MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Klára Čelikovská

Pokrývání kružnice náhodnými oblouky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Zde bych ráda poděkovala doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za zajímavé téma a také za rady, připomínky a ochotu při vedení práce.

Název práce: Pokrývání kružnice náhodnými oblouky

Autor: Klára Čelikovská

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci řešíme úlohu geometrické pravděpodobnosti pokrývání kružnice náhodnými oblouky. Náhodně umisťujeme oblouky pevně dané délky na kružnici jednotkové délky. Nejprve je nalezena pravděpodobnost pokrytí celé kružnice konečným počtem oblouků stejné délky a jsou ukázány některé její konkrétní hodnoty. Dále zkoumáme náhodnou veličinu popisující velikost pokryté části kružnice a očekávaný počet oblouků potřebných k úplnému pokrytí kružnice při postupném pokrývání. Nakonec je vyřešena obdobná úloha pro pokrývání kružnice spočetně mnoha oblouky různých délek.

Klíčová slova: geometrická pravděpodobnost, pokrývání kružnice oblouky, momenty náhodné veličiny

Title: Covering the circle by random arcs

Author: Klára Čelikovská

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we consider the geometric probability problem of covering a circle with random arcs. We randomly place arcs of a fixed length on a circle of unit circumference. First we find the probability of covering the entire circle with a finite number of arcs of the same length and show some of its numerical values. Next we study the random variable describing the size of the covered part of the circle and the expected number of arcs needed to fully cover the circle if we place the arcs sequentially. Finally, we solve a similar problem of covering the circle by a countably infinite number of arcs of different lengths.

Keywords: geometric probability, covering a circle with arcs, moments of a random variable

Obsah

Úvod

Na kružnici jednotkové délky umístíme rovnoměrně náhodně a nezávisle $n \in \mathbb{N}$ oblouků délky $a \in (0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost úplného pokrytí kružnice? Jak velká část kružnice bude po tomto pokusu pokryta, resp. nepokryta? Pokud budeme pokrývat kružnici sekvenčně, jak dlouho bude trvat, než ji poprvé pokryjeme celou? Dá se úloha a její výsledky nějak zobecnit? Cílem této práce je odpovědět na tyto otázky.

Jedná se o klasický problém z geometrické pravděpodobnosti. I přesto, že není tak známý jako například Buffonova jehla či Bertrandův paradox, zabývala se jím řada autorů od přelomu 19. a 20. století. Z publikací některých z nich budeme čerpat. Hlavním přínosem této práce je přehledné sespání řešení této úlohy a souvisejících problémů a případné doplnění některých tvrzení a odvození, které v dosavadní literatuře chybí.

V kapitole 1 vyřešíme samotnou úlohu pokrývání kružnice náhodnými oblouky, tedy nalezneme pravděpodobnost úplného pokrytí kružnice po umístění n oblouků délky a. Při tom také nalezneme pravděpodobnost, že na kružnici zůstane určitý počet mezer. Pravděpodobnost úplného pokrytí si pak pro lepší představu vykreslíme pro některé hodnoty n a a.

V kapitole 2 se budeme zabývat několika náhodnými veličinami, které můžeme v souvislosti s touto úlohou pozorovat. V první části druhé kapitoly se podíváme na sekvenční pokrývání a spočteme očekávaný počet oblouků, který je potřeba k úplnému pokrytí kružnice. Ve druhé části této kapitoly se podíváme na velikost pokryté (resp. nepokryté) části kružnice a spočteme některé momenty těchto náhodných veličin.

Nakonec ve 3. kapitole úlohu zobecníme. Budeme kružnici pokrývat spočetně mnoha oblouky různých délek, délky oblouků budou tedy tvořit posloupnost reálných čísel. Zformulujeme a dokážeme některá kritéria pro pravděpodobnost pokrytí skoro celé kružnice případně celé kružnice.

1. Základní problém

Nejprve budeme hledat pravděpodobnost úplného pokrytí kružnice pro pevně daný počet oblouků stejné délky. Správné řešení jako první publikoval W. L. Stevens (1939). Přehledně sepsané řešení můžeme najít také například v publikaci H. Solomona (1978, Chapter 4), odkud jsme převzali některá značení.

1.1 Formulace úlohy

Úloha. *Mějme kružnici jednotkové délky. Rozmístíme na ni n, $n \in \mathbb{N}$, oblouků délky a, $a \in (0, 1)$, rovnoměrně náhodně a nezávisle. Jaká je pravděpodobnost, že každý bod na kružnici je pokryt alespoň jedním z těchto oblouků?*

Značení. Tuto pravděpodobnost budeme značit $\mathsf{P}(a, n)$.

V této kapitole budeme předpokládat, že všechny oblouky mají stejnou délku a jejich rozmístění na kružnici má rovnoměrné rozdělení.

Nejprve vyřešíme o něco obecnější problém.

Úloha. *Mějme kružnici jednotkové délky. Rozmístíme na ni n, $n \in \mathbb{N}$, oblouků délky a, $a \in (0, 1)$, rovnoměrně náhodně a nezávisle. Jaká je pravděpodobnost, že na kružnici zůstane právě l mezer?*

Značení. Tuto pravděpodobnost budeme značit $\mathsf{P}_l(a, n)$.

Poznámka. Mezerou rozumíme souvislý nepokrytý úsek kružnice.

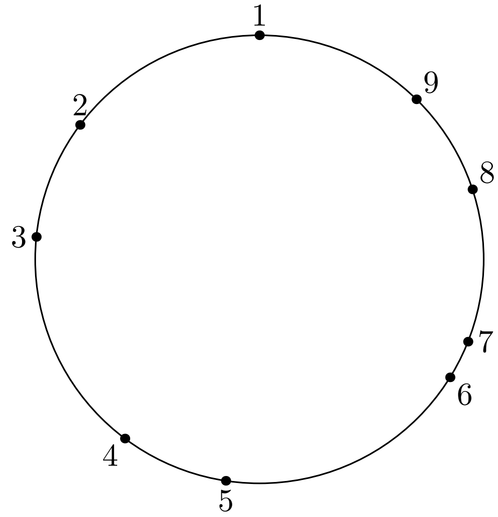
Kružnice je oblouky zcela pokryta, pokud po nich nezůstane žádná mezera. Stačí tedy dosadit $l = 0$, neboli $\mathsf{P}(a, n) = \mathsf{P}_0(a, n)$.

1.2 Zavedení potřebných značení

Každý oblouk si můžeme označit jedním z jeho koncových bodů, zde budeme brát ten druhý po směru hodinových ručiček. Předpokládáme, že těchto n koncových bodů má na kružnici rovnoměrné rozdělení. Bez újmy na obecnosti můžeme kružnici natočit tak, aby koncový bod jednoho z oblouků (označený číslem 1) ležel tak jako na obrázku 1.1. Zbylé oblouky označíme čísly 2 až n podle pořadí na kružnici proti směru hodinových ručiček.

Značení.

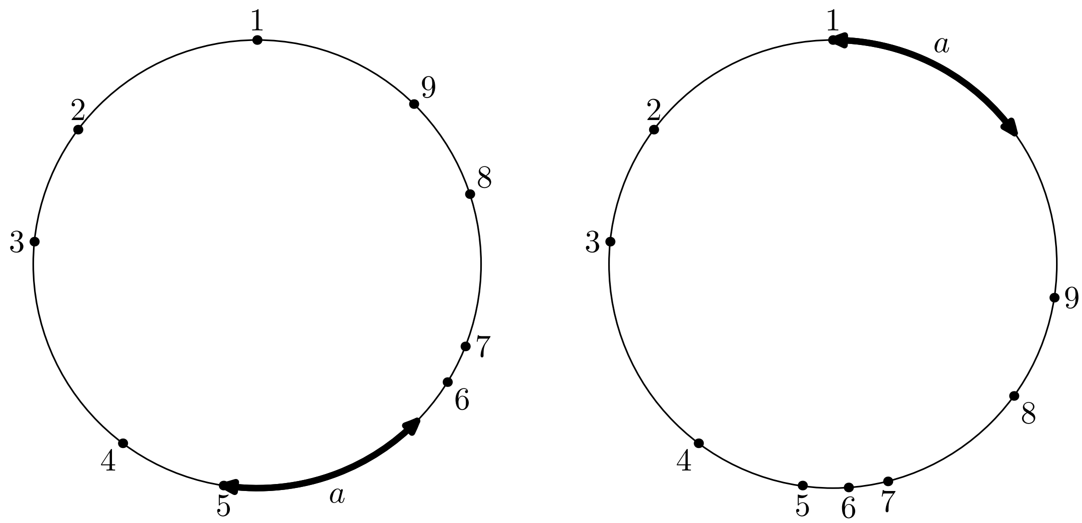
- $f(1)$ značí pravděpodobnost toho, že existuje mezera po jednom pevně daném oblouku.
- $f(i)$ značí pravděpodobnost existence mezery po každém z i pevně daných oblouků.
- G_r značí jev, při němž existuje mezera po r-tém oblouku.
- F_a značí jev, při kterém žádný koncový bod nespadá do části kružnice délky a před bodem 1.



Obrázek 1.1: Značení rozmístění oblouků na kružnici

Poznámka. Pokud řekneme, že existuje mezera po r-tém oblouku, rozumíme tím, že existuje mezera mezi r-tým a $(r+1)$-ním obloukem. Naopak částí kružnice před bodem 1 rozumíme část mezi body n a 1. To také znamená, že existuje mezera po n-tém oblouku, tedy že se první a n-tý oblouk nepřekrývají.

Existuje bijekce mezi rozmístěními oblouků, při kterých nastává G_r, a rozmístěními oblouků, při kterých nastává F_a. Uvažujme zobrazení T_r, které posouvá oblouky $r+1, r+2, \ldots, n$ po kružnici ve směru hodinových ručiček o vzdálenost a. Pro rozmístění oblouků C takové, že nastává G_r, je $T_r(C)$ rozmístění oblouků splňující F_a. Naopak, je-li C' rozmístění oblouků takové, že nastává F_a, pak $T_r^{-1}(C')$ je rozmístění oblouků splňující G_r. Pro lepší představu nám poslouží obrázek 1.2.



Rozmístění C – nastává jev G_5

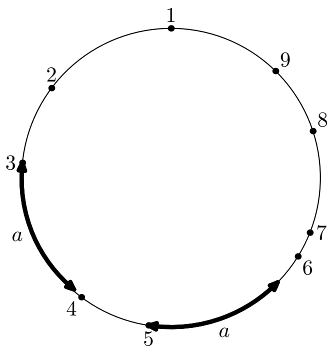
Rozmístění $T_5(C)$ – nastává jev F_a

Obrázek 1.2: Posunutí v případě jedné mezery

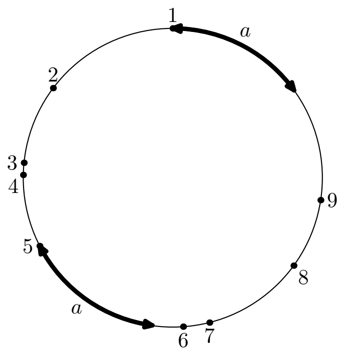
1.3 Odvození řešení

Z výše uvedeného plyne, že $\mathsf{P}(G_r) = \mathsf{P}(F_a)$. Navíc víme, že $\mathsf{P}(G_r) = f(1)$ a $\mathsf{P}(F_a) = (1-a)^{n-1}$ (všechny další oblouky musí ležet mimo oblast délky a za koncovým bodem prvního oblouku, máme rovnoměrné rozdělení a oblouky jsou na sobě nezávislé). Dohromady máme $f(1) = (1-a)^{n-1}$.

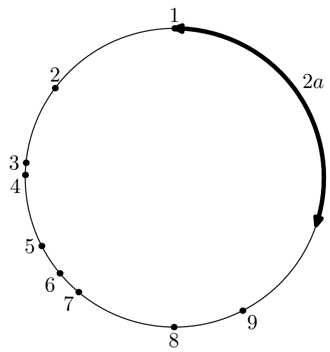
Dále budeme hledat pravděpodobnost $f(i)$, že máme mezery po i pevně daných koncových bodech. Nejprve se podíváme na případ $i = 2$. Označíme G_{r_1,r_2} množinu jevů, kdy máme mezery po pevně daných obloucích r_1 a r_2. Potom je zobrazení $T_{r_1}T_{r_2}$ bijekcí mezi množinami G_{r_1,r_2} a F_{2a}, což je ilustrováno na obrázku 1.3. Tedy platí $\mathsf{P}(G_{r_1,r_2}) = \mathsf{P}(F_{2a})$ a $\mathsf{P}(F_{2a}) = (1-2a)^{n-1}$. Dohromady dostáváme $f(2) = (1-2a)^{n-1}$.



Rozmístění C – nastává $G_{3,5}$



Rozmístění $T_3(C)$ – nastává F_a a G_5



Rozmístění $T_5T_3(C)$ – nastává F_{2a}

Obrázek 1.3: Posunutí v případě dvou mezer

Stejnou úvahu můžeme použít i pro $i \leq n$ mezer na pevně daných místech. Oblouky můžeme vždy posunout tak, abychom měli mezeru o délce ia po prvním oblouku. Dále víme, že pro $i > \frac{1}{a}$ je $f(i)$ nulová, protože takové rozmístění oblouků nemůže nastat. Dostaneme pravděpodobnost $f(i)$, že máme mezeru po i pevně daných obloucích:

$$f(i) = \begin{cases} (1-ia)^{n-1}, & i \leq k, \\ 0, & i > k, \end{cases}$$

kde $k = \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$ (dolní celá část).

Nevíme však nic o zbytku rozmístění, navíc rozmístění mezer není nezávislé. Abychom mohli pokročit v řešení problému, budeme potřebovat následující větu.

Věta 1. *Nechť $n \in \mathbb{N}, X = (X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor, $X_i \in \{H, T\}$, $i = 1, \ldots, n$. Nechť $h \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in \{1, \ldots, n-h\}$, $j_1, \ldots, j_h \in \{1, \ldots, n\}$, $k_1, \ldots, k_t \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_h\}$. Nechť $f(h)$ je pravděpodobnost, že h pevně daných složek je H, tedy $f(h) = P(X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H)$. Potom pro pravděpodobnost $f(h,t) = P(X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H, X_{k_1} = T, \ldots, X_{k_t} = T)$, že h pevně daných složek je H a t pevně daných složek je T, platí:*

$$f(h,t) = (-\Delta)^t f(h) = f(h) - tf(h+1) + \frac{t(t-1)}{2} f(h+2) - \cdots + (-1)^t f(h+t),$$

kde $\Delta f(h) = f(h+1) - f(h)$.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle t. Nechť $j_1, \ldots, j_h \in \{1, \ldots, n\}$.
Pro $t = 0$: $f(h) = (-\Delta)^0 f(h) = f(h, 0)$.
Pro $t = 1$: $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_h\}$. Označme

$$\begin{aligned} A &:= [X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H], \\ B &:= [X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H, X_k = T], \\ C &:= A \setminus B = [X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H, X_k = H]. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = f(h),\ \mathsf{P}(B) = f(h, 1) \text{ a } \mathsf{P}(C) = f(h+1).$$

Díky tomu, že B je podmnožinou A, máme

$$f(h) - f(h, 1) = f(h+1).$$

Z toho dostáváme

$$f(h, 1) = f(h) - f(h+1) = -\Delta f(h) = (-\Delta)^1 f(h).$$

Vzorec tedy platí pro $t = 1$.
Indukční krok $t \to t+1$: Předpokládáme, že dokazovaný vzorec platí pro $t < n-h$.
Nechť $k_1, \ldots, k_t \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_h\}$, $m \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_h, k_1, \ldots, k_t\}$.
Označme

$$\begin{aligned} A &:= [X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H, X_{k_1} = T, \ldots, X_{k_t} = T], \\ B &:= [X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H, X_{k_1} = T, \ldots, X_{k_t} = T, X_m = T], \\ C &:= A \setminus B = [X_{j_1} = H, \ldots, X_{j_h} = H, X_{k_1} = T, \ldots, X_{k_t} = T, X_m = H]. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\mathsf{P}(A) = f(h, t),\ \mathsf{P}(B) = f(h, t+1) \text{ a } \mathsf{P}(C) = f(h+1, t).$$

Tedy

$$f(h, t) - f(h, t+1) = f(h+1, t),$$

protože B je opět podmnožinou A. Vyjádříme $f(h, t+1)$ a použijeme indukční předpoklad:

$$f(h, t+1) = f(h, t) - f(h+1, t) = -\Delta f(h, t) = (-\Delta)^{t+1} f(h).$$

Tím je věta dokázána.

$\square$

Poznámka. Větu 1 lze také dokázat pomocí principu inkluze a exkluze.

Věta 1 nám dává pravděpodobnost, že h pevně daných složek je H a $t \leq n-h$ pevně daných složek je T. V našem problému je vlastnost H existence mezery po daném oblouku a vlastnost T její absence. Protože nás zajímá přesný počet mezer, budeme potřebovat speciální případ tohoto vzorce pro $t = n - h$. Dostaneme tak pravděpodobnost, že máme mezery po právě h pevně daných obloucích.

Důsledek. Pravděpodobnost, že h pevně daných složek je H a zbytek je T, je:

$$f(h, n-h) = (-\Delta)^{n-h} f(h)$$

$$= f(h) - (n-h) f(h+1) + \frac{(n-h)(n-h-1)}{2} f(h+2) - \cdots + (-1)^{n-h} f(n).$$

Vzorec ještě upravíme pomocí zobrazení U definovaného vztahem $\Delta = U - I$, kde I je identické zobrazení, tedy

$$Uf(h) = f(h+1) \quad \text{a} \quad U^j f(h) = f(h+j),$$

a pomocí binomické věty

$$\begin{aligned} f(h, n-h) &= (-\Delta)^{n-h} f(h) = (I-U)^{n-h} f(h) \\ &= \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n-h}{j} (-U)^j f(h) = \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n-h}{j} (-1)^j f(h+j). \end{aligned}$$

Doposud jsme brali h pevně daných složek. Máme $\binom{n}{h}$ možností, jak vybrat h-tici z n-tice. Dohromady tedy máme pravděpodobnost, že budeme mít právě h složek H,

$$\mathsf{P}(\textit{právě } h \textit{ složek je } H) = \binom{n}{h} \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n-h}{j} (-1)^j f(h+j).$$

Nyní už stačí jen dosadit dříve spočtenou pravděpodobnost $f(i)$. Pravděpodobnost, že oblouky na kružnici nechají právě l mezer, je

$$\mathsf{P}_l(a, n) = \binom{n}{l} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor - l} \binom{n-l}{j} (-1)^j (1 - [j+l]a)^{n-1}. \tag{1.1}$$

Po dosazení $l = 0$ dostáváme pravděpodobnost úplného pokrytí, tedy odpověď na naši původní úlohu,

$$\mathsf{P}(a, n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor} \binom{n}{j} (-1)^j (1 - ja)^{n-1}. \tag{1.2}$$

Poznámka. Vzorec 1.2 uvažujeme pro $n > \frac{1}{a}$, pro menší n je tato pravděpodobnost nulová. Obvykle definujeme $\binom{n}{k} = 0$ pro $n < k$, takže vzorec dává smysl pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1.4 Numerické výsledky

Pro zajímavost se podíváme na konkrétní hodnoty pro některá a a n. V této podkapitole použijeme programovací jazyk a výpočetní prostředí R.

Je zřejmé, že $\mathsf{P}(a, n)$ je neklesající v obou složkách a pro hodnoty a a n, ve kterých je $\mathsf{P}(a, n) > 0$, je rostoucí v obou složkách. Dále platí následující lemma o konvergenci $\mathsf{P}(a, n)$.

Lemma 2. *Platí*

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(a, n) = 1 \textit{ pro } a \in (0, 1),$$
$$\lim_{a \to 1^-} \mathsf{P}(a, n) = 1 \textit{ pro } n > 1.$$

Důkaz. První vztah plyne z rozepsání vzorce 1.2 jako

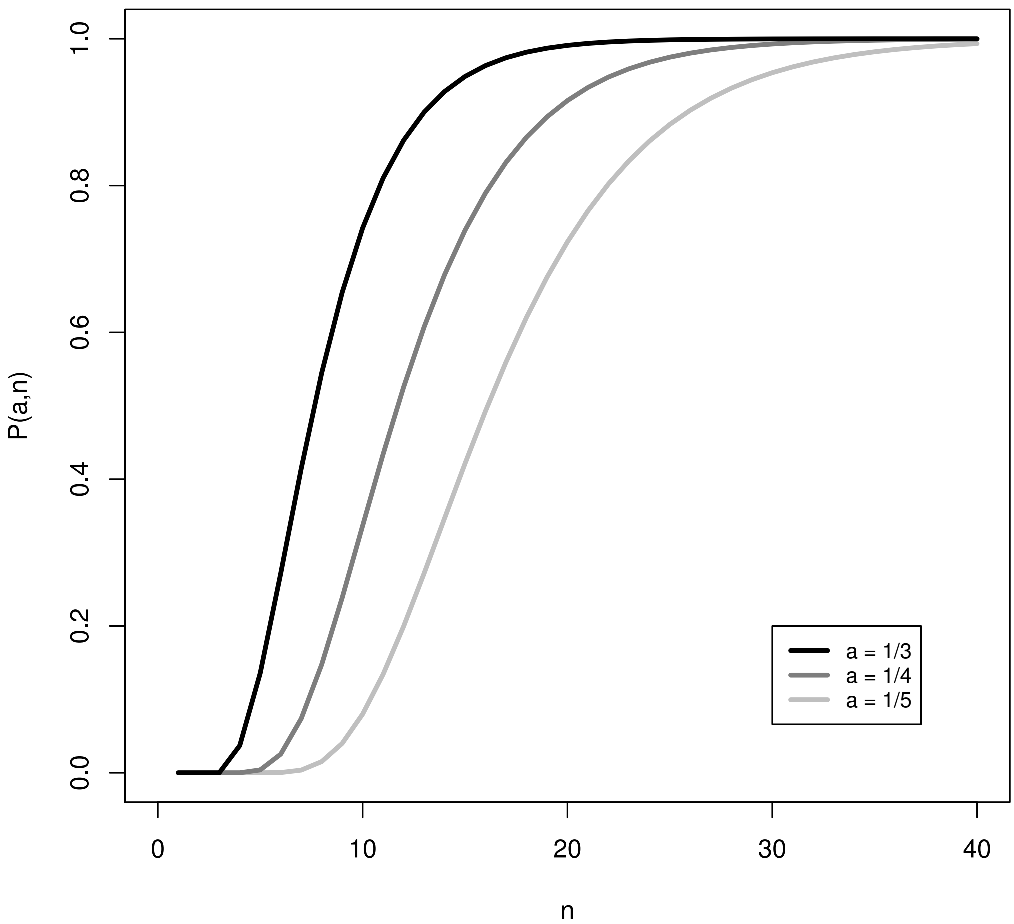
$$1 - n(1-a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1-2a)^{n-1} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k}(1-ka)^{n-1}.$$

Všechny členy kromě prvního jdou pro $n \to \infty$ k nule, protože polynom konverguje pomaleji než geometrická posloupnost s kvocientem menším než 1.

Druhý vztah plyne z toho, že pro $a > \frac{1}{2}$ je $\mathsf{P}(a,n) = 1 - n(1-a)^{n-1}$.

□

Tyto vlastnosti můžeme také pozorovat na následujícím grafu (obrázek 1.4), kde je $\mathsf{P}(a,n)$ vykreslena pro některá pevně daná a v závislosti na n. Všimněme si, že pravděpodobnost konverguje k jedné poměrně rychle.



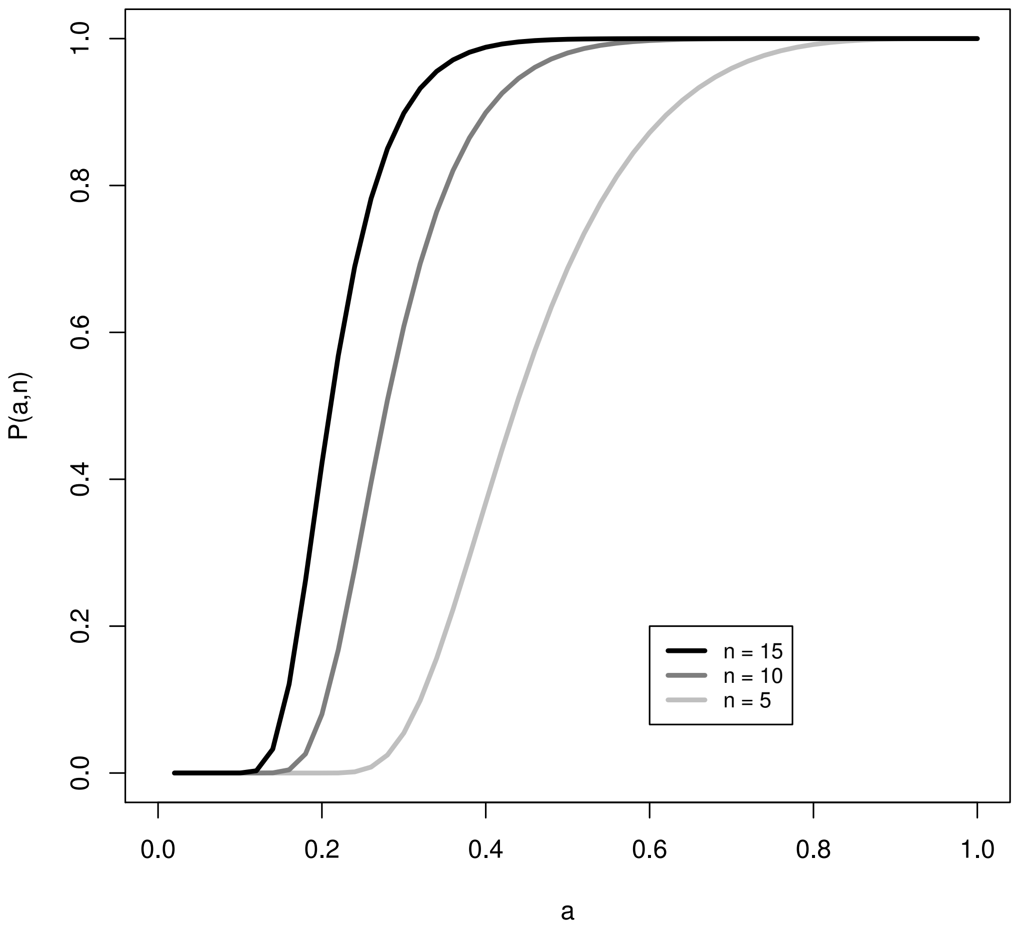
Obrázek 1.4: Pravděpodobnost pokrytí v závislosti na počtu oblouků

V tabulce 1.1 jsou uvedena potřebná n k tomu, aby $\mathsf{P}(a, n)$ pro pevně dané a nabývala alespoň hodnoty v levém sloupečku.

$\mathsf{P}(a,n)$ \ a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\geq 0{,}5$	8	12	17
$\geq 0{,}75$	11	16	21
$\geq 0{,}95$	16	23	25

Tabulka 1.1: Hodnoty počtu oblouků n potřebných k překročení dané pravděpodobnosti.

Na obrázku 1.5 je naopak graf závislosti $\mathsf{P}(a, n)$ na a při některých pevně zvolených n. Opět si můžeme všimnout poměrně rychlé konvergence k jedné.



Obrázek 1.5: Pravděpodobnost pokrytí v závislosti na délce oblouků

2. Některé související náhodné veličiny

V této kapitole zadefinujeme některé náhodné veličiny, které by nás v souvislosti s naším problémem mohly zajímat. Budeme zkoumat jejich vlastnosti, především jejich střední hodnotu, případně vyšší momenty nebo jejich rozdělení, pokud to bude možné.

2.1 Doba prvního pokrytí

Nyní budeme kružnici pokrývat postupně. Opakujeme nezávislý pokus umístění oblouku délky $a, a \in (0,1)$, na kružnici jednotkové délky. Náhodná veličina X_i bude popisovat výsledek i-tého pokusu, $i \in \mathbb{N}$, tedy pozici koncového bodu (druhého krajního bodu oblouku po směru hodinových ručiček) i-tého oblouku na kružnici. Opět předpokládáme rovnoměrné rozdělení. Postupným pokrýváním se poprvé zabývali A. G. Konheim a L. Flatto (1962).

Poznámka. Kružnice jednotkové délky je izomorfní s intervalem $[0,1)$, máme tedy rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1)$. Platí

$$\mathsf{P}(X_i \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

2.1.1 Definice a značení

Značení. Intervalem $[X_i, X_i + a)$ rozumíme

- množinu $\{y \in [0,1); X_i \le y < X_i + a\}$, pokud $X_i + a < 1$,
- množinu $\{y \in [0,1); X_i \le y < 1\} \cup \{y \in [0,1); 0 \le y < X_i + a - 1\}$, pokud $X_i + a \ge 1$.

Definice 1. *Definujeme jev A_n jako*

- $A_n = [\bigcup_{i=1}^{n} [X_i, X_i + a) \supset [0,1)], n \in \mathbb{N}$,
- $A_0 = \emptyset$.

Jev A_n tedy popisuje, zda je kružnice po n-tém pokusu zcela pokryta.

Značení. Označíme

- $p_n = \mathsf{P}(A_n), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $f_n = \mathsf{P}(A_n) - \mathsf{P}(A_{n-1}), n \in \mathbb{N}$.

Tedy p_n značí pravděpodobnost, že po n pokusech bude kružnice zcela pokryta. Z první kapitoly již tuto pravděpodobnost známe, protože $p_n = \mathsf{P}(a, n)$. Dále platí $f_n = p_n - p_{n-1}$, protože $A_n \supset A_{n-1}$. Pak f_n značí pravděpodobnost, že kružnice bude poprvé pokryta po n-tém pokusu.

Definice 2. *Diskrétní náhodnou veličinu N definujeme jako*

$$N = \begin{cases} n, & \text{pokud jev } A_n \setminus A_{n-1} \text{ nastává pro nějaké } n \in \mathbb{N}, \\ +\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom N je počet pokusů, po kterých poprvé dojde k úplnému pokrytí, případně N je rovno nekonečnu, pokud k pokrytí nedojde pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Rozdělení N známe, protože zřejmě platí:

$$p_n = \mathsf{P}(N \leq n),$$

$$f_n = \mathsf{P}(N = n).$$

Dále se nám v této části budou hodit vytvořující funkce čítacích náhodných veličin a některé jejich vlastnosti. Ty můžeme najít podrobněji rozepsané a dokázané například ve skriptech Z. Práškové a P. Lachouta (2001, str. 135).

Definice 3. *Nechť $\{a_n\} = \{a_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže mocninná řada $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konverguje pro $|s| < s_0$ pro nějaké $s_0 > 0$, potom $A(s)$ nazveme vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}$.*

Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina s rozdělením $\{q_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Vytvořující funkci $Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$ posloupnosti $\{q_n\}$ nazýváme vytvořující funkcí náhodné veličiny X.

Platí $Q(1) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \leq 1$, tedy řada absolutně konverguje pro $|s| \leq 1$ ($\{q_n\}$ je pravděpodobnostní rozdělení).

Lemma 3. *Pro střední hodnotu náhodné veličiny X platí*

$$\mathsf{E}\, X = Q'(1^-) = \lim_{s \to 1^-} Q'(s).$$

2.1.2 Výpočet střední doby prvního pokrytí

Bude nás zajímat střední hodnota veličiny N, tedy očekávaný počet oblouků délky a potřebný k úplnému pokrytí kružnice. K jejímu výpočtu použijeme vytvořující funkce posloupností $\{p_n\}$ a $\{f_n\}$. Označíme

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n s^n.$$

Lemma 4. *Vytvořující funkce $P(s)$ a $F(s)$ jsou analytické pro $|s| < 1$ a platí mezi nimi následující vztah*

$$F(s) = (1 - s)P(s). \tag{2.1}$$

Důkaz. První část tvrzení je zřejmá. Vzorec 2.1 platí, protože

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n s^n = \sum_{n=1}^{\infty}(p_n - p_{n-1})s^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n - \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^{n+1} = (1-s)\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = (1-s)P(s).
\end{aligned}
$$

□

Navíc $F(s)$ je vytvořující funkce náhodné veličiny N a je tedy absolutně konvergentní pro $|s| \leq 1$. Pak platí $\mathsf{E}\ N = F'(1^-)$ (viz lemma 3). Z první kapitoly máme vzorec 1.2, který nám dává $p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor} \binom{n}{k}(-1)^k(1-ka)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$ a $p_0 = 0$.

Věta 5. *Pro střední hodnotu náhodné veličiny N platí*

$$
\mathsf{E}\ N = 1 - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor}(-1)^k \frac{(1-ka)^{k-1}}{(ka)^{k+1}}. \tag{2.2}
$$

Důkaz. Vytvořující funkci náhodné veličiny N můžeme díky lemmatu 4 a dosazením za p_n zapsat jako

$$
F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-s)s^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor} \binom{n}{k}(-1)^k(1-ka)^{n-1}.
$$

Zaměníme sumy a počítáme

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor} \sum_{n=1}^{\infty}(1-s)s^n \binom{n}{k}(-1)^k(1-ka)^{n-1} \\
&= (1-s)\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor}(-1)^k \frac{1}{1-ka} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k}[s(1-ka)]^n.
\end{aligned}
$$

Vnitřní sumu sečteme zvlášť pro $k = 0$ a pro $k \geq 1$.

Pro $k = 0$ je

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{0}[s(1-0a)]^n = \sum_{n=1}^{\infty} s^n = \frac{s}{1-s}
$$

pro $|s| < 1$.

Pro případ $k \geq 1$ použijeme následující vzorec:

$$
\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} y^n = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}, \ |y| < 1.
$$

Pro $|s| \leq 1$ je $|s(1-ka)| < 1$ a platí

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k}[s(1-ka)]^n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}[s(1-ka)]^n = \frac{[s(1-ka)]^k}{[1-s(1-ka)]^{k+1}}.
$$

Dohromady tak dostaneme

$$\begin{aligned}F(s) &= (1-s)\frac{s}{1-s} + (1-s)\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{1}{a}\rfloor}(-1)^k\frac{(1-ka)^{k-1}s^k}{[1-s(1-ka)]^{k+1}}\\ &= s + (1-s)\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{1}{a}\rfloor}(-1)^k\frac{(1-ka)^{k-1}s^k}{[1-s(1-ka)]^{k+1}}.\end{aligned}$$

Zderivujeme a aplikujeme lemma 3

$$F'(s) = 1 - \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{1}{a}\rfloor}(-1)^k\frac{(1-ka)^{k-1}s^k}{[1-s(1-ka)]^{k+1}} + (1-s)\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{1}{a}\rfloor}(-1)^k\frac{(1-ka)^{k-1}s^k}{[1-s(1-ka)]^{k+1}}\right)'.$$

Dále platí

$$\left(\frac{(1-ka)^{k-1}s^k}{[1-s(1-ka)]^{k+1}}\right)' = \frac{(1-ka)^{k-1}s^{k-1}(k+s-ska)}{[1-s(1-ka)]^{k+2}} < \infty$$

pro $s \leq 1$.

Můžeme tedy dosadit

$$\mathsf{E}\ N = F'(1^-) = 1 - \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{1}{a}\rfloor}(-1)^k\frac{(1-ka)^{k-1}}{(ka)^{k+1}}.$$

Dostali jsme vzorec ze znění věty.

□

2.1.3 Asymptotické chování

Z věty 5 máme vzorec 2.2 pro výpočet $\mathsf{E}\ N$ pro pevné a. Dále nás bude zajímat chování střední doby prvního pokrytí v závislosti na a. Nyní ji proto budeme značit $\mathsf{E}\ N_a$. Chování pro $a \to 1^-$ lze jednodušše odvodit, platí totiž

$$\lim_{a\to 1^-}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{1}{a}\rfloor}(-1)^k\frac{(1-ka)^{k-1}}{(ka)^{k+1}} = \lim_{a\to 1^-}(-1)\frac{(1-a)^0}{a^2} = -1,$$

dohromady tedy

$$\lim_{a\to 1^-}\mathsf{E}\ N_a = 2.$$

Dále je zřejmé, že $\mathsf{E}\ N_a$ je neklesající pro $a \to 0^+$. Následující věta nám říká, že střední doba pokrytí v takovém případě roste do nekonečna a dokonce nám dává rychlost jejího růstu.

Věta 6. *Platí*

$$\mathsf{E}\ N_a \sim a^{-1}\log a^{-1} \text{ pro } a \to 0^+.$$

Důkaz. Důkaz můžeme nalézt ve článku L. Flatta a A. G. Konheima (1962).

□

Střední hodnota $\mathsf{E}\ N_a$ se tedy pro $a \to 0^+$ chová asymptoticky jako funkce $x \log x$ v nekonečnu.

2.2 Pokrytí a jeho doplněk

V této části se podíváme na to, jak velká část kružnice je pokryta, případně není pokryta. Jako v první kapitole rozmístíme n oblouků délky a rovnoměrně náhodně na kružnici jednotkové délky, koncové body těchto oblouků označíme $X_1, \dots, X_n$ (stejné značení jako výše v této kapitole), použijeme také značení intervalu na kružnici z předchozí části.

2.2.1 Definice

Poznámka. Symbol $\lambda(\cdot)$ bude značit Lebesgueovu míru na intervalu $[0, 1)$.

Definice 4. *Definujeme velikost pokrytí jako*

$$C_{(a,n)} = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} [X_i, X_i + a)\right),$$

a velikost jeho doplňku označíme

$$D_{(a,n)} = 1 - C_{(a,n)} = \lambda\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i + a, X_i)\right),$$

kde $[X_i + a, X_i) = [X_i, X_i + a)^{\mathsf{c}}$.

Potom jsou $C_{(a,n)}$ a $D_{(a,n)}$ náhodné veličiny popisující velikost části kružnice pokryté resp. nepokryté oblouky $[X_1, X_1 + a), \dots, [X_n, X_n + a)$.

Definice 5. *Definujeme indikátor nepokrytého úseku kružnice jako*

$$\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i, X_i + a), \\ 0, & \xi \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i, X_i + a). \end{cases}$$

2.2.2 První a druhý moment

Vzorce pro výpočet prvních dvou momentů $D_{(a,n)}$ nám dává následující věta. Tvar prvních dvou momentů $C_{(a,n)}$ lze pak snadno dopočítat.

Věta 7. *Platí*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[D_{(a,n)}] &= (1-a)^n, \\ \mathsf{E}[D^2_{(a,n)}] &= \frac{2}{n+1}(1-a)^{n+1} + \frac{n-1}{n+1}(1-2a)_+^{n+1}. \end{aligned}$$

Důkaz. Platí

$$D_{(a,n)} = \int_0^1 \mathbb{I}_{(a,n)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

což použitím Fubiniho věty dává

$$\mathsf{E}[D_{(a,n)}] = \int_0^1 \mathsf{E}[\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi)]\, \mathrm{d}\xi.$$

Víme, že $\mathsf{E}\left[\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi)\right]$ je rovna pravděpodobnosti, že bod ξ není pokryt, a zřejmě platí $\mathsf{E}\left[\mathbb{I}_{(a,1)}(\xi)\right] = (1-a)$. Protože oblouky jsou na sobě nezávislé, máme

$$\mathsf{E}\left[\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi)\right] = \left(\mathsf{E}\left[\mathbb{I}_{(a,1)}(\xi)\right]\right)^n = (1-a)^n.$$

Dohromady tedy dostaneme

$$\mathsf{E}\left[D_{(a,n)}\right] = (1-a)^n.$$

Obdobným způsobem můžeme odvodit druhý moment, platí totiž následující vztahy

$$D^2_{(a,n)} = \int_0^1 \mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1 \int_0^1 \mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2,$$

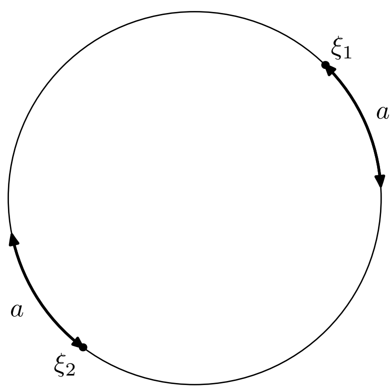
$$\mathsf{E}\left[D^2_{(a,n)}\right] = \int_0^1\int_0^1 \mathsf{E}\left[\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_1)\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_2)\right]\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

$$\mathsf{E}\left[\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_1)\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_2)\right] = \mathsf{P}(\xi_1 \text{ ani } \xi_2 \text{ nejsou pokryty}),$$

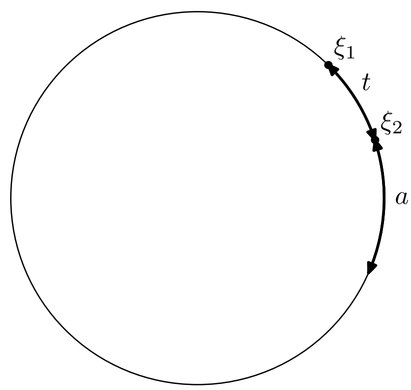
kde ξ_1, ξ_2 jsou dva různé body na kružnici.

Mohou nastat dvě možnosti:

- Vzdálenost ξ_1 a ξ_2 na kružnici je větší než a. Pak ξ_1 a ξ_2 nejsou pokryty právě tehdy, když žádné koncové body oblouků nepadnou do úseků délky a jako na obrázku 2.1 vlevo.
- Vzdálenost ξ_1 a ξ_2 na kružnici je nějaké $t \le a$. Potom ξ_1 a ξ_2 nejsou pokryty právě tehdy, když žádné koncové body oblouků nepadnou do úseku délky $t + a$ jako na obrázku 2.1 vpravo.



První případ



Druhý případ

Obrázek 2.1: Možná rozmístění bodů ξ_1 a ξ_2

První případ může nastat pouze, pokud $2a < 1$, proto pro něj ve výpočtech používáme kladnou část, tedy

$$(1-2a)_+ = \begin{cases} (1-2a), & 2a < 1,\\ 0, & 2a \ge 1.\end{cases}$$

Dohromady

$$\mathsf{E}\,[\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_1)\mathbb{I}_{(a,n)}(\xi_2)] = \begin{cases} (1-2a)_+^n, & ||\xi_1-\xi_2|| \geq a, \\ [1-(t+a)]_+^n, & ||\xi_1-\xi_2|| = t \leq a, \end{cases}$$

kde $||\xi_1 - \xi_2||$ rozumíme vzdálenost ξ_1 a ξ_2 po kružnici.

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[D^2_{(a,n)}] = & \iint\limits_{||\xi_1-\xi_2||=t\leq a} [1-(t+a)]_+^n \,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \quad + \iint\limits_{||\xi_1-\xi_2||>a} (1-2a)_+^n \,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \\
= & \int\limits_0^1 \int\limits_{\xi_2-a}^{\xi_2} [1-(\xi_2-\xi_1+a)]_+^n \,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 + \int\limits_0^1 \int\limits_{\xi_2}^{\xi_2+a} [1-(\xi_1-\xi_2+a)]_+^n \,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\xi_2-a} (1-2a)_+^n \,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 + \int\limits_0^1 \int\limits_{\xi_2+a}^{1} (1-2a)_+^n \,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \\
= & \frac{2}{n+1} \int\limits_0^1 (1-a)^{n+1}\,\mathrm{d}\xi_2 - \frac{2}{n+1} \int\limits_0^1 (1-2a)_+^{n+1}\,\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int\limits_0^1 (1-2a)_+^n (\xi_2 - a)\,\mathrm{d}\xi_2 + \int\limits_0^1 (1-2a)_+^n (1-\xi_2-a)\,\mathrm{d}\xi_2 \\
= & \frac{2}{n+1}(1-a)^{n+1} + \frac{n-1}{n+1}(1-2a)_+^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dostali jsme vzorec pro druhý moment ze znění věty.

□

Důsledek. Platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[C_{(a,n)}] &= 1-(1-a)^n, \\
\mathsf{E}\,[C^2_{(a,n)}] &= 1-2(1-a)^n + \frac{2}{n+1}(1-a)^{n+1} + \frac{n-1}{n+1}(1-2a)_+^{n+1}.
\end{aligned}$$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definice 4 a věty 7:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[C_{(a,n)}] &= 1-\mathsf{E}\,[D_{(a,n)}] = 1-(1-a)^n, \\
\mathsf{E}\,[C^2_{(a,n)}] &= \mathsf{E}\,[(1-D_{(a,n)})^2] = 1-2\,\mathsf{E}\,[D_{(a,n)}] + \mathsf{E}\,[D^2_{(a,n)}] \\
&= 1-2(1-a)^n + \frac{2}{n+1}(1-a)^{n+1} + \frac{n-1}{n+1}(1-2a)_+^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Poznámka. A. F. Siegel (1978) odvodil všechny momenty $C_{(a,n)}$ a $D_{(a,n)}$ jako řešení rekurzivní integrální rovnice pro momenty $D_{(a,n)}$ sestavené pomocí podobné myšlenky jako výpočet druhého momentu $D_{(a,n)}$. My zde pro zajímavost uvedeme některé jeho výsledky bez důkazů. Pro $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[D^m_{(a,n)}] &= \binom{m+n-1}{n}^{-1} \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l}\binom{n-1}{l-1}(1-la)_+^{m+n-1}, \\
\mathsf{E}\,[C^m_{(a,n)}] &= \mathsf{E}\,[(1-D_{(a,n)})^m] = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}\,\mathsf{E}\,[D^k_{(a,n)}],
\end{aligned}$$

což také odpovídá našemu částečnému výsledku z věty 7.

Protože $D_{(a,n)}$ a $C_{(a,n)}$ jsou nezáporné náhodné veličiny omezené jedničkou, tak momenty jednoznačně určují jejich rozdělení, lze tedy odvodit i distribuční funkci

$$\begin{aligned} F_{(a,n)}(t) &= \mathsf{P}(C_{(a,n)} \leq t) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{l+k+1} \binom{n}{l} \binom{l-1}{k} \binom{n-1}{k} (1-t)^k (t-la)_+^{n-k-1} \end{aligned}$$

pro $t \in [0,1]$.

3. Nekonečné pokrývání

Nechť $\{a_i \in (0,1), i \in \mathbb{N}\}$ je reálná posloupnost a K je kružnice jednotkového obvodu. Zkoumáme pravděpodobnost, že oblouky $A_i = [X_i, X_i + a_i)$ délek a_i pokryjí kružnici K, tedy $\mathsf{P}(K = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$, případně pravděpodobnost, že kružnici K pokryjí skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře), tedy $\mathsf{P}(\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1)$. Stejně jako v předchozích kapitolách předpokládáme, že koncové body X_i mají rovnoměrné rozdělení na kružnici a že jsou na sobě nezávislé.

Z části 1.4 víme, že pokud $a_i = a \in (0,1), i \in \mathbb{N}$, pak platí

$$\mathsf{P}(K = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(a,n) = 1.$$

Dále nás budou zajímat posloupnosti oblouků různých délek a to především posloupnosti splňující $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$.

Tento problém poprvé řešil A. Dvoretzky (1956), který odvodil nutnou a postačující podmínku pro pokrytí kružnice skoro všude skoro jistě. Podmínku pro pokrytí celé kružnice skoro jistě pak odvodil L. A. Shepp (1972).

3.1 Pravděpodobnost pokrytí pevného bodu

Nejprve se podíváme na pravděpodobnost pokrytí pevně zvoleného $x \in K$. Na to budeme potřebovat následující pomocné lemma o vztahu konvergence nekonečné sumy a nekonečného součinu.

Lemma 8. *Nechť $0 \leq q_n < 1, n \in \mathbb{N}$. Pak $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_n)$ konverguje k nenulovému číslu právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ konverguje.*
Ekvivalentně:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty.$$

Důkaz. Platí, že $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_n)$ konverguje k nenulovému číslu p právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q_n)$ konverguje, protože

$$\lim_{n\to\infty}(1-q_1)(1-q_2)\cdots(1-q_n) = p > 0$$

a ze spojitosti logaritmu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q_n) = \lim_{n\to\infty}(\log(1-q_1) + \log(1-q_2) + \cdots + \log(1-q_n)) = \log p.$$

Nechť naopak $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q_n) = q$. Pak ze spojistosti exponenciály $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_n) = \mathrm{e}^q$.

Dále rozlišíme případ, kdy $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$, a případ, kdy $\lim_{n\to\infty} q_n > 0$ nebo tato limita neexistuje. Pokud $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1-q_n)}{-q_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{-x} = 1$$

a z limitního srovnávacího kritéria dostáváme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-q_n)$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ konverguje.

Pokud $\lim_{n\to\infty} q_n > 0$ nebo neexistuje, není splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Ukážeme, že pak není splněna ani nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-q_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \log(1-q_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (1-q_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} q_n = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

□

Následující věta nám dává nutnou a postačující podmínku pro pokrytí pevně daného bodu $x \in K$ skoro jistě.

Věta 9. *Nechť $x \in K$. Pak platí*

$$P(x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_i = \infty.$$

Důkaz. Přejdeme k doplňkovému jevu

$$\mathsf{P}(x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathsf{P}(x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0.$$

Víme, že $\mathsf{P}(x \notin A_i) = 1 - a_i$. Díky nezávislosti máme

$$\mathsf{P}(x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathsf{P}(x \notin A_i, \forall i \in \mathbb{N}) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(x \notin A_i) = \prod_{i=1}^{\infty} (1-a_i).$$

Z lemmatu 8

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1-a_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty.$$

Tím je věta dokázána.

□

3.2 Pravděpodobnost pokrytí skoro všude

Výsledek pro pevný bod $x \in K$ lze poměrně jednoduše zobecnit na pokrytí skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

Věta 10. *Kružnice K je pokryta skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře) skoro jistě právě tehdy, když* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i = \infty$, *tedy*

$$\mathsf{P}(\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_i = \infty.$$

Důkaz. Nechť $\mathsf{P}(\lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 1) = 1$. Pak existuje $x \in K$, že $\mathsf{P}(x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$. Potom

$$1 = \mathsf{P}(x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - \mathsf{P}(x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{\infty}(1 - a_i).$$

Dostáváme $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1 - a_i) = 0$, což je podle lemmatu 8 ekvivalentní s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i = \infty$.

Nechť naopak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i = \infty$. Pak za pomoci Fubiniovy věty a věty 9

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \int_\Omega \int_K \mathbb{I}[x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}(\omega) = \int_K \int_\Omega \mathbb{I}[x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i]\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}(\omega)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_K \mathsf{P}(x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\,\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

Protože $\lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \le 1$, musí platit $\mathsf{P}(\lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 1) = 1$.

Tím je věta dokázána.

□

3.3 Pravděpodobnost pokrytí celé kružnice

Přirozeně vyvstává otázka, zda stejné kritérium platí i pro pokrytí celé kružnice K s pravděpodobností 1, případně zda pro tento případ existuje silnější postačující a nutná podmínka. Jak ukázal A. Dvoretzky (1956), podmínka z věty 10 není postačující pro pokrytí celé kružnice. Existuje totiž posloupnost $\{a_i\}$ splňující $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i = \infty$, pro kterou platí

$$\mathsf{P}(K = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) < 1.$$

Následující věta nám dává nutnou a postačující podmínku pro pokrytí celé kružnice K skoro jistě. Oproti předchozím předpokladům navíc požaduje, aby posloupnost délek oblouků byla nerostoucí.

Věta 11. *Nechť jsou oblouky délek $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}, 0 < a_{i+1} \le a_i < 1$ rozmístěny rovnoměrně náhodně a nezávisle na kružnici K jednotkového obvodu. Potom*

$$\mathsf{P}(K = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\sum_{i=1}^{n} a_i) = \infty.$$

Důkaz. Důkaz této věty můžeme najít ve článku L. A. Sheppa (1972).

□

Závěr

V první kapitole jsme se seznámili se základním problémem pokrývání kružnice náhodnými oblouky. Odvodili jsme pravděpodobnost, že n oblouků délky a zanechá právě l mezer. Pravděpodobnost úplného pokrytí jsme dostali jako speciální případ pro $l = 0$. Navíc jsme odvodili některé vlastnosti této pravděpodobnosti a pro zajímavost jsme ji vykreslili pro některé konkrétní hodnoty a a n.

Ve druhé kapitole jsme se zabývali náhodnými veličinami souvisejícími s naším problémem. V první části této kapitoly jsme využili výsledků z první kapitoly a vlastností vytvořujících funkcí k výpočtu střední doby prvního pokrytí kružnice při postupném pokrývání. Asymptotické chování pro tuto střední hodnotu při a klesajícím k nule jsme pak uvedli bez důkazu. Ve druhé části této kapitoly jsme zkoumali velikost pokryté, resp. nepokryté, části kružnice. Spočetli jsme první a druhý moment těchto náhodných veličin a pro zajímavost jsme uvedli výsledky pro vyšší momenty bez důkazu.

Ve třetí kapitole jsme pak řešili úlohu pokrývání kružnice spočetně mnoha náhodnými oblouky různých délek. Dokázali jsme kritéria pro pokrytí pevného bodu na kružnici a pro pokrytí skoro celé kružnice skoro jistě. Kritérium pro pokrytí celé kružnice skoro jistě jsme opět uvedli pouze bez důkazu.

Dokázaná tvrzení v prvních dvou kapitolách jsou buď přímo převzatá z literatury nebo převzatá s drobnými úpravami. Kritéria pro pokrytí pevného bodu na kružnici a pro pokrytí skoro celé kružnici skoro jistě ve třetí kapitole jsou námi formulována a dokázána.

Seznam použité literatury

Dvoretzky, A. (1956). On Covering a Circle by Randomly Placed Arcs. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 42*(4), 199–203.

Flatto, L., & Konheim, A. G. (1962). The Random Division of an Interval and the Random Covering of a Circle. *SIAM Review, 4*(3), 211–222.

Prášková, Z., & Lachout, P. (1998). *Základy náhodných procesů.* Karolinum, Praha. ISBN 80-7184-688-0.

R Core Team (2016). *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/.

Shepp, L. A. (1972). Covering the Circle with Random Arcs. *Israel Journal of Mathematics, 11*(3), 328–345.

Siegel, A. F. (1978). Random Arcs on the Circle. *Journal of Applied Probability, 15*(4), 774–789.

Solomon, H. (1978). *Geometric Probability.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 28, SIAM, Philadelphia. ISBN 0-89871-025-1.

Stevens, W. L. (1939). Solution to a Geometrical Problem in Probability. *Annals of Human Genetics*, *9*(4), 315–320.

Seznam obrázků