produkcie F_ψ . Na ploche σ sú zavedené

plošné veličiny ekvivalentné objemovým, t.j. ψ^σ , Φ_ψ^σ , F_ψ^σ . Všeobecná integrálna rovnica popisujúca ψ je potom v tvare Slattery et al. [2007]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega \setminus \sigma} \rho \psi dV + \int_{\sigma} \rho^\sigma \psi^\sigma dS \right) = & - \int_{\partial(\Omega \setminus \sigma)} \Phi_\psi \cdot d\vec{S} - \int_{\partial\sigma} \Phi_\psi^\sigma \cdot d\vec{l} + \\ & + \int_{\Omega \setminus \sigma} \rho F_\psi dV + \int_{\sigma} \rho^\sigma F_\psi^\sigma dS , \end{aligned} \quad (1.3)$$

kde ρ popisuje hustotu hmoty v objeme kontinua, analogicky ρ^σ popisuje plošnú hustotu na rozhraní. Všetky ostatné veličiny sú zhrnuté v *tabulke (1.1)* (Müller [1985]). Komentár k jednotlivým veličinám je ponechaný na odstavce patriace jednotlivým rovniciam.

Tabulka 1.1: Fyzikálne veličiny vystupujúce v základných zákonoch zachovania.

Rovnica	ψ	Φ_ψ	F_ψ	ψ^σ	Φ_ψ^σ	F_ψ^σ
Rovnica kontinuity	1	0	0	1	0	0
Pohybová rovnica	\vec{v}	$-\boldsymbol{\tau}$	\vec{f}	\vec{w}	$-\mathbf{T}^\sigma$	\vec{f}^σ
Zachovanie energie	$\epsilon + \frac{1}{2}v^2$	$\vec{q} - \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}$	$\vec{f} \cdot \vec{v}$	$\epsilon^\sigma + \frac{1}{2}w^2$	$\vec{q}^\sigma - \mathbf{T}^\sigma \cdot \vec{w}$	$\vec{f}^\sigma \cdot \vec{w}$

Využitím pokročilých nástrojov matematickej analýzy (pre detaily viď Slattery et al. [2007, kap. 1.3.4]) je možné všeobecnú integrálnu rovnicu (1.3) prepísať na dve parciálne diferenciálne rovnice platné v Ω/σ a na σ v nasledovnom tvare

$$D_t(\rho\psi) + \rho\psi\nabla\cdot\vec{v} + \nabla\cdot\Phi_\psi - \rho F_\psi = 0 , \quad (1.4)$$

$$D_t^\sigma(\rho^\sigma\psi^\sigma) + \rho^\sigma\psi^\sigma\nabla_\sigma\cdot\vec{w} + \nabla_\sigma\cdot\Phi_\psi^\sigma - \rho^\sigma F_\psi^\sigma = -\vec{n}\cdot[\rho\psi(\vec{v} - \vec{w}) + \Phi_\psi]_W^I . \quad (1.5)$$

1.2 Rovnica kontinuity

V Ω/σ ani na σ neuvažujeme vznik hmoty a zároveň hmota netečie cez hranice, t.j. dosadením $\psi = 1$, $F_1 = 0$, $\Phi_1 = 0$ (analogicky F_1^σ , Φ_1^σ) do (1.4), resp. (1.5) vychádza rovnica kontinuity v tvare

$$D_t\rho + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0 , \quad (1.6)$$

$$D_t^\sigma\rho^\sigma + \rho^\sigma\nabla_\sigma\cdot\vec{w} = -\vec{n}\cdot[\rho(\vec{v} - \vec{w})]_W^I . \quad (1.7)$$

1.2.1 Špeciálny tvar rovníc plynúci z rovnice kontinuity

Rovnice (1.4), (1.5) je možné pomocou rovníc kontinuity (1.6), (1.7) upraviť do tvaru (pre detaily viď Slattery et al. [2007, kap. 1.3.5])

$$\rho D_t\psi + \nabla\cdot\Phi_\psi - \rho F_\psi = 0 , \quad (1.8)$$

$$\rho^\sigma D_t^\sigma\psi^\sigma + \nabla_\sigma\cdot\Phi_\psi^\sigma = -\vec{n}\cdot[\rho(\psi - \psi^\sigma)(\vec{v} - \vec{w}) + \Phi_\psi]_W^I . \quad (1.9)$$

1.3 Pohybová rovnica

Dosadením z *tabuľky (1.1)* do rovníc (1.8), (1.9) vychádzajú dve rovnice pre zachovanie hybnosti (v objeme a na rozhraní) v tvare

$$\rho D_t \vec{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \vec{f}, \quad (1.10)$$

$$\rho^\sigma D_t^\sigma \vec{w} - \nabla_\sigma \cdot \mathbf{T}^\sigma - \rho^\sigma \vec{f}^\sigma = \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} - \rho(\vec{v} - \vec{w}) \otimes (\vec{v} - \vec{w})]_W^I, \quad (1.11)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ označuje napätový tenzor, \mathbf{T}^σ označuje tenzor povrchového napätia v σ , \vec{f} , resp. \vec{f}^σ , je objemová, resp. plošná, hustota vonkajšej sily pôsobiacej v kontinuu (podrobnejšiu diskusiu zavedenia plošnej sily a plošného napätia nechávame do ďalšej kapitoly).

1.4 Zákon zachovania energie

Analogicky odvodeniu pohybovej rovnice dosadením veličín z *tabuľky (1.1)* do rovníc (1.8), (1.9) dostávame

$$\rho D_t \left(\epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v}, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & \rho^\sigma D_t^\sigma \left(\epsilon^\sigma + \frac{1}{2} w^2 \right) + \nabla_\sigma \cdot (\vec{q}^\sigma - \mathbf{T}^\sigma \cdot \vec{w}) - \rho^\sigma \vec{f}^\sigma \cdot \vec{w} = \\ & = -\vec{n} \cdot \left[\rho \left(\epsilon - \epsilon^\sigma + \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} w^2 \right) (\vec{v} - \vec{w}) - \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v} + \vec{q} \right], \end{aligned} \quad (1.13)$$

kde ϵ , resp. ϵ^σ , je hustota energie kontinua, resp. plošná hustota energie rozhrania, \vec{q} , resp. \vec{q}^σ , je hustota tepelného toku, resp. hustota tepelného toku pozdĺž rozhrania σ .

Ďalšia úprava rovnice (1.12) spočíva v rozpise prvého člena na pravej strane a použití pohybovej rovnice (1.10), čím prvý člen na pravej strane rovnice (1.12) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) &= \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \vec{v})^T = \vec{v} \cdot (\rho D_t \vec{v} - \rho \vec{f}) + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \vec{v})^T = \\ &= \rho D_t \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\tau} : (\nabla \vec{v})^T, \end{aligned} \quad (1.14)$$

kde $(\nabla \vec{v})^T$ značí transponovaný gradient rýchlosti, pre ktorý bude ďalej použitá notácia $(\nabla \vec{v})^T := \mathbf{l}$. Dosadením (1.14) do (1.12) získa rovnica zákona zachovania energie v objeme Ω/σ nasledujúci tvar

$$\rho D_t \epsilon + \nabla \cdot \vec{q} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l}. \quad (1.15)$$

Analogický výpočet je možné uskutočniť aj na rozhraní, na tomto mieste ho však neuvádzame, pretože pre ďalšie pokračovanie práce nemá hodnotu.

1.5 Teplota

Z fyzikálnych dôvodov predpokladáme, že teplota je v ladovej kôre 2-krát spojitاً diferencovateľná a na rozhraní je spojitاً, t.j.

$$[T]_W^I = 0. \quad (1.16)$$

2. Mechanické a termálne vlastnosti ľadu

2.1 Vybrané mechanické a termálne parametre systému

V tabuľke (2.1) sú zhrnuté mechanické a termálne parametre zložiek ľadu a vody potrebné pre výpočty založené na odvodených modeloch správania sa systému ľadu a vody. Všetky uvedené parametre považujeme za nezávislé na mechanickom a termálnom stave ľadovej kôry.

Tabuľka 2.1: Konštanty charakterizujúce vlastnosti ľadu a vody.

Symbol	Názov parametra	Hodnota	Jednotka	Zdroj
ρ_I	Hustota ľadu	920	kg/m ³	[Lide, 2004]
ρ_W	Hustota vody	1000	kg/m ³	[Lide, 2004]
λ_I	Koeficient tepelnej vodivosti ľadu.	2.8	W/m/K	[Lide, 2004]
c_I	Tepelná kapacita ľadu.	2000	J/kg/K	[Lide, 2004]
L_I	Merné teplo topenia ľadu.	3.33×10^5	J/kg	[Hobbs, 1974]
T_t	Teplota topenia ľadu.	273.15	K	[Lide, 2004]
μ_I	Elasticita ľadu	3.33×10^9	Pa	[Lide, 2004]

2.2 Tepelná kapacita ľadu a tepelný tok

Tepelný tok ľadovou kôrou je v použítom teoretickom modeli priamoúmerný gradientu teploty (jedná sa o Fourierov zákon, viď Martinec [2003, str. 99]), pričom konštanta úmernosti, tzv. tepelná vodivosť ľadu λ_I , je v ďalších úvahách nezávislá na termálnom a mechanickom stave ľadovej kôry v danom bode, t.j. predpis pre tepelný tok má tvar

$$\vec{q} = -\lambda_I \nabla T . \quad (2.1)$$

V objeme ľadu je uchovaná tepelná energia, ktorej hustotu na jednotku hmotnosti budeme označovať ϵ . Táto veličina je priamoúmerná teplote T s konštantou úmernosti rovnou tepelnej kapacite ľadu c_I (viď Müller [1985]), t.j.

$$\epsilon = c_I T + const , \quad (2.2)$$

kde *const* je konštanta vyjadrujúca skutočnosť, že v termodynamike má zmysel uvažovať len zmenu vnútornej energie voči referenčnému stavu.

2.3 Viskozita

Lad je deformovaný päticou creepových mechanizmov, menovite „volume diffusion creep, grain boundary diffusion creep, dislocation creep, basal slip-accomodated GBS, GBS-accomodated basal slip“, ktoré charakterizujú viskozity $\eta_{diffv}, \eta_{diffg}, \eta_{disl}, \eta_{basal}, \eta_{gbs}$, ktorých závislosť na teplote a napätí je podľa Goldsby and Kohlstedt [2001] daná vzťahom

$$\eta_{creep} = \frac{T^l d^m}{2A\tau_{II}^{(n-1)}} \exp\left(\frac{E}{RT}\right), \quad (2.3)$$

kde E, A, n, m, l sú parametre ladu zhrnuté v *tabulke (2.2)*, T je teplota ladu, d je veľkosť ladového kryštálu a τ_{II} je druhý invariant tenzoru napätia, ktoré pôsobí v ladovej kôre, R je všeobecná plynový konštanta. Z dôvodov súvisiacich s pevnosťou ladu (podrobne uvedené v Čadek et al. [2017]) sa zavádza obmedzenie na veľkosť viskozity, tzv. „cutoff viskozita“ a pre viskozitu ladu η_I platí

$$\frac{1}{\eta_I} = \frac{1}{\eta_{diffv}} + \frac{1}{\eta_{diffg}} + \frac{1}{\eta_{disl}} + \frac{1}{\eta_{basal} + \eta_{gbs}} + \frac{1}{\eta_{cutoff}}. \quad (2.4)$$

Tabulka 2.2: Parametre pre výpočet viskozity ladu v závislosti na teplote podľa Goldsby and Kohlstedt [2001].

	$T(K)$	l	m	n	$A(Pa^{-n}K^l m^m s^{-1})$	$E(kJmol^{-1})$
η_{diffv}	-	1.0	2.0	1.0	9.0×10^{-8}	59
η_{diffg}	-	1.0	3.0	1.0	2.6×10^{-16}	49
η_{disl}	≤ 258	0.0	0.0	4.0	4.0×10^{-19}	60
	> 258	0.0	0.0	4.0	6.0×10^4	180
η_{basal}	-	0.0	0.0	2.4	2.2×10^{-7}	60
η_{gbs}	≤ 255	0.0	1.4	1.8	6.2×10^{-14}	49
	> 255	0.0	1.4	1.8	4.8×10^{15}	192

2.4 Viskoelastická reológia

Reologická rovnica udávajúca vzťah medzi napätím a rýchlosťou v prípade viskoelastického nestlačiteľného modelu deformácie má tvar

$$\boldsymbol{\tau}^D - \eta(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) = -\frac{\eta}{\mu} \hat{D}_t \boldsymbol{\tau}^D, \quad (2.5)$$

kde μ je modul torzie, η je viskozita materiálu (v prípade ladu (2.4)), $\boldsymbol{\tau}^D$ označuje deviatorickú časť tenzoru napätia a \hat{D}_t označuje priestorovo invariantnú materiálovú deriváciu (obsahujúcu korotačný a deformačný člen).

3. Predpoklady teoretického modelu a linearizácia riadiacich rovníc

3.1 Enceladus, Európa, Titan

Úlohou teoretického modelu je popísať mechanicko-termálne deje prebiehajúce v sústave voda-ladová kôra. Výsledkom práce bude aplikácia teoretického modelu na takéto sústavy pri uvážení parametrov Saturnových mesiacov Enceladus, Titan a Jupiterovho mesiaca Európa. Parametre mesiacov, ako napr. veľkosť a povrchová teplota, sú zhrnuté v *tabuľke (3.1)*.

Tabuľka 3.1: Charakteristické parametre rozhraní ladových mesiacov.

Mesiac	R_d (m)	R_u (m)	$g(R_d)$ (ms^{-2})	$g(R_u)$ (ms^{-2})	T_u (K)
Enceladus	232 000	252 000	0.13	0.11	75
Európa	1 531 000	1 561 000	1.40	1.31	102
Titan	2 476 000	2 576 000	1.38	1.35	75

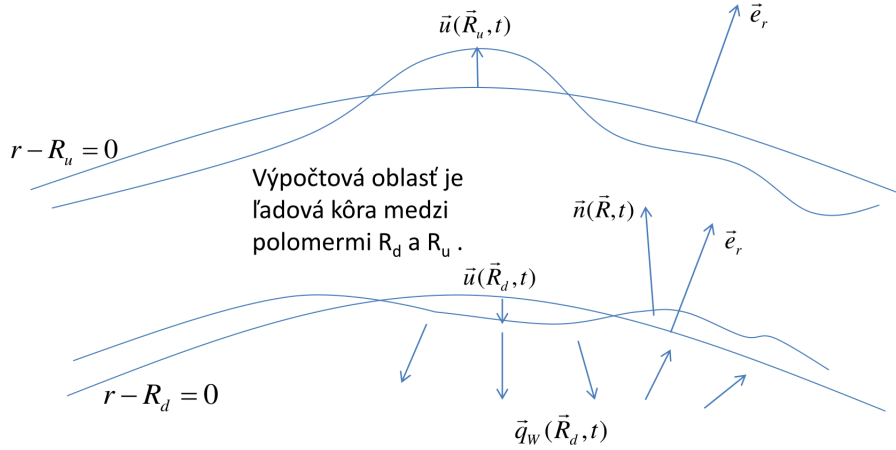
3.2 Popis metódy a modelu

V ďalšom texte pod pojmom počiatkový stav ladovej kôry rozumieme sféricky symetrický, hydrostatický, stacionárny stav daný polomerami hraníc ladovej kôry (spodný polomer R_d , horný polomer R_u podľa *tabuľky (3.1)*) a teplotami na hraniciach ladovej kôry (teplota na spodnej hranici $T_d = T_t$, kde T_t je teplota topenia ľadu podľa *tabuľky (2.1)*, teplota na hornej hranici je T_u podľa *tabuľky (3.1)*). Deviatorická zložka napätia a rýchlosti v systéme sú nulové.

Použitý model je založený na linearizácii deformácie počiatkového sféricky symetrického systému oceánu pod ladovou kôrou konštantnej hrúbky. Deformácia je vyvolaná zmenou tepelného toku $\vec{q}_W(\vec{R}_d, t)$ na spodnej hranici ladovej kôry, kde zmena je chápaná ako prírastok/úbytok tepelného toku voči stacionárnemu stavu. To vyvoláva topenie/tuhnutie ľadu na spodnej hranici a odchýlky od sférickej symetrie, ktoré generujú vztlakovú silu pôsobiacu na ladovú kôru. Tá spôsobuje napätie a tečenie ľadu v ladovej kôre, t.j. deformáciu v objeme ladového telesa, pre názornú schému viď *obrázok 3.1*.

Vzhľadom na zvolenú metódu riešenia pomocou rozkladu do sférických harmóník je nutné linearizovať nielen zmenu veľkosti veličiny voči počiatkovému stavu, ale aj jej priestorové derivácie voči priestorovým deriváciám v počiatkovom stave, kde linearizáciou sa myslí využitie Taylorovho rozvoja do prvého rádu na hraniciach ladovej kôry, čím je problém v čase sa vyvíjajúcej hranice transformovaný na problém výchylky/posunutia na statickej hranici. Taylorov rozvoj v posunutí má dve výhody - členy nultého rádu reprezentujú hodnoty veličín na sfére (reprezentujúcej rozhranie v počiatkovom stave), čiže sa s nimi jednoducho narába (napr. určenie normálového smeru), a členy rádu 2 a vyššieho už sú vzhľadom

Obr. 3.1: K zavedeniu značenia.



na aproximáciu malých posunutí zanedbateľné voči členom prvého rádu, ktoré sú lineárne v posunutí. Taylorov rozvoj funkcie $\Phi(\vec{r})$ do prvého rádu okolo hranice danej rovnicou (1.1) je v tvare

$$\Phi(\vec{R} + \vec{u}) \approx \Phi(\vec{R}) + \vec{u} \cdot \nabla \Phi(\vec{R}) . \quad (3.1)$$

Ak nebude povedané inak, Taylorovým rozvojom sa myslí aproximácia výrazom (3.1) na danej hranici, indexom I, t.j. Φ_I , sa myslí veličina Φ v ľade, analogicky index W, t.j. Φ_W , označuje veličinu Φ vo vode. V prípade, že index nie je použitý alebo sa v rovnici žiadne indexy nevyskytujú, veličina je nezávislá na materiále, v ktorom je sledovaná, alebo je vzťah uvažovaný vo svojej všeobecnej platnosti nezávisle na existencii rozhrania.

3.3 Vplyv deformácie na gravitačné pole telesa

Gravitačné pole počiatočného stavu systému bude popísané svojou intenzitou, splňajúcou radiálnu symetriu, označenou $\vec{g}(r)$. Deformácia systému a odchýlky od symetrie spôsobujú zmeny gravitačného poľa $\delta\vec{g}(\vec{r}, t)$, ktoré budú popísané zmenou potenciálu gravitačného poľa voči počiatočnému stavu $V_\delta(\vec{r}, t)$, a pre celkové gravitačné pole po deformácii platí (viď Čadek et al. [2017])

$$\vec{g}(\vec{r}, t) = \vec{g}(r) - \nabla V_\delta(\vec{r}, t) . \quad (3.2)$$

3.4 Linearizácia vývoja napätia v systéme

V počiatočnom stave je napätový tenzor reprezentovaný čistým tlakom $p_0(r)$, ktorý spĺňa podmienku hydrostatickej rovnováhy

$$-\nabla p_0(r) + \rho(r)\vec{g}(r) = \vec{0} , \quad (3.3)$$

kde $\vec{g}(r)$ je vektor intenzity gravitačného poľa sféricky symetrického telesa, $\rho(r)$ je hustota ľadu, resp. vody - v oboch materiáloch predpokladáme splnenie hydrostatickej rovnováhy.

V počiatočnom stave predpokladáme spojitosť tlaku naprieč rozhraním (vzhľadom na existenciu povrchového napätia nie je tento predpoklad oprávnený, avšak neskôr bude dokázané, že je dobrou aproximáciou skutočnosti)

$$[p_0(R)]_W^I = 0 , \quad (3.4)$$

kde R označuje veľkosť polomeru sféry reprezentujúcej rozhranie.

3.4.1 Linearizácia napätia v ľadovej kôre

V použitej aproximácii je napätový tenzor v lade $\boldsymbol{\tau}_I(\vec{r}, t)$ v stave po deformácii možné rozložiť na zložku predpätia $-p_0(r)\mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je tenzor druhého stupňa reprezentujúci indentitu, a napätie vznikajúce deformáciou $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_I(\vec{r}, t)$, do tvaru

$$\boldsymbol{\tau}_I(\vec{r}, t) = -p_0(r)\mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_I(\vec{r}, t) . \quad (3.5)$$

Kvôli ďalším výpočtom je nutné predpokladať nasledovné zjednodušenia

$$|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_I(\vec{R}, t)| \ll R|\nabla p_0(R)| , \quad (3.6)$$

$$|\vec{e}_r \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_I(\vec{R}, t)| \ll |\vec{e}_r \cdot \nabla p_0(R)| , \quad (3.7)$$

kde R označuje polomer hraníc v počiatočnom stave a \vec{e}_r označuje normálu k sférickej ploche.

3.4.2 Linearizácia napätia v oceáne pod ľadovou kôrou

Vzťah (3.5) považujeme za splnený aj v prípade vodného oceánu, v ktorom prechádza do tvaru

$$\boldsymbol{\tau}_W(\vec{r}, t) = -(p_0(r) + p_W(\vec{r}, t))\mathbf{I} , \quad (3.8)$$

kde $p_W(\vec{r}, t)$ je zmena tlaku voči počiatočnému stavu systému spôsobená deformáciou ľadovej kôry. Uvážiac zmeny gravitačného poľa (voči počiatočnému stavu), je možné v aproximácii malých posunutí na hraniciach popísať hydrostatickou rovnováhou (viď Čadek et al. [2017])

$$-\nabla(p_0(r) + p_W(\vec{r}, t)) + \rho_W(\vec{g}(r) + \delta\vec{g}(\vec{r}, t)) = \vec{0} , \quad (3.9)$$

kde hustotu vody ρ_W považujeme v daných podmienkach za konštantnú. Využitím predpokladu o hydrostatickej rovnováhe počiatočného stavu (3.3) je možné upraviť vzťah (3.9) do tvaru

$$\nabla(p_W(\vec{r}, t) + \rho_W V_\delta(\vec{r}, t)) = \vec{0} . \quad (3.10)$$

Vzhľadom na nulovú počiatočnú podmienku, t.j. nulovosť prírastku tlaku a potenciálu gravitačného poľa v počiatočnom stave, je možné písať pre $p_W(\vec{r}, t)$ rovnicu

$$p_W(\vec{r}, t) + \rho_W V_\delta(\vec{r}, t) = 0 . \quad (3.11)$$

Na základe vzťahu (3.11) sa dá pomocou škálovacej analýzy dokázať platnosť nasledovných vzťahov (viď Appendix, odstavce A.2.1) platnosť vzťahov

$$|p_W(\vec{R}_d, t)| \ll |p_0(R_d)| , \quad (3.12)$$

$$|p_W(\vec{R}_d, t)| \ll R_d |\nabla p_0(R_d)| , \quad (3.13)$$

$$|\nabla p_W(\vec{R}_d, t)| \ll |\nabla p_0(R_d)| . \quad (3.14)$$

3.5 Linearizácia vývoja teploty v ľadovej kôre

Termálny stav ľadovej kôry v počiatočnom stave je charakterizovaný stacionárnym riešením rovnice vedenia tepla

$$\Delta T_0(r) = 0 . \quad (3.15)$$

Toto riešenie má tvar (pre detailné odvodenie viď Appendix, odstavce A.1.1)

$$T_0(r) = \frac{R_u R_d}{R_u - R_d} \frac{T_d - T_u}{r} + \frac{R_u T_u - R_d T_d}{R_u - R_d} , \quad (3.16)$$

kde pripomínáme, že R_u , R_d je horný, resp, spodný polomer ľadovej kôry v počiatočnom stave systému, analogicky T_u , T_d je teplota na hornej, resp. spodnej časti ľadovej kôry v počiatočnom stave.

Počiatočný stav ľadovej kôry je teda stacionárny a radiálne tepelné toky na hraniciach sú spojité, t.j. požadujeme splnenie podmienok

$$\vec{e}_r \cdot [\vec{Q}(R, t)]_W^I = 0 , \quad (3.17)$$

kde \vec{Q} označuje tepelný tok hranicou a R je polomer hranice ľadovej kôry.

V deformovanom stave je vývoj teploty v ľadovej kôre popísaný zmenou teploty voči počiatočnému stavu

$$T(\vec{r}, t) = T_0(r) + \tilde{T}_I(\vec{r}, t) , \quad (3.18)$$

pričom v súlade s použitou aproximáciou zmenu teploty považujeme za malú v zmysle veľkosti a priestorovej zmeny voči teplote v počiatočnom stave, t.j. platí

$$|\tilde{T}_I(\vec{r}, t)| \ll |T_0(r)| , \quad (3.19)$$

$$|\nabla \tilde{T}_I(\vec{r}, t)| \ll |\nabla T_0(r)| . \quad (3.20)$$

3.6 Linearizácia geometrie hraníc

Deformácia ľadového telesa má za následok narušenie sférickej symetrie hraníc ľadovej kôry. Toto narušenie je popísané odchýlkou vonkajšej normály k hranici

v danom bode $\vec{n}(\vec{r})$ od radiálneho smeru \vec{e}_r (normála v počiatočnom stave). Predpokladajme, že pred deformáciou bola hranica tvorená povrchom sféry s polomerom R . V súlade s aproximáciou je možné normálu po deformácií (reprezentovanej posunom hranice o vektor výchyľky $\vec{u}(\vec{R})$) aproximovať pomocou Taylorovho rozvoja (3.1)

$$\vec{n}(\vec{R} + \vec{u}(\vec{R})) \approx \vec{e}_r(\vec{R}) + \vec{u}(\vec{R}) \cdot \nabla \vec{e}_r(\vec{R}) . \quad (3.21)$$

Úpravou druhého člena dostávame linearizovanú rovnicu pre deformáciu hranice v tvare (analogicky Čadek et al. [2017])

$$\vec{n}(\vec{R} + \vec{u}(\vec{R})) \approx \vec{e}_r + \frac{1}{R} \vec{u}(\vec{R}) \cdot (\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta + \vec{e}_\phi \otimes \vec{e}_\phi) \approx \vec{e}_r , \quad (3.22)$$

kde \vec{e}_ϕ a \vec{e}_θ označujú jednotkové vektory v tangenciálnej rovine k sférickej ploche.

3.7 Linearizácia rovnice kontinuity

3.7.1 Rovnica kontinuity v objeme

Vzhľadom na predpoklad konštantnej hustoty ľadu nezávislej na mechanickom a termálnom stave ľadovej kôry je možné rovnicu (1.6) písať v klasickom tvare pre nestlačiteľnú kvapalinu

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 . \quad (3.23)$$

3.7.2 Rovnica kontinuity na rozhraní

Pre potreby tejto práce je prijateľné považovať plošnú hustotu rozhrania ρ^σ za nulovú. Táto aproximácia je podmienená definíciou plošnej hustoty podľa Slattery et al. [2007]

$$\rho^\sigma \approx \frac{\rho_W + \rho_I}{2} \Delta , \quad (3.24)$$

kde Δ je hrúbka rozhrania, o ktorom predpokladáme, že je tvorené niekoľkými molekulami zmesi ľadu a vody. Použitím uvedenej aproximácie prechádza rovnica (1.7) do tvaru

$$\vec{e}_r \cdot [\rho(\vec{v} - \vec{w})]_W^I = 0 . \quad (3.25)$$

3.8 Linearizácia pohybovej rovnice

3.8.1 Pohybová rovnica v objeme

V tejto práci uvažujeme jedinou silu pôsobiacu v ľadovej kôre, a to gravitačnú, t.j. $\vec{f} = \vec{g}(\vec{r}, t)$. Využitím definície materiálovej derivácie (1.2), linearizovaného rozpisu napätového tenzora v ľade (3.5) a hydrostatickej rovnováhy počiatočného stavu (3.3) je možné rovnicu (1.10) prepísať do tvaru

$$\rho_I \left(\frac{\partial \vec{v}_I(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v}_I(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{v}_I(\vec{r}, t) \right) = \nabla \cdot \tilde{\tau}_I(\vec{r}, t) - \rho_I \nabla V_\delta(\vec{r}, t) . \quad (3.26)$$

Škálavacia analýza ukazuje (Appendix, odsek A.2.3), že člen na ľavej strane je zanedbateľný voči ďalším členom v rovnici, teda ďalej bude použitá lineárna aproximácia pohybovej rovnice v tvare

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_I(\vec{r}, t) = \rho_I \nabla V_\delta(\vec{r}, t) . \quad (3.27)$$

3.8.2 Linearizácia pohybovej rovnice rozhrania

Linearizácia pohybovej rovnice rozhrania (1.11) spočíva v zanedbaní druhého člena, ktorý je druhého rádu malosti v rýchlostiach (analogicky ako v prípade pohybovej rovnice), voči napäťovému členu. To vedie k podmienke nespojitosti napätia na rozhraní, ktorá je daná povrchovým napätím

$$\vec{n}(\vec{r}, t) \cdot [\boldsymbol{\tau}(\vec{r}, t)]_W^I = -\nabla_\sigma \cdot \mathbf{T}^\sigma(\vec{r}, t) . \quad (3.28)$$

Dominantný člen povrchového napätia je daný dynamickým povrchovým napätím (viď Chambat et al. [2014]), pričom sa dá ukázať, že v tomto prípade ide o efekt relatívne malý (Appendix, odsek A.2.3) a ďalej nebude uvažovaný.

Vzhľadom na aproximáciu malých posunutí, s ktorou pracuje teoretický model, je možné rovnicu (3.28) upraviť použitím Taylorovho rozvoja do prvého rádu v posunutí hranice (3.1) a rozvoja normály (3.22) do tvaru

$$\left(\vec{e}_r + \frac{1}{R} \vec{u}(\vec{R}) \cdot (\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta + \vec{e}_\phi \otimes \vec{e}_\phi) \right) \cdot [\boldsymbol{\tau}(\vec{R}, t) + \vec{u}(\vec{R}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}(\vec{R}, t)]_W^I \approx \vec{0} , \quad (3.29)$$

kde \vec{R} je vektor, ktorého veľkosť je rovná polomeru hranice R . Dosadením rozkladu napätia (3.5) a využitím podmienok platnosti linearizácie (3.6), (3.7) dostávame pohybovú rovnicu rozhrania v tvare

$$\vec{e}_r \cdot [\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\vec{R}, t) - \vec{u}(\vec{R}, t) \cdot \nabla(p_0(R)\mathbf{I})]_W^I = \vec{0} . \quad (3.30)$$

Rovnicu (3.30) je možné ďalej upraviť pomocou predpokladu o hydrostatickej rovnováhe počiatočného stavu (3.3) do tvaru

$$\vec{e}_r \cdot [\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\vec{R}, t) - (u^r(\vec{R}, t)\vec{e}_r) \otimes (\rho\vec{g}(R))]_W^I = \vec{0} , \quad (3.31)$$

kde $u^r(\vec{R}, t)$ je radiálna zložka posunutia hranice daná vzťahom $\vec{e}_r \cdot \vec{u}(\vec{R}, t)$. Posunutie na hornej, resp. dolnej hranici, bude rozlíšené pomocou funkčnej závislosti na polohovom vektore, t.j. $u^r(\vec{R}_d, t)$ označuje posunutie na spodnej hranici, $u^r(\vec{R}_u, t)$ označuje posunutie na hornej hranici, pričom \vec{R}_d je vektor so sférickými súradnicami (R_d, θ, ϕ) , kde R_d je polomer sféry reprezentujúcej spodné rozhranie v počiatočnom stave. Analogicky je definovaný \vec{R}_u ako (R_u, θ, ϕ) , kde R_u je polomer sféry reprezentujúcej horné rozhranie v počiatočnom stave.

Pohybová rovnica spodného rozhrania

Rovnica (3.31) predstavuje linearizovanú pohybovú rovnicu všeobecného rozhrania a ďalšie zjednodušenia už nie sú linearizáciou dosiahnuteľné. Uvážením skoku hustoty na spodnom rozhraní ľad/voda a prepisu tenzora prírastku napätia vo vode na čistý tlak $-p_W(\vec{R}, t)\mathbf{I} = \rho_W V_\delta(\vec{r}, t)\mathbf{I}$ prejde rovnica (3.31) do tvaru

$$\vec{e}_r \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_I(\vec{R}_d, t) - (\rho_I - \rho_W)u_I^r(\vec{R}_d, t)\vec{g}(R_d) = \rho_W V_\delta(\vec{r}, t)\vec{e}_r . \quad (3.32)$$

Pohybová rovnica horného rozhrania

Horné rozhranie ladovej kôry je rozhranie typu lad/vákuum. To znamená, že skok hustoty je rovný hustote ladu a vo vákuu je nulové napätie. Po dosadení do linearizovanej rovnice všeobecného rozhrania (3.31) vychádza pohybová rovnica horného rozhrania v tvare

$$\vec{e}_r \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_I(\vec{R}_u, t) - \rho_I u_I^r(\vec{R}_u, t) \vec{g}(R_u) = \vec{0} . \quad (3.33)$$

3.9 Linearizácia zákona zachovania energie

3.9.1 Zákon zachovania energie v objeme

Dosadením materiálových vzťahov (2.2), (2.1) do rovnice pre zachovanie energie (1.15) dostávame rovnicu pre rozloženie teploty v ladovej kôre

$$c_I \rho_I D_t T_I(\vec{r}, t) = \lambda_I \Delta T_I(\vec{r}, t) + \boldsymbol{\tau}_I(\vec{r}, t) : \boldsymbol{l}_I(\vec{r}, t) . \quad (3.34)$$

Využitím vzťahu pre materiálovú deriváciu (1.2), rozkladu napätia (3.5) a teploty (3.18), linearizovanej rovnice kontinuity (3.23) spolu s predpokladmi platnosti linearizácie (3.19), (3.20) dostávame rovnicu v tvare

$$\frac{\partial \tilde{T}_I(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\lambda_I}{c_I \rho_I} \Delta \tilde{T}_I(\vec{r}, t) = -\vec{v}_I(\vec{r}, t) \cdot \nabla T_0(r) + \frac{1}{c_I \rho_I} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^D(\vec{r}, t) : \nabla \vec{v}(\vec{r}, t) . \quad (3.35)$$

Jediná zotrývajúca nelinearita je posledný člen na pravej strane vyjadrujúci disipáciu v objeme ladovej kôry. Na základe škálovacej analýzy je možné ukázať (viď Appendix odstavce A.2.4), že tento člen je rádovo menší ako konvektívny člen (druhý na pravej strane), ktorý na základe simulácií nemá vplyv, a teda je možné diskutovaný napäťový člen zanedbať. Výsledná rovnica pre vývoj teplotného poľa v ladovej kôre je potom

$$\frac{\partial \tilde{T}_I(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_I}{c_I \rho_I} \Delta \tilde{T}_I(\vec{r}, t) - \vec{v}_I(\vec{r}, t) \cdot \nabla T_0(r) . \quad (3.36)$$

3.9.2 Zákon zachovania energie na rozhraní

Pravá strana rovnice (1.13) je nelineárna v rýchlostiach a navyše vyjadruje laterálne variácie. Vzhľadom na malé rýchlosti a záujem o harmonické stupne s veľkou vlnovou dĺžkou pre účely tejto práce položíme pravú stranu tejto rovnice rovnú nule. Analogicky je nutné sa vysporiadať s druhým členom z Taylorovho rozvoja (3.1), ktorý je nelineárny a vzhľadom na malé posunutia (malé voči hrúbke ladovej kôry) zanedbateľný voči absolútnemu členu. Realizáciou výsledkov týchto úvah spolu s dosadením linearizácie normály (3.22) dostávame

$$\vec{e}_r \cdot \left[\left(\vec{v}(\vec{R}, t) - \vec{w}(\vec{R}, t) \right) \rho \epsilon(\vec{R}, t) - \boldsymbol{\tau}(\vec{R}, t) \cdot \vec{v}(\vec{R}, t) + \vec{q}(\vec{R}, t) \right]_W^I = 0 . \quad (3.37)$$

Druhý člen je možné upraviť pomocou rozkladu napätia (3.5) a rozšíriť výrazom $-p_0(R) \vec{w}(\vec{R}, t)$, ktorý má vďaka spojitosti tlaku v počiatočnom stave nulový skok. Pomocou rovnice kontinuity na rozhraní (3.25) je možné upraviť prvý člen rovnice

(3.35) na skok v hustote energie, ktorý je násobený zachovávajúcim sa tokom hmoty cez rozhranie, čím rovnica (3.35) prejde do tvaru platnom na všeobecnom rozhraní

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot (\vec{v}_I(\vec{R}, t) - \vec{w}(\vec{R}, t)) \rho_I [\epsilon(\vec{R}, t) + p_0(R)/\rho_I]_W^I - \\ - \vec{e}_r \cdot [\vec{\tau}(\vec{R}, t) \cdot \vec{v}(\vec{R}, t) + \vec{q}(\vec{R}, t)]_W^I = 0 . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Analogicky ako pri posunutí hraníc, rýchlosť horného a spodného rozhrania bude ďalej rozlíšená funkčnou závislosťou na polohovom vektore, t.j. $\vec{w}(\vec{R}_d, t)$, resp. $\vec{w}(\vec{R}_u, t)$, označuje rýchlosť spodného, resp. horného rozhrania.

Zachovanie energie na spodnom rozhraní

Na spodnom rozhraní dochádza k fázovej premene medzi ľadom a vodou. Tento proces dáva význam prvému skokovému členu v rovnici (3.37) - ide o skok v hustote entalpie, ktorý sa v teórii fázových prechodov nazáva skupenské teplo (v tomto prípade) tuhnutia ľadu $-L_I$ (je to skok „hustota entalpie ľadu“ - „hustota entalpie vody“). Zotrvávajúca nelinearita je napäťový člen vyjadrujúci skok výkonu napäťových síl. Je možné dokázať (viď A.2.4), že tento člen je malý voči analogickému členu s predpätím, ktorý je zahrnutý v entalpii, t.j.

$$|\vec{e}_r \cdot \vec{\tau}_I(\vec{R}_d, t)| \ll |p_0(R_d)| , \quad (3.39)$$

čiže túto nelinearitu je možné zanedbať. Výsledná linearizovaná rovnica zákona zachovania energie na spodnom rozhraní je v tvare

$$\vec{e}_r \cdot (\rho_I L_I (\vec{v}_I(\vec{R}_d, t) - \vec{w}(\vec{R}_d, t)) - [\vec{q}(\vec{R}_d, t)]_W^I) = 0 . \quad (3.40)$$

Výraz pre skok tepelného toku je možné rozvinúť do tvaru

$$[\vec{q}(\vec{R}_d, t)]_W^I = -\lambda_I \nabla \tilde{T}_I(\vec{R}_d, t) - \vec{q}_W(\vec{R}_d, t) , \quad (3.41)$$

kde $\vec{q}_W(\vec{R}_d, t)$ je perturbácia tepelného toku voči počiatocnému stavu na spodnom rozhraní.

Zachovanie energie na hornom rozhraní

Na hornom rozhraní je nulový počiatocný tlak a skok je typu ľad/vákuum. Nulový bude aj skok tepelného toku a navyše je možné ukázať (viď A.2.4), že nelinearita je znova zanedbateľná v zmysle platnosti

$$|\vec{e}_r \cdot \vec{\tau}_I(\vec{R}_u, t)| \ll \rho_I \epsilon_I . \quad (3.42)$$

Linearizovaná rovnice pre zákon zachovania energie na hornom rozhraní je v tvare

$$\vec{e}_r \cdot (\vec{v}_I(\vec{R}_u, t) - \vec{w}(\vec{R}_u, t)) = 0 . \quad (3.43)$$

3.9.3 Výpočet radiálnej zložky posunutia na rozhraní

Nezávisle na polohe rozhrania označme R polomer definujúci sféru okolo stredu telesa tvoriacu rozhranie. Pre radiálnu zložku posunutia na hranici potom z definície platí

$$u_I^r(\vec{R}, t) = \int_0^t \vec{e}_r \cdot \vec{w}(\vec{R}, t') dt' . \quad (3.44)$$

Radiálna zložka rýchlosti hraníc je daná vzťahmi (3.40) a (3.43), po dosadení do vzťahu pre posunutie (3.44) vychádza pre radiálnu zložku posunutia na spodnej, resp. hornej hranici

$$u_I^r(\vec{R}_d, t) = \int_0^t \vec{e}_r \cdot \left(\vec{v}_I(\vec{R}_d, t') - \frac{1}{\rho_I L_I} [\vec{q}(\vec{R}_d, t')]_W^I \right) dt' , \quad (3.45)$$

$$u_I^r(\vec{R}_u, t) = \int_0^t \vec{e}_r \cdot \vec{v}_I(\vec{R}_u, t') dt' , \quad (3.46)$$

kde $[\vec{q}(\vec{R}_d, t')]_W^I$ je definované vzťahom (3.41).

3.10 Linearizácia spojitosti teploty na rozhraní

Na oboch rozhraniach v ľubovoľnom okamžiku platí rovnica analogická rovnici (1.16) vyjadrujúca spojitost teploty na rozhraní

$$T_I(\vec{r}, t) = T_b = T_W(\vec{r}, t) , \quad (3.47)$$

kde T_b je teplota rozhrania, ktorá sa nemení od počiatočného stavu v čase a vyjadruje jednak fázovú premenu na spodnom rozhraní, ktorá prebieha pri konštantnej teplote, jednak nepremennú teplotu horného rozhrania. Aplikáciou linearizovaného rozkladu teploty (3.18) a Taylorovho rozvoja na pravú stranu rovnice (3.47) vychádza

$$T_0(R) + \tilde{T}_I(\vec{R}, t) + \vec{u}_I(\vec{R}, t) \cdot \nabla (T_0(R) + \tilde{T}_I(\vec{R}, t)) = T_b . \quad (3.48)$$

Zanedbaním členov druhého rádu malosti a uvážením teploty rozhrania v počiatočnom stave, t.j. využitím rovnosti $T_0(R) = T_b$ na oboch rozhraniach, je rovnicou (3.48) určená okrajová podmienka pre prírastkový člen teploty ako

$$\tilde{T}_I(\vec{R}, t) = -u_I^r(\vec{R}, t) \frac{\partial T_0(r)}{\partial r} \Big|_{r=R} . \quad (3.49)$$

Rovnica (3.49) platí všeobecne na oboch rozhraniach v rovnakom tvare.

3.11 Linearizácia reologického modelu

3.11.1 Linearizácia teplotnej závislosti viskozity

Vzťah (2.3) udáva závislosť jednotlivých creepových mechanizmov na teplote a tlaku, ktoré sú všeobecne radiálne aj laterálne závislé. V prípade uváženia rozkladu teploty (3.18) je možné sa zbaviť nelineárnej laterálnej závislosti na teplote

pomocou Taylorovho rozvoja v tvare

$$\exp\left(\frac{E}{R(T_0(r) + \tilde{T}(\vec{r}, t))}\right) \approx \left(1 - \frac{E}{RT_0(r)} \frac{\tilde{T}(\vec{r}, t)}{T_0(r)}\right) \exp\left(\frac{E}{RT_0(r)}\right). \quad (3.50)$$

Vzhľadom na predpoklad (3.19) a ďalší výskyt viskozity v súčine s gradientom rýchlosti v reologickom vzťahu (2.5), ktorý je prvého rádu malosti, je vhodné aproximovať závislosť na teplote absolútnym členom, t.j.

$$\eta \sim \exp\left(\frac{E}{RT_0(r)}\right). \quad (3.51)$$

Analogicky je možné sa vysporiadať so závislosťou na $(T_0(r) + \tilde{T}(\vec{r}, t))^l$. Podobne, ako v prípade rovnice (3.50) vychádza celková závislosť viskozity na teplote v tvare

$$\eta \sim T_0^l(r) \exp\left(\frac{E}{RT_0(r)}\right). \quad (3.52)$$

3.11.2 Úprava napäťovej závislosti viskozity

Kvôli výpočtovej náročnosti a ďalšiemu použitiu rozkladu do sférických harmoník bude ďalej závislosť na napätí aproximovaná pomocou prepisu (viď Čadek et al. [2017])

$$\tau_{II}(\vec{r}, t) \approx \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^D(\vec{r}, t) : \boldsymbol{\tau}^D(\vec{r}, t) d\Omega} =: \bar{\tau}(r, t), \quad (3.53)$$

kde $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}$ označuje úplné úženie tenzora $\boldsymbol{\tau}$ so sebou, Ω má v tomto vzťahu význam priestorového uhla, pričom sa integruje cez celý priestorový uhol, $\bar{\tau}(r, t)$ je označenie zavedenej veličiny.

Dosadením vzťahov (3.52) a (3.53) do (2.3) vychádza predpis pre jednotlivé creepové mechanizmy v tvare

$$\eta_{creep}(r, t) = \frac{T_0^l(r) d^m}{2A\bar{\tau}^{(n-1)}(r, t)} \exp\left(\frac{E}{RT_0(r)}\right). \quad (3.54)$$

3.11.3 Úprava viskoelastickej reológie

Uvážením rozkladu napätia (3.5) a predpisu pre jednotlivé creepy (3.54) vychádza dosadením do vzťahu pre viskoelastickú reológiu (2.5) (objektívnu deriváciu \hat{D}_t linearizujeme jednoduchým prechodom k parciálnej časovej derivácii)

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_I^D(\vec{r}, t) - \eta_I(r, t) \left(\nabla \vec{v}_I(\vec{r}, t) + (\nabla \vec{v}_I(\vec{r}, t))^T \right) = -\frac{\eta_I(r, t)}{\mu_I} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_I^D(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.55)$$

Modul torzie ladu μ považujeme za konštantu rámci ladovej kôry.

4. Harmonický rozklad rovníc

Rovnice popisujúce vývoj systému z počiatočného, sféricky symetrického stavu majú charakter sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc. Takáto sústava je prakticky ťažko riešiteľná priamo, najmä ak sú zahrnuté zložitejšie efekty ako napr. napätová a teplotná závislosť viskozity. Všetky aproximácie riadiacich rovníc uvedené v práci viedli k linearizácií rovníc v laterálnej závislosti prírastkových členov. Dôvodom je použitie harmonického rozkladu a prechod od sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc k sústave obyčajných diferenciálnych rovníc pre každý harmonický stupeň zvlášť.

4.1 Zhrnutie riadiacich rovníc v linearizovanom tvare

Zápis rovníc z predchádzajúcich kapitol obsahuje zložitejšie značenie, ako je nutné pre ďalšie pokračovanie práce. Špeciálne nie je nutné indexovať prírastkové veličiny ($\tilde{\tau}_I, \vec{v}_I, \tilde{T}_I, \vec{u}_I$), pretože výpočtovou oblasťou je sféricky symetrická množina ohraničená sférami s polomeri R_d, R_u (viď *obrázok 3.1*) vyplnená ladom. V uvažovanej výpočtovej oblasti bude riešená nasledovná sústava parciálnych diferenciálnych rovníc

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\tau}(\vec{r}, t) = \rho_I \nabla V_\delta(\vec{r}, t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\lambda_I}{c_I \rho_I} \Delta \tilde{T}(\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_r \frac{\partial T_0(r)}{\partial r}, \quad (4.3)$$

s okrajovými podmienkami v tvare

$$\vec{e}_r \cdot \tilde{\tau}(\vec{R}_d, t) - \Delta \rho g(R_d) u^r(\vec{R}_d, t) \vec{e}_r = \rho_W V_\delta(\vec{R}_d, t) \vec{e}_r, \quad (4.4)$$

$$\vec{e}_r \cdot \tilde{\tau}(\vec{R}_u, t) + \rho_I g(R_u) u^r(\vec{R}_u, t) \vec{e}_r = \vec{0}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{T}(\vec{R}_d, t) = -u^r(\vec{R}_d, t) \frac{\partial T_0(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_d}, \quad (4.6)$$

$$\tilde{T}(\vec{R}_u, t) = -u^r(\vec{R}_u, t) \frac{\partial T_0(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_u}, \quad (4.7)$$

kde bol pre jednoduchosť zavedený hustotný skok $\Delta \rho = \rho_W - \rho_I$ v rovnici (4.4). Okrajová väzba medzi termálnou a mechanickou sústavou je realizovaná nasledovnými vzťahmi

$$u^r(\vec{R}_d, t) = \int_0^t \vec{e}_r \cdot \left(\vec{v}(\vec{R}_d, t') + \frac{1}{\rho_I L_I} \left(\lambda_I \nabla \tilde{T}(\vec{R}_d, t') + \vec{q}_W(\vec{R}_d, t') \right) \right) dt', \quad (4.8)$$

$$u^r(\vec{R}_u, t) = \int_0^t \vec{e}_r \cdot \vec{v}(\vec{R}_u, t') dt'. \quad (4.9)$$

V lade je predpísaná viskoelastická reológia zväzujúca napätie a rýchlosť vzťahom

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^D(\vec{r}, t) - \eta_I(r, t) \left(\nabla \vec{v}(\vec{r}, t) + (\nabla \vec{v}(\vec{r}, t))^T \right) = -\frac{\eta_I(r, t)}{\mu_I} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}^D(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.10)$$

kde $\boldsymbol{\tau}^D$ značí deviatorickú časť tenzora a závislosť viskozity ľadu $\eta_I(r, t)$ bola detailne diskutovaná v kapitolách 2 a 3.

4.2 Rozklad rovníc

Rovnice (4.1)-(4.10) budú rozložené na jednotlivé harmonické stupne dosadením predpisu (pre podrobnosti viď Appendix B, resp. Matas [1995])

$$\tilde{T}(\vec{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j T_{jm}(r, t) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (4.11)$$

$$u^r(\vec{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j u_{jm}^r(r, t) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (4.12)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} v_{jm}^l(r, t) \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi), \quad (4.13)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\vec{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=0}^2 \sum_{l=|j-k|}^{j+k} \tau_{jm}^{lk}(r, t) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi), \quad (4.14)$$

kde $T_{jm}(r, t)$, $u_{jm}^r(r, t)$, $v_{jm}^l(r, t)$, $\tau_{jm}^{lk}(r, t)$ sú harmonické koeficienty jednotlivých veličín na stupni j a ráde m . Dosadením vzťahov (4.11)-(4.14) do rovníc (4.1)-(4.10) a využitím vlastností sférických harmoník (viď Appendix B a Matas [1995]) sa vznikajúca sústava rovníc rozpadá na dve nezávislé sústavy, z ktorých prvá spája harmonické koeficienty $v_{jm}^{j-1}(r, t)$, $v_{jm}^{j+1}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j0}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j-2,2}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j2}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j+2,2}(r, t)$, $T_{jm}(r, t)$ v sústave rovníc a k nim pridáva koeficienty $u_{jm}^r(R_d, t)$, $u_{jm}^r(R_u, t)$ v okrajových podmienkach, zatiaľ čo druhá sústava spája harmonické koeficienty $v_{jm}^j(r, t)$, $\tau_{jm}^{j-1}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j+1}(r, t)$. Pravé strany a okrajové podmienky druhej sústavy sú identicky nulové, čo implikuje identicky nulové riešenie. Preto sa ďalej obmedzíme len na prvú sústavu rovníc a s ňou súvisiace koeficienty.

4.2.1 Harmonický rozklad potenciálu V_δ

Detailné odvodenie harmonického rozkladu potenciálu generovaného topografiou hraníc je možné nájsť v práci Matas [1995]. Na tomto mieste bude uvedený len výsledný tvar harmonických koeficientov $V_{jm}(r)$, pre ktoré platí

$$V_{jm}(r, t) = -\frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \left(\left(\frac{R_d}{r} \right)^{j+2} \Delta \rho u_{jm}^r(R_d, t) + \left(\frac{r}{R_u} \right)^{j-1} \rho_I u_{jm}^r(R_u, t) \right), \quad (4.15)$$

kde κ označuje všeobecnú gravitačnú konštantu.

4.2.2 Rozklad objemových rovníc

Harmonický rozklad rovníc (4.1), (4.2), (4.3) má tvar

$$\sqrt{j} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j-1}{r} \right) v_{jm}^{j-1}(r, t) - \sqrt{j+1} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+2}{r} \right) v_{jm}^{j+1}(r, t) = 0, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & - \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+1}{r} \right) \tau_{jm}^{j0}(r, t) + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j-2}{r} \right) \tau_{jm}^{j-2,2}(r, t) \\ & - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+1}{r} \right) \tau_{j,m}^{j2}(r, t) = \\ & = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}} 4\pi\kappa \left(\frac{r}{R_u} \right)^{j-1} \rho_I^2 u_{jm}^r(R_u), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r} \right) \tau_{jm}^{j0}(r, t) + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r} \right) \tau_{jm}^{j2}(r, t) \\ & - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+3}{r} \right) \tau_{j,m}^{j+2,2}(r, t) = \\ & = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} 4\pi\kappa \left(\frac{R_d}{r} \right)^{j+2} \Delta\rho\rho_I u_{jm}^r(R_d), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{jm}(r, t)}{\partial t} &= \frac{\lambda_I}{c_I \rho_I} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) T_{jm}(r, t) - \\ & - \frac{R_u R_d}{R_u - R_d} \frac{T_u - T_d}{r^2} \left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}} v_{jm}^{j-1}(r, t) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} v_{jm}^{j+1}(r, t) \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Pri úprave rovnice (4.19) bol využitý vzťah (3.16), pomocou ktorého bol vyjadrený gradient počiatočného teplotného poľa $\nabla T_0(r)$.

4.2.3 Rozklad okrajových podmienok

Rozklad okrajových podmienok (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) je v tvare

$$\begin{aligned} & - \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \tau_{jm}^{j0}(R_d, t) + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \tau_{jm}^{j-2,2}(R_d, t) - \\ & - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j-1)}} \tau_{jm}^{j2}(R_d, t) = \\ & = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \Delta\rho g(R_d) u_{jm}^r(R_d, t) + \sqrt{\frac{j}{2j+1}} V_{jm}(R_d, t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \tau_{jm}^{j0}(R_d, t) + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \tau_{jm}^{j2}(R_d, t) - \\ & - \sqrt{\frac{(j+2)}{(2j+3)}} \tau_{jm}^{j+2,2}(R_d, t) = \\ & = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \Delta\rho g(R_d) u_{jm}^r(R_d, t) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} V_{jm}(R_d, t), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
& - \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \tau_{jm}^{j0}(R_u, t) + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \tau_{jm}^{j-2,2}(R_u, t) - \\
& - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j-1)}} \tau_{jm}^{j,2}(R_u, t) = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \rho_I g(R_d) u_{jm}^r(R_u, t) , \quad (4.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \tau_{jm}^{j0}(R_u, t) + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \tau_{jm}^{j,2}(R_u, t) - \\
& - \sqrt{\frac{(j+2)}{(2j+3)}} \tau_{jm}^{j+2,2}(R_u, t) = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \rho_I g(R_d) u_{jm}^r(R_u, t) , \quad (4.23)
\end{aligned}$$

$$T_{jm}(R_d, t) = -\frac{R_u}{R_d} \frac{T_u - T_d}{R_u - R_d} u_{jm}^r(R_d, t) , \quad (4.24)$$

$$T_{jm}(R_u, t) = -\frac{R_d}{R_u} \frac{T_u - T_d}{R_u - R_d} u_{jm}^r(R_u, t) . \quad (4.25)$$

4.2.4 Rozklad posunutia hraníc

Rozklad vzťahov pre posunutie (4.8), (4.9) je v tvare

$$\begin{aligned}
u_{jm}^r(R_d, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} v_{jm}^{j-1}(R_d, t') - \sqrt{j+1} v_{jm}^{j+1}(R_d, t') \right) + \\
+ \frac{1}{L_I \rho_I} \left(\lambda_I \frac{\partial T_{jm}(R_d, t')}{\partial r} + q_{jm}^r(R_d, t') \right) dt' , \quad (4.26)
\end{aligned}$$

$$u_{jm}^r(R_u, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} v_{jm}^{j-1}(R_u, t') - \sqrt{j+1} v_{jm}^{j+1}(R_u, t') \right) dt' , \quad (4.27)$$

kde je pre jednoduchosť zavedené označenie pre radiálnu časť prírastku tepelného toku $q_{jm}^r(R_d, t') = (\vec{e}_r \cdot \vec{q}_W(R_d, t'))_{jm}$.

4.2.5 Rozklad viskozity a reologického modelu

Harmonický rozklad viskozity ľadu sa opiera o ortonormalitu zvoleného tvaru systému sférických harmoník vyjadrenú vzťahom (B.3). Dosadením harmonického rozkladu napätia (4.14) do (3.53) vychádza

$$\bar{\tau}(r, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_j \sum_m \left(|\tau_{jm}^{j-2,2}(r, t)|^2 + |\tau_{jm}^{j,2}(r, t)|^2 + |\tau_{jm}^{j+2,2}(r, t)|^2 \right)} . \quad (4.28)$$

V reologickom predpise (3.55) sa vyskytuje člen tvaru $\nabla v(\vec{r}, t) + (\nabla v(\vec{r}, t))^T$. Jedná sa o symetrický tenzor, ktorý je navyše vďaka rovnici kontinuity (4.1) bezostopý, t.j. v jeho harmonickom rozvoji sa uplatnia len členy s indexom $k = 2$ (viď Matas [1995]) a rozklad reologického predpisu (3.55) je v tvare

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\eta_I(r, t)}{\mu_I} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tau_{jm}^{j-2,2}(r, t) = \\
& = 2\eta_I(r, t) \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r} \right) v_{jm}^{j-1}(r, t) , \quad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\eta_I(r, t)}{\mu_I} \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{jm}^{j2}(r, t) = \\
& = -2\eta_I(r, t) \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j-1}{r}\right) v_{jm}^{j-1}(r, t) + \\
& + 2\eta_I(r, t) \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+2}{r}\right) v_{jm}^{j+1}(r, t), \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\eta_I(r, t)}{\mu_I} \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{jm}^{j+2,2}(r, t) = \\
& = -2\eta_I(r, t) \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+1}{r}\right) v_{jm}^{j+1}(r, t). \quad (4.31)
\end{aligned}$$

4.3 Harmonická analýza podmienok platnosti linearizácie

Linearizácia radiacích rovníc je platná len za predpokladov (3.6), (3.7), (3.19), (3.20). Je teda nutné počas výpočtu kontrolovať platnosť týchto obmedzení, pričom vzhľadom na charakter výpočtu je najvýhodnejšie namiesto veľkosti použiť normu $L^2(\partial B_r(0))$, kde $B_r(0)$ je sféra s polomerom r so stredom v počiatku súradnicovej sústavy. Výhodou je jednoduchá implementácia využitím ortogonalnosti sférických harmoník (B.3), čo v prípade podmienok kladených na napätie vedie k vzťahom (pre jednoduchosť budú vynechané premenné koeficientov a tlaku p_0 , pretože všetky veličiny sú radiálne závislé a podmienky na napätie sa obmedzujú len na rozhrania, t.j. R reprezentuje polomer sféry definujúcej rozhranie)

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{jm} \left(|\tau_{jm}^{j0}|^2 + |\tau_{jm}^{j-2,2}|^2 + |\tau_{jm}^{j2}|^2 + |\tau_{jm}^{j+2,2}|^2 \right)} \ll R \left| \frac{\partial p_0}{\partial r} \right|, \quad (4.32)$$

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{jm} \left(\left| \frac{\partial \tau_{jm}^{j0}}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tau_{jm}^{j-2,2}}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tau_{jm}^{j2}}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tau_{jm}^{j+2,2}}{\partial r} \right|^2 \right)} \ll \left| \frac{\partial p_0}{\partial r} \right|. \quad (4.33)$$

Podmienky kladené na teplotu je nutné testovať vrámci celej ladovej kôry v tvare

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{jm} |T_{jm}|^2} \ll |T_0|, \quad (4.34)$$

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{jm} \left(\left| \frac{\partial T_{jm}}{\partial r} \right|^2 + \frac{j(j+1)}{r^2} |T_{jm}|^2 \right)} \ll \left| \frac{\partial T_0}{\partial r} \right|. \quad (4.35)$$

5. Numerická aproximácia a približné riešenie rovníc

Od všeobecných rovníc popisujúcich deformáciu ladových mesiacov odvodených v prvej kapitole sme sa posunuli k jednoduchšej sústave rovníc pre každý harmonický stupeň a rád zvlášť (viď kapitoly 3 a 4). Neznámymi tejto sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc sú $v_{jm}^{j-1}(r, t)$, $v_{jm}^{j+1}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j0}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j-2,2}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j2}(r, t)$, $\tau_{jm}^{j+2,2}(r, t)$, $T_{jm}(r, t)$. Pretože sústava je na analytické riešenie príliš zložitá, bude pomocou časo-priestorovej diskretizácie prevedená na sústavu lineárnych algebraických rovníc. Presnejšie, kvôli jednoduchšej numerickej implementácii bude sústava prevedená na dve ovplyvňujúce sa sústavy lineárnych algebraických rovníc, ktoré budú v každom časovom kroku riešené po sebe vo vhodnom poradí.

Prvá sústava je tvorená diskretizovanými mechanickými rovnicami a ich okrajovými podmienkami (4.16), (4.17), (4.18), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), (4.29), (4.30), (4.31). Druhá sústava je tvorená diskretizovanou rovnicou vedenia tepla a jej okrajovými podmienkami (4.19), (4.24), (4.25). Základom priestorovej diskretizácie rovníc je rozdelenie ladovej kôry na ekvidistantne rozložené sústredné sféry, ktorých vzdialenosť bude označená Δr . Na druhej strane, základom časovej diskretizácie je prechod od spojitej premennej t k postupnosti diskkrétne rozložených bodov $\{t_k\}_{k=0}^n$, pričom tzv. časový krok bude označenie pre veličinu definovanú ako $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Väčší priestor bude technike časo-priestorovej diskretizácie venovaný v nasledujúcich odstavcoch a pri príkladoch.

Obe sústavy rovníc (ďalej pojmom sústava rovníc myslíme sústavu algebraických rovníc vzniknutých diskretizáciou) je možné zapísať v kompaktnom maticovom tvare

$$A_{mech}(j, \Delta r, \Delta t_n) x_n^{mech} = b^{mech}(x_{n-1}^{mech}, x_{n-1}^{temp}), \quad (5.1)$$

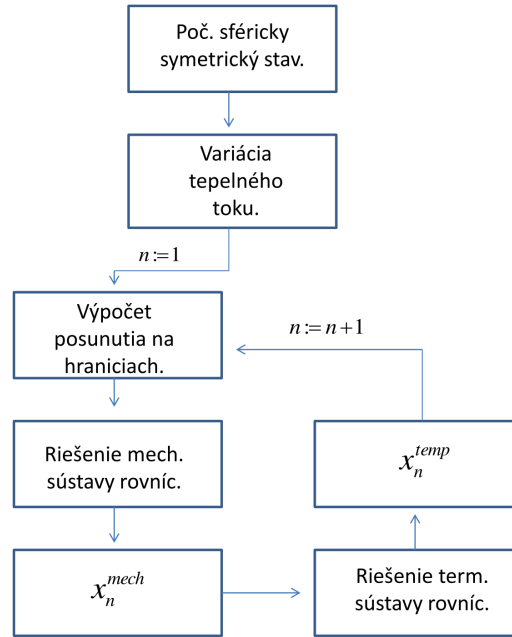
$$A_{temp}(j, \Delta r, \Delta t_n) x_n^{temp} = b^{temp}(x_n^{mech}, x_{n-1}^{temp}), \quad (5.2)$$

kde neznámymi vektormi x_n^{mech} , x_n^{temp} sú hodnoty skúmaných veličín (koeficienty napätia, rýchlosti a teploty) v čase t_n a tvar matíc $A_{mech}(j, \Delta r, \Delta t_n)$, resp. $A_{temp}(j, \Delta r, \Delta t_n)$ (pre jednoduchosť je vynechaná závislosť na polohe v ladovej kôre a čase, ktorá pre pochopenie rozkladu rovníc nie je významná), bude odvodený v ďalších kapitolách s dôrazom kladeným na rýchlosť výpočtu. Schematický zápis postupu riešenia získanej sústavy sústav rovníc je vyobrazený na *obrázku 5.1*.

5.1 Diskretizácia rovníc

Pre zjednodušenie zápisu je ďalej spodný dvojitý index označujúci stupeň a rád harmonického rozvoja jm nahradený dvojitým indexom označujúcim pozíciu v časovej diskretizácii n a pozíciu v priestorovej diskretizácii i , t.j. napr. pre rýchlosť platí $v_{jm}^{j-1}(r_i^*, t_n) = v_{ni}^{j-1}$, kde symbol r_i^* označuje vedľajšiu sféru priestorovej diskretizácie (podrobnosti v ďalších odstavcoch).

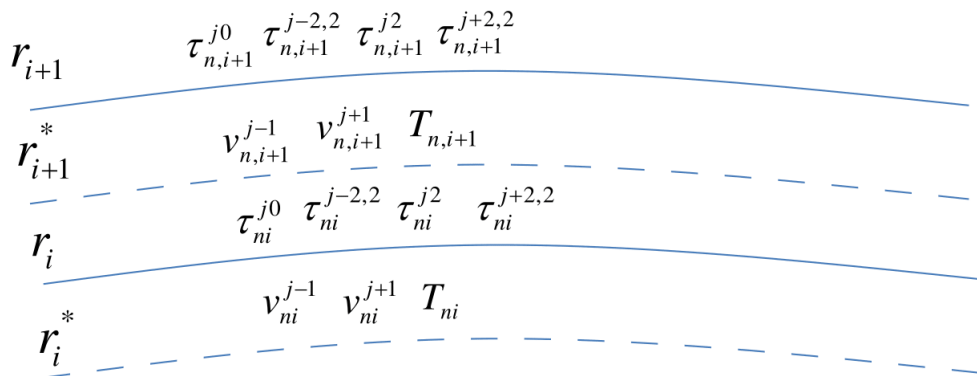
Obr. 5.1: Časová slučka riešenia problému.



5.1.1 Priestorová diskretizácia

Ladová kôra je diskretizovaná na N hlavných sfér s polermi $[r_i]_{i=1}^N$, kde $r_1 = R_d$ a $r_{i+1} = r_i + \Delta r$, $\Delta r = \frac{R_u - R_d}{N-1}$. Vedľajšia sieť je tvorená N sférami (posunutými o $\Delta r/2$ nadol voči hlavnej sieti) s polermi $[r_i^* = r_i - \frac{\Delta r}{2}]_{i=1}^N$ a dodatkovou $(N+1)$ -vou sférou s polomerom $r_{N+1}^* = r_N + \frac{\Delta r}{2}$. Na sférah hlavnej siete sú dané hodnoty koeficientov napätia τ_{ni}^{j0} , $\tau_{ni}^{j-2,2}$, τ_{ni}^{j2} , $\tau_{ni}^{j+2,2}$, na sférah vedľajšej siete naopak hodnoty koeficientov rýchlosti v_{ni}^{j-1} , v_{ni}^{j+1} a teploty T_{ni} . Schematické znázornenie takého usporiadania je uvedené na obrázku 5.2.

Obr. 5.2: Znázornenie diskretizácie a koeficientov.



Priestorové derivácie v rovniciach sú nahradené jednoduchými diferenciami pomocou predpisu

$$\frac{\partial f(r_i, t)}{\partial r} \approx \frac{f(r_i + \Delta r/2, t) - f(r_i - \Delta r/2, t)}{\Delta r}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial r^2} \approx \frac{f(r + \Delta r, t) - 2f(r, t) + f(r - \Delta r, t)}{\Delta r^2}. \quad (5.4)$$

Prirodzené je teda prvé priestorové derivácie napäťových koeficientov počítat na sférach vedľajšej siete, naopak prvé priestorové derivácie teplotného a rýchlostných koeficientov na sférach hlavnej siete - toto delenie vystihuje výskyt veličín a ich derivácií v rovniciach (4.16)-(4.31). Analogicky druhá priestorová derivácia teplotných koeficientov je počítaná na sférach vedľajšej diskretizácie.

5.1.2 Časová diskretizácia

Z časového hľadiska diskretizácia spočíva vo využití diskrétného časového kroku Δt_k , ktorý sa vzhľadom na potrebu simulovať správanie systému na veľkých časových škálach bude meniť. Pripomíname, že jednotlivé časové kroky sú indexované indexom k a platí $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$. Časová derivácia bude nahradená analogicky vzťahu (5.3) pomocou predpisu Eulerovej doprednej schémy

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} \approx \frac{f(r, t) - f(r, t - \Delta t)}{\Delta t} . \quad (5.5)$$

5.1.3 Diskretizácie niektorých rovníc

Vzhľadom na jednoduchosť diskretizácie rovníc bude uvedených 5 príkladov diskretizácie, a to rovnica kontinuity, pohybová rovnica na harmonike \vec{Y}_{jm}^{j-1} , reológia na harmonike $\mathbf{Y}_{jm}^{j-2,2}$, rovnica vedenia tepla a posunutie na spodnej hranici.

Diskretizácia rovnice kontinuity

Diskretizácia rovnice (4.16) má tvar

$$\begin{aligned} & \sqrt{j} \left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{j-1}{2r_i} \right) v_{ni}^{j-1} + \sqrt{j+1} \left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{j+2}{2r_i} \right) v_{ni}^{j+1} + \\ & + \sqrt{j} \left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{j-1}{2r_i} \right) v_{n,i+1}^{j-1} + \sqrt{j+1} \left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{j+2}{2r_i} \right) v_{n,i+1}^{j+1} = 0 . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Diskretizácia pohybovej rovnice

Diskretizácia rovnice (4.17) má tvar

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{j+1}{r_{i-1} + r_i} \right) \tau_{n,i-1}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{j-2}{r_{i-1} + r_i} \right) \tau_{n,i-1}^{j-2,2} + \\ & + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{j+1}{r_{i-1} + r_i} \right) \tau_{n,i-1}^{j2} + \\ & + \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{j+1}{r_{i-1} + r_i} \right) \tau_{ni}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{j-2}{r_{i-1} + r_i} \right) \tau_{ni}^{j-2,2} + \\ & + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{j+1}{r_{i-1} + r_i} \right) \tau_{ni}^{j2} = \\ & = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}} 4\pi\kappa\rho_I^2 \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2R_u} \right)^{j-1} u_{n-1}(R_u) . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Diskretizácia reologického predpisu

Diskretizácia rovnice (4.29) má tvar

$$2\eta_I(r_i)\sqrt{\frac{j-1}{2j-1}}\left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{j}{2r_i}\right)v_{ni}^{j-1} + \left(1 + \frac{\eta_I(r_i, t_{n-1})}{\mu_I} \frac{1}{\Delta t}\right)\tau_{ni}^{j-2,2} +$$

$$+ 2\eta_I(r_i)\sqrt{\frac{j-1}{2j-1}}\left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{j}{2r_i}\right)v_{n,i+1}^{j-1} = \frac{\eta_I(r_i, t_{n-1})}{\mu_I} \frac{1}{\Delta t}\tau_{n-1,i}^{j-2,2}. \quad (5.8)$$

Diskretizácia rovnice vedenia tepla

Diskretizácia rovnice (4.19) má tvar

$$-\left(\frac{r_{i-1}}{r_{i-1} + r_i} \frac{2}{\Delta r}\right)^2 T_{n,i-1} + \left(\frac{c_I \rho_I}{\lambda_I} \frac{1}{\Delta t_n} + \frac{r_i^2 + r_{i-1}^2 + 4j(j+1)\Delta r^2}{((r_{i-1} + r_i)\Delta r)^2}\right) T_{ni} -$$

$$-\left(\frac{r_i}{r_{i-1} + r_i} \frac{2}{\Delta r}\right)^2 T_{n,i+1} = \frac{c_I \rho_I}{\lambda_I} \frac{1}{\Delta t_n} T_{n-1,i} -$$

$$-\frac{c_I \rho_I}{\lambda_I} \frac{R_u R_d}{R_u - R_d} \frac{4(T_u - T_d)}{(r_{i-1} + r_i)^2} \left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}} v_{ni}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} v_{ni}^{j+1}\right). \quad (5.9)$$

Diskretizácia vzťahu pre posunutie na hornom rozhraní

Integrál obsiahnutý vo vzťahu pre posunutie na spodnej hranici (4.27) bude aproximovaný pomocou lichobežníkového pravidla, čím rovnica získa tvar

$$u_n(R_u) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} \frac{v_{Nk}^{j-1} + v_{N+1,k}^{j-1}}{2} - \sqrt{j+1} \frac{v_{Nk}^{j+1} + v_{N+1,k}^{j+1}}{2} \right) \frac{\Delta t_k + \Delta t_{k+1}}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} \frac{v_{Nn}^{j-1} + v_{N+1,n}^{j-1}}{2} - \sqrt{j+1} \frac{v_{Nn}^{j+1} + v_{N+1,n}^{j+1}}{2} \right) \Delta t_n, \quad (5.10)$$

kde $u_n(R_u) = u_{jm}^r(R_u, t_n)$. Analogicky je diskretizovaná aj rovnica pre posunutie na spodnom rozhraní. Jediný rozdiel je v prídavných tepelných členoch. Zatiaľ čo tepelný tok je daný, gradient teplotného poľa $\frac{\partial T_{jm}}{\partial r}$ je určený na základe hodnôt koeficientov $T_{n-1,1}$, $T_{n-1,2}$, t.j. na základe výsledkov predošlého časového kroku.

5.2 Formálny zápis získanej sústavy lineárnych algebraických rovníc

Diskretizáciou rovníc vychádza sústava lineárna algebraických rovníc pre $(6N+2) + (N+1)$ neznámych (v poradí neznáme mechanickej sústavy a neznáme teplotnej sústavy rovníc). Ďalej budú analyzované obe sústavy samostatne.

5.2.1 Sústava mechanických rovníc

Premennými mechanickej sústavy rovníc sú v každom časovom kroku koeficienty v nasledovnom poradí $\left[v_{ni}^{j-1}, v_{ni}^{j+1}, \tau_{ni}^{j0}, \tau_{ni}^{j-2,2}, \tau_{ni}^{j2}, \tau_{ni}^{j+2,2} \right]_{i=1}^N, v_{n,N+1}^{j-1}, v_{n,N+1}^{j+1}$.

K týmto $6N+2$ neznámym prislúcha $6N+2$ rovníc, ktoré je možné kompaktné zapísať v tvare maticovej rovnice (5.1), ktorej maticu je možné schematicky zapísať nasledovne

$$A_{mech} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Spodné rozhranie (2 riadky)} \\ \text{Rovnica kontinuity (1 riadok)} \\ \text{Reologická rovnica (3 riadky)} \end{pmatrix} & (1) - \text{krát} \\ \begin{pmatrix} \text{Pohybová rovnica (2 riadky)} \\ \text{Rovnica kontinuity (1 riadok)} \\ \text{Reologická rovnica (3 riadky)} \end{pmatrix} & (n-1) - \text{krát} \\ \begin{pmatrix} \text{Horné rozhranie (2 riadky)} \end{pmatrix} & (1) - \text{krát} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Koeficienty matice plynú z diskretizácie mechanických rovníc. Poradie neznámych, a teda aj poradie riadkov matice, nie je volené náhodne, ale táto voľba poradia dáva symetrickú pásovú maticu so šírkou pásu 15. Tento tvar matice je vhodný pre následné riešenie vzniknutej sústavy špecializovanými riešičmi.

5.2.2 Sústava teplotných rovníc

Premennými teplotnej sústavy rovníc sú v každom časovom kroku koeficienty $[T_{ni}]_{i=1}^{N+1}$. K týmto $N+1$ neznámym prislúcha $N+1$ rovníc kompaktné zapísaných v maticovom tvare s maticou sústavy v schematickom tvare

$$A_{temp} = \begin{pmatrix} \text{Spodné rozhranie} & (1) - \text{krát} \\ \text{Rovnica vedenia tepla} & (n-1) - \text{krát} \\ \text{Horné rozhranie} & (1) - \text{krát} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Matica teplotnej sústavy A_{temp} je tridiagonálna matica, ktorej koeficienty plynú z diskretizácie teplotných rovníc.

5.3 Numerická analýza podmienok linearizácie

Harmonický prepis podmienok linearizácie (4.32) - (4.35) neobsahuje členy, ktoré by potrebovali bližší komentár, preto na tomto mieste vynecháme numerický prepis podmienok spočívajúci v dosadení aproximácie derivácie v tvare (5.3) do podmienok. Pre ilustráciu bude uvedený len zápis podmienok kladených na hodnoty napätia a teploty, t.j. rovníc (4.32), (4.34)

$$\max_{i \in \{1; N\}} \frac{\sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{jm} \left(|\tau_{ni}^{j0}|^2 + |\tau_{ni}^{j-2,2}|^2 + |\tau_{ni}^{j2}|^2 + |\tau_{ni}^{j+2,2}|^2 \right)}}{r_i \left| \frac{\partial p_0(r_i)}{\partial r} \right|} \ll 1, \quad (5.13)$$

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} \frac{\sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{jm} \left| \frac{T_{ni} + T_{n,i+1}}{2} \right|^2}}{T_0(r_i)} \ll 1. \quad (5.14)$$

6. Výsledky simulácií a diskusia

Rovnice plynúce z harmonického rozkladu a následnej diskretizácie riadiacich rovníc boli prepísané do formy programu v jazyku Fortran95, pomocou ktorého boli získané výsledky v tvare topografií vznikajúcich na ladových mesiacoch Enceladus, Európa a Titan. Vzhľadom na výsledky z článku Čadek et al. [2017], je ako reprezentatívny model ladovej kôry zvolený tzv. referenčný model pracujúci s hodnotami parametrov zhrnutými v nasledovnej *tabuľke 6.1*.

Tabuľka 6.1: Hodnoty parametrov ladovej kôry v referenčnom modeli.

Parameter	Hodnota
d	1 mm
q_{j0}	1 mW.m ⁻²
η_{cutoff}	10 ²² Pa.s

Pre každý z mesiacov je uvedená sada výsledkov, ktorá začína vykreslením normovanej topografie definovanej vzťahom (viď Čadek et al. [2017])

$$S_{j0}(t) = -\frac{\rho_I u_{j0}^r(R_u, t)g(R_u)}{(\rho_W - \rho_I)u_{j0}^r(R_d, t)g(R_d)} \frac{R_u^2}{R_d^2}, \quad (6.1)$$

ďalej obsahuje posunutie na spodnej hranici, radiálnu rýchlosť tečenia ľadu na spodnej hranici a maximum druhého invariantu napätia v ladovej kôre na harmonickom stupni $j0$. Výsledky sú prezentované pre parametre referenčného modelu a následne pre zmenu každého z parametrov referenčného modelu samostatne. Sada výsledkov pre daný mesiac uzatvára skúmanie platnosti linearizácie pre referenčné nastenie parametrov. Spolu s podmienkami (3.6), (3.7), (3.19), (3.20) je skúmaná oblasť platnosti tzv. Drucker-Pragerovho kritéria, ktoré určuje oblasť platnosti reologického predpisu. Toto kritérium je v prípade ladových mesiacov vyjadrené vzťahom

$$|\tilde{\tau}_I^D(\vec{r}, t)| < 0.15p_0(r). \quad (6.2)$$

Prepis vzťahu (6.2) do sférických harmoník a následná diskretizácia je analogická postupu pri podmienkach platnosti linearizácie teórie (využitie L^2 normy a vlastností harmoník) a na tomto mieste bude vynechaný. Výsledky testovania podmienky plasticity budú uvedené v tvare percentuálneho zastúpenia hrúbky ladovej kôry (od spodného rozhrania), v ktorom podmienka (6.2) platí.

6.1 Testovanie programu

Vytvorený program bol testovaný po kusoch. To znamená, že časť programu počítajúca mechanickú sústavu rovníc bola testovaná pomocou podobného programu vytvoreného prof. Čadekom, analogicky bola testovaná časť programu počítajúca teplotnú sústavu rovníc pomocou programu prof. Čadeka. Správnosť kompletného programu je podmienená správnosťou jednotlivých častí a spojitou pribehom topografií pri testoch pre zadané hodnoty parametrov reálnych mesiacov.

6.2 Enceladus

V prípade simulácií pre teleso veľkosti Enceladu sú výsledky podobné výsledkom, ktoré boli dosiahnuté v práci Čadek et al. [2017]. Limitný stav izostázy ladovej kôry dosiahnu harmonické stupne $j \leq 11$ (viď *obrázok 6.1*), pričom priebeh normovanej topografie takmer nezávisí na veľkosti ladového zrna d alebo veľkosti tepelného toku na danom harmonickom stupni - q_{j0} . Hodnota ohraničenia viskozity η_{cutoff} vplýva na čas, ktorý ladová kôra potrebuje na dosiahnutie izostázy, pretože s rastúcou hodnotou klesá mobilita ladu na hornom rozhraní, čím brzdí vývoj topografie na hornom rozhraní.

Topografia na spodnom rozhraní dosahuje maximum pri veľkosti zrna ladu 1 mm a 10 mm v čase $2 \times 10^7 - 4 \times 10^7$ rokov nezávisle na nastavení tepelného toku a ohraničenia viskozity na hornom rozhraní (viď *obrázok 6.2*). Pre malé zrno, t.j. 0.1 mm, konverguje topografia približne 100-krát rýchlejšie. Tieto radikálne rozdiely sú dané silnou závislosťou difúznej časti viskozity na tomto parametri (práve difúzna zložka viskozity je najvýznamnejšia vzhľadom na malé hodnoty druhého invariantu napätia - podrobnejšie diskutované neskôr). Veľkosť topografie klesá nelineárne s klesajúcou veľkosťou zrna - dôvod je analogický, ako pri konvergenčom čase, a to klesajúca viskozita dovoľuje ladu sa rozlúčiť skôr a tým zastaviť vývoj topografie (viď rovnicu (3.40)). Na veľkosti tepelného toku topografia závisí približne lineárne.

Rýchlosť tečenia ladu na spodnom rozhraní je zo sledovaných veličín najsilnejšie ovplyvnená práve veľkosťou ladového zrna - viď *obrázok 6.3*. Podrobnejšiemu skúmaniu bude v tejto práci podrobený harmonický stupeň 2, na ktorom dochádza k najvýraznejším efektom. Rovnica (3.40) dáva podmienku platnú v limite ustáleného stavu v tvare (pre všeobecný harmonický stupeň)

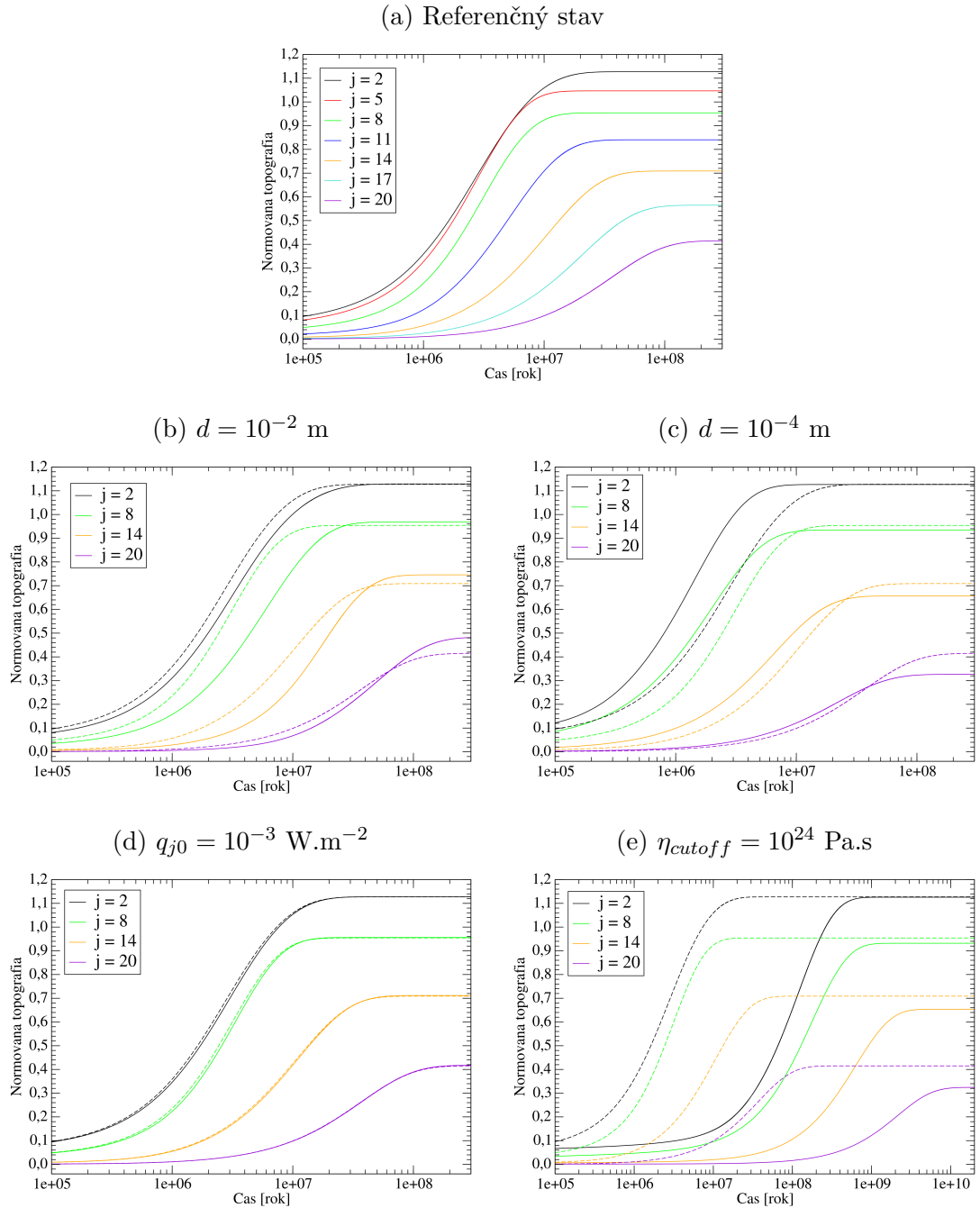
$$v_{jm}(R_d) + \frac{\lambda_I}{\rho_I L_I} \frac{\partial T_{jm}}{\partial r} \Big|_{r=R_d} + \frac{1}{\rho_I L_I} q_{jm} = 0 . \quad (6.3)$$

V prípade malého zrna (0.1 mm) je zrejmé, že všetok tepelný tok, t.j. kryštalizácia/topenie ladu, je vyrovnaný prudkým tečením na spodnej strane ladovej kôry. S rastúcou veľkosťou ladového zrna sa zvyšuje príspevok gradientu teplotného poľa na vyrovnaní tepelného toku, až v prípade veľkého zrna (10 mm) na harmonickom stupni 2 lad už netečie a všetok tepelný tok je vyrovnaný gradientom teplotného poľa v ladovej kôre (to súvisí s nárastom veľkej topografie, ktorá musí vytvoriť dostatočný kontrast v teplotom poli).

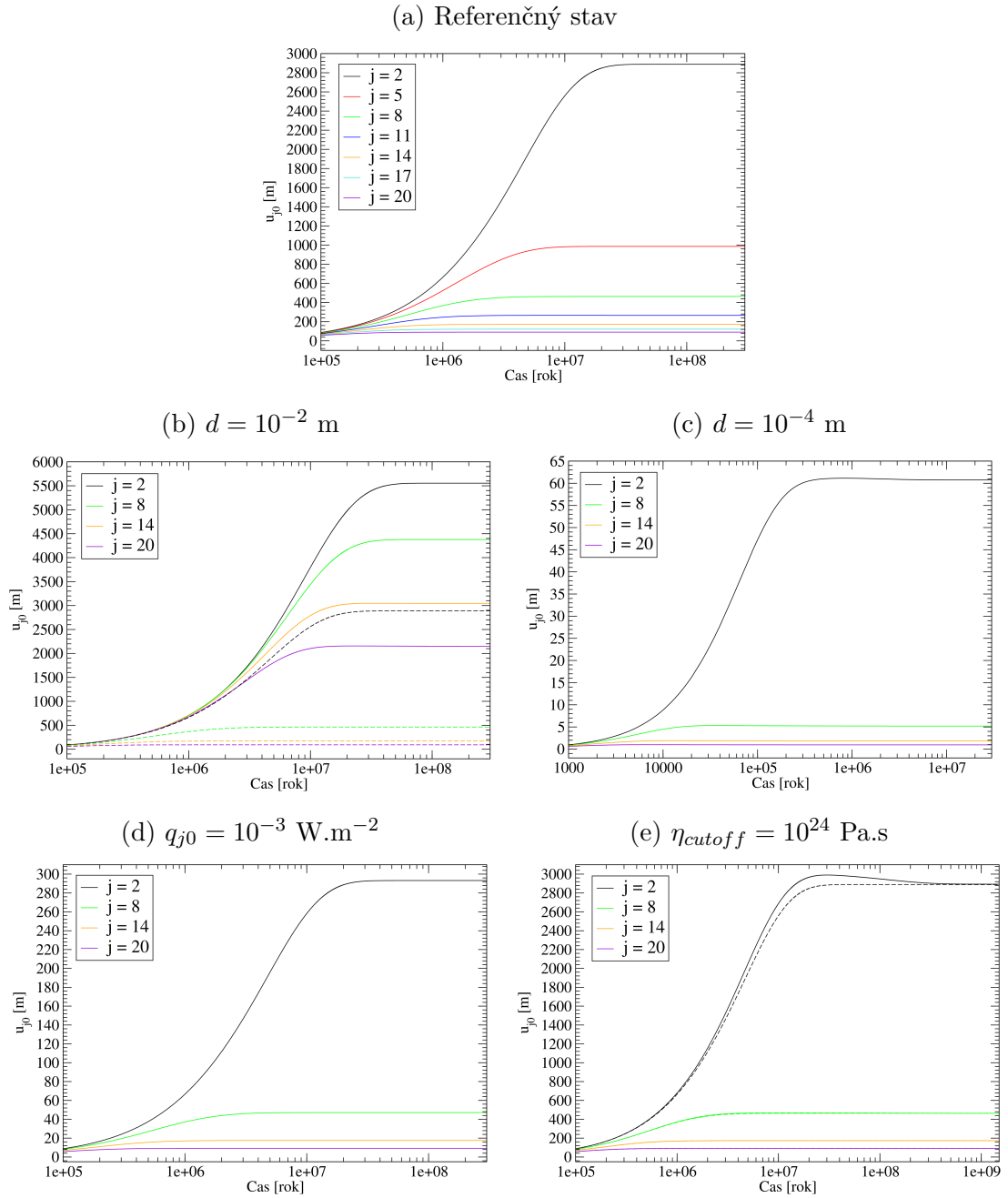
Druhý invariant napätia v prípade mesiaca veľkosti Enceladus neprekračuje v referenčnom stave hranicu 10^5 Pa (*obrázok 6.4*), pri ktorej by sa začali prejavovať mechanické creepové mechanizmy, ktorých veľkosť je možné len odhadovať (kvôli časovej náročnosti výpočtu) práve pomocou veľkosti napätia.

Linearizovaná teória je v prípade referenčného stavu v oblasti platnosti (*obrázok 6.5*). S rastúcou veľkosťou zrna však rastúca topografia zvyšuje teplotný kontrast a gradient teploty ako aj samotná teplota prestávajú spĺňať podmienky platnosti linearizácie.

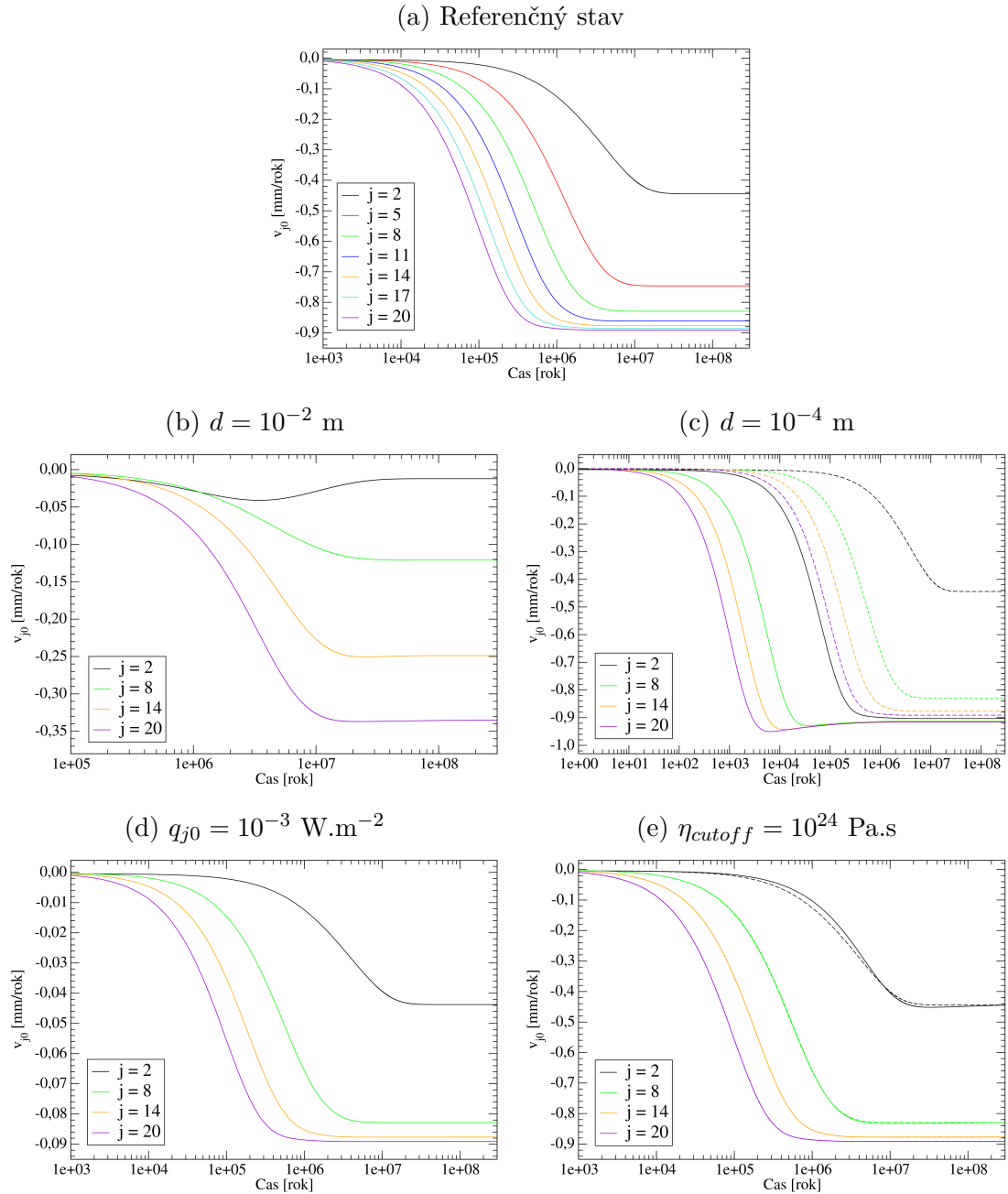
Obr. 6.1: Normovaná topografia za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.



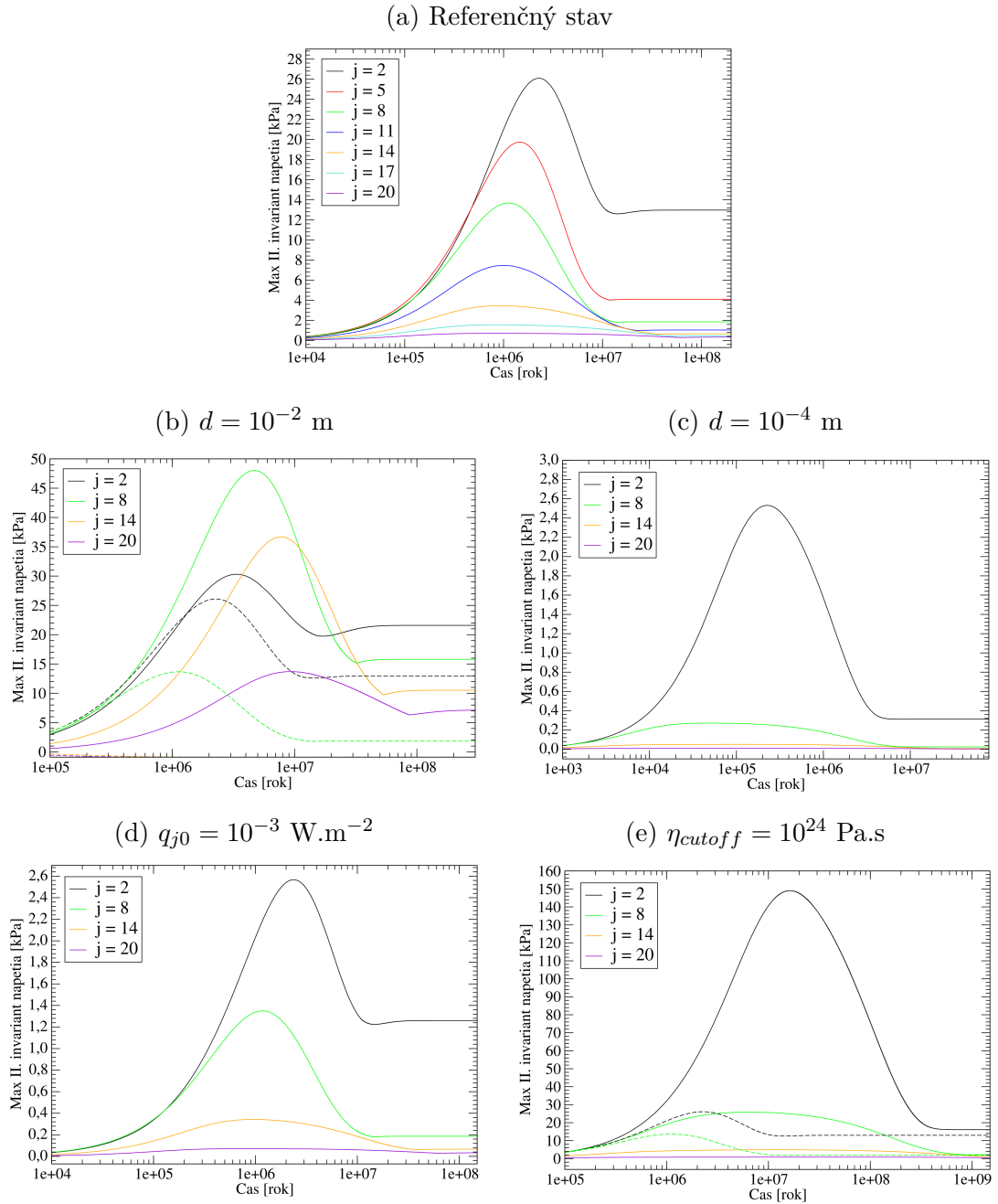
Obr. 6.2: Topografia na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.



Obr. 6.3: Rýchlosť ľadu na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

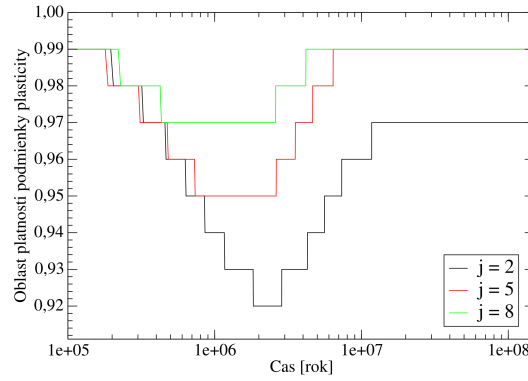


Obr. 6.4: Maximum druhého invariantu napätia v ladovej kôre za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

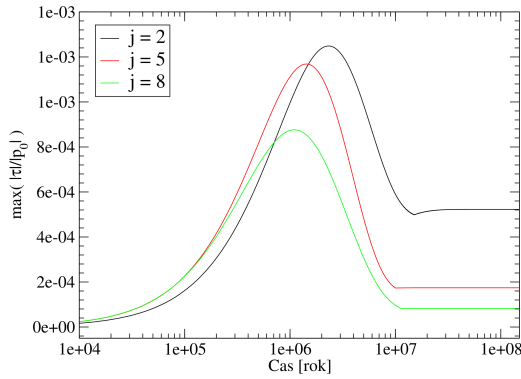


Obr. 6.5: Kontrola podmienok linearezácie (3.6), (3.7), (3.19), (3.20) v ladovej kôre za podmienok referenčného stavu na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$.

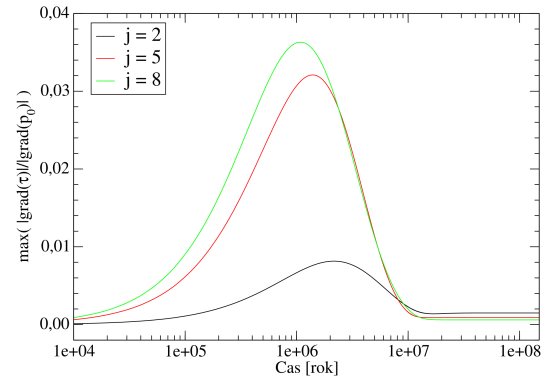
(a) Plasticita



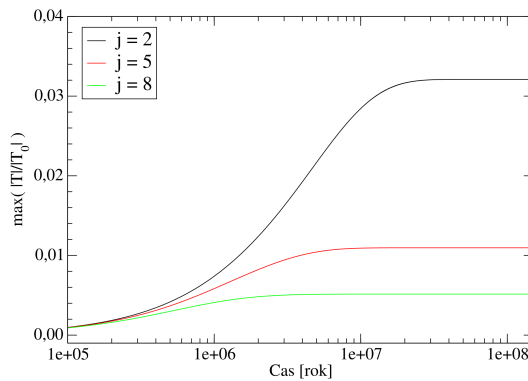
(b) Kontrola napätia na hraniciach



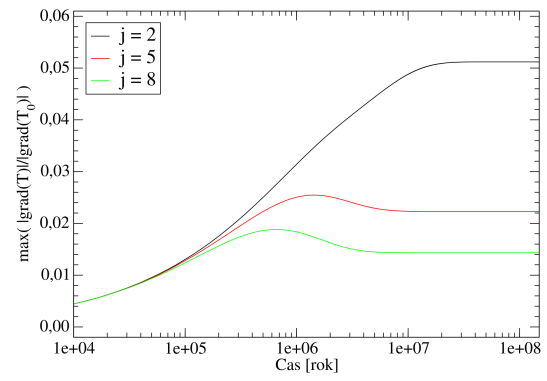
(c) Kontrola grad. napätia na hraniciach



(d) Kontrola veľkosti teploty



(e) Kontrola veľkosti gradientu teploty



6.3 Európa

Európa predstavuje teleso s relatívne tenkou ľadovou kôrou (voči svojej veľkosti), čo favorizuje elasticú deformáciu a deformácia spodného rozhrania sa prejavuje na hornom rozhraní takmer okamžite (viď *obrázok 6.6*). Na rozdiel od Enceladu sa vďaka tomu stav izostázy dosahuje približne 10x skôr ako dokonverguje samotná topografia na spodnom rozhraní a dosiahnu ho aj relatívne vysoké harmonické stupne ($j \leq 20$). Veľkosť ľadového zrna d ovplyvňuje najmä pomerné zastúpenie elastickej zložky deformácie, čím urýchľuje/spomaľuje odozvu horného rozhrania na záťaž na spodnom rozhraní a určuje hodnoty normovanej topografie v prvých rokoch vývoja. Nastavenie parametra η_{cutoff} ovplyvňuje čas, ktorý potrebuje Európa na dosiahnutie stavu izostázy analogicky ako na Encelade. Na veľkosti tepelného toku priebeh normovanej topografie nezávisí.

Samotná topografia na spodnom rozhraní na telese veľkosti Európy dosahuje rovnovážny stav približne v rovnakom čase ako za rovnakých podmienok na telese veľkosti Enceladu (viď *obrázok 6.7*) - na rozdiel od normovanej topografie, ktorá dosahuje rovnovážny stav približne 100x rýchlejšie. Najsilnejšie topografia závisí na veľkosti ľadového zrna. Analogicky Enceladu, pri veľkosti ľadového zrna 1 mm, resp. 10 mm, je konvergenčný čas približne rovnaký, a to $2 \times 10^7 - 10^8$ rokov, avšak v prípade malého ľadového zrna (0.1 mm) konverguje topografia až 100x rýchlejšie. Vysvetlenie je analogické ako v prípade Enceladu - zakladá sa na silnej závislosti viskozity na veľkosti ľadového zrna, pričom viskozita určuje, ako rýchlo sa ľad roztečie a zastaví nárast topografie. Zásadný rozdiel je vo veľkosti topografie v prípade, že v ľadovej kôre udržujeme veľké zrno (10 mm). Na Encelade topografia narástla približne 2x väčšia voči referenčnému stavu, zatiaľ čo na Európe sa topografia zväčšila 10-násobne. Dôvodom je vyššia teplota povrchu Európy, ktorá znižuje gradient teplotného poľa v počiatočnom stave. Ten vstupuje do okrajovej podmienky (3.49) a znižuje teplotný kontrast medzi hranicami. Pretože veľké ľadové zrno zvyšuje viskozitu, a teda ovplyvňuje rýchlosť (viď *obrázok 6.8*), je gradient teploty veličina kompenzujúca tepelný tok. Pretože perturbácií tepelného toku z oceánu priradujeme konštantnú hodnotu, topografia musí narásť dostatočná, aby ho (tepelný tok z oceána) gradient teploty vyrovnal.

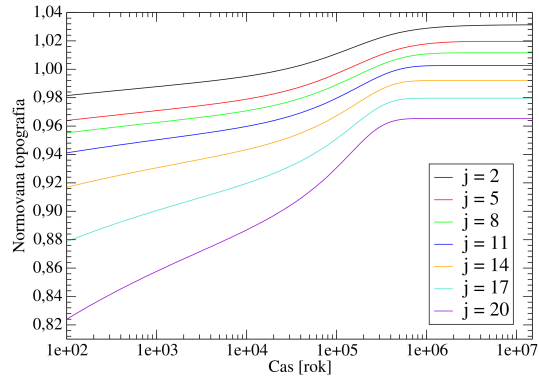
Rýchlosť tečenia ľadu na spodnom rozhraní sa v prípade Európy správa rovnako ako v prípade Enceladu (viď *obrázok 6.8*), a teda nepotrebuje vážnejší komentár.

Druhý invariant napätia dosahuje na Európe hodnoty približne 10x väčšie ako v prípade Enceladu, čím sa dostáva do oblasti, v ktorej závisí viskozita aj na creepových mechanizmoch zahŕňajúcich vplyv napätia. Vzhľadom na fakt, že Drucker-Pragerovo kritérium je splnené v 96% ľadovej kôry (viď *obrázok 6.10*), II. invariant svoje maximum dosahuje okolo spodného rozhrania, na ktorom je práve rýchlosť ľadu dôležitá veličina, pretože určuje veľkosť topografie a zahrnutie vplyvu napätia do viskozity tým môže výraznejšie ovplyvniť výsledok - použitá metóda bola zvolená kvôli jednoduchej numerickej implementácii.

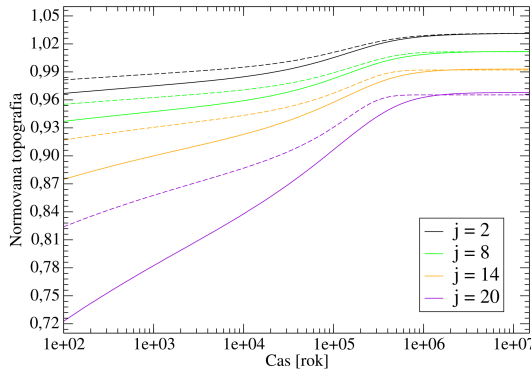
Aj na Európe (rovnako ako na Encelade) sú podmienky platnosti linearizovanej teórie dobre splnené počas celého výpočtu v referenčnom stave (viď *obrázok 6.10*).

Obr. 6.6: Normovaná topografia za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

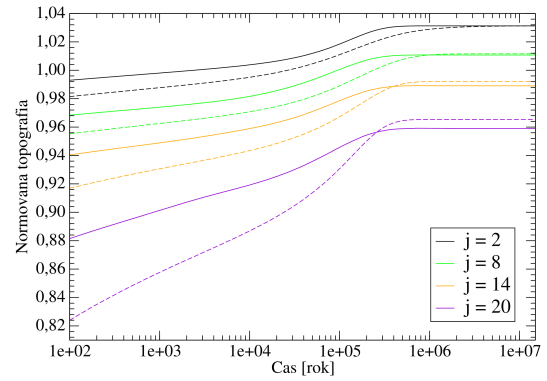
(a) Referenčný stav



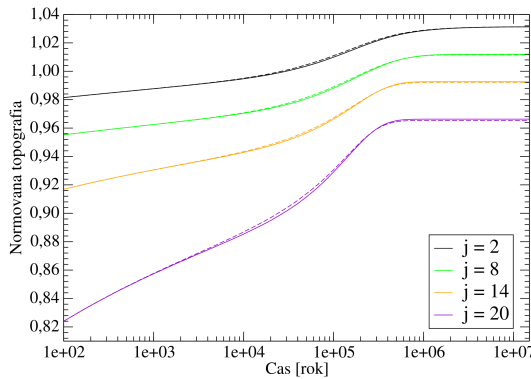
(b) $d = 10^{-2}$ m



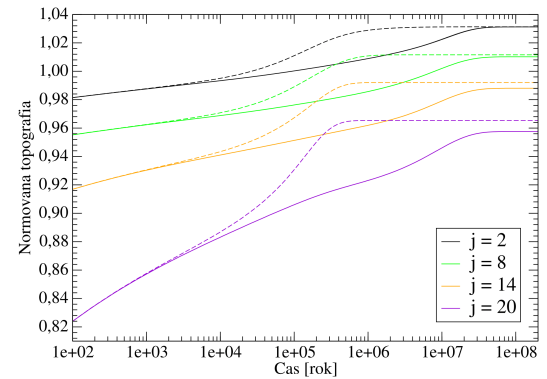
(c) $d = 10^{-4}$ m



(d) $q_{j0} = 10^{-3}$ W.m $^{-2}$

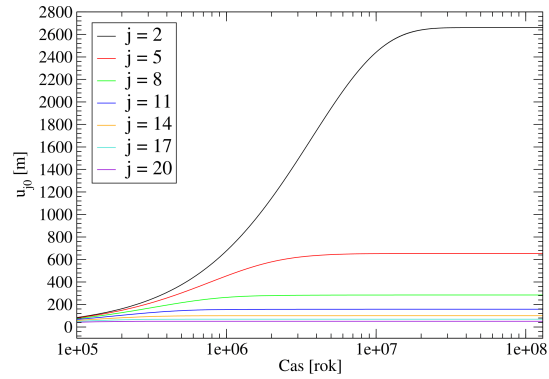


(e) $\eta_{cutoff} = 10^{24}$ Pa.s

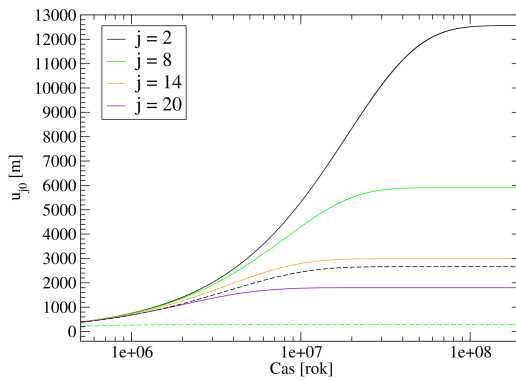


Obr. 6.7: Topografia na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

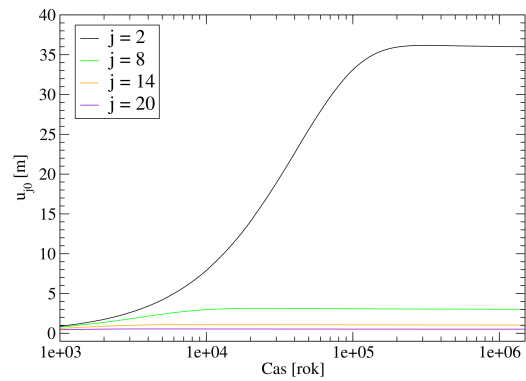
(a) Referenčný stav



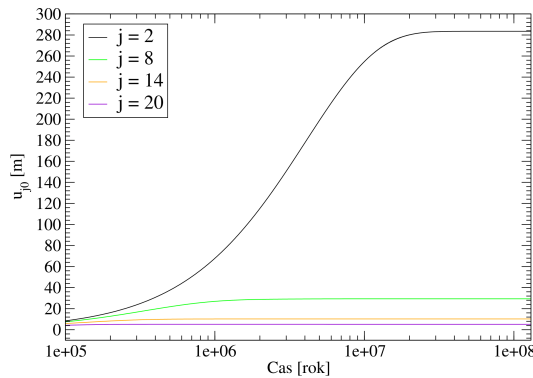
(b) $d = 10^{-2}$ m



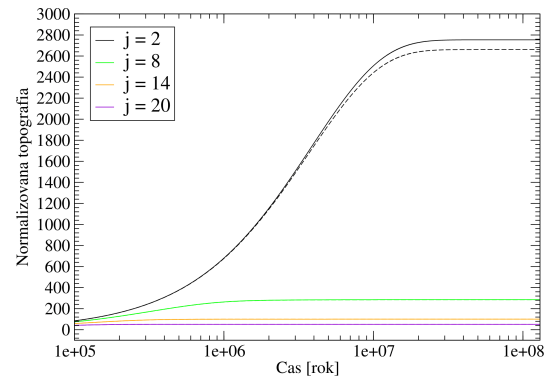
(c) $d = 10^{-4}$ m



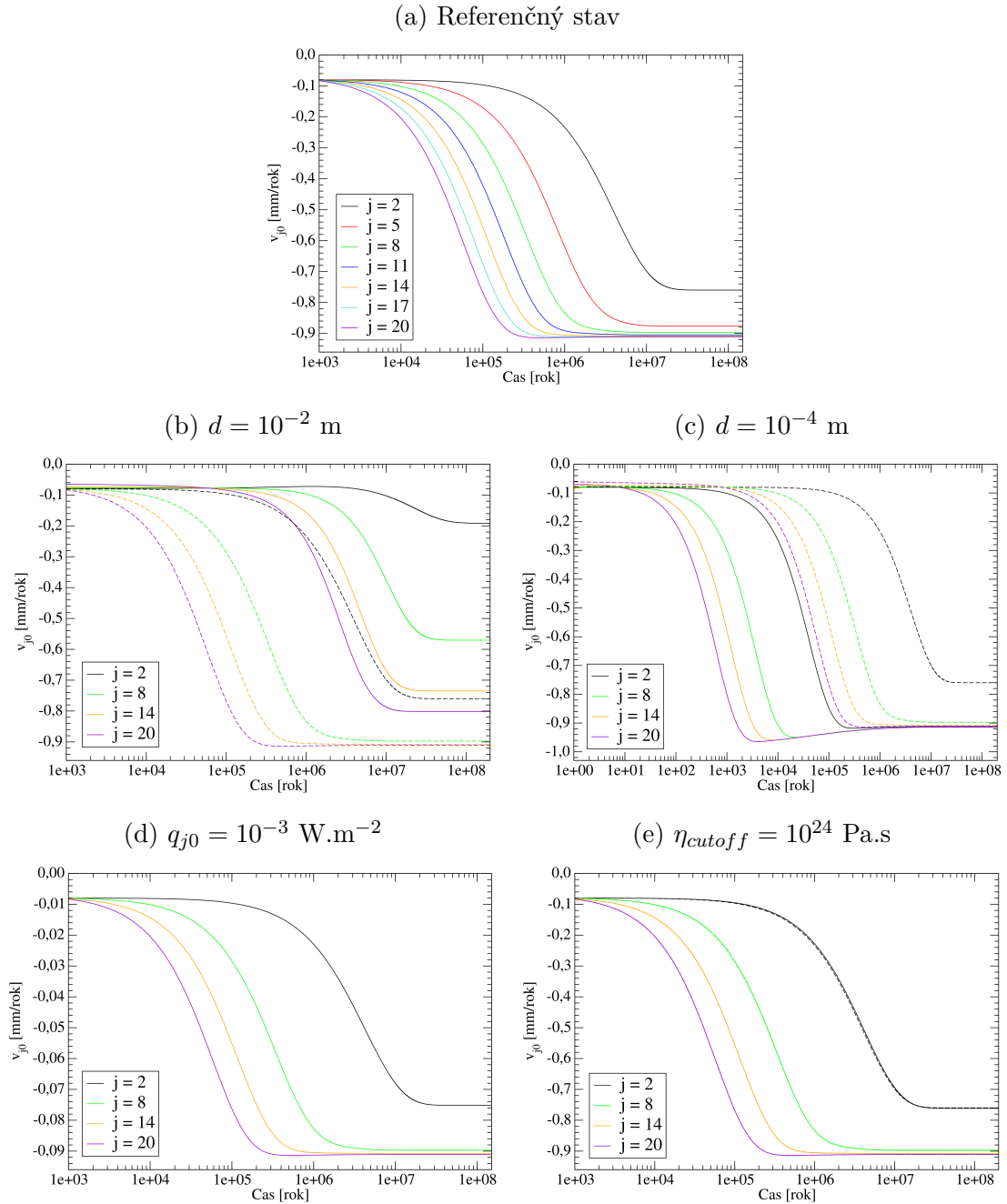
(d) $q_{j0} = 10^{-3}$ W.m $^{-2}$



(e) $\eta_{cutoff} = 10^{24}$ Pa.s

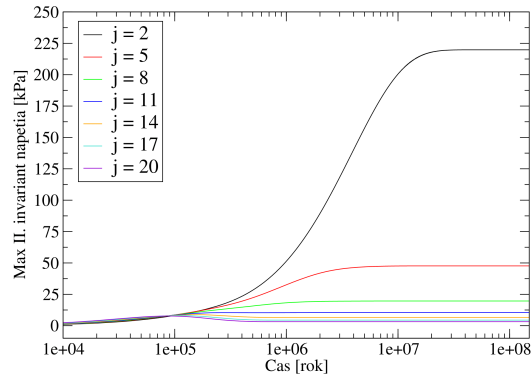


Obr. 6.8: Rýchlosť ľadu na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

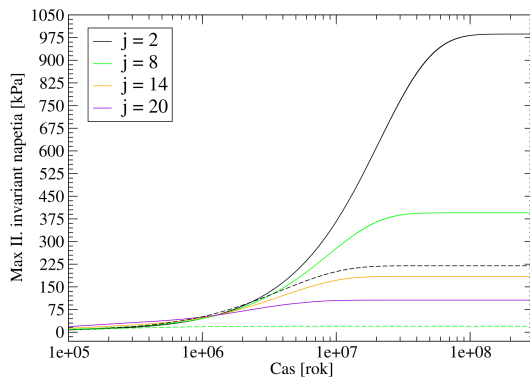


Obr. 6.9: Maximum druhého invariantu napätia v ladovej kôre za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

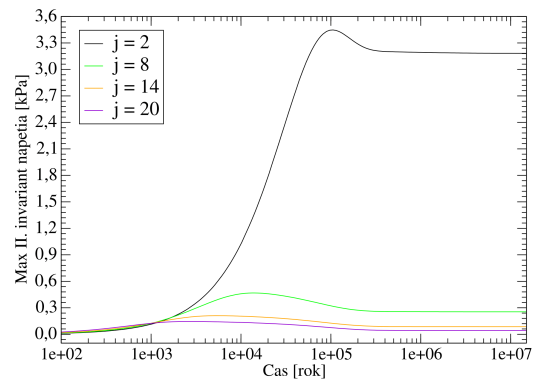
(a) Referenčný stav



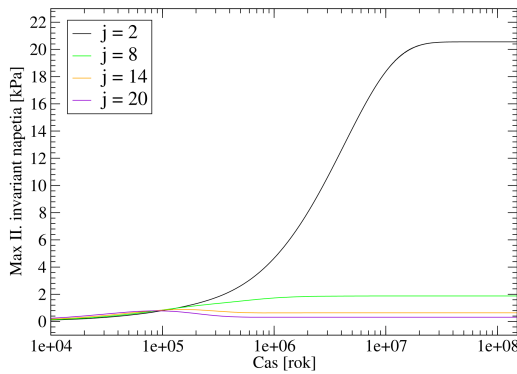
(b) $d = 10^{-2}$ m



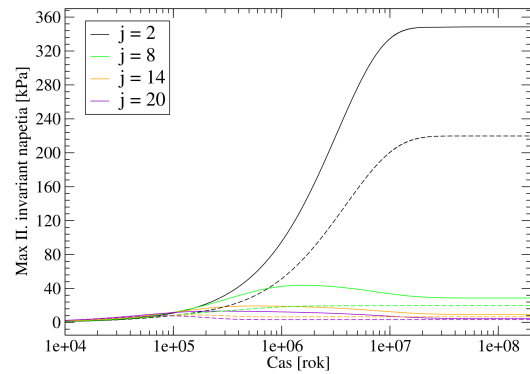
(c) $d = 10^{-4}$ m



(d) $q_{j0} = 10^{-3}$ Wm $^{-2}$

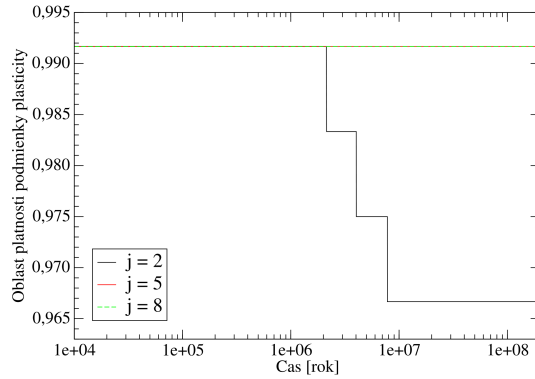


(e) $\eta_{cutoff} = 10^{24}$ Pa.s

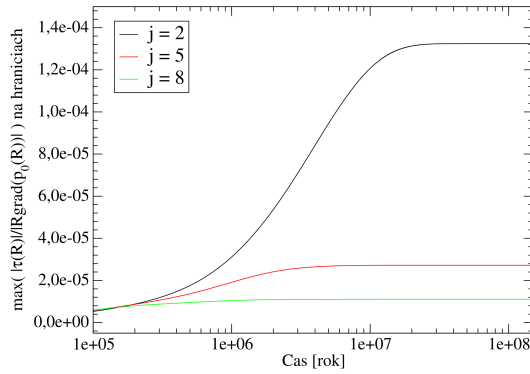


Obr. 6.10: Kontrola podmienok linearezácie (3.6), (3.7), (3.19), (3.20) v ľadovej kôre za podmienok referenčného stavu na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$.

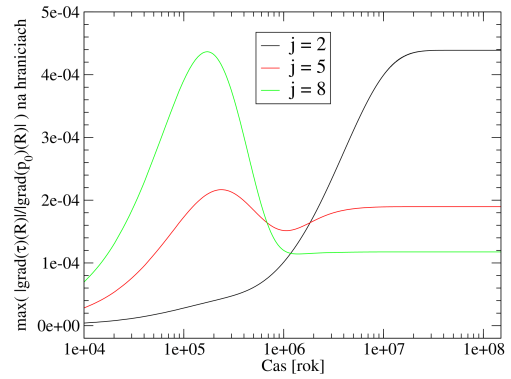
(a) Plasticita



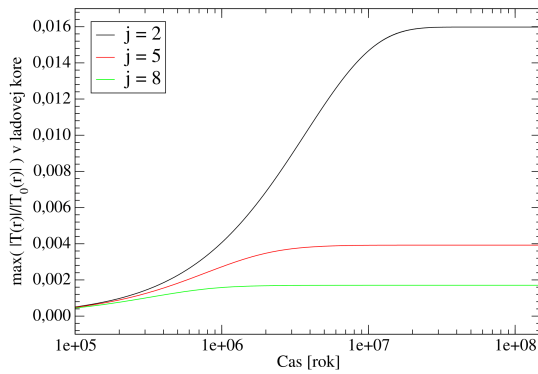
(b) Kontrola napätia na hraniciach



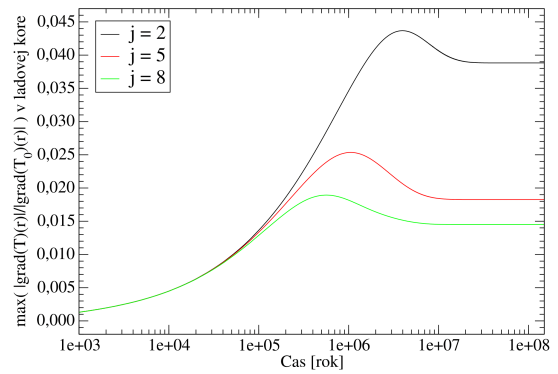
(c) Kontrola grad. napätia na hraniciach



(d) Kontrola veľkosti teploty



(e) Kontrola veľkosti gradientu teploty



6.4 Titan

Pomer hrúbky ladovej kôry k polomeru telesa sa v prípade Titanu nachádza medzi hodnotami vychádzajúcimi pre Enceladus a Európu. Prirodzene teda očakávame, že výsledky budú tomuto parametru zodpovedať, čo skutočne platí najmä pre normovanú topografiu, ktorá ukazuje, že na rozdiel od Európy nedosahujú stav izostázy všetky harmonické stupne, ale len harm. stupne $j \leq 11$ (viď *obrázok 6.11*), avšak na rozdiel od Enceladu je na dlhovlnných harmonických stupňoch silný vplyv elastickej zložky deformácie, čo znamená, že harmonické stupne 2, resp. 5, dosahujú stav izostázy (takmer) okamžite. Vplyv materiálových parametrov ako veľkosť zrna ľadu d alebo ohraničenia viskozity η_{cutoff} je analogický ako na Európe a na tomto mieste je teda možné túto diskusiu vynechať.

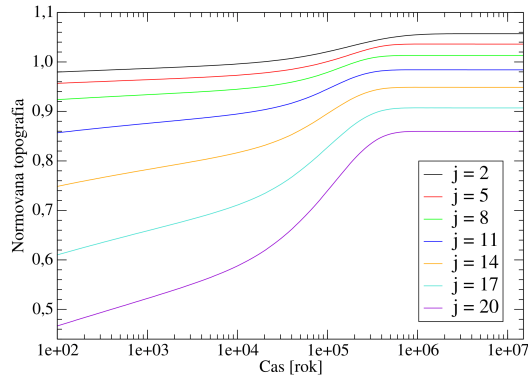
Priebeh veľkosti topografie na spodnom rozhraní na Titane nezodpovedá modelu Enceladu ani Európy (viď *obrázok 6.12*) a dôvod je prostý. Ladovej kôre Titanu prisudzujeme pomerne veľkú hrúbku, ale rozdiel teplôt v počiatočnom stave je rovnaký ako na Encelade. V praxi to znamená, že gradient teploty je približne 5x menší. Zároveň sa pre malé a stredné zrno (0.1 mm a 1 mm) na Titane pri kompenzácií variácie tepelného toku z oceánu neuplatňuje gradient teploty (viď *obrázok 6.13*), zatiaľ čo v prípade veľkého zrna ľadu (10 mm) kompenzuje tepelný tok takmer 10% z variácie na spodnom rozhraní (na stupni 2, zatiaľ čo na vyšších harmonických stupňoch už znova nehrá gradient teploty rolu - to vysvetľuje veľký rozdiel v pomeroch topografií na jednotlivých harmonických stupňoch pri zmene veľkosti ľadového zrna). Samotná topografia v referenčnom modeli dokonverguje približne v čase ako Enceladus (t.j. $2 \times 10^7 - 4 \times 10^7$ rokov) na rozdiel od normovanej topografie, ktorá na Titane dokonverguje približne 100x rýchlejšie ako na Encelade (analogicky ako na Európe, čo značí, že tento výsledok má súvislosť s veľkosťou telesa).

Diskusia ohľadne veľkosti topografie na spodnom rozhraní naznačuje, že rýchlosť tečenia ľadu na spodnom rozhraní nie je tak silne ovplyvnená výberom parametrov a skutočne to tak je (viď *obrázok 6.13*). Spomedzi sledovaných ľadových mesiacov na Titane podlieha tečenie ľadu na spodnom rozhraní výberu veľkosti ľadového zrna najmenej - napr. na Encelade, resp. Európe, je možné na harmonickom stupni 2 sledovať radikálne zníženie rýchlosti tečenia ľadu, čo na Titane nepozorujeme. To naznačuje, že ide o výsledok závislý na hrúbke ladovej kôry, čo naznačujú aj radikálne zmeny topografie, ktoré v prípade tenkej ladovej kôry nemusia byť mechanicky stabilné, čiže ich v rovnováhe je tepelný tok z oceánu plne kompenzovaný gradientom teploty v ladovej kôre.

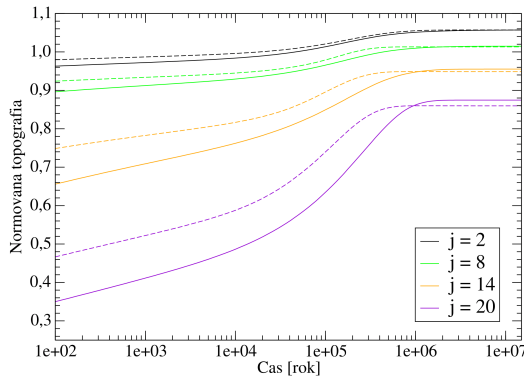
Odhad II. invariantu napätia na Titane v referenčnom stave nedosahuje hodnoty, pri ktorých už napäťovo závislé creepové mechanizmy začnú v celkovej viskozite hrať rolu, čím je tento ľadový mesiac najvhodnejším objektom na aplikáciu vybudovanej teórie. Navyše reologický predpis a linearizovaná teória platia v celom objeme telesa počas celého deja deformácie ľadovej kôry (viď *obrázok 6.15*), čiže na Titane získavame aplikáciou vybudovanej teórie najrelevantnejšie výsledky.

Obr. 6.11: Normovaná topografia za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

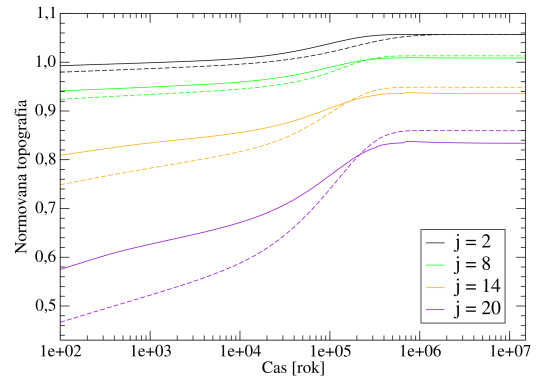
(a) Referenčný stav



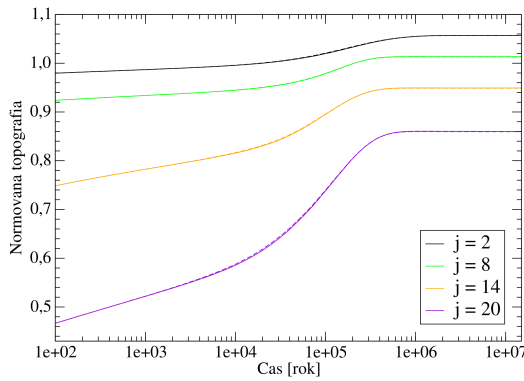
(b) $d = 10^{-2}$ m



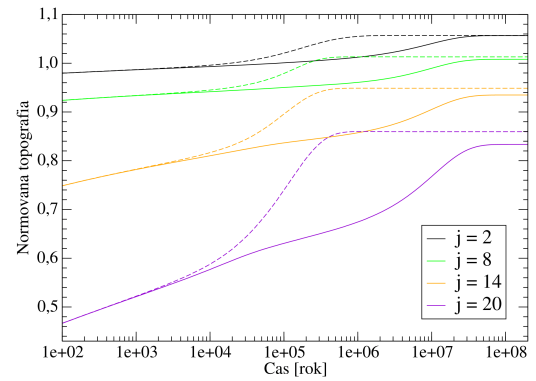
(c) $d = 10^{-4}$ m



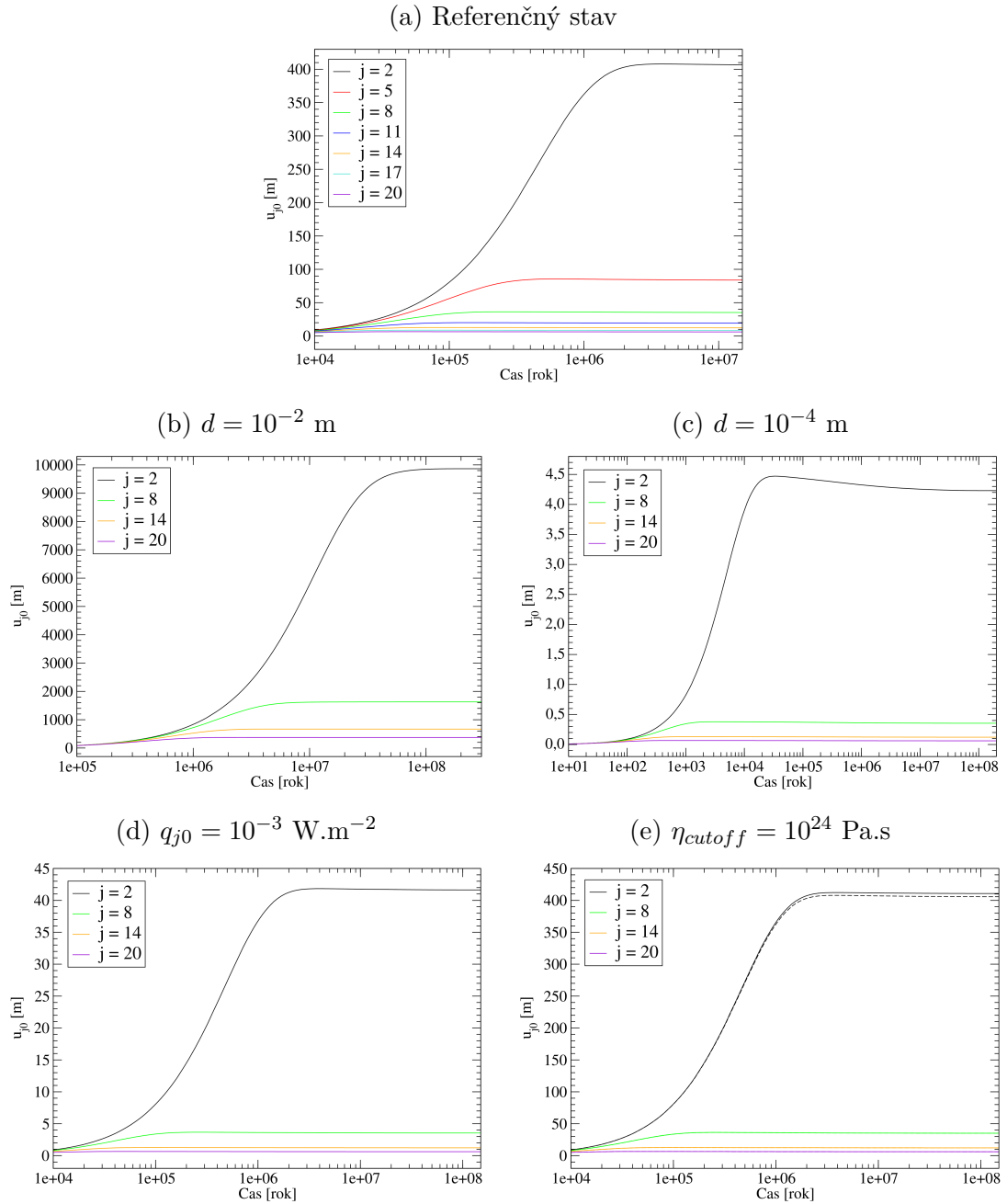
(d) $q_{j0} = 10^{-3}$ W.m $^{-2}$



(e) $\eta_{cutoff} = 10^{24}$ Pa.s

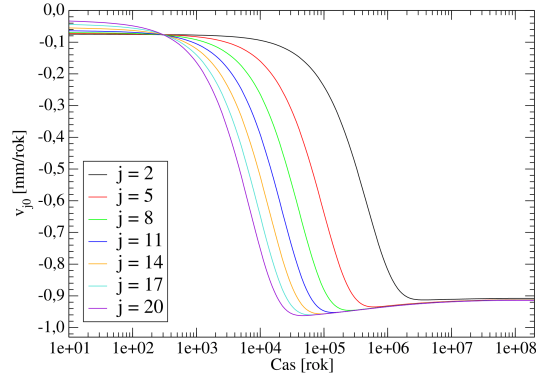


Obr. 6.12: Topografia na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

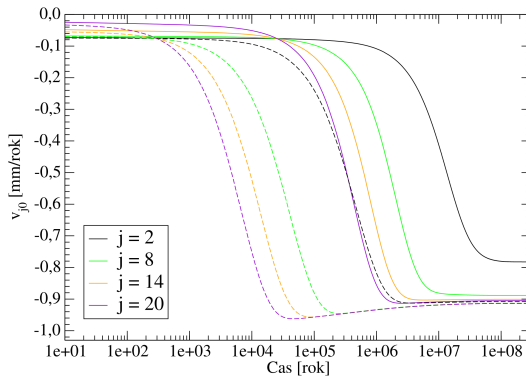


Obr. 6.13: Rýchlosť ľadu na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

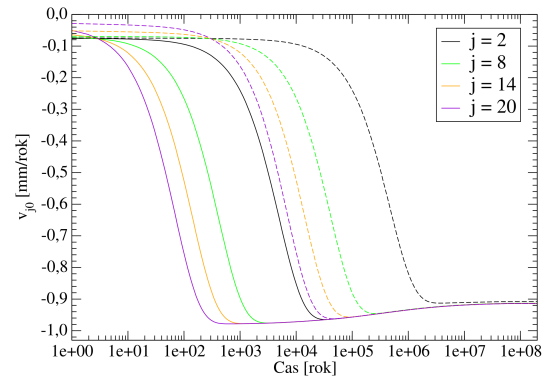
(a) Referenčný stav



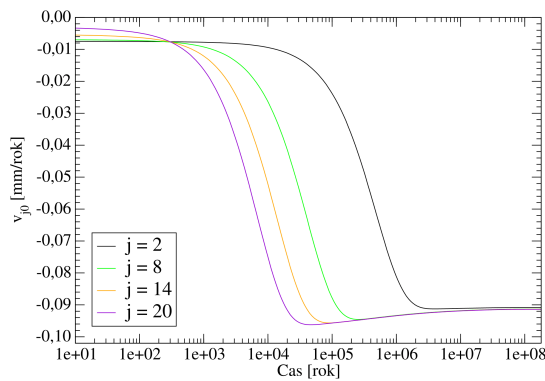
(b) $d = 10^{-2}$ m



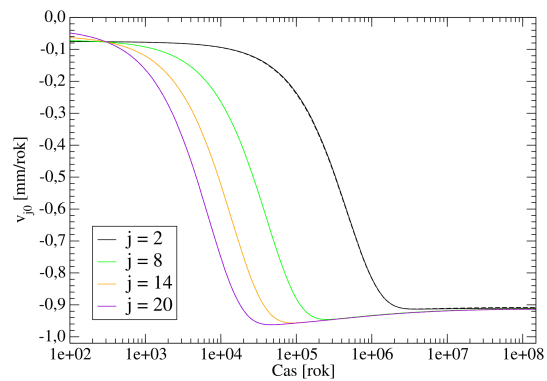
(c) $d = 10^{-4}$ m



(d) $q_{j0} = 10^{-3}$ W.m $^{-2}$

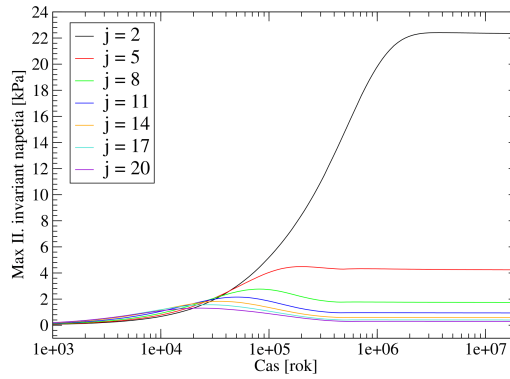


(e) $\eta_{cutoff} = 10^{24}$ Pa.s

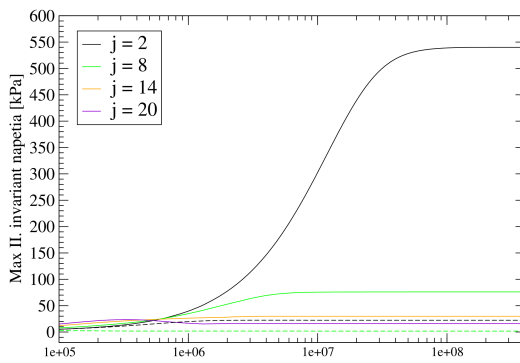


Obr. 6.14: Maximum druhého invariantu napätia v ladovej kôre za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.

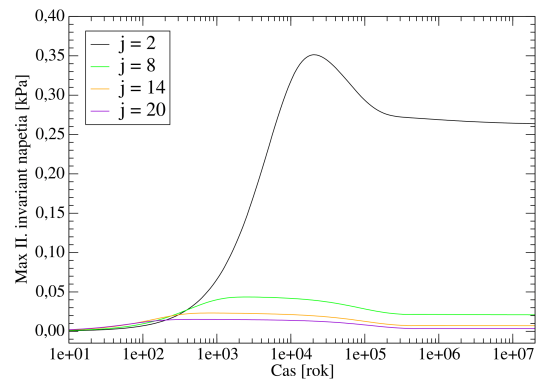
(a) Referenčný stav



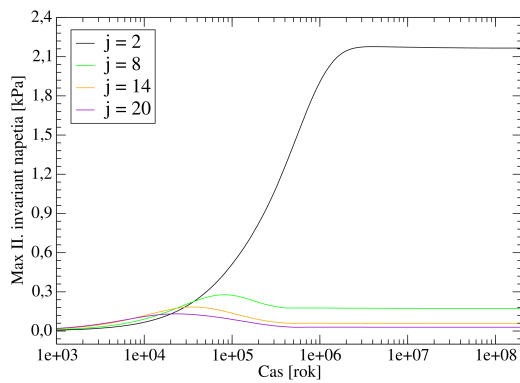
(b) $d = 10^{-2}$ m



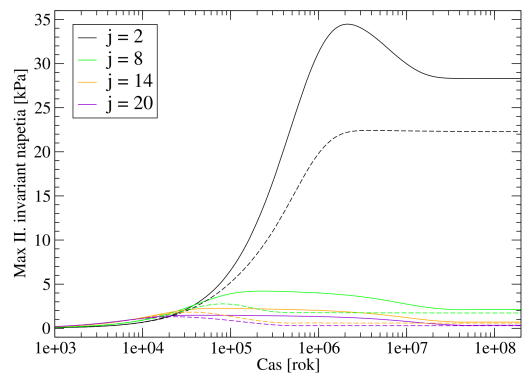
(c) $d = 10^{-4}$ m



(d) $q_{j0} = 10^{-3}$ W.m $^{-2}$

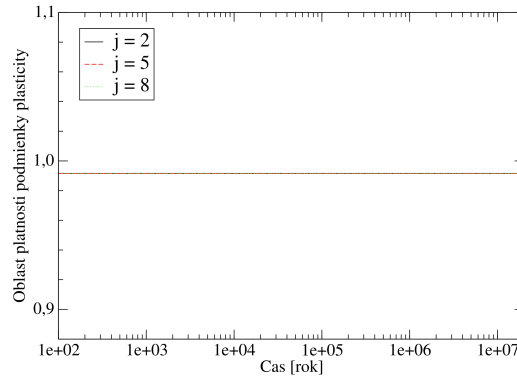


(e) $\eta_{cutoff} = 10^{24}$ Pa.s

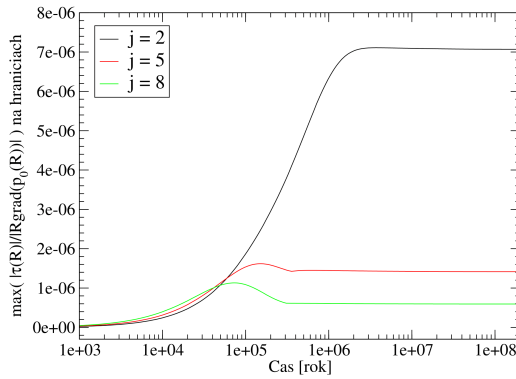


Obr. 6.15: Kontrola podmienok linearezácie (3.6), (3.7), (3.19), (3.20) v ladovej kôre za podmienok referenčného stavu na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$.

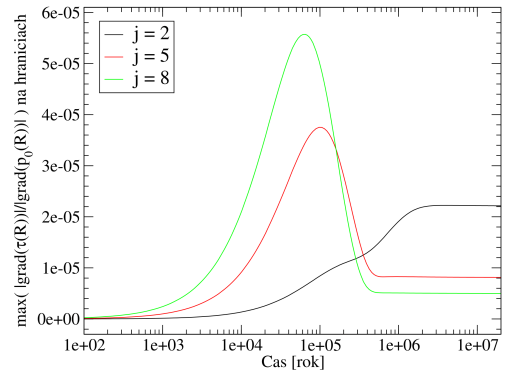
(a) Plasticita



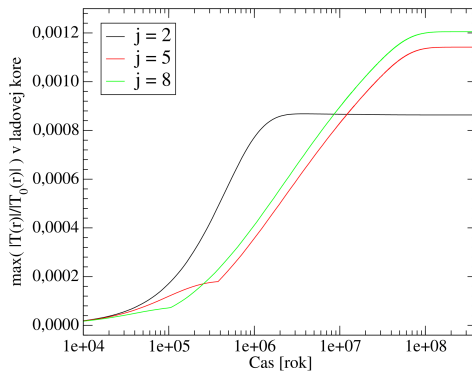
(b) Kontrola napätia na hraniciach



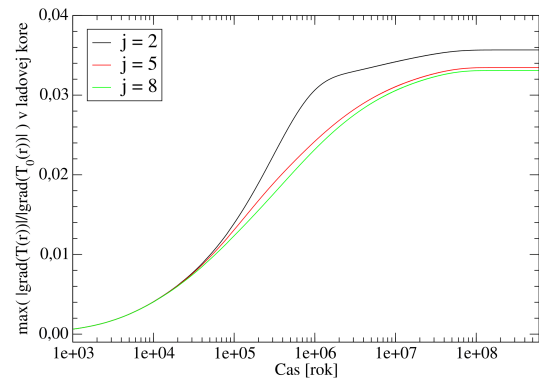
(c) Kontrola grad. napätia na hraniciach



(d) Kontrola velkosti teploty



(e) Kontrola velkosti gradientu teploty



6.5 Diskusia

Prepojením rovníc popisujúcich mechanickú deformáciu kontinua s rovnicou prenosu tepla bola odvodená všeobecná sústava parciálnych diferenciálnych rovníc umožňujúca simulovať časový vývoj ľadového telesa s fázovým rozhraním. V tejto práci je ako hnacia sila deformácie zvolená variácia tepelného toku z globálneho oceána pod ľadovou kôrou. Pomocou linearizácie odvodenej sústavy rovníc s prihliadnutím k sférickej symetrii ľadových mesiacov (v zmysle malej poruchy v Taylorovom rozvoji normály voči sféricke symetrickému počiatočnému stavu) bol vytvorený teplotne-deformačný model ľadovej kôry, ktorý bol následne aplikovaný na trojicu ľadových mesiacov (Enceladus, Európa a Titan) s cieľom uspokojivo vysvetliť pozorovanú povrchovú topografiu pomocou vhodnej voľby voľných parametrov prislúchajúcich systému ľadová kôra/podpovrchový oceán - menovite veľkosti ľadového zrna d , ktorú odhadujeme v intervale $< 0.1; 10 >$ mm, veľkosti variácie radiálnej zložky tepelného toku z oceána $\vec{e}_r \cdot \vec{q}_W$ a veľkosti ohraňovania viskozity ľadovej kôry η_{cutoff} , ktorá má za úlohu aproximatívne zahrnúť nízkoteplotnú deformáciu pri hornej hranici ľadovej kôry.

Dosiahnuté výsledky sú v podobe grafickej ukážky vývoja najvýznamnejších veličín charakterizujúcich stav ľadovej kôry zhrnuté v kapitole 6. Z výsledkov simulácií vyplýva, že všeobecne ľadová kôra reaguje na zmenu tepelného toku na spodnej hranici tečením a zmenou teplotného poľa, pričom podiel jednotlivých mechanizmov na kompenzácií tepelného toku závisí na viskozite ľadu (t.j. nepriamo na veľkosti ľadového zrna) a na veľkosti mesiaca. Nový rovnovážny stav je následne charakterizovaný splnením rovnice (6.3). V prípade relatívne malých telies s relatívne hrubou ľadovou kôrou (viď Enceladus) sa ukazuje, že ak predpíšeme malú viskozitu v okolí spodnej hranice ľadovej kôry (to znamená veľkosť ľadového zrna 0.1 mm), stráca vývoj teplotného poľa v ľadovej kôre svoj význam a tepelný tok je kompenzovaný výlučne tečením na spodnej hranici ľadovej kôry. S rastúcou viskozitou ľadu rastie význam gradientu teploty, až pri relatívne veľkom ľadovom zrne (10 mm - ekvivalent relatívne veľkej viskozity) je tepelný tok kompenzovaný takmer výlučne zmenou gradientu teploty na spodnom rozhraní. Získané výsledky teda vedú k záveru, že nahradiť termálne dianie v ľadovej kôre čisto konduktívnym profilom a riešiť mechanickú úlohu nie je vhodný prístup, pretože aj napriek zanedbateľne malej zmene teplotného profilu od konduktívneho nie je možné zanedbať vplyv nenulovej variácie gradientu teplotného poľa (nielen) na harmonickom stupni 2. Navyše, ak uvažíme celkový tepelný tok z oceána do ľadovej kôry v počiatočnom stave ľadovej kôry (Enceladus $27.72 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$, Európa $15.96 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$, Titan $5.54 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$), najmä na Titane je pre dosiahnutie pozorovanej povrchovej topografie veľkosti niekoľko 100 metrov [Lorenz et al., 2013] v prípade veľkosti ľadového zrna 1 mm potrebná variácia tepelného toku vyššia ako je celkový tepelný tok v počiatočnom stave, čo interpretujeme ako nerealistickú situáciu. Realistickejšie je uvažovať relatívne veľké (ale stále prijateľné) ľadové zrno, t.j. 10 mm, kedy je potrebná variácia tepelného toku približne $1 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$ a vplyv zmeny teploty na vznikajúcu topografiu je významný. Analogické výsledky platia aj pre mesiace Enceladus a Európa.

Druhou veličinou silne ovplyvnenou tepelným dianím v ľadovej kôre je charakteristický čas ustanovenia ustálenej topografie. Charakteristickému času ustálenia normovanej topografie bolo v práci venované dosť priestoru - v prípade veľkých

mesiacov je zhruba daný Maxwellovým časom, v prípade Enceladu je elastická deformácia príliš malá a tento čas bude charakterizovaný viskóznym tečením - preto sa v tejto časti diskusie zameriame na analýzu času ustálenia topografie spodného rozhrania, ktorý vykazuje silnú nelineárnu závislosť na veľkosti ladového zrna. Z obrázkov v kapitole 6 je zrejmé, že 10x zväčšenie ladového zrna z 0.1 mm na 1 mm vedie k 100x zväčšeniu času, za ktorý sa ustáli topografia na spodnom rozhraní, čo už však neplatí pre 10x zväčšenie ladového zrna z 1 mm na 10 mm. Pretože viskozita v okolí spodného rozhrania závisí na druhej mocnine veľkosti ladového zrna a skúmaný čas nevykazuje závislosť na η_{cutoff} ani veľkosti tepelného toku, je možné písať $t_{mech} \sim \eta(R_d)$, kde t_{mech} je čas, za aký sa ustália mechanické veličiny v ladovej kôre (rýchlosť, napätie ...) - popis pomocou tohto času je zrejme správny pre malé zrno, pretože v tomto prípade vplýva teplota na výsledky minimálne. To sa však mení s rastúcou veľkosťou ladového zrna a rastúcou viskozitou, pričom v limite nekonečnej viskozity rastie t_{mech} nad všetky medze a v ladovej kôre je tepelný tok kompenzovaný len zmenami v teplotnom poli, t.j. čas konvergenzie je charakterizovaný časom $t_{temp} = \rho_I c_I (R_u - R_d)^2 / \lambda_I$. Vzhľadom na uvedenú myšlienkovú limitu je možné aproximovať celkový čas vzťahom tvaru $1/t_c \sim A/t_{temp} + B/t_{mech}$, kde konštanty A, B, t_{mech} sa zrejme líšia pre rôzne telesá. Na Titane funguje voľba $B = 1$ (vzhľadom na limitné výsledky pre 10 mm zrno), ktorá však nefunguje na Európe a Encelade. To môže byť spôsobené neplatnosťou linearizácie na týchto telesách v prípade limity nekonečnej viskozity - topografia v tomto prípade presahuje hodnoty vhodné pre použitie linearizovanej teórie.

Dosah výsledkov práce je limitovaný oblasťou platnosti teoretického modelu, ktorý obsahuje silnú linearizáciu rovníc podmienenú využitím harmonického rozkladu ako nástroja na jednoduché a strojovo zvládnuteľné riešenie odvodennej sústavy rovníc. To znamená, že simulácie, ktoré by napríklad na Encelade (a Európe) viedli k topografiám, ktorých veľkosť dosahuje na spodnom rozhraní 10 km, a teda sú žiadaným výstupom prác zaoberajúcich sa vývojom ladovej kôry (viď Čadek et al. [2017]), nepodávajú relevantné výsledky, resp. výsledky sú zaťažené priveľkou chybou, ktorá nie je daná len linearizáciou, ale aj použitým modelom pre výpočet viskozity, v ktorom sa pri vysokých hodnotách napätia prejavuje závislosť viskozity na mechanickom napätí v ladovej kôre, ktorú popisujeme len aproximatívne. Na druhú stranu, v prípade Titanu, kde topografia povrchu dosahuje rádovo stovky metrov, je možné vybudovanú teóriu použiť na vyriešenie inverznej úlohy a stanoviť tak veľkosti variácie tepelného toku vysvetľujúce pozorovanú topografiu - túto úlohu rieši článok, ktorý spolu so školiteľom a kolegami z francúzskeho Nantes pripravujeme (viď príloha 2).

Záver

Práca nadviazala na článok Čadek et al. [2017] prepojením čisto mechanického deformačného modelu (predstaveného v uvedenom článku) a tepelného vývoja deformovanej ladovej kôry. Cieľom práce bolo pomocou odvodeného matematického modelu preskúmať podmienky panujúce v ladovej kôre v závislosti na nastavení vlastností systému ladová kôra/podpovrchový oceán kvapalnej vody. Ako výpočetná metóda bol vzhľadom na výraznú sférickú symetriu problému zvolený rozklad rovníc pomocou sférických harmonických funkcií a následný numerický rozklad spracovaný vo forme programu v jazyku Fortran95. Jednotlivé časti programu boli testované proti existujúcim programom poskytnutých školiteľom a numerická robustnosť programu bola testovaná pre rôzne časovo-priestorové rozlíšenia. Aj keď testy naznačujú správnosť použitej numerickej schémy, nebolo možné program nezávisle overiť proti publikovaným benchmarkom, pretože úlohy tohoto typu ešte neboli v planetológii riešené.

Pomocou napísaného programu bola spracovaná séria simulácií, reprezentujúca časový vývoj telies tvarom a rozmermi zodpovedajúcich trojici reálnych ladových mesiacov Enceladus, Európa a Titan, s cieľom zistiť, nakoľko je reálne popisovať pozorovanú topografiu ako efekt variácie tepelného toku medzi ladovou kôrou a oceánom, resp. aké musia panovať podmienky v ladovej kôre a variácie tepelného toku v oceáne, aby bol tento popis intuitívne správny. Získané výsledky naznačujú, že tento popis môže dobre vystihovať pozorované topografie len v prípade, že uvažujeme relatívne veľké ladové zrno v kôre (približne 10 mm).

Vzhľadom na silnú linearizáciu majú však výsledky na Európe a Encelade len inšpiratívny charakter a sú námetom na ďalšie spracovanie modernejšou metódou, ako napríklad metóda konečných prvkov, ktorá linearizáciu nevyžaduje. V prípade Titanu je cestou pre ďalšie pokračovanie práce započítanie disipatívneho ohrevu ladovej kôry a inverzia tepelného toku. Obojím sa zaoberá článok pripravovaný v spolupráci so školiteľom a kolegami z Nantes. Naša práca predstavuje prvý komplexný pokus o riešenie problému vývoja hrúbky ladovej kôry telesa s podpovrchovým oceánom. Vyriešenie tohto problému je kľúčové pre pochopenie vnútornej dynamiky ladových telies, najmä s ohľadom na dlhodobú stabilitu oceánu, ktorá určuje habilitačný potenciál telesa. Modely, umožňujúce simulovať dlhodobý vývoj telesa, budú v nasledujúcich rokoch potrebné hlavne pre Jupiterove mesiace Európu a Ganymed, ktoré budú študovať vesmírne sondy Juice (ESA) a Europa Clipper (NASA), a taktiež pre Saturnov mesiac Enceladus, kde sa po skončení misie Cassini uvažuje o ďalšom výzku prostredníctvom sondy pracovne nazvanej Enceladus Sample Return Mission (NASA). Tieto sondy by sa mali pokúsiť zodpovedať otázku, či život v slnečnej sústave môže existovať aj inde ako na Zemi - otázku, ktorej zodpovedanie môže úplne zmeniť náš pohľad na postavenie človeka vo Vesmíre.

Zoznam použitej literatúry

- O. Čadek, M. Běhounková, G. Tobie, and G. Choblet. Viscoelastic relaxation of enceladus's ice shell. *Icarus*, 291:31–35, 2017.
- F. Chambat, S. Benzoni-Gavage, and Y. Ricard. Jump conditions and dynamic surface tension at permeable interfaces such as the inner core boundary. *Comptes Rendus Geoscience*, 346:110–118, 2014.
- D. L. Goldsby and D. L. Kohlstedt. Superelastic deformation of ice: Experimental observations. *Journal of Geophysical Research*, 106(B6):11017–11030, 2001.
- P. V. Hobbs. *Ice Physics*. Oxford University Press, 1974.
- D. R. Lide. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, 2004.
- R. D. Lorenz, B.W. Stiles, O. Aharonson, A. Lucas, A. G. Hayes, R. L. Kirk, H. A. Zebker, E. P. Turtle, C. D. Neish, E. R. Stofan, and J. W. Barnes. A global topographic map of titan. *Icarus*, 225:367–377, 2013.
- Z. Martinec. Continuum mechanics, 2003. URL <http://geo.mff.cuni.cz/studium/Martinec-ContinuumMechanics.pdf>.
- J. Matas. Mantle viscosity and density structure. Master's thesis, Matematicko-fyzikální fakulta UK, 1995.
- I. Müller. *Thermodynamics*. Pitman, 1985.
- J. C. Slattery, L. Sagis, and E.-S. Oh. *Interfacial transport phenomena, Second Edition*. Springer, 2007.

A. Appendix 1

A.1 Teplota a tlak v počiatočnom stave

A.1.1 Teplota

Teplotné pole v počiatočnom stave ľadovej kôry je dané riešením Laplaceovej rovnice (3.15) v tvare

$$\Delta T_0(r) = 0 , \quad (\text{A.1})$$

medzi sférami s polomerami R_d, R_u a okrajovými podmienkami predpísanými na sférach v Dirichletovom tvare, t.j.

$$T_0(R_d) = T_d , \quad (\text{A.2})$$

$$T_0(R_u) = T_u . \quad (\text{A.3})$$

Pretože sa jedná o sféricky symetrický problém, je vhodné prepísať rovnicu (A.1) do tvaru

$$\Delta T_0(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r T_0(r))}{\partial r^2} = 0 . \quad (\text{A.4})$$

Rovnica (A.4) už predstavuje obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu s riešením

$$T_0(r) = \frac{A}{r} + B , \quad (\text{A.5})$$

kde A, B sú integračné konštanty dané okrajovými podmienkami (A.2), (A.3), ktorých dosadením vychádza riešenie v tvare (3.16).

A.1.2 Tlak

V počiatočnom stave spĺňa tlak p_0 hydrostatickú rovnováhu (3.3), pričom vzhľadom na vlastnosti počiatočného stavu hľadáme tlak pri podmienke zachovania radiálnej symetrie a voľného povrchu, t.j. stačí uvažovať problém riešenia rovnice (3.3) v radiálnej symetrii medzi dvoma sférami s polomerami R_d, R_u v ľade s konštantnou hustotou ρ_I , t.j.

$$\frac{\partial p_0(r)}{\partial r} = -\rho_I g(r) , \quad (\text{A.6})$$

$$p_0(R_u) = 0 . \quad (\text{A.7})$$

Pre potreby tejto práce nie je nutné uvažovať zložitejšiu aproximáciu gravitačného zrýchlenia v homogénnej ľadovej kôre ďalej vystačíme s odhadom gravitačného zrýchlenia priemerom hodnôt na hraniciach ľadovej kôry. Táto aproximácia je podmienená malou zmenou gravitačného zrýchlenia od hranici k hranici (viď *tabuľka (6.1)*) a môžeme písať

$$g(r) \approx \frac{g(R_u) + g(R_d)}{2} . \quad (\text{A.8})$$

Tlak v počiatočnom stave budeme aproximovať vzťahom

$$p_0(r) \approx \rho_I \frac{g(R_d) + g(R_u)}{2} (R_u - r) . \quad (\text{A.9})$$

Rovnica (A.9) je aproximáciou veľkosti tlaku v ľadovej kôre, ktorá je využitá len na kontrolu platnosti linearizácie a postačuje teda ako rádový odhad. Pre gradient tlaku na hraniciach ľadovej kôry je nutné odvodiť presnejšie vyjadrenie, pretože sa vyskytuje v samotných radiacích rovniciach a priamo vplýva na výsledky simulácií. Vzhľadom na hydrostatickú rovnováhu (3.3) je možné písať presnejšie vyjadrenie v tvare

$$\nabla p_0(R) = -\rho_I g(R) \vec{e}_r . \quad (\text{A.10})$$

A.2 Škálovacia analýza

V ďalšom bude vždy \hat{f} označovať škálu veličiny f v ľadovej kôre (pod pojmom škála veličiny budeme rozumieť číslo nesúce rozmer danej veličiny, ktoré by v bezrozmernej analýze rovníc stálo pred bezrozmerným ekvivalentom danej veličiny - pre jednoduchosť budeme klásť bezrozmerne výrazy rovné jednotke a rovnice prepíšeme len pre škály), ΔR bude rozdiel medzi horným a spodným polomerom ľadovej kôry, $g_{u,d}$ bude gravitačné zrýchlenie na hornej, resp. spodnej hranici. Na základe pravidiel pre škálovanie je možné pre škály veličín a ich derivácií písať vzťahy (vzťahy budeme odvodzovať pomocou škály posunutia hornej hranice \hat{u}_u , ktorá je síce neznáma, avšak na základe nameraných dát je možné ju odhadnúť, pretože práve tieto dáta sa snažíme vysvetliť)

$$\hat{\tau}_I \sim \rho_I g_u \hat{u}_u , \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{T}_I \sim \hat{T}_0 . \quad (\text{A.12})$$

Pomocou reológie (3.55) vychádza pre škálu rýchlosti

$$\hat{v}_I \sim \frac{\Delta R}{\hat{\eta}_I} \hat{\tau}_I \sim \frac{\rho_I g_u \Delta R}{\hat{\eta}_I} \hat{u}_u , \quad (\text{A.13})$$

kde bolo využité škálovanie priestorovej derivácie v tvare

$$\nabla f \sim \frac{\hat{f}}{\Delta R} . \quad (\text{A.14})$$

Časovú deriváciu je možné škálovať napr. pomocou charakteristického času, ktorý je daný škálou rýchlosti a hrúbkou ľadovej kôry, t.j. vzťahom

$$\frac{\partial f}{\partial t} \sim \frac{\hat{f}}{\Delta t} \sim \hat{v}_I \frac{\hat{f}}{\Delta R} \sim \frac{\rho_I g_u \hat{u}_u}{\hat{\eta}_I} . \quad (\text{A.15})$$

Ukazuje sa (viď Čadek et al. [2017]), že ľadová kôra približne (pre účely analýzy rovníc s dostatočnou presnosťou) spĺňa podmienku izostázy, t.j. platí vzťah medzi škálami posunutí na hraniciach

$$(\rho_W - \rho_I) g_d R_d^2 \hat{u}_d \sim \rho_I g_u R_u^2 \hat{u}_u , \quad (\text{A.16})$$

kde škálu posunutia na spodnej hranici \hat{u}_d budeme prirodzene klásť rovnú ΔR .

A.2.1 Analýza deformácie grav. poľa

Deformácia gravitačného poľa je výsledkom deformácie ladovej kôry. Na spodnej hranici je prírastkový potenciál daný rozdielom hmoty vo vrstve danej škálou radiálneho posunutia pred a po deformácií, analogicky na hornom rozhraní. Veľkosť prírastkového potenciálu je teda možné odhadovať výrazom

$$\hat{V}_\delta \sim \kappa \left(\frac{\delta \hat{m}_d}{R_d} + \frac{\delta \hat{m}_u}{R_u} \right), \quad (\text{A.17})$$

kde κ je gravitačná konštanta a δm_d označuje zmenu hmotnosti voči počiatočnému stavu na spodnej hranici, analogicky δm_u zmenu hmotnosti na hornej hranici. Prírastky hmotnosti je možné odhadnúť pomocou radiálnej výchyľky vzťahom tvaru

$$\delta \hat{m}_d \sim (\rho_W - \rho_I) R_d^2 \hat{u}_d, \quad (\text{A.18})$$

$$\delta \hat{m}_u \sim \rho_I R_u^2 \hat{u}_u. \quad (\text{A.19})$$

Vzhľadom na predpoklad o stave izostázy (A.16) je možné odhad na škálu potenciálu (A.17) písať v tvare

$$\hat{V}_\delta \sim 2\kappa \rho_I R_u \hat{u}_u, \quad (\text{A.20})$$

analogicky pre gradient je možné písať

$$\nabla \hat{V}_\delta \sim 2\kappa \rho_I R_u \frac{\hat{u}_u}{\Delta R}. \quad (\text{A.21})$$

A.2.2 Analýza variácie tlaku vody na spodnom rozhraní

Využitím vzťahu (3.11) vychádza pre škálu tlaku $p_W(\vec{r}, t)$ a jeho gradientu

$$\hat{p}_W \sim 2\kappa \rho_I \rho_W R_u \hat{u}_u, \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla p_W \sim 2\kappa \rho_I \rho_W R_u \frac{\hat{u}_u}{\Delta R}. \quad (\text{A.23})$$

Aby bola dokázaná platnosť vzťahov (3.13), (3.14), (3.12), je nutné ešte pridať požiadavku na škálu posunutia \hat{u}_u , ktorá je vďaka izostáze približne ohraničená číslom $\Delta R/10$. Ďalej je výpočet založený len na dosadení číselných hodnôt a v tejto práci sa ním nebudeme zaoberať.

A.2.3 Analýza linearizovanej pohybovej rovnice

Pohybová rovnica v objeme

Po dosadení škál do rovnice (3.26) vychádza pre škály jednotlivých členov

$$\rho_I \left(\frac{\partial \vec{v}_I(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v}_I(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{v}_I(\vec{r}, t) \right) \sim \frac{2\rho_I^2 g_u \Delta R^2 \hat{u}_u}{\hat{\eta}^2} \frac{\rho_I g_u \hat{u}_u}{\Delta R}, \quad (\text{A.24})$$

$$\nabla \cdot \tilde{\tau}_I \sim \frac{\rho_I g_u \hat{u}_u}{\Delta R}, \quad (\text{A.25})$$

$$\rho_I \nabla V_\delta \sim \frac{2\kappa \rho_I R_u \rho_I g_u \hat{u}_u}{g_u \Delta R} . \quad (\text{A.26})$$

Dosadením číselných hodnôt vychádza, že pravá strana je aspoň o 7 rádov menšia ako pravá a je možné ju zanedbať.

Pohybová rovnica rozhrania

Podľa Chambat et al. [2014] je možné písať

$$-\nabla_\sigma \cdot \mathbf{T}^\sigma = \frac{2}{R_d} s(\vec{v}_I, \vec{w}) \vec{n} - \nabla_\sigma s(\vec{v}_I, \vec{w}) , \quad (\text{A.27})$$

kde $s(\vec{v}_I, \vec{w})$ je tzv. dynamické povrchové napätie generované nenulovým tokom hmoty naprieč rozhraním, na ktorom sa mení viskozita a hustota. Toto napätie je definované vzťahom

$$s(\vec{v}_I, \vec{w}) = -2[\nu] \rho_I (\vec{v}_I - \vec{w}) \cdot \vec{n} , \quad (\text{A.28})$$

kde $[\nu]$ je veličina obsahujúca skok hustoty a viskozity naprieč rozhraním (pre detaily viď Chambat et al. [2014]). Pretože sa zaujímate najmä o relatívne dlhovečné procesy, môžeme zanedbať druhý člen v rovnici (A.27) a pre škálu prvého člena je možné podľa Chambat et al. [2014] písať

$$\frac{2}{R_d} \hat{s} \sim \frac{4}{R_d} \hat{\eta}_I \left(\frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_W} \right) \rho_I \hat{v}_I \sim \frac{\Delta R}{R_d} \frac{4\Delta\rho}{\rho_I} \rho_I g_u \hat{u}_u . \quad (\text{A.29})$$

Porovnaním so škálou ľavej strany rovnice (3.28) ($\rho_I g_u \hat{u}_u$) vychádza, že efekt dynamického povrchového napätia je približne o 2 rády menší, ako samotný skok napätia. To znamená, že aproximácia je prijateľná.

A.2.4 Analýza linearizovanej rovnice vedenia tepla

Rovnica vedenia tepla v objeme

V prípade rovnice (3.35) je nutné dokázať, že člen vyjadrujúci disipáciu je rádovo menší ako člen vyjadrujúci konvekciu - oba členy sú totiž nezávislé na $\tilde{T}_I(\vec{r}, t)$ a závisia len na mechanických veličinách. To znamená, že z numerického hľadiska tvoria pravú stranu rovnice. Pomocou numerických experimentov je možné ukázať (nie je uvedené v práci), že konvektívny člen má zanedbateľný vplyv, čiže zanedbateľný vplyv by mal aj disipatívny člen. Škálu jednodlívých členov je možné písať v tvare

$$\vec{v}_I(\vec{r}, t) \cdot \nabla T_0(r) \sim \frac{\hat{v}_I}{\Delta R} \hat{T}_0 , \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{1}{c_I \rho_I} \tilde{\tau}_I(\vec{r}, t) : \nabla \vec{v}_I(\vec{r}, t) \sim \frac{\hat{v}_I}{\Delta R} \frac{\hat{\eta}_I}{c_I \rho_I} \frac{\hat{v}_I}{\Delta R} , \quad (\text{A.31})$$

kde bola využitá reologická rovnica (3.55) pre prechod od škály napätia ku škále rýchlosti (naopak ako v prípade vzťahu (A.13)). Je zrejmé, že podmienka, ktorú je nutné splniť je v tvare

$$\hat{\eta}_I \hat{v}_I \ll c_I \rho_I \Delta R \hat{T}_0 \approx 10^{12} \text{ Pa.m} . \quad (\text{A.32})$$

Podmienka (A.32) nie je splnená len v prípade nerealisticky vysokých hodnôt rýchlosti tečenia ladu v kôre (viď Čadek et al. [2017]) a aproximácia je prijateľná.

Rovnica zachovania energie na rozhraní

Uvážme okrajovú podmienku pre napätie na spodnom rozhraní (3.32) a dosadme ju do podmienky (3.39), dostávame

$$\left| u_I^r(\vec{R}_d, t) \right| \ll \frac{\rho_I}{\rho_W - \rho_I} \Delta R - \frac{\rho_W}{\rho_W - \rho_I} \left| V_\delta(\vec{R}_d, t) \right|, \quad (\text{A.33})$$

kde prvý člen na pravej strane zodpovedá tlaku v počiatočnom stave, t.j. vzťahu (A.9). Dosadením škály potenciálu (A.20) a úpravou dostávame podmienku na škálu posunutia na spodnom rozhraní v tvare

$$\left(1 + \frac{\kappa R_d \rho_W}{g(R_d)} \right) \hat{u}_d \ll \frac{\rho_I}{\rho_W - \rho_I} \Delta R, \quad (\text{A.34})$$

podmienka (A.34) ohraničuje škálu posunutia na približne 1/10 hrúbky ľadovej kôry.

Na hornom rozhraní prejde rovnica (3.38) do tvaru

$$\vec{e}_r \cdot \left(\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\rho_I \epsilon_I} \tilde{\tau}_I(\vec{R}_u, t) \right) \cdot \vec{v}_I(\vec{R}_u, t) - \vec{w}(\vec{R}_u, t) \right) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Využitím pohybovej rovnice horného rozhrania (3.33) dostávame dosadením do (A.35)

$$\vec{e}_r \cdot \left(\left(1 + \frac{u_I^r(\vec{R}_u, t) g(R_u)}{\epsilon_I} \right) \vec{v}_I(\vec{R}_u, t) - \vec{w}(\vec{R}_u, t) \right) = 0. \quad (\text{A.36})$$

Vzhľadom na výsledky Čadek et al. [2017] je možné očakávať stav izostázy a posunutie na hornom rozhraní je tým ohraničené na 1/10 hrúbky ľadovej kôry, čiže druhý člen v zátvorke je zanedbateľný.

B. Apendix 2

B.1 Sféricke harmoniky a ich vlastnosti

V tejto práci sú sféricke harmoniky a ich vlastnosti chápané v zmysle rovnakom ako v práci Matas [1995], t.j. ako úplný ortonormálny systém funkcií (skalárnych $Y_{jm}(\theta, \phi)$, vektorových $\vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi)$, tenzorových $\mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi)$) na jednotkovej sfére. Indexy označujú

- j - stupeň harmoniky a naberá hodnoty $j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- m - rád harmoniky a naberá hodnoty $m \in \{-j, \dots, j-1, j\}$,
- l - naberá hodnoty $l \in \{|j-1|, j, j+1\}$ pre vektorové harmoniky,
 $l \in \{|j-k|, \dots, j, \dots, j+k\}$ pre tenzorové harmoniky,
- k - naberá hodnoty $k \in \{0, 1, 2\}$.

Ortogonalita sférických harmoník je chápaná v zmysle

$$\int_{4\pi} Y_{jm}(\theta, \phi) \cdot Y_{ab}^*(\theta, \phi) d\Omega(\theta, \phi) = \delta_{ja} \delta_{mb}, \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{4\pi} \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi) \cdot \vec{Y}_{ab}^{c*}(\theta, \phi) d\Omega(\theta, \phi) = \delta_{ja} \delta_{mb} \delta_{kc}, \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{4\pi} \mathbf{Y}_{jm}^{kl}(\theta, \phi) : \mathbf{Y}_{ab}^{cd*}(\theta, \phi) d\Omega(\theta, \phi) = \delta_{ja} \delta_{mb} \delta_{kc} \delta_{ld}, \quad (\text{B.3})$$

Do sférických harmoník je možné rozkladať aj funkcie všobecne závislé na všetkých troch priestorových premenných (r, θ, ϕ) (t.j. nielen na jednotkovej sfére), pričom koeficienty rozkladu sa stávajú radiálne závislými funkciami, t.j. platí

$$f(\vec{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r, t) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} f_{jm}^l(r, t) \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi), \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{f}(\vec{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=0}^2 \sum_{l=|j-k|}^{j+k} f_{jm}^{kl}(r, t) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi). \quad (\text{B.6})$$

B.2 Užitočné vzťahy

Pri práci so sférickými harmonikami je vhodné využiť niektoré všobecne identity vedúce k zjednodušeniu tvaru rovníc, v ktorých sa harmoniky vystihujú. Všetky nasledovné vzťahy a mnoho ďalších je možné nájsť v práci Matas [1995].

$$\vec{e}_r Y_{jm} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} \delta_{l,j-1} - \sqrt{j+1} \delta_{l,j+1} \right) \vec{Y}_{jm}, \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{Y}_{jm} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} \delta_{l,j-1} - \sqrt{j+1} \delta_{l,j+1} \right) Y_{jm} , \quad (\text{B.8})$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{jm}^{j0} = \frac{1}{\sqrt{3(2j+1)}} \left(\sqrt{j+1} \vec{Y}_{jm}^{j+1} - \sqrt{j} \vec{Y}_{jm}^{j-1} \right) , \quad (\text{B.9})$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{jm}^{j-2,2} = \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \vec{Y}_{jm}^{j-1} , \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{jm}^{j2} = \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \vec{Y}_{jm}^{j+1} - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j-1)}} \vec{Y}_{jm}^{j-1} , \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{jm}^{j+2,2} = -\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \vec{Y}_{jm}^{j+1} , \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \nabla f(r) Y_{jm} &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1} - \\ &\quad - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1} , \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\nabla \cdot f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f(r) Y_{jm} , \quad (\text{B.14})$$

$$\nabla \cdot f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1} = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f(r) Y_{jm} , \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j0} &= -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1} , \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\nabla \cdot f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j-2,2} = \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1} , \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j2} &= \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1} , \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\nabla \cdot f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j+2,2} = -\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1} , \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} [\nabla f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1}]^{k=2} &= \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j-2,2} - \\ &\quad - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j2} , \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}
\left[\nabla f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1}\right]^{k=2} &= \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j2} - \\
&\quad - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right) f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j+2,2}. \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

Zoznam obrázkov

1.1	K zavedeniu označenia.	4
3.1	K zavedeniu značenia.	10
5.1	Časová slučka riešenia problému.	25
5.2	Znázornenie diskretizácie a koeficientov.	25
6.1	Normovaná topografia za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	31
6.2	Topografia na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	32
6.3	Rýchlosť ladu na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	33
6.4	Maximum druhého invariantu napätia v ladovej kôre za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	34
6.5	Kontrola podmienok linearezácie (3.6), (3.7), (3.19), (3.20) v ladovej kôre za podmienok referenčného stavu na rôznych harmonických stupňoch j , Enceladus. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$	35
6.6	Normovaná topografia za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	37
6.7	Topografia na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m $^{-2}$. Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	38

6.8	Rýchlosť ľadu na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻² . Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	39
6.9	Maximum druhého invariantu napätia v ľadovej kôre za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻² . Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	40
6.10	Kontrola podmienok linearezácie (3.6), (3.7), (3.19), (3.20) v ľadovej kôre za podmienok referenčného stavu na rôznych harmonických stupňoch j , Európa. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻²	41
6.11	Normovaná topografia za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻² . Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	43
6.12	Topografia na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻² . Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenou jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	44
6.13	Rýchlosť ľadu na spodnom rozhraní za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻² . Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	45
6.14	Maximum druhého invariantu napätia v ľadovej kôre za rôznych podmienok na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻² . Porovnanie s referenčným stavom (čiarkovaná čiara) je dosiahnuté zmenením jedného z parametrov pri zachovaní ostatných.	46
6.15	Kontrola podmienok linearezácie (3.6), (3.7), (3.19), (3.20) v ľadovej kôre za podmienok referenčného stavu na rôznych harmonických stupňoch j , Titan. Referenčný stav je popísaný parametrami $\eta_{cutoff} = 10^{22}$ Pa.s, $d = 10^{-3}$ m, $q_{j0} = 10^{-2}$ W.m ⁻²	47

Prílohy

Príloha č. 1: CD obsahujúce kód použitý pri simuláciách.

Príloha č. 2: Rukopis článku pripravovaného so školiteľom a kolegami z Nantes.

Príloha č. 2

Rukopis článku priamo nadväzujúceho na bakalársku prácu. V čase odovzdania práce bol pripravovaný v spolupráci s prof. RNDr. Ondřejom Čadekom, CSc. a kolegami z Nantes pre podanie do časopisu Icarus.

Can the long-wavelength topography of Titan be a manifestation of subsurface ocean circulation?

Jakub Kvorka^{a,*}, Ondřej Čadek^a, Gabriel Tobie^b, Gaël Choblet^b

^aCharles University, Faculty of Mathematics and Physics, Department of Geophysics, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8, Czech Republic

^bUniversité de Nantes, Laboratoire de Planétologie et Géodynamique, UMR 6112, 2 rue de la Houssinière, F-44322 Nantes, France

Abstract

Analysis of the shape and gravity data from the Cassini mission suggests that Titan's long-wavelength non-hydrostatic topography is characterized by relatively small amplitudes (~ 1 km peak to peak), an anomalous equatorial bulge (the poles are about 300 m lower than the equator), and a negative admittance at degree 3, indicating an unusually high degree of compensation. In the past years, the nature of Titan's non-hydrostatic topography has been addressed in several studies. The topography has been interpreted in terms of isostatic or viscous models and discussed in connection with tidal heating in the ice shell. Here, we present a model of the shape evolution of Titan's ice shell driven by tidal heating in the shell and spatial variations of the heat flux in a subsurface ocean. The model is obtained by solving a general set of equations coupling the viscoelastic flow of ice with the thermal evolution of the ice shell and phase transitions at the ice/water interface. The equations are solved in a domain with radially dependent material properties and moving boundaries. The shape evolution of the boundaries is a consequence of ice flow within the shell, melting and crystallization at the bottom boundary and erosion and deposition at the surface. Our model suggests that Titan's anomalous topographic bulge can be explained by lateral variations of ocean heat flux of the order of $0.1 - 1 \text{ mW m}^{-2}$, provided that the heat flux is stable over a period of at least 10 Myr and the ice shell has a sufficiently high viscosity, exceeding $\sim 10^{16} \text{ Pa s}$ at the base of the shell. Such a high value of viscosity implies that either the ice grains are coarse ($\gtrsim 10$ mm) or the temperature of the ocean is significantly (by more than 20 K) lower than the melting temperature of pure water ice. The heat flux pattern predicted on top of the ocean is consistent with the ocean flow characterized by upwelling of warm water in polar regions and downwelling of cold water at low latitudes. The negative correlation between the topography and geoid at degree 3 is shown to be compatible with erosion and deposition occurring at a rate of $0.01 - 0.1 \text{ mm yr}^{-1}$. Our results underline the importance of gravity and topography measurements for understanding the deep interior of the moon and its surface evolution.

Keywords: Titan, Ices, Satellites, shapes

*Corresponding author

Email addresses: jkdarkorbit@gmail.com (Jakub Kvorka), oc@karel.troja.mff.cuni.cz (Ondřej Čadek), gabriel.tobie@univ-nantes.fr (Gabriel Tobie), gael.choblet@univ-nantes.fr (Gaël Choblet)

Preprint submitted to Icarus

July 17, 2017

1 Introduction

Saturn's largest moon Titan, with its dense atmosphere rich in organics (Bézard et al., 2014) and a subsurface ocean (e.g. Tobie et al., 2005; Lorenz et al., 2008; Nimmo and Bills, 2010; Baland et al., 2011, 2014; Béghin et al., 2012; Jess et al., 2012; Hemingway et al., 2013), was one of the primary targets of the Cassini-Huygens mission. Comparison of Titan's gravity field (Jess et al., 2010) with the radar-based topography observations (Zebker et al., 2009; Stiles et al., 2009; Lorenz et al., 2013; Mitri et al., 2014) suggests that the ice crust of the moon is not in hydrostatic equilibrium. Although the observed shape of Titan differs from the hydrostatic reference ellipsoid by several hundred meters, the variations of the gravity field, determined up to degree 3, are small, indicating a high degree of compensation.

Using the approach of Ojakangas and Stevenson (1989), originally developed for modeling ice shell thickness variations on Europa, Nimmo and Bills (2010) explored the concept of Airy isostasy in which spatial changes of ice thickness are caused by lateral variations in tidal heating. They found that the observed topography can be predicted using a model with average ice crust thickness of about 100 km, in agreement with a heat flux of 4-5 mW m⁻² corresponding to a chondritic composition, and concluded that Titan's ice shell is in a conductive, rather than convective regime.

An alternative view was presented by Choukroun and Sotin (2012) who proposed that the observed shape of Titan, characterized by large-scale polar depressions, may be associated with enhanced ethane precipitation at high latitudes, leading to the accumulation of dense hydrocarbon clathrates in these regions. They showed that the 300 m topographic lows around the poles can be explained by 3-km thick deposits of ethane-rich clathrates, accumulated during the last 300-1200 Myr.

Hemingway et al. (2013) noticed a strong inverse correlation between gravity and topography at long wavelengths that are not affected by tides and rotation. This suggests that the gravity signal generated by mass anomalies inside the ice crust, or at the ice/water interface, mechanically compensating the topographic load at the surface, is stronger than the gravity signal generated by the topography itself. The authors interpreted this situation as a consequence of intense surface erosion and deposition and argued for a substantially rigid ice shell with an elastic thickness exceeding 40 km.

Lefèvre et al. (2014) investigated the long-term mechanical stability of internal mass anomalies on Titan by using a viscous relaxation model. They showed that deflections at the base of the ice crust are stable only for a conductive, highly viscous ice layer above a relatively cold (< 250 K) ocean, while models with crustal density variations also admit a moderate convection.

In this paper we investigate the relationship between the ice thickness variations on Titan and the thermal evolution of the ice shell driven by spatial variations in tidal heating and basal heat flux. Understanding this relationship is important for all icy moons with a subsurface ocean because it allows the topography and gravity data acquired by spacecrafts to be interpreted in terms of physical processes in the deep interior that is inaccessible to direct observation. The long-term shape evolution of icy moon shells has been studied using different approaches, mostly based on approximations of underlying physical processes (eg. Ojakangas and Stevenson, 1989; Nimmo et al., 2007; Shoji et al., 2014; Kamata and Nimmo, 2017; Čadež et al., 2017). Here we formulate the problem in terms of general partial differential equations for slow viscoelastic flow of thermally conductive ice, supplemented by an equation describing the phase transition at the ice/water boundary. The equations are solved in a spherical geometry using a spectral method and integrated in the time domain.

47 To avoid the difficulties associated with the physical description of a multiphase system we
 48 assume that the system under study consists of pure water, and we neglect the effect of other
 49 compounds potentially present in the ice shell and the ocean (Tobie et al., 2014).

50 The deformation of the ice shell and its thermal history depends on the thermal processes
 51 in the ocean which occur on a much shorter time scale than those in ice. In our model, these
 52 processes are parameterized by heat flux variations at the top of the ocean. Since the present-day
 53 knowledge of global ocean circulation on Titan is limited, this quantity is a free parameter in
 54 our model, that is independent of time and is interpreted as the time-averaged signature of the
 55 thermal state of the ocean.

56 Titan is the only moon in the outer Solar System the surface of which is extensively modified
 57 by erosion and surface-atmosphere exchange (eg. Neish et al., 2013; Birch et al., 2017). As
 58 indicated in the study by Hemingway et al. (2013), erosion and deposition may play an important
 59 role in the evolution of Titan’s topography, primarily driven by thermal-mechanical processes in
 60 the deep interior. In the present study, we use a simple topography-dependent model of erosion to
 61 examine how much the predicted topography is affected by transport processes at Titan’s surface.

62 The structure of the paper is as follows: In section 2, we introduce the equations governing
 63 the thermal-mechanical evolution of an ice shell underlain by liquid water and we discuss the
 64 boundary conditions at the ice/water phase boundary (for details, see Appendix A). We also
 65 discuss the simplifications that are necessary for the numerical treatment of the problem. In
 66 section 3, we present the topographic maps obtained for models in which the deformation is
 67 only driven by tidal heating in the ice shell. An alternative driving mechanism, the variations
 68 in basal heating, is investigated in section 4 where we also examine the role of erosion and
 69 deposition in the evolution of Titan’s long-wavelength topography. Both driving mechanisms are
 70 considered in section 5 where we determine the heat flux variations on the top of Titan’s ocean
 71 that are compatible with the observed long-wavelength topography and we hypothesize about the
 72 geometry of ocean circulation. The main results of the paper are summarized and discussed in
 73 section 6.

74 2. Method description

75 2.1. Governing equations

76 We consider an icy moon with an internal ocean of density ρ_w and an outer shell made of water
 77 ice of density ρ_i . We assume that the ice is incompressible ($d\rho_i/dt \approx 0$) and the deformation is
 78 very slow so that the inertial forces can be neglected. The conservation laws of mass, momentum
 79 and energy governing the evolution of the ice shell can then be expressed as

$$80 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad (1)$$

$$81 \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i \nabla V = 0, \quad (2)$$

$$\rho_i c_p \frac{\partial T_i}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T_i - \rho_i c_p \mathbf{v}_i \cdot \nabla T_i + H, \quad (3)$$

82 where \mathbf{v}_i is the velocity of ice flow, $\boldsymbol{\sigma}_i$ is the Cauchy stress tensor, V is the potential of external
 83 forces, T_i is the temperature in the ice shell, t is the time, c_p is the heat capacity of ice at constant
 84 pressure, k is the thermal conductivity of ice, and H is the volumetric heating rate. We assume
 85 that the material of the ice shell behaves as a Maxwell viscoelastic fluid Joseph (1990)

$$\boldsymbol{\sigma}_i = -p_i \mathbf{I} + \eta [\nabla \mathbf{v}_i + (\nabla \mathbf{v}_i)^T] - \frac{\eta}{\mu} \frac{\delta \boldsymbol{\sigma}_i^d}{\delta t}, \quad (4)$$

86 where p_i is the pressure, \mathbf{I} is the identity tensor, η is the viscosity, μ is the shear modulus, $\frac{d\bullet}{dt}$
87 denotes the frame-invariant (convected) time derivative of a tensor (e.g. Barnes et al., 1989),
88 σ_i^d is the deviatoric part of tensor σ_i and \bullet^τ denotes transposition of a tensor. The viscosity η
89 depends on temperature, stress and grain size (see section 2.1) and can be modified to mimic the
90 plastic and/or brittle response of the material (e.g. Moresi et al., 2002). The values of the model
91 parameters used in this study are given in Table 1 and further discussed in section 2.3.

92 2.2. Boundary and initial conditions

93 The outer boundary of the ice shell is assumed to be a material surface – it consists of the same
94 particles for all time and no particles are transported across it. The boundary is free to deform
95 and has a temperature T_s which may vary with colatitude ϑ and longitude φ :

$$\mathbf{n} \cdot \sigma_i(\mathbf{r}_s) = 0, \quad (5)$$

$$T_i(\mathbf{r}_s) = T_s(\vartheta, \varphi), \quad (6)$$

97 where \mathbf{r}_s is the position vector of a point on the surface and \mathbf{n} is the unit vector normal to the
98 surface. The shape of a material boundary can be described by an implicit function $h(\mathbf{r}, t) = 0$
99 satisfying the kinematic condition (e.g. Dingemans, 1997)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla h = 0. \quad (7)$$

100 Considering that $h = r - r_s(\vartheta, \varphi, t)$, we obtain

$$\frac{\partial r_s}{\partial t} = v_{i,r} - \mathbf{v}_i \cdot \nabla r_s, \quad (8)$$

101 where $v_{i,r}$ is the radial component of vector \mathbf{v}_i .

102 The inner surface of the ice shell is a phase boundary, which implies that the temperature at
103 the boundary is always equal to the melting temperature T_m ,

$$T_i(\mathbf{r}_b) = T_m, \quad (9)$$

104 where \mathbf{r}_b is the position vector of a point on the phase boundary. The mass, momentum and en-
105 ergy transfer across the boundary is governed by the following conservation laws (see Appendix
106 A):

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_b) - \mathbf{u}(\mathbf{r}_b)] \rho_i = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}_w(\mathbf{r}_b) - \mathbf{u}(\mathbf{r}_b)] \rho_w, \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma_i(\mathbf{r}_b) = -\mathbf{n} p_w(\mathbf{r}_b), \quad (11)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_b) - \mathbf{u}(\mathbf{r}_b)] L \rho_i = -\mathbf{n} \cdot [k \nabla T_i(\mathbf{r}_b) + \mathbf{q}_w(\mathbf{r}_b)], \quad (12)$$

109 where \mathbf{u} is the velocity of the phase boundary, \mathbf{v}_w , p_w and \mathbf{q}_w are the velocity, the pressure and
110 the heat flux in the water, respectively, and L is the latent heat of ice. Equations (11) and (12) are
111 valid for slow processes under the assumption of inviscid flow in the ocean.

112 Equation (12) expresses the intuitively obvious fact that the velocity of a material particle
113 across the phase boundary ($\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{u})$) is proportional to the jump Δq_n in the normal component
114 of the heat flux vector at this interface,

$$\Delta q_n := \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_w) = -\mathbf{n} \cdot (k \nabla T_i + \mathbf{q}_w). \quad (13)$$

115 In regions where the heat flux from the ocean is larger than the heat flux in the ice shell ($\Delta q_n < 0$),
 116 the particle moves from ice to water – ice melts and the thickness of the shell decreases (Fig. 1).
 117 Vice versa, if the heat is transferred from ice to water ($\Delta q_n > 0$), crystallization occurs and the ice
 118 thickness increases. In both cases, the changes in the ice thickness are accompanied by changes
 119 in the hydrostatic pressure p_w acting on the bottom boundary of the shell (Eq. 11). The lateral
 120 variations of pressure induce the deformation of the shell and further contribute to the motion of
 121 the boundary. The motion of the boundary can continue even after the two heat fluxes equilibrate
 122 ($\Delta q_n = 0$). The phase boundary then behaves as a material surface and its motion is determined
 123 by the velocity of particles located on the boundary ($\mathbf{u} = \mathbf{v}_i$).

124 The phase change at the ice/water boundary and the consequent deformation of the ice shell are
 125 competing processes. While the former generates variations in ice thickness, the latter tends to
 126 return the ice shell to hydrostatic equilibrium. An important case, which will be discussed below,
 127 is the steady state when the phase change at the boundary is compensated by the deformation
 128 inside the ice shell ($\mathbf{u} = 0$). In this case, the flow velocity of ice and the jump in the heat flux at
 129 the boundary satisfy the condition

$$\frac{\Delta q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i} = L\rho_i. \quad (14)$$

130 We assume that at time $t < 0$ the ice shell is in thermal and hydrostatic equilibrium ($\mathbf{v}_i = 0$,
 131 $\boldsymbol{\sigma}_i = 0$ and $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_w = \text{const}$). We denote the pressure and temperature in this initial
 132 state by p_0 and T_0 , respectively. At time $t = 0$, we perturb the equilibrium by adding variations
 133 to \mathbf{q}_w without changing the total heat flux from the ocean. The ice shell then evolves to a new
 134 equilibrium characterized by a dynamic balance between the melting/crystallization at the base of
 135 the shell and the deformation of the shell driven by topographic anomalies at this interface.

136 2.3. Material properties of ice

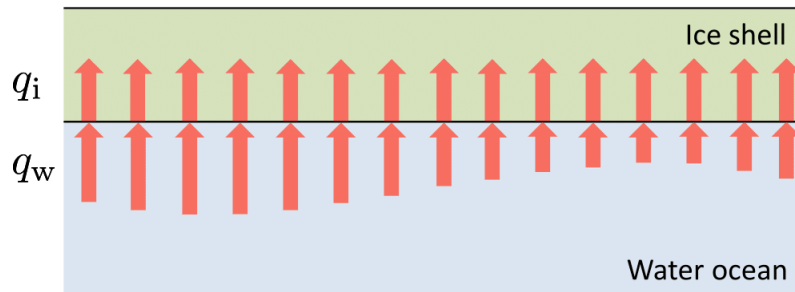
137 The viscous flow of ice is a macroscopic manifestation of different processes, occurring on
 138 microscopic scale and including diffusion creep, dislocation creep, grain boundary sliding and
 139 basal slip creep (e.g. Goldsby and Kohlstedt, 2001). The resistance of ice to deformation by
 140 deviatoric stress is characterized by effective viscosity η , which is a function of state parameters
 141 (p, T), grain size d and the second invariant of the deviatoric stress σ_{II}^d . The grain size generally
 142 depends on stress and temperature (e.g. Barr and McKinnon, 2007) and may vary in both time
 143 and space. Direct measurements of grain size on icy moons are not available. However, a typical
 144 grain size can be estimated indirectly from analysis of ice samples from Antarctic glaciers (Du-
 145 rand et al., 2006) and self-consistent models of grain size evolution (Barr and McKinnon, 2007;
 146 Barr and Milkovich, 2008). These studies indicate that the grain size is likely to range between
 147 0.1 mm and 10 mm, depending on the amount of impurities in ice.

148 In the present paper we use the rheological model of ice by Goldsby and Kohlstedt (2001)
 149 where we assume that (i) the grain size d is uniform throughout the ice shell and it does not
 150 change in time, and (ii) the stress σ_{II}^d in the material formulas can be approximated by the average
 151 value $\bar{\sigma}_{II}^d$ at a given radius,

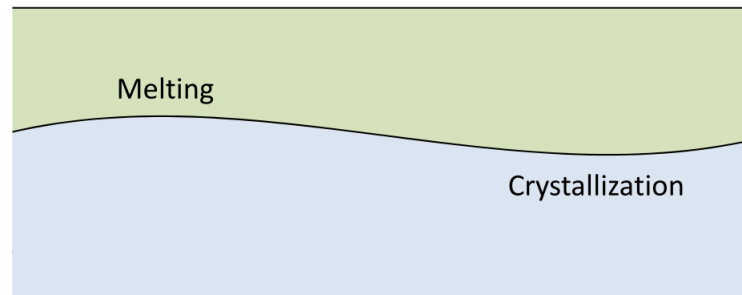
$$\bar{\sigma}_{II}^d(r, t) := \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_i^d(\mathbf{r}, t) : \boldsymbol{\sigma}_i^d(\mathbf{r}, t) d\Omega}, \quad (15)$$

152 where Ω represents the surface of a unit sphere and the colon denotes the double-dot product
 153 of two tensors ($\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv A_{ij}B_{ji}$ in Cartesian coordinates). In our numerical simulations, the

a) Heat flux variations



b) Phase changes



c) Surface deformation

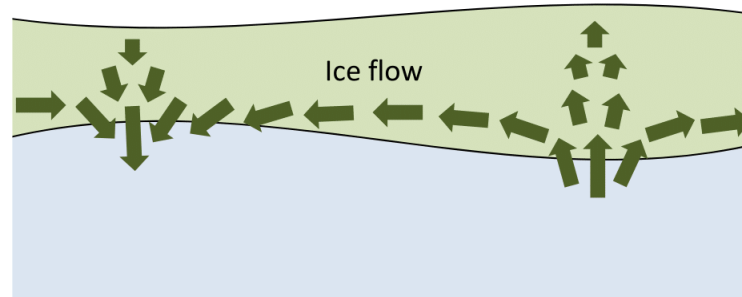


Figure 1: Sketch of the processes occurring at the ice/water interface and their consequences for the ice shell evolution. a) The normal component of the heat flux is not generally continuous at a phase interface. Melting occurs in regions where the heat flux from the ocean is larger than the heat flux in the ice shell. The opposite situation leads to crystallization. b) In regions of melting, the ice shell loses mass and its thickness decreases. Crystallization is accompanied by ice mass gain and ice shell thickening. Both processes tend to restore the heat flux balance at the boundary. c) Undulations of the ice/water interface generate buoyancy forces which induce a flow in the ice shell. This flow deforms the upper boundary of the shell – depressions develop above the regions of melting while the surface tends to rise above the regions of crystallizations.

154 grain size is a model parameter which is chosen a priori from the interval of admissible values
 155 ($0.1 \text{ mm} \leq d \leq 10 \text{ mm}$), and determines the relative importance of diffusion creep in the ice flow.
 156 The use of average values of stress and grain size in the formula for viscosity is a reasonable first
 157 approximation provided that the deformation of the ice shell is long-wavelength and the stress
 158 is not too large. The deviatoric stress in our models does not exceed 1 MPa which suggests that
 159 the deformation of ice is controlled by diffusion creep and the stress averaging has only a minor
 160 effect on the results.

161 The rheological model by Goldsby and Kohlstedt (2001) provides an appropriate mechanical
 162 description of ductile ice, but it cannot be used in the the uppermost, cold part of the ice shell
 163 where the deformation is likely to be controlled by brittle failure. The laboratory experiments
 164 suggest that the brittle failure in ice occurs when the stress exceeds 0.2–1.5 MPa under tension
 165 (Schulson, 2001; Lee et al., 2005), or 5–10 MPa under compression at low confining pressure
 166 (Weiss and Schulson, 1995; Schulson, 2001). However, the effective strength of the ice litho-
 167 sphere on a global scale may be significantly lower, as it depends on a number of factors that
 168 cannot be identified in small-scale experiments, such as the existence of faults and fractures, the
 169 state of compaction, the mobility of unconsolidated ice, etc. Considering the large-scale nature
 170 of our model, we lump all these factors in a single parameter, the yielding viscosity η_y . The
 171 viscosity in Eq. (4) is then $\eta(\mathbf{r}, t) = \min\{\eta_y, \eta_{\text{GK}}(\mathbf{r}, t)\}$, where η_{GK} denotes the viscosity obtained
 172 from the rheological model by Goldsby and Kohlstedt (2001). To assess the role of the yield-
 173 ing viscosity in the time evolution of the ice shell, we will carry out the simulations for several
 174 different values of η_y , ranging from 10^{20} to 10^{26} Pa s.

175 Compared to viscosity, the shear modulus of ice only weakly depends on temperature (Proctor,
 176 1966) and is almost independent of stress and grain size. For simplicity, we assume that the
 177 shear modulus μ is constant throughout the ice shell and has a value of 3.5 GPa. This value was
 178 obtained from laboratory experiments on polycrystalline ice (Gammon et al., 1983) and it may
 179 not be appropriate for ice at shallow depths where the shear modulus is likely to be reduced due
 180 to fractures and pores. The error introduced by considering a constant value of μ is, however,
 181 small compared to the uncertainty in the viscosity model.

182 In the heat equation (3), we consider the temperature dependence of thermal conductivity k
 183 and heat capacity c_p following the relations (McCord and Sotin, 2005)

$$k(T) = k_1 + \frac{k_2}{T}, \quad c_p(T) = c_1 + c_2 T, \quad (16)$$

184 where $k_1 = 0.4685 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$, $k_2 = 488.12 \text{ W m}^{-1}$, $c_1 = 185 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ and $c_2 =$
 185 $7.037 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-2}$. The spatial distribution of tidal heating H is computed using an Andrade vis-
 186 coelastic model (eg. Efroimsky, 2012) in which parameters η and μ are the same as those used
 187 to compute the long-term evolution of the ice shell. The Andrade model characterizes the vis-
 188 coelastic response of ice in a wide range of temperature and frequency and provides a better
 189 description of inelastic behavior of ice than the Maxwell model which is used in this study to
 190 describe the long-term deformation of ice. The values of empirical parameters α and β in the
 191 Andrade model (see eq. (26) in Efroimsky, 2012) are chosen $\alpha = 0.25$ and $\beta = \mu^{\alpha-1}\eta^{-\alpha}$. The
 192 tidal heating is included using the approach by (Běhouňková et al., 2010) in which the long-term
 193 evolution of the ice shell and its periodic tidal deformation are solved independently for the same
 194 viscosity structure.

Symbol	Parameter	Value
R_s	Mean radius of Titan	2576 km
R_b	Mean radius of ice/water interface	2476 km
$g(R_s)$	Gravity acceleration at radius R_s	1.35 m s^{-2}
$g(R_b)$	Gravity acceleration at radius R_b	1.38 m s^{-2}
ρ_i	Density of ice	920 kg m^{-3}
ρ_w	Density of water	1000 kg m^{-3}
c_p	Thermal capacity of ice at constant pressure ¹	variable, Eq. (16)
k	Thermal conductivity of ice ¹	variable, Eq. (16)
L	Latent heat ²	333.5 kJ kg^{-1}
d	Grain size	0.1–10 mm
T_m	Melting temperature of ice	273 K
T_s	Surface temperature ³	94 K
μ	Shear modulus of ice ⁴	3.5 GPa
η_{GK}	Viscosity of ductile ice ⁵	variable
η_y	Yielding viscosity	10^{20} – 10^{26} Pa s
P	Orbital period	15.945 d
e	Eccentricity	0.0288

Table 1: Parameters used in this study. The values adopted from ¹McCord and Sotin (2005), ²Hobbs (1974), ³Flasar et al. (2014), ⁴Gammon et al. (1983) and ⁵Goldsby and Kohlstedt (2001).

195 2.4. Simplifying assumption

196 The equations presented in sections 2.1 and 2.2 are valid for slow viscoelastic deformation of
197 an incompressible ice shell induced by phase change at the ice/water interface. The deformation
198 of the ice shell and its thermal history depends on the thermal processes in the ocean which occur
199 on a much shorter time scale than those in ice. In our model, these processes are parameterized
200 by the heat flux q_w , which can be interpreted as the time-averaged signature of the thermal state
201 of the ocean. For simplicity, we assume that the integral of Δq_n over the bottom boundary of the
202 shell is equal to zero and the mean thickness of the ice shell does not change in time.

203 In this paper, we are going to investigate the effect of the heat flux from the ocean on the
204 evolution of Titan’s ice shell in order to establish a link between the observed topography and
205 gravity on one side and the average thermal state of the ocean, represented by quantity q_w , on
206 the other. We do not consider the role of chemical heterogeneities within the shell, which have
207 been proposed as an alternative to ice thickness variations (Choukroun and Sotin, 2012), and
208 we assume that the density ρ_i of the ice is constant. Also, we neglect the effects associated
209 with possible partial melting inside the ice shell (Kalousova et al., 2014, 2016) and assume that
210 melting can occur only at its bottom boundary. Since the present-day models of topography and
211 geoid on Titan provide only the long-wavelength characteristics of these fields, we focus our
212 modeling effort on the large-scale processes associated with an uneven distribution of the heat
213 flux from the ocean. We do not consider possible effects of small-scale convection, which may
214 locally develop in the ice shell but which is unlikely to occur on a global scale because of too
215 high viscosity of ice suggested by previous studies (Nimmo and Bills, 2010; Hemingway et al.,
216 2013; Lefevre et al., 2014).

217 In the constitutive equation (4), we neglect the advection and corotation terms in the convected
218 time derivative and set $\delta/\delta t = \partial/\partial t$ (cf. Zhong, 2002; Dumoulin et al., 2013). The results of

219 the tests performed for the Earth’s mantle using the viscoelastic version of the numerical code
 220 StagYY (Patočka et al., 2017) suggest that omission of these terms have a negligible effect on
 221 the global flow (V. Patočka, personal communication).

222 2.5. Application of spectral method

223 The problem described in sections 2.1 and 2.2 can be divided into three parts: viscoelastic
 224 deformation (Eqs. 1, 2, 4, 5 and 11), thermal evolution (Eqs. 3, 6 and 9) and the motion of the
 225 boundaries (Eqs. 8 and 12). The standard approach to solve the first problem in spherical geom-
 226 etry is to reduce the partial differential equations governing the deformation to ordinary differ-
 227 ential equations by using a spectral decomposition (e.g. Tobie et al., 2008). The spectral technique
 228 is computationally very efficient and numerically stable even for large viscosity contrasts (e.g.
 229 Dumoulin et al., 2013), but becomes cumbersome when the boundaries of the computational
 230 domain are irregular.

231 The usual tool to solve problems with complicated geometries is a finite element method.
 232 The finite element modeling of the global deformation of ice crusts of outer planet satellites is
 233 challenging for two reasons. First, due to the specific boundary conditions, the ice shell is not
 234 fixed in space and, therefore, one needs to eliminate the rigid body translation and rotation to
 235 ensure uniqueness of the solution. This can be achieved using different techniques (e.g. Souček
 236 et al., 2016), but their implementation in commercial or publicly available finite element software
 237 is far from straightforward. Second, and more importantly, to capture the sharp increase in
 238 viscosity with radius (by 6 orders of magnitude or even more), one needs a sufficiently large
 239 number of elements across the shell. However, the typical thickness of the ice crust is only
 240 $\sim 0.1 - 1\%$ of the outer perimeter of the satellite. Since the size of the elements should be more
 241 or less the same in all directions, this leads to an algebraic problem with a very high number
 242 of unknowns. Although the results of recent modeling efforts (e.g. A et al., 2014; Souček et al.,
 243 2017) are promising, the finite element models of ice shell deformation still suffer from rather
 244 coarse radial resolution, which does not allow to include the large viscosity increase across the
 245 shell necessary for a realistic prediction of topography at a long time scale (Čadek et al., 2017).

246 In this study, we use the spectral approach. Assuming that the deviations of the boundaries
 247 from the initial spherical shape are small relative to the mean thickness of the shell, we transform
 248 the problem with irregular boundaries to the standard problem with spherical boundaries to which
 249 we apply the method of spherical harmonic decomposition. This transformation is facilitated by
 250 the fact that the gradient of the incremental stress due to the deformation is significantly smaller
 251 than the gradient of the hydrostatic pressure. Considering the assumptions made in section 2.4,
 252 applying the Taylor theorem to boundary conditions (5) and (11) and neglecting terms of higher
 253 order, we obtain (Appendix B?)

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i - \rho_i \nabla (V - V_0) = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^d = \eta(T_0, \bar{\sigma}_{II}^d) [\nabla \mathbf{v}_i + (\nabla \mathbf{v}_i)^T] - \frac{\eta(T_0, \bar{\sigma}_{II}^d)}{\mu} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^d}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i(\mathbf{R}_s) = \rho_i t_s \mathbf{g}_0(R_s), \quad (19)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i(\mathbf{R}_b) = (\rho_i - \rho_w) t_b \mathbf{g}_0(R_b) + \rho_w (V - V_0) \mathbf{e}_r. \quad (20)$$

257 Here, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ is the incremental stress defined with respect to the initial hydrostatic equilibrium,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (21)$$

258 ρ_0 , V_0 and \mathbf{g}_0 are the quantities characterizing the initial hydrostatic state, namely the hydrostatic
 259 pressure, the potential of external forces and the gravity acceleration, respectively, R_s and R_b are
 260 the mean radii of the top and bottom boundary of the ice shell, respectively, and \mathbf{R}_s and \mathbf{R}_b are
 261 the corresponding position vectors, \mathbf{e}_r is the radial unit vector, t_s is the topography of the outer
 262 surface induced by the deformation of the ice shell, and t_b is the topography of the ice/water
 263 interface induced by melting/crystallization

264 Following the same reasoning as above, the heat equation (3) and the boundary conditions (6)
 265 and (9) can be rewritten as

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i c_p} \nabla \cdot k(T_0) \nabla T_i - \mathbf{v}_{i,r} \frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{H(\eta)}{\rho_i c_p}, \quad (22)$$

266

$$T_i(\mathbf{R}_s) = T_s - t_s \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=R_s}, \quad T_i(\mathbf{R}_b) = T_m - t_b \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=R_b}, \quad (23)$$

267 and Eqs. (8) and (12) take the form

$$\frac{\partial t_s}{\partial t} = v_{i,r}(\mathbf{R}_s), \quad (24)$$

268

$$\frac{\partial t_b}{\partial t} = u_r = v_{i,r}(\mathbf{R}_b) + \frac{1}{L\rho_i} \left[k(T_0) \frac{\partial(T_i - T_0)}{\partial r} \Big|_{r=R_b} + \delta \mathbf{q}_w \cdot \mathbf{e}_r \right], \quad (25)$$

269 where u_r is the radial component of vectors \mathbf{u} and $\delta \mathbf{q}_w$ denotes the lateral variations of heat flux
 270 \mathbf{q}_w . Since the coefficients in Eqs (17)–(25) do not vary laterally, the problem can be solved using
 271 a spectral method similar to that described in (Dumoulin et al., 2013).

272 3. Effect of tidal heating in the ice shell

273 In this paper we investigate the variations of Titan's ice shell thickness induced by thermal
 274 effects, namely by the tidal heating in the ice shell (H) and the heat flux (\mathbf{q}_w) from the subsurface
 275 ocean. We first examine the role of the tidal heating, while assuming that the heat flux from
 276 the ocean is homogeneous and the average thickness of the ice shell does not change in time.
 277 Unless stated otherwise, the results presented below correspond to the steady-state solution of
 278 Eqs (17)–(25).

279 The tidal heating in the ice shell depends on the periodic tidal potential, which is of the order
 280 of $e(r/P)^2$ where $e = 0.0288$ is the eccentricity and $P = 15.945$ d is the orbital period, and
 281 the viscosity structure, which is primarily determined by the temperature distribution. Since
 282 the viscosity in our model strongly increases with radius, the tidal heating is significant only
 283 in the lowermost few kilometers of the ice shell. In this part of the shell, the temperature is
 284 close to the melting temperature and the deviatoric stress due to viscous flow is relatively small,
 285 which suggests that the value of viscosity, and consequently the heat production in this region,
 286 is primarily controlled by the grain size d . The maximum tidal heating rate H computed for the
 287 Andrade rheological model (section 2.3) ranges from $3 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-3}$ for $d = 50$ mm to about
 288 10^{-7} W m^{-3} for $d = 1$ mm.

289 The amplitude of the phase boundary topography depends on the magnitude of tidal heating
 290 in the ice shell and the ability of ice to support topographic loads. While the tidal heating in-
 291 creases with decreasing viscosity, significant topographic amplitudes can only be maintained if
 292 the viscosity of ice is sufficiently high and the viscous relaxation is slow. The ambivalent role
 293 of viscosity is demonstrated in Table 2 where the peak-to-peak amplitudes of the surface and

	0.1 mm	1 mm	3 mm	10 mm	30 mm	50 mm
10^{20} Pa s	$\frac{0.05}{0.62}$	$\frac{2.7}{32}$	$\frac{3.1}{35}$	$\frac{2.3}{26}$	$\frac{1.8}{21}$	$\frac{1.7}{20}$
10^{21} Pa s	$\frac{0.05}{0.62}$	$\frac{5.7}{66}$	$\frac{16}{182}$	$\frac{16}{190}$	$\frac{13}{150}$	$\frac{12}{133}$
10^{22} Pa s	$\frac{0.05}{0.62}$	$\frac{6.5}{75}$	$\frac{31}{359}$	$\frac{72}{826}$	$\frac{69}{795}$	$\frac{61}{701}$
10^{23} Pa s	$\frac{0.05}{0.62}$	$\frac{6.6}{76}$	$\frac{35}{403}$	$\frac{118}{1358}$	$\frac{148}{1708}$	$\frac{134}{1546}$
10^{24} Pa s	$\frac{0.05}{0.62}$	$\frac{6.6}{76}$	$\frac{35}{408}$	$\frac{126}{1457}$	$\frac{169}{1952}$	$\frac{154}{1780}$
10^{25} Pa s	$\frac{0.05}{0.62}$	$\frac{6.6}{76}$	$\frac{35}{408}$	$\frac{127}{1464}$	$\frac{171}{1972}$	$\frac{156}{1795}$
10^{26} Pa s	$\frac{0.05}{0.62}$	$\frac{6.6}{76}$	$\frac{35}{408}$	$\frac{127}{1464}$	$\frac{171}{1972}$	$\frac{156}{1795}$

Table 2: Peak-to-peak amplitudes of surface (top number) and phase interface (bottom number) topography in m induced by tidal heating, computed for different combinations of grain size (columns) and yielding viscosity (rows).

294 phase interface topographies, computed for different combinations of parameters d and η_y , are
295 presented. The amplitude of the surface topography predicted for 1 mm grain size does not ex-
296 ceed a few meters, corresponding to only $\sim 1\%$ of the observed topography signal, and even
297 smaller amplitudes are found for $d = 0.1$ mm. Although the tidal heating is largest for small
298 grain sizes, the ice in the vicinity of the phase interface has too low viscosity to support a major
299 topographic load at this boundary. Significant topographic amplitudes are obtained only for a rel-
300 atively large grain size (≥ 3 mm). In this case, the ice at the base of the shell is sufficiently strong
301 ($\eta \gtrsim 10^{15}$ Pa s) to maintain 100-m undulations of the phase boundary, and the tidal heating is
302 still large enough to produce significant lateral variations of the heat flux at the phase boundary.

303 The predicted pattern of the surface topography (Fig. 2) is characterized by lows in the polar
304 regions and elevations around the equator, and it roughly correlates with the observed shape
305 of Titan Lorenz et al. (2013) corrected for hydrostatic effects Iess et al. (2010). However, the
306 peak-to-peak amplitude of the topography, predicted for $d = 10$ mm, is only 126 m, which is
307 significantly less than the observed value. The tidal heating in the ice shell thus cannot explain
308 Titan’s low-degree non-hydrostatic topography, at least not for the current value of eccentricity.

309 The predicted steady-state surface topography increases with the yielding viscosity reaching a
310 saturation value at $\eta_y \approx 10^{22}$ Pa s for a 1 mm grain size and $\eta_y \approx 10^{25}$ Pa s for $d \geq 10$ mm. All
311 models with η_y above the saturation value give approximately the same steady-state topography
312 and they only differ in the time period needed to reach the steady state. The effect of parameters
313 d and η_y on the time scale of the relaxation will be discussed in the next section.

314 4. Topography induced by heat flux variations in the ocean

315 In this section, we investigate the effect of lateral variations in ocean heat flux on the evolution
316 of ice shell thickness. For clarity of exposition, we omit the tidal heating in the ice shell ($H =$
317 0) and we investigate the response of the ice shell to lateral heat flux variations δq_w degree
318 by degree. The only source term considered in evolution equations (17)–(25) is the heat flux
319 $q_{w,r} := \delta q_w \cdot \mathbf{e}_r$ at harmonic degree ℓ and order zero, $q_{w,r}(\vartheta) = A_q P_\ell(\cos \vartheta)$, where A_q is the
320 amplitude of the heat flux and P_ℓ is the Legendre polynomial. The heat flux $q_{w,r}$ is imposed
321 at the bottom boundary of the ice shell at time $t = 0$ and held constant. The ice shell then

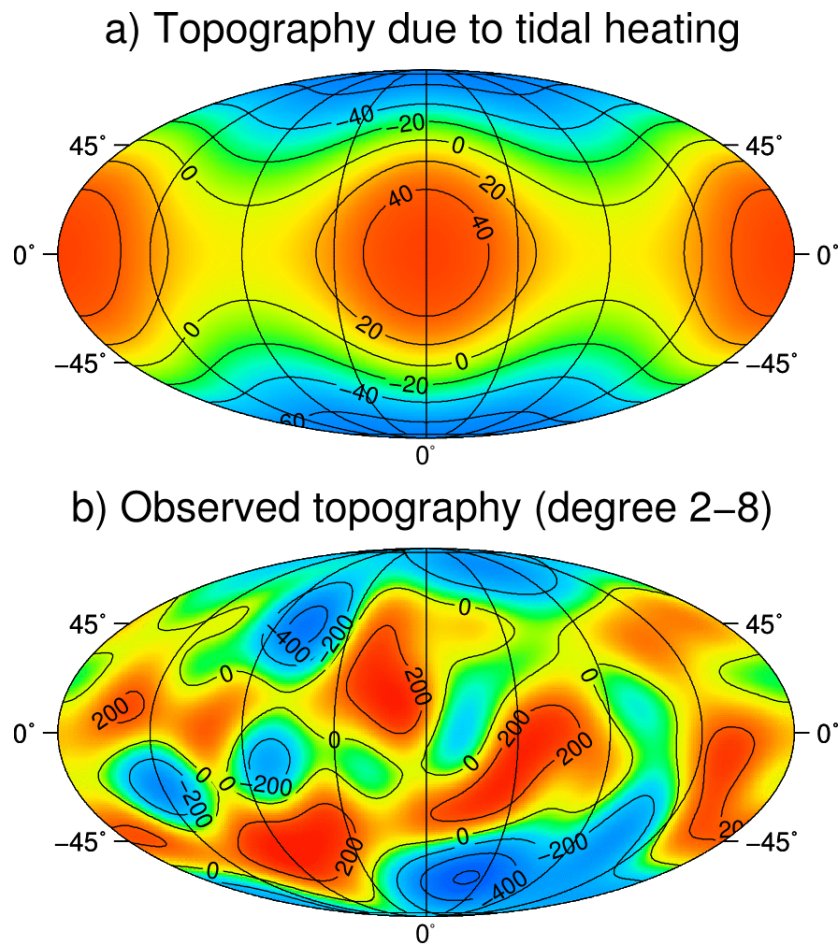


Figure 2: a) Topography of Titan predicted for a tidally heated model of ice shell with $d = 10$ mm and $\eta_y = 10^{24}$ Pa s. No variations of heat flux from the ocean are considered. The isoline interval is 20 m. b) Topography of Titan based on Cassini observations Lorenz et al. (2013) related to the reference ellipsoid Iess et al. (2010). The isoline interval is 200 m.

322 evolves to a steady state characterized by a balance between the ice flow velocity and the rate of
323 melting/crystallization at the phase interface (Eq. 14).

324 Figures 3–6 show the time evolution of the topographies and the geoid computed for degrees
325 2, 3, 4, 6 and 8. Each figure has six panels illustrating the dependence of the solution on three
326 free parameters, namely the grain size, the yielding viscosity and the amplitude of the ocean heat
327 flux. Panel a shows the solution for model with $d = 10$ mm, $\eta_y = 10^{24}$ Pa s and $A_q = 1$ mW m $^{-2}$,
328 which will be referred to as the “reference model”. As indicated in section 3, this model has the
329 potential to explain the observed topographic amplitudes of the order of 100 m. The grain size
330 of 10 mm, considered in the reference model, is somewhat larger than expected for planetary
331 ices, but it does not exceed the range of acceptable values. The solution obtained for the same
332 model as in panel a but for the heat flux amplitude $A_q = 3$ mW m $^{-2}$ is presented in panel b.
333 Panels c and d illustrate the sensitivity of the solution to the grain size ($d = 1$ mm and 3 mm,
334 respectively), while the effect of the yielding viscosity is investigated in panels e ($\eta_y = 10^{22}$ Pa s)
335 and d ($\eta_y = 10^{26}$ Pa s). The impact of erosion/deposition on the geoid amplitudes is addressed in
336 Fig. 7.

337 4.1. Evolution of topographies

338 Figure 3 illustrates the evolution of the ice/water interface topography in response to a heat flux
339 imposed at this interface at time $t = 0$. Inspection of Fig. 3 shows that for all considered models,
340 the amplitude of topography increases in time reaching a steady state after 1–100 Myr. The
341 time needed to reach the steady state (hereinafter referred to as the “relaxation time”) is mainly
342 controlled by the grain size (compare panels a, c and d), and depends only weakly on the heat flux
343 amplitude (panel b) and the yielding viscosity (panels e and f). This is not surprising, given that
344 the grain size determines the viscosity in the lowermost part of the shell and, consequently, the
345 velocity of ice flow in the vicinity of the ice/water interface. Note, however, that the relaxation
346 times which can be inferred from Fig. 3 differ from the times traditionally used to characterize
347 the viscoelastic deformation and melting of ice, namely the Maxwell relaxation time ($\tau_M =$
348 η/μ) and the characteristic time of melting (τ_{melt} , see, eg., equation (5) in (Kamata and Nimmo,
349 2017)), respectively. These two characteristics are closely related to the processes represented
350 by ice flow velocity v_i , but they cannot be directly used to estimate the characteristic time of
351 the phase boundary evolution, represented by the radial component of velocity u (see Eq. 25),
352 which is smaller than velocity v_i and eventually goes to zero. The relaxation time decreases with
353 increasing degree. For example, the topography at degree $\ell = 8$, computed for the reference
354 model, reaches a steady state after about 30 Myr of evolution, while more than 200 Myr are
355 needed for the relaxation to be completed if $\ell = 2$. The dependence of the relaxation time on
356 the harmonic degree of heat flux anomaly $q_{w,r}$ can be understood if we consider that the rate of
357 the relaxation process depends on how much of the overall deformation occurs in the bottom,
358 low-viscosity layer of the ice shell. Since the thickness of this layer relative to the wavelength of
359 the heat flux increases with harmonic degree, the relaxation is faster at higher degrees.

360 The grain size controls not only the time scale of the phase boundary evolution but also the
361 amplitude of the steady-state topography. The steady-state amplitude at degree 2 is about 5 km
362 for the reference model ($d = 10$ mm, panel a), but only 140 m when $d = 1$ mm (panel c).
363 As already discussed in section 3, the magnitude of the steady-state topography depends on the
364 ability of ice to support a topographic load. This ability is closely related to the viscosity of ice in
365 the vicinity of the phase boundary, which is primarily determined by the grain size in our model.

366 The amplitude of the topography induced by the same heat flux anomaly A_q decreases with
367 increasing degree. Close inspection of panels a, c and d of Fig. 3 reveals that the dependence of

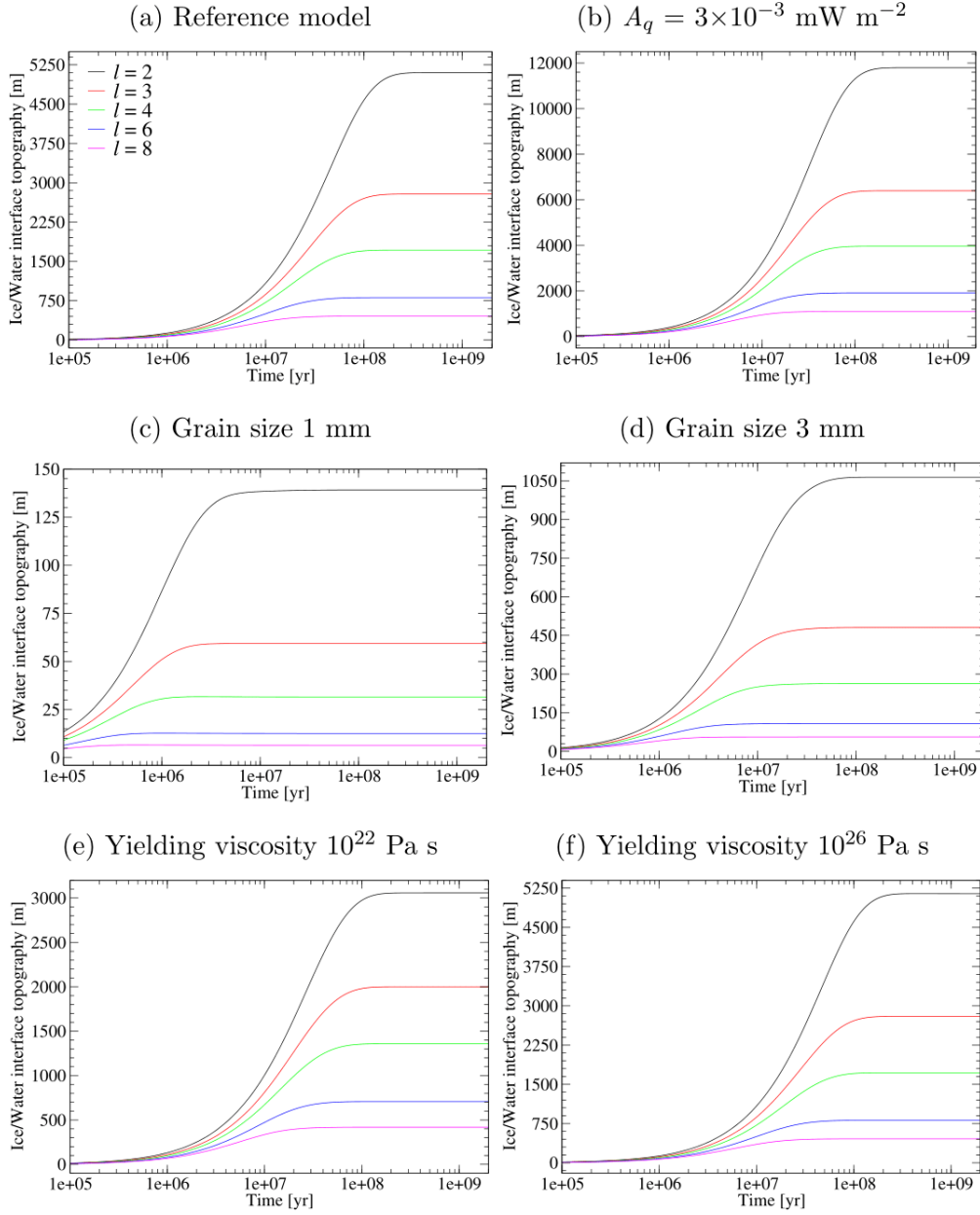


Figure 3: Amplitude of ice/water interface topography as a function of time, computed for heat flux anomalies $q_{w,r}$ imposed at degree 2, 3, 4, 6 and 8. Results obtained for the reference model ($d = 10$ mm, $\eta_y = 10^{24}$ Pa s, $A_q = 1$ mW m $^{-2}$) are shown in panel a. Other panels show the same as panel a but for b) $A_q = 3$ mW m $^{-2}$, c) $d = 1$ mm, d) $d = 3$ mm, e) $\eta_y = 10^{22}$ Pa s and f) $\eta_y = 10^{26}$ Pa s.

368 the topographic amplitude on the degree is stronger for smaller grain sizes.

369 To summarize, our results suggest that the topography of the ice/water boundary generated
 370 by heat flux variations in the ocean is likely to be dominated by large-scale structures and its
 371 magnitude strongly depends on the viscosity of ice in the bottom part of the ice shell. Unless the
 372 heat flux variations exceed a few mW, topography larger than 1 km can develop only for the grain
 373 size $\gtrsim 3$ mm, corresponding to a minimum ice viscosity of $\sim 10^{15}$ Pa s or higher. The evolution
 374 of the surface topography is shown in Fig. 4. The relaxation times of surface topography at
 375 individual degrees are approximately the same as those found for the bottom boundary and,
 376 interestingly enough, they only weakly depend on viscosity η_y . The key parameter controlling
 377 the time evolution and the topographic amplitudes is the grain size (see panels a, c and d), which
 378 suggests that the surface topography is primarily determined by the viscosity of the bottom part
 379 of the ice shell and the heat flux from the ocean (panel b).

380 In previous studies, the relationship between the surface and ice/water topography has been
 381 analyzed in terms of models based on the assumption of isostatic equilibrium, elastic flexure
 382 or a steady-state viscous flow (see, e.g., Nimmo and Bills, 2010; Choukroun and Sotin,
 383 2012; Hemingway et al., 2013; Lefèvre et al., 2014). It is of interest to see whether these basic
 384 models can be used as first order approximations to the steady states obtained here for a general
 385 viscoelastic model. Following (Čadek et al., 2017), we introduce the topographic load ratio
 386 (TLR) at degree ℓ which is defined as the ratio of the force that maintains the surface topography
 387 of degree ℓ , to the buoyancy force of the same degree acting on the base of the computational
 388 domain:

$$\text{TLR}_\ell = -\frac{t_{s,\ell m} \rho_i g_s R_s^2}{t_{b,\ell m} (\rho_w - \rho_i) g_b R_b^2}, \quad (26)$$

389 where $t_{s,\ell m}$ and $t_{b,\ell m}$ are the degree- ℓ order- m spherical harmonic coefficients of the surface and
 390 ice/water interface topography. If $\text{TLP} = 1$ the topographic loads on the boundaries satisfy the
 391 condition of Airy isostasy Lambeck (e.g. 1988). The time evolution of TLR is shown in Fig. 5.
 392 The value of TLR is larger than 0.9 already after a few thousands years and it is close to 1 in
 393 steady state, suggesting that the topographic loads are approximately in equilibrium during most
 394 of the evolution. The magnitude of the ice/water interface topography can thus be estimated
 395 from the surface topography using Eq. (26) in which TLR is set to 1. The steady-state value
 396 of TLR decreases with increasing degree and it can be shown that the “isostatic” approximation
 397 ($\text{TLR} \approx 1$) can only be used if $\ell \ll 2\pi R_s / (R_s - R_b)$, ie. for ℓ smaller than ~ 15 . Note that the
 398 relaxation times of TLR are shorter than those inferred from Figs 3 and 4 and they depend on the
 399 yielding viscosity rather than on the grain size. This indicates that equilibrium between the top
 400 and bottom load is reached long time before the development of the topographies is completed.

401 4.2. Geoid and the effect of erosion

402 The time evolution of the geoid height is plotted in Fig. 6. Inspection of the curves shows that
 403 for all considered combinations of parameters, the geoid has the same sign as the surface topog-
 404 raphy, in contradiction to the finding of Hemingway et al. (2013) who showed that the gravity
 405 and topography at degree 3 are inversely correlated. According to Hemingway et al. (2013), this
 406 observation can be explained only if the ice shell is sufficiently rigid (elastic thickness > 40 km)
 407 and the topographic amplitudes are strongly regulated by erosion and deposition. We will test
 408 this hypothesis by computing the geoid at degree 3 for a model with high-viscosity lithosphere
 409 ($\eta_y = 10^{25}$ Pa s), relatively stiff bottom part ($d = 10$ mm, corresponding to a minimum viscosity

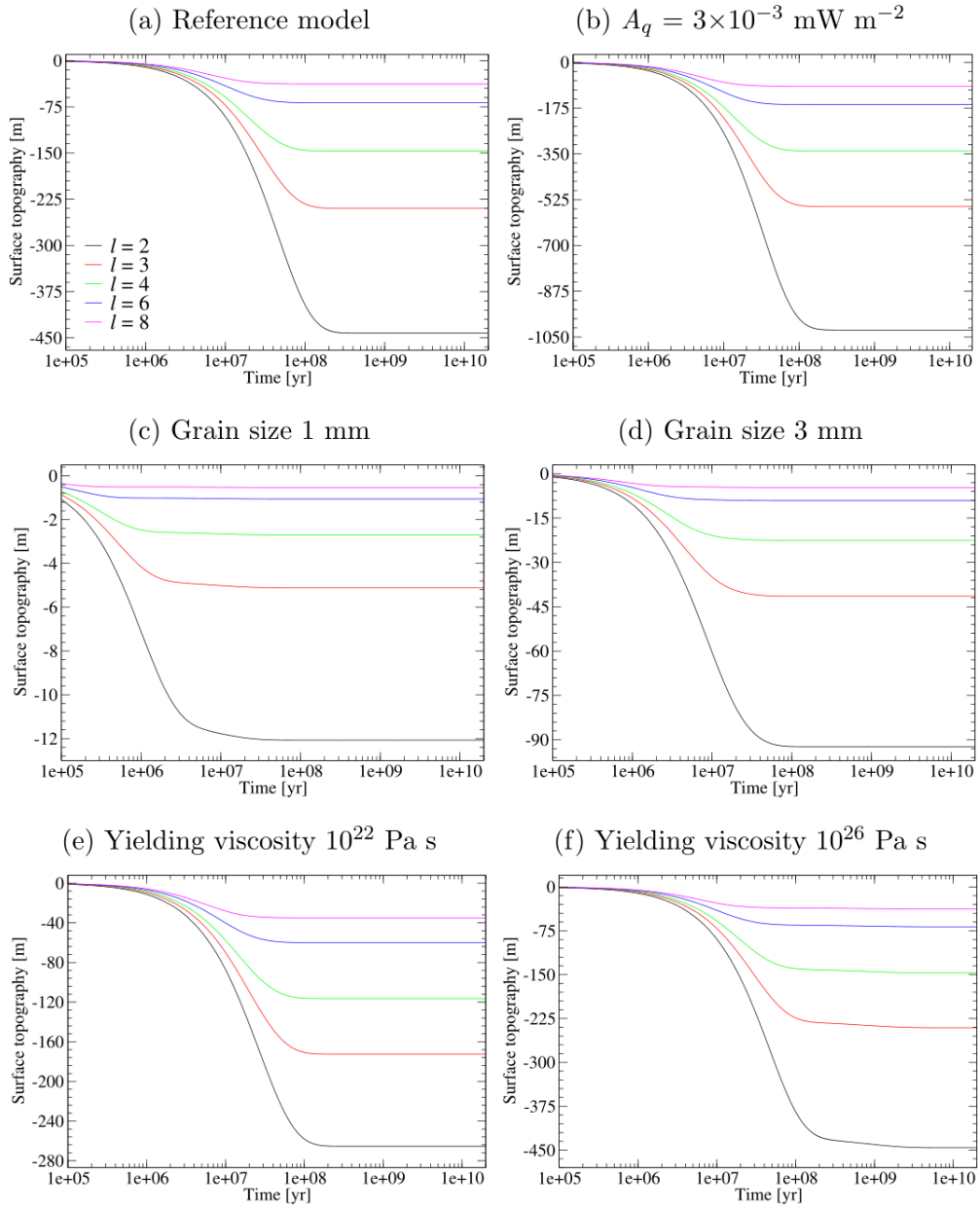


Figure 4: The same as in Fig. 3 but for the surface topography.

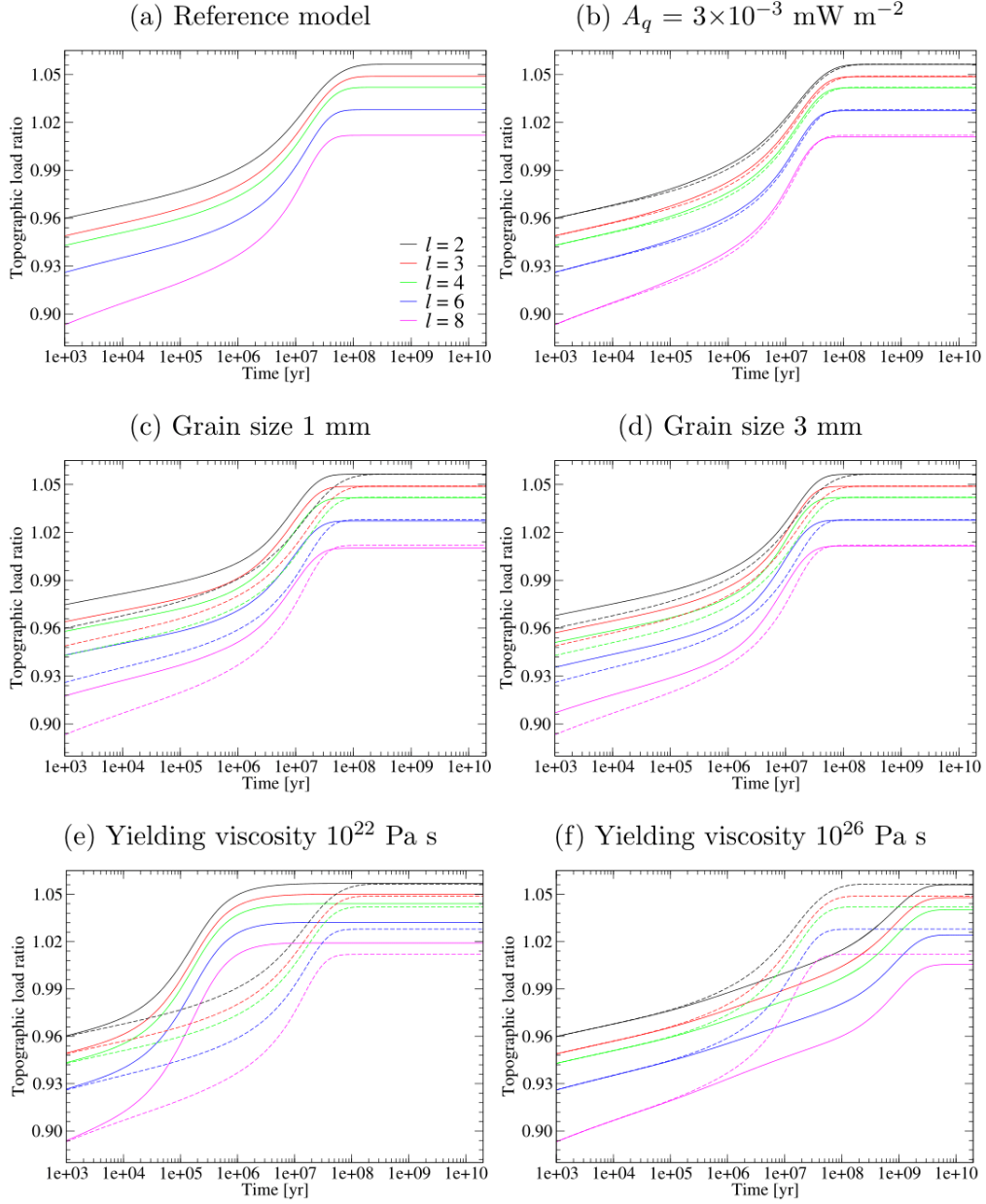


Figure 5: The same as in Fig. 3 but for the topographic load ratio (TLR), defined by Eq. (26). For comparison, we plot the solutions obtained for the reference model by dashed lines in panels b-f.

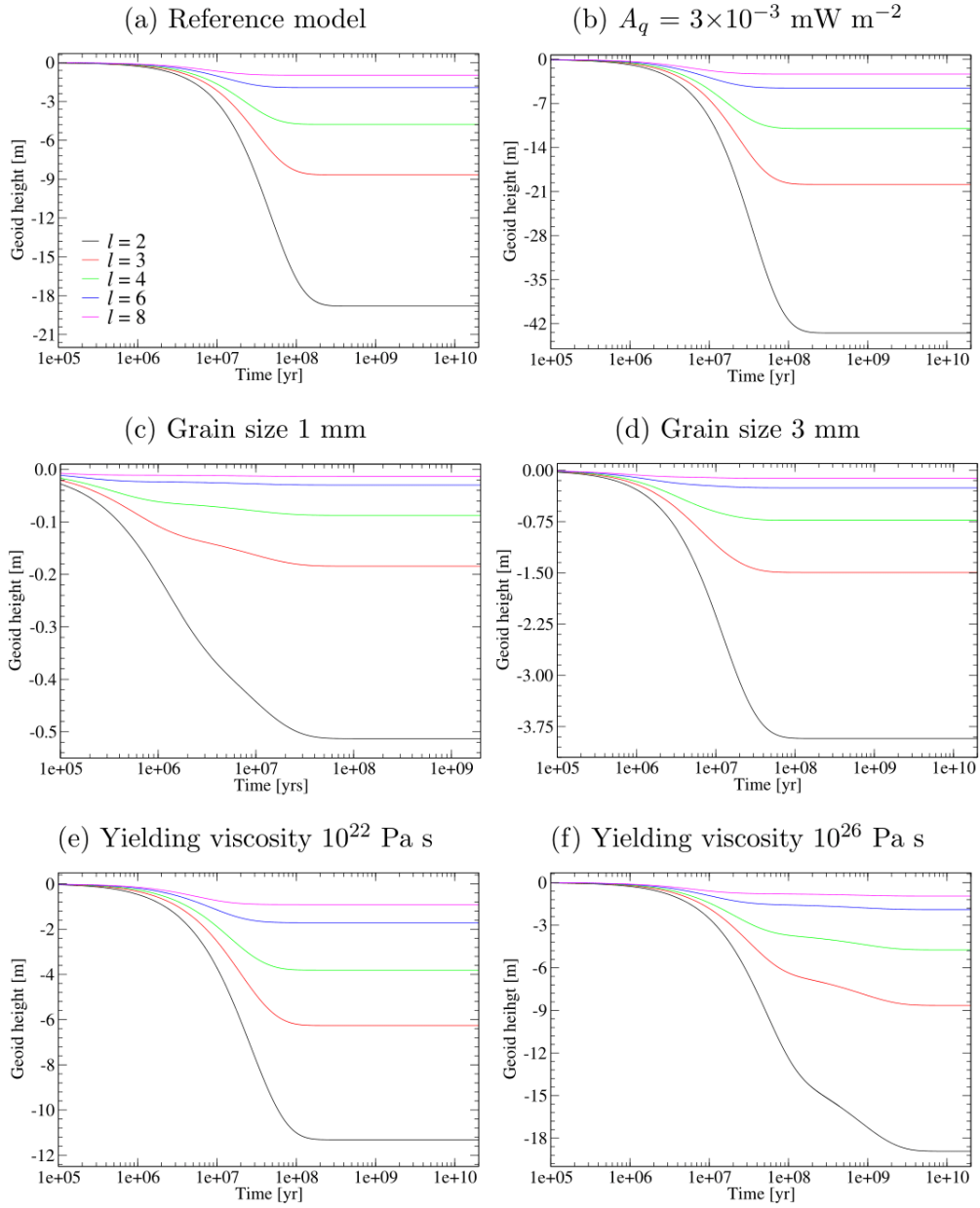


Figure 6: The same as in Fig. 3 but for the geoid heights.

410 of 10^{16} Pa s) and including topography-dependent erosion and deposition. The effect of ero-
 411 sion/deposition is parameterized in terms of an erosion rate which is negatively proportional to
 412 the topographic amplitude,

$$v_e = -Et_s, \quad (27)$$

413 and is included in the equation governing the evolution of the upper boundary (cf. Eq. 25):

$$\frac{\partial t_s}{\partial t} = v_{i,r}(\mathbf{R}_s) + v_e. \quad (28)$$

414 Equation (27) is equivalent to the equation of diffusion ($\partial t_s / \partial t \propto \nabla^2 t_s$), often used in model-
 415 ing erosion on Earth (e.g. Martin and Church, 1997), expressed in spectral form ($\partial t_{s,\ell m} / \partial t \propto$
 416 $-\ell(\ell + 1)t_{s,\ell m}$). The coefficient E_e in Eq. (27), hereinafter referred to as the “erosion coefficient”,
 417 characterizes the rate of erosion/deposition per 1 m of topographic height. Its value depends
 418 on climatic and geological conditions and, as indicated above, also on the wavelength of topo-
 419 graphic features. Since the rate of large-scale erosion on Titan is not known, we will consider
 420 several values of E ranging from 0 to 10^{-6} yr $^{-1}$.

421 The time evolution of the geoid, topography, geoid-to-topography ratio and topographic load
 422 ratio for models including the effect of erosion and deposition is shown in Fig. 7. Since the heat
 423 flux $q_{w,r}$ imposed at the base of the ice shell has a positive amplitude ($A_q = 1$ mW m $^{-2}$), the
 424 ice/water interface topography is positive and the induced surface topography is negative. The
 425 resultant geoid is a superposition of the gravitational signals produced by these topographies
 426 and it has the same sign as the surface topography if no erosion occurs ($E = 0$, magenta line in
 427 Fig. 7). As we increase the value of the erosion coefficient, the (negative) amplitude of the surface
 428 topography diminishes and the gravitational effect of the positive ice/water interface topography
 429 becomes dominant, leading to positive geoid and negative admittance. The observed value of
 430 admittance reported by Hemingway et al. (2013) is -32 mGal km $^{-1}$, which is equivalent to a
 431 geoid-to-topography ratio of about -0.2. This value is obtained for $E \approx 4 \times 10^{-7}$ yr $^{-1}$ (green line
 432 in Fig. 7), corresponding to an erosion rate of about -0.03 mm yr $^{-1}$ for 80-m degree-3 topography.

433 We find (not shown in Fig. 7) that the value of parameter E needed to explain the observed
 434 geoid-to-topography ratio decreases with increasing values of parameters η_y and d – the stiffer
 435 the ice shell, the smaller erosion rate is required to explain the geoid at degree 3. Our results
 436 thus support the conclusion of Hemingway et al. (2013) that the ice shell on Titan is rather
 437 rigid and its surface is exposed to erosion and deposition, independently confirmed by recent
 438 geomorphological studies (cf. Neish et al., 2013; Birch et al., 2017).

439 5. Distribution of heat flux anomalies

440 We now determine the distribution of heat flux $q_{w,r}$ that is compatible with the observed long-
 441 wavelength surface topography. Taking into account the results presented in sections 3 and 4,
 442 we only consider the grain size larger than or equal to 3 mm and we set $\eta_y = 10^{24}$ Pa s. Using a
 443 Monte Carlo approach we find, for each chosen value of d , the lateral variations of heat flux $q_{w,r}$
 444 that satisfy the condition

$$\sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| (t_s^{\text{obs}})_{\ell m} - (t_s^{\text{pred}}(q_{w,r}))_{\ell m} \right|^2 = \min, \quad (29)$$

445 where $(\bullet)_{\ell m}$ are the complex spherical harmonic coefficients of quantity \bullet , t_s^{obs} is the surface to-
 446 pography obtained by (Lorenz et al., 2013) related to the reference ellipsoid Iess et al. (2010), and

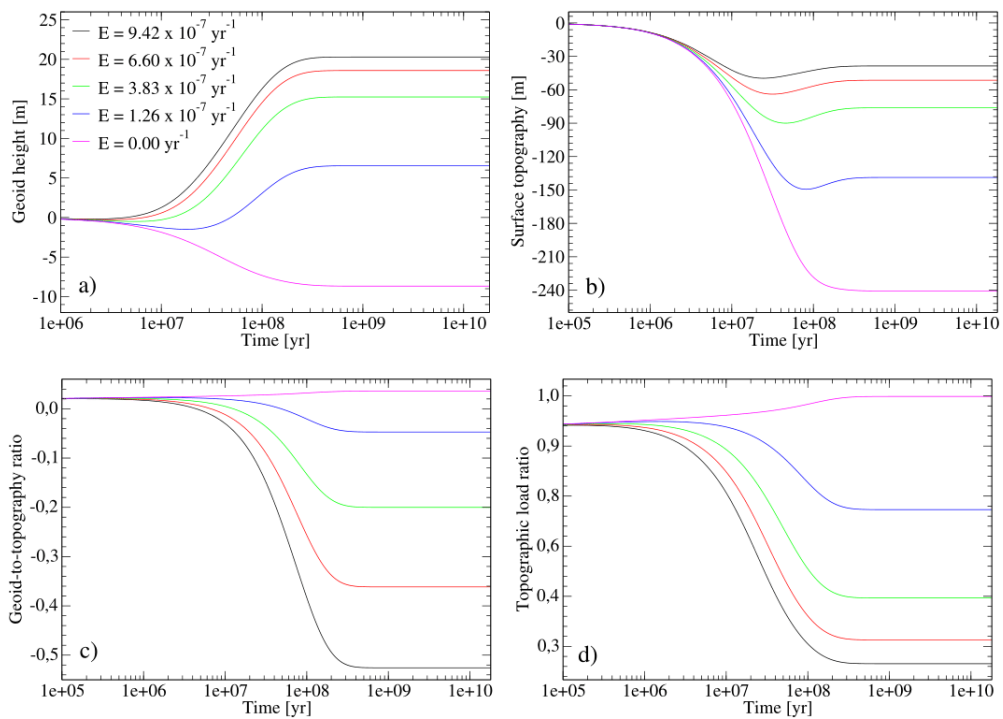


Figure 7: Time evolution of geoid (a), surface topography (b), geoid-to-topography ratio (c), and topographic load ratio (d) at degree 3 computed for models including the effect of erosion and deposition, parameterized in terms of erosion coefficient E (see Eq. 27) and the text below). The solutions obtained for various values of E are plotted by different colors. The case of $E = 0$ (plotted in magenta) corresponds to no erosion.

447 $t_s^{\text{pred}}(q_{w,r})$ is the steady-state surface topography predicted for ocean heat flux $q_{w,r}$ and including
 448 the effect of internal heating. We consider three cases: $\ell_{\text{max}} = 2$ (without harmonic term 21),
 449 $\ell_{\text{max}} = 4$ and $\ell_{\text{max}} = 8$. The case $\ell_{\text{max}} = 2$ should provide a basic estimate of ocean circulation
 450 on Titan which is expected to be symmetric about the equator in first approximation while the
 451 models with $\ell_{\text{max}} = 4$ and 8 may also help to reveal the flow features potentially related to heat
 452 flux anomalies at the ocean floor. The results obtained for the reference model ($d = 10$ mm,
 453 $\eta_y = 10^{24}$ Pa s) are shown in Fig. 8. The heat flux at degree 2 (Fig. 8a) ranges from -0.3 to -0.05
 454 mW m^{-2} around the equator and it reaches the maximum value of 0.35 mW m^{-2} at the poles.
 455 This pattern is consistent with the ocean flow characterized by upwelling of warm water in polar
 456 regions and downwelling of cold water at low latitudes.

457 The heat flux pattern obtained for $\ell_{\text{max}} = 4$ (Fig. 8b) is dominated by contribution at degree
 458 4. Although the spectral powers of t_s^{obs} at degrees 2 and 4 are about the same, the generation of
 459 topography at degree 4 requires a larger heat flux $q_{w,r}$ than at degree 2 (compare the black and
 460 red curves in Fig. 4a), which explains the relatively weak degree 2 contribution. The heat flux
 461 amplitudes reach 3 mW m^{-2} , about 40% of the average heat flux at the boundary. As in Fig. 8a,
 462 the polar regions are associated with positive heat flux anomalies. However, the minima of heat
 463 flux are more or less randomly distributed in the mid-latitudes and they are not concentrated
 464 along the equator.

465 The inversion up to degree 8 (Fig. 8c) yields a complex pattern of small scale anomalies with
 466 amplitudes ranging from -7 to 13 mW m^{-2} . The anomalies are organized into irregular belts
 467 which have approximately longitudinal orientation.

468 The heat flux patterns obtained for 3 mm grain size (not shown here) are similar to those in
 469 Fig. 8, but the amplitudes are an order of magnitude larger than those computed for the reference
 470 model, thus too large to be compatible with a model of ocean flow on Titan. In contrast, even
 471 smaller amplitudes of the heat flux than in the reference model are needed if the viscosity at
 472 the ice/water interface is very high. For $d = 50$ mm, corresponding to viscosity of $\sim 10^{17}$ Pa s,
 473 the topographic signal at degree 2–8 can be explained by heat flux variations not exceeding
 474 3 mW m^{-2} peak to peak.

475 The maps presented in Fig. 8 were computed without considering the effect of erosion and
 476 deposition, and therefore represent the minimum heat flux variations needed to explain the ob-
 477 served large-scale topography of Titan for given parameters d and η_y . The role of erosion is
 478 illustrated in Fig. 9 for a model with $\eta_{ay} = 10^{26}$ Pa s, $d = 30$ mm and $E = 6 \times 10^{-7} \text{ yr}^{-1}$. The
 479 parameters controlling the viscosity of the ice shell are deliberately chosen larger than in Fig. 8
 480 to ensure that the total heat flux (heat flux anomalies plus the average heat flux) on top of the
 481 ocean will be positive. The heat flux pattern obtained in this case differ from that in Fig. 8c in a
 482 number of details, indicating that erosion can influence both the amplitude and the distribution
 483 of the heat flux anomalies. We emphasize that the map shown in Fig. 9 is only illustrative since
 484 erosion is parameterized in a simplified way that does not include scale dependence of parameter
 485 E . The parameterization of erosion in terms of Eq. (27) is justified for a single harmonic degree
 486 (see section ...). In a general case, however, the effect of erosion should be simulated using a
 487 diffusion equation model (or a different model, depending on the type of erosion process).

488 6. Conclusions

489 A full understanding of the relationship between the phase changes occurring at the ice/water
 490 interface and the material flow in the ice shell requires the solution of a set of partial differential
 491 equations in a domain with moving boundaries and complex material properties. We have solved

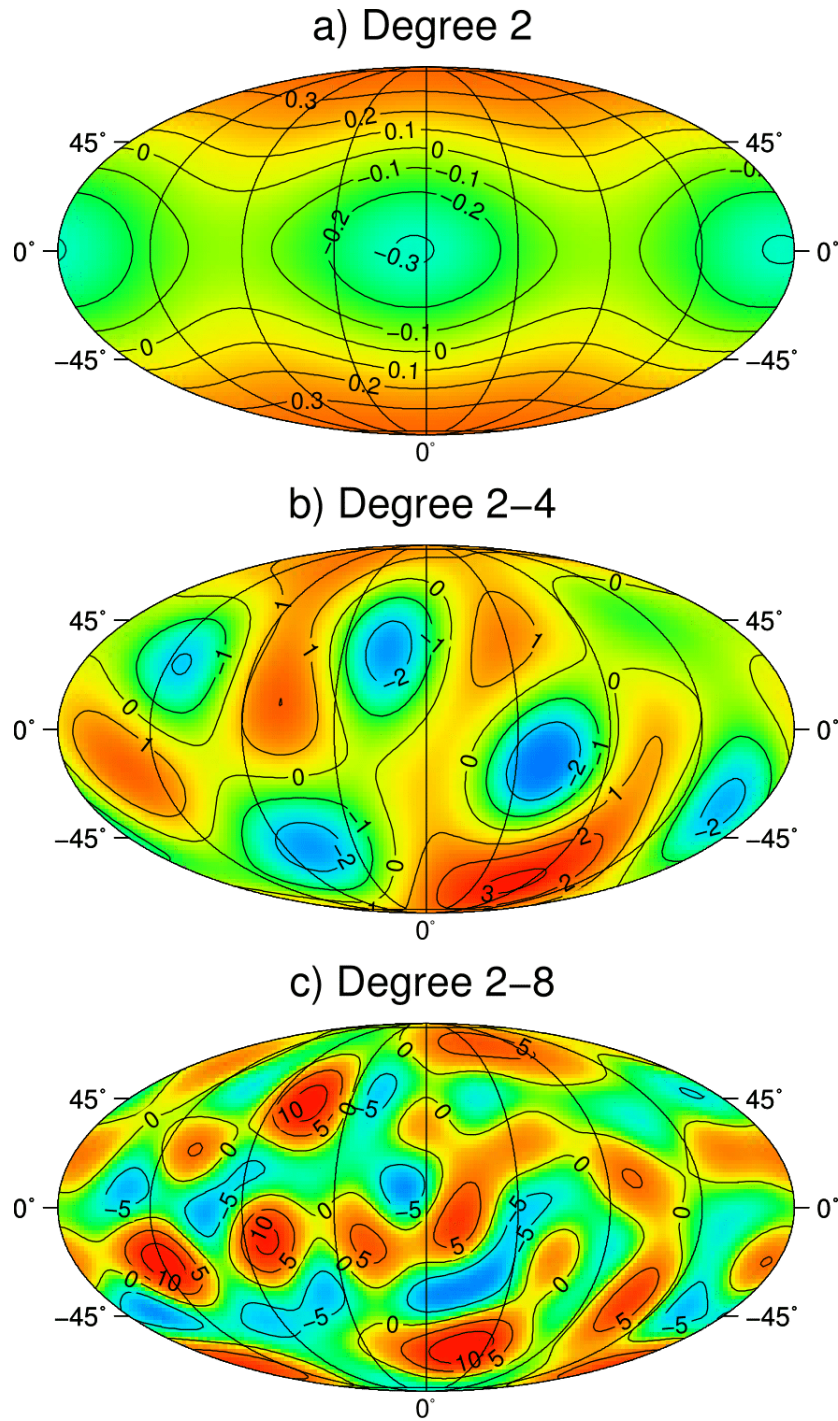


Figure 8: a) Ocean heat flux anomalies $q_{w,r}$ consistent with Titan's topography at degree 2 (harmonic term $\ell m = 21$ is not included). The isoline interval is 0.1 mW m^{-2} . b) The same as in panel a) but for degrees 2–4. The isoline interval is 1 mW m^{-2} . c) The same as in panel b) but up to degree 8. The isoline interval is 5 mW m^{-2} . The maps are computed for the reference model ($d = 10 \text{ mm}$, $\eta_T = 10^{24} \text{ Pa s}$). The effect of erosion is not included.

Degree 2–8, with erosion

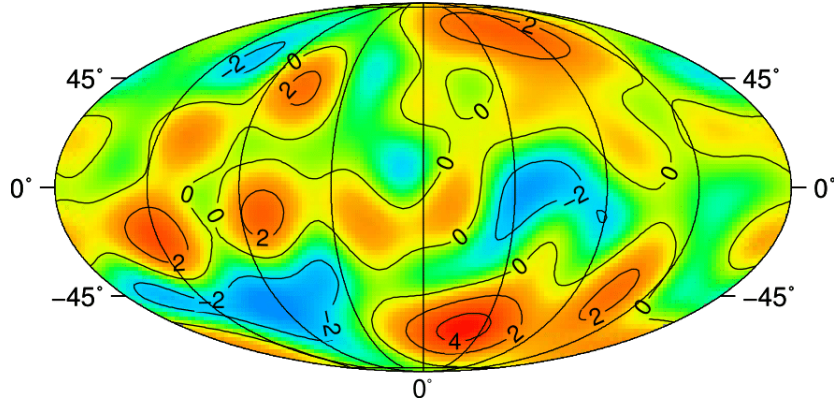


Figure 9: Heat flux anomalies $q_{w,r}$ up to degree 8 inferred from the observed topography for a model including the effect of erosion and deposition. The isoline interval is 2 mW m^{-2} . The map is computed for $\eta_y = 10^{25} \text{ Pa s}$, $d = 30 \text{ mm}$ and $E = 6 \times 10^{-7} \text{ yr}^{-1}$.

492 this problem for a simplified model of an ice shell to verify the hypothesis of a thermal origin of
 493 Titan’s long-wavelength non-hydrostatic topography. A limitation of the present study is that it
 494 focuses on a system made of pure water and ice and does not take into account possibly important
 495 effects of other compounds which may significantly influence the physical properties of the ice
 496 shell material, temperature of the ocean and the solid-liquid phase diagram. The incorporation
 497 of these effects will require further theoretical and modeling effort.

498 Our results suggest that Titan’s topography can be explained by lateral variations of ocean
 499 heat flux of the order of mW m^{-2} , provided that the heat flux is stable over a period of at least
 500 10 Myr and the ice shell has a sufficiently high viscosity ($\gtrsim 10^{24} \text{ Pa s}$ in the upper part and \gtrsim
 501 10^{16} Pa s near the ice/water interface). The high viscosity of ice rules out a vigorously convecting
 502 shell, imposes limits on the extent of cryovolcanism and is in agreement with previous studies
 503 (Hemingway et al., 2013; Lefèvre et al., 2014) which argued for a highly rigid and geologically
 504 inactive, non-convecting ice crust.

505 Since the model ice shell is made of pure water ice (implying that the temperature at the base
 506 of the shell is close to 273 K) and the deformation is controlled by diffusion creep (due to a low
 507 stress level), the correct amplitudes of topography are only predicted for models with coarse ice
 508 grains ($d \gtrsim 10 \text{ mm}$). However, if the melting temperature were lowered by the presence of an
 509 antifreezing component, such as ammonia, the same value of viscosity would be obtained for
 510 a significantly smaller grain size. Our results are thus compatible with a grain size of 1 mm
 511 provided that the temperature of the ocean is 250 K or lower.

512 The negative correlation between the topography and geoid at degree 3 can be explained by
 513 erosion, in agreement with the conclusion of Hemingway et al. (2013). The rate of erosion
 514 needed to explain the observed geoid-to-topography ratio at degree 3 depends on the viscosity of
 515 the shell and ranges between 0.01 and 0.1 mm yr^{-1} . A more accurate estimate of the erosion rate
 516 would require the knowledge of Titan’s gravity at higher degrees.

517 **Appendix A. Conservation laws for a phase boundary**

518 The mass, momentum and energy transfer across the phase boundary must satisfy the follow-
519 ing conditions (Slattery et al., 2007):

$$\frac{D\rho_\Sigma}{Dt} + \rho_\Sigma \nabla_\Sigma \cdot \mathbf{u} = -[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]_\Sigma, \quad (\text{A.1})$$

520

$$\rho_\Sigma \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla_\Sigma \cdot \mathbf{S} = \left[\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \right) \cdot \mathbf{n} \right]_\Sigma, \quad (\text{A.2})$$

521

$$\begin{aligned} & \rho_\Sigma \frac{D}{Dt} \left(\epsilon_\Sigma + \frac{1}{2} u^2 \right) - \nabla_\Sigma \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) \\ &= - \left[\left(\rho \left(\epsilon - \epsilon_\Sigma + \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} u^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \right) \cdot \mathbf{n} \right]_\Sigma, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

522 where D/Dt is the surface material derivative, ∇_Σ denotes the surface gradient, ρ_Σ is the surface
523 density, ρ is the density (ρ is equal to ρ_i in ice and to ρ_w in water), $[f]_\Sigma$ represents the jump in
524 quantity f across the boundary ($[f]_\Sigma = f_i - f_w$) \mathbf{v} is the velocity in a phase (\mathbf{v}_i or \mathbf{v}_w), \mathbf{u} is the
525 velocity of the phase interface, \mathbf{S} is the surface tension tensor, \otimes denotes the dyadic product of
526 two vectors, $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress in a phase ($\boldsymbol{\sigma}_i$ or $\boldsymbol{\sigma}_w$), ϵ is the internal energy per unit mass within a
527 phase, and ϵ_Σ is the internal energy per unit mass associated with the phase interface.

528 Since we deal with processes that are large-scale and slow, we can neglect the terms with time
529 derivative and the second order terms in velocities. Assuming that $\rho_\Sigma/R_b \ll \rho$ we obtain

$$[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = 0, \quad (\text{A.4})$$

530

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = -\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{S}, \quad (\text{A.5})$$

531

$$\left[\left(\rho \epsilon (\mathbf{v} - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \right) \cdot \mathbf{n} \right]_\Sigma = \nabla_\Sigma \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}). \quad (\text{A.6})$$

532 The density of internal energy ϵ in Eq. (A.6) can be expressed in terms of the latent heat L , which
533 is defined as the jump in enthalpy, $L := -[\epsilon + p/\rho]_\Sigma$, where p is the pressure. Equation (A.6) then
534 takes the form

$$-\rho_i L (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = \nabla_\Sigma \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}). \quad (\text{A.7})$$

535 where we have used $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^d$ and neglected the term $[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \mathbf{v}]_\Sigma$.

536 In the conservation laws (A.4), (A.5) and (A.7), the only quantity associated with the physical
537 state of the phase interface is the surface tension tensor \mathbf{S} . This tensor can be expressed as
538 (Slattery et al., 2007)

$$\mathbf{S} = s(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (\text{A.8})$$

539 where s is the superposition of an intrinsic surface tension, which is negligible in our context,
540 and a dynamical surface tension, depending on the material flux across the interface (Chambat
541 et al., 2014). Substitution of Eq. (A.8) into Eq. (A.5) gives

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = s(\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \nabla_\Sigma s. \quad (\text{A.9})$$

542 Chambat et al. (2014) have demonstrated that, in the case of viscous flow, $s = -2v\phi$, where ϕ is
543 the mass flux across the interface, $\phi = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$, and

$$v(\mathbf{r}_b) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbf{r}_b - \delta \mathbf{n}}^{\mathbf{r}_b + \delta \mathbf{n}} \eta(\mathbf{r}) \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \right) d\mathbf{r}. \quad (\text{A.10})$$

544 and ϕ is the mass flux across the interface, $\phi = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$.

545 The relative importance of the terms on the right-hand side of Eq. (A.9) can be assessed by the
 546 method of dimensional analysis. The dimensionless stress ($\boldsymbol{\sigma}'$), velocity (\mathbf{v}' and \mathbf{u}') and nabra
 547 operator (∇'_{Σ}) can be defined as follows:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\eta}{\tau} \boldsymbol{\sigma}', \quad \mathbf{v} = \frac{D}{\tau} \mathbf{v}', \quad \mathbf{u} = \frac{D}{\tau} \mathbf{u}', \quad \nabla_{\Sigma} = \frac{1}{R_b} \nabla'_{\Sigma}, \quad (\text{A.11})$$

548 where η is the viscosity of ice, τ is the characteristic time, D is the mean thickness of Titan's ice
 549 shell and R_b is the mean radius of the phase boundary. Considering that $\nu \approx \eta(\rho_i - \rho_w)/(2\rho_i^2)$, we
 550 obtain

$$[\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} = C \left((\mathbf{v}'_i - \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} (\nabla'_{\Sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \nabla'_{\Sigma} \left((\mathbf{v}'_i - \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} \right) \right), \quad (\text{A.12})$$

551 where

$$C = \frac{D}{R_b} \frac{(\rho_i - \rho_w)}{\rho_i} \approx -0.003. \quad (\text{A.13})$$

552 Since $|C| \ll 1$, the terms on the right-hand side of Eq. (A.8) can be neglected. A similar analysis
 553 can be applied to Eq. (A.6), yielding $\nabla_{\Sigma} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) \approx 0$.

554 References

- 555 A. G., Wahr, J., Zhong, S. J., 2014. The effects of laterally varying icy shell structure on the tidal response of Ganymede
 556 and Europa. *J. Geophys. Res.-Planets* 119, 659–678.
- 557 Baland, R.-M., Tobie, G., Lefèvre, A., Van Hoolst, 2014. Titan's internal structure inferred from its gravity field, shape,
 558 and rotation state. *Icarus* 237, 29–41.
- 559 Baland, R.-M., Van Hoolst, T., Yseboodt, M., Karatekin, O., 2011. Titan's obliquity as evidence of a subsurface ocean?
 560 *Astron. Astrophys.* 530, A141.
- 561 Barnes, H. A., Hutton, J. F., Walters, K., 1989. *An Introduction to Rheology*. Elsevier, Amsterdam, etc.
- 562 Barr, A. C., McKinnon, W. B., 2007. Convection in ice I shells and mantles with self-consistent grain size. *J. Geo-*
 563 *phys. Res.* 112, 2012.
- 564 Barr, A. C., Milkovich, S. M., 2008. Ice grain size and the rheology of the martian polar deposits. *Icarus* 194, 513–518.
- 565 Béghin, C., Randriamboarison, O., Hamelin, M., Karkoschka, E., Sotin, C., Whitten, R. C., Berthelier, J. J., Grard, R.,
 566 Simões, F., 2012. Analytic theory of titan's schumann resonance: Constraints on ionospheric conductivity and buried
 567 water ocean. *Icarus* 218, 1028–1042.
- 568 Bézard, B., Yelle, V., Nixon, A., 2014. The composition of Titan's atmosphere. In: Müller-Wodarg, I. and Griffith, C. A.
 569 and Lellouch, E. and Cravens, T. E (Ed.), *Titan. Interior, Surface, Atmosphere and Space Environment*. Cambridge
 570 University Press, Cambridge, Ch. 5, pp. 158–189.
- 571 Birch, S. P. D., Hayes, A. G., Dietrich, W. E., Howard, A. D., Bristow, C. S., Malaska, M. J., Moore, J. M., Mas-
 572 trogiuseppe, M., Hofgartner, J. D., Williams, D. A., White, O. L., Soderblom, J. M., Barnes, J. W., Turtle, E. P.,
 573 Lunine, J. I., Wood, C. A., Neish, C. D., Kirk, R. L., Stofan, E. R., Lorenz, R. D., Lopes, R. M. C., 2017. Geo-
 574 morphologic mapping of Titan's polar terrains: Constraining surface processes and landscape evolution. *Icarus* 282,
 575 214–236.
- 576 Běhounková, M., Tobie, G., Choblet, G., Čadek, O., 2010. Coupling mantle convection and tidal dissipation: Applica-
 577 tions to Enceladus and Earth-like planets. *J. Geophys. Res.-Planets* 115, E09011.
- 578 Čadek, O., Běhounková, M., Tobie, G., Choblet, G., 2017. Viscoelastic relaxation of Enceladus ice shell. *Icarus* 291, 31–35.
- 579 Chambat, F., Benzoni-Gavage, S., Ricard, Y., 2014. Jump conditions and dynamic surface tension at permeable interfaces
 580 such as the inner core boundary. *C. R. Geoscience* 346, 110–118.
- 581 Choukroun, M., Sotin, C., 2012. Is Titan's shape caused by its meteorology and carbon cycle? *Geophys. Res. Lett.* 39,
 582 L04201.
- 583 Dingemans, M. W., 1997. *Water Wave Propagation over Uneven Bottom, Part 1 – Linear Wave Propagation*. World
 584 Scientific, Singapore, etc.
- 585 Dumoulin, C., Čadek, O., Choblet, G., 2013. Predicting surface dynamic topographies of stagnant lid planetary bodies.
 586 *Geophys. J. Int.* 195, 1494–1508.

- 587 Durand, G., Weiss, J., Lipenkov, V., Barnola, J. M., Krinner, G., Parrenin, F., Delmonte, B., Ritz, C., Duval, P., Rothlis-
588 berger, R., Bigler, M., 2006. Effect of impurities on grain growth in cold ice sheets. *J. Geophys. Res.-Earth Surface*
589 111, F01015.
- 590 Efroimsky, M., 2012. Tidal dissipation compared to seismic dissipation: In small bodies, earths and super-earths. *As-
591 troph. J.* 746, 150.
- 592 Flasar, F. M., Achterberg, R. K., Schindler, P. J., 2014. Thermal structure of Titan's troposphere and middle atmosphere.
593 In: Müller-Wodarg, I. and Griffith, C. A. and Lellouch, E. and Cravens, T. E (Ed.), *Titan. Interior, Surface, Atmosphere*
594 *and Space Environment.* Cambridge University Press, Cambridge, Ch. 3, pp. 102–121.
- 595 Gammon, P. H., Kieft, H., Clouter, M. J., Denner, W. W., 1983. Elastic constants of artificial and natural ice samples by
596 Brillouin spectroscopy. *J. Glaciol.* 29, 433–460.
- 597 Goldsby, D. L., Kohlstedt, D. L., 2001. Superplastic deformation of ice: Experimental observations. *J. Geophys. Res.-
598 Solid Earth* 106, 11017–11030.
- 599 Hemingway, D., Nimmo, F., Zebker, H., Iess, L., 2013. A rigid and weathered ice shell on Titan. *Nature* 500, 550–552.
- 600 Hobbs, P. V., 1974. *Ice Physics.* Oxford Univ. Press.
- 601 Iess, L., Jacobson, R. A., Ducci, M., Stevenson, D. J., Lunine, J. I., Armstrong, J. W., Asmar, S. W., Racioppa, P.,
602 Rappaport, N. J., Tortora, P., 2012. The tides of Titan. *Science* 337, 457–459.
- 603 Iess, L., Rappaport, N. J., Jacobson, R. A., Racciopa, P., Stevenson, D. J., Tortora, P., Armstrong, J. W., Asmar, S. W.,
604 2010. Gravity field, shape, and moment of inertia of Titan. *Science* 327, 1367–1369.
- 605 Joseph, D. D., 1990. *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids.* Springer Berlin Heidelberg.
- 606 Kalousová, K., Souček, O., Tobie, G., Choblet, G., Čadek, O., 2014. Icemelting and downward transport of meltwater by
607 two-phase flow in Europa's ice shell. *J. Geophys. Res.-Planets* 119, 532–549.
- 608 Kalousová, K., Souček, O., Tobie, G., Choblet, G., Čadek, O., 2016. Icemelting and downward transport of meltwater by
609 two-phase flow in Europa's ice shell. *J. Geophys. Res.-Planets* 121, 2444–2462.
- 610 Kamata, S., Nimmo, F., 2017. Interior thermal state of Enceladus inferred from the viscoelastic state of the ice shell.
611 *Icarus* 284, 387–393.
- 612 Lambeck, K., 1988. *Geophysical Geodesy.* Oxford Univ. Press, New York.
- 613 Lee, S., Pappalardo, R. T., Makris, N. C., 2005. Mechanics of tidally driven fractures in Europa's ice shell. *Icarus* 177,
614 367–379.
- 615 Lefèvre, A., Tobie, G., Choblet, G., Čadek, O., 2014. Structure and dynamics of Titan's outer icy shell constrained from
616 Cassini data. *Icarus* 237, 16–28.
- 617 Lorenz, R. D., Stiles, B. W., Aharonson, O., Lucas, A., Hayes, A. G., Kirk, R. L., Zebker, H. A., Turtle, E. P., Neish,
618 C. D., Stofan, E. R., Barnes, J. W., 2013. A global topographic map of Titan. *Icarus* 225, 367–377.
- 619 Lorenz, R. D., Stiles, B. W., Kirk, R. L., Allison, M. D., del Marmo, P. P., Iess, L., Lunine, J. I., Ostro, S. J., Hensley, S.,
620 2008. Titan's rotation reveals an internal ocean and changing zonal winds. *Science* 319, 1649–1651.
- 621 Martin, Y., Church, M., 1997. Diffusion in landscape development models: On the nature of basic transport relations.
622 *Earth Surf. Proc. Land.* 22, 273–279.
- 623 McCord, T. B., Sotin, C., 2005. Ceres: Evolution and current state. *J. Geophys. Res.* 110, E05009.
- 624 Mitri, G., Meriggiola, R., Hayes, A., Lefèvre, A., Tobie, G., Genova, A., Lunine, J. I., Zebker, H., 2014. Shape,
625 topography, gravity anomalies and tidal deformation of Titan. *Icarus* 236, 169–177.
- 626 Moresi, L., Dufour, F., Muhlhaus, H. B., 2002. Mantle convection modeling with viscoelastic/brittle lithosphere: Numer-
627 ical methodology and plate tectonic modeling. *Pure appl. geophys.* 159, 23352356.
- 628 Neish, C. D., Kirk, R. L., Lorenz, R. D., Bray, V. J., Schenk, P., Stiles, B. W., Turtle, E., Mitchell, K., Hayes, A., 2013.
629 Crater topography on Titan: Implications for landscape evolution. *Icarus* 223, 82–90.
- 630 Nimmo, F., Bills, B. G., 2010. Shell thickness variations and the long-wavelength topography of Titan. *Icarus* 208,
631 896–904.
- 632 Nimmo, F., Thomas, P. C., Pappalardo, R. T., Moore, W. B., 2007. The global shape of Europa: Constraints on lateral
633 shell thickness variations. *Icarus* 191, 183–192.
- 634 Ojakangas, G. W., Stevenson, D. J., 1989. Thermal state of an ice shell on Europa. *Icarus* 81, 220–241.
- 635 Patočka, V., Čadek, O., Tackley, P., Čížková, H., 2017. Stress memory effect in viscoelastic stagnant lid convection.
636 *Geophys. J. Int.* 209, 1462–1475.
- 637 Proctor, T. M., 1966. Low-temperature speed of sound in single-crystal ice. *J. Acoust. Soc. Am.* 39, 972–977.
- 638 Schulson, E. M., 2001. Brittle failure of ice. *Eng. Fract. Mech.* 68, 18391887.
- 639 Shoji, D., Hussmann, H., Sohl, F., Kurita, K., 2014. Non-steady state tidal heating of Enceladus. *Icarus* 235, 75–85.
- 640 Slattery, J. C., Sagis, L., Oh, E. S., 2007. *Interfacial Transport Phenomena,* 2nd ed. Springer, New York.
- 641 Souček, O., Běhounková, M., Čadek, O., Tobie, G., Choblet, G., 2017. Tidal deformation of Enceladus ice shell with
642 variable thickness and Maxwell rheology. In: *Geophysical Research Abstracts,* Vol. 19, EGU2017-16357, EGU Gen-
643 eral Assembly, 23-28 April, 2017. Vienna, Austria.
- 644 Souček, O., Hron, J., Běhounková, M., Čadek, O., 2016. Effect of the tiger stripes on the deformation of Saturn's moon
645 Enceladus. *Geophys. Res. Lett.* 43, 7417–7423.

- 646 Stiles, B. W., Hensley, S., Gim, Y., Bates, D. M., Kirk, R. L., Hayes, A., Radebaugh, J., Lorenz, R. D., Mitchell, K. L.,
647 Callahan, P. S., Zebker, H., Johnson, W. T. K., Wall, S. D., Lunine, J. I., Wood, C. A., Janssen, M., Pelletier, F.,
648 West, R. D., Veeramacheni, C., 2009. Determining Titan surface topography from Cassini SAR data. *Icarus* 202,
649 584–598.
- 650 Tobie, G., Čadež, O., Sotin, C., 2008. Solid tidal friction above a liquid water reservoir as the origin of the south pole
651 hotspot on Enceladus. *Icarus* 196, 642–652.
- 652 Tobie, G., Grasset, O., Lunine, J. I., Mocquet, A., Sotin, C., 2005. Titan’s internal structure inferred from a coupled
653 thermal-orbital model. *Icarus* 175, 496–502.
- 654 Tobie, G., Lunine, J. I., Monteux, J., Mousis, O., Nimmo, F., 2014. The origin and evolution of Titan. In: Müller-
655 Wodarg, I. and Griffith, C. A. and Lellouch, E. and Cravens, T. E (Ed.), Titan. Interior, Surface, Atmosphere and
656 Space Environment. Cambridge University Press, Cambridge, Ch. 1, pp. 29–62.
- 657 Weiss, J., Schulson, E. M., 1995. The failure of fresh-water granular ice under multiaxial compressive loading. *Acta*
658 *Metall. Mater.* 43, 23032315.
- 659 Zebker, H. A., Stiles, B., Hensley, S., Lorenz, R., Kirk, R. L., Lunine, J., 2009. Size and shape of Saturn’s moon Titan.
660 *Science* 324, 921–923.
- 661 Zhong, S. J., 2002. Effects of lithosphere on the long-wavelength gravity anomalies and their implications for the forma-
662 tion of the Tharsis rise on Mars. *J. Geophys. Res.-Planets* 107, 5504.

663 **Acknowledgements**

664 We thank Ondřej Souček and Christophe Sotin for valuable discussions. This work was sup-
665 ported by INSU’s Programme National de Planétologie (France).