

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Pokrývání kružnice náhodnými oblouky

Autor: Klára Čelikovská

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce se zabývá úlohou pokrývání kružnice jednotkové délky konečnou posloupností náhodně umístěných oblouků konstantní délky, v závěrečné části pak početnou posloupností oblouků různých délek. Autorka zejména řeší otázku, jaká je pravděpodobnost pokrytí celé kružnice, resp. jaké je chování (náhodné) délky pokryté části. Při pokrývání kružnice nekonečným počtem oblouků pak diskutuje pravděpodobnost pokrytí předem zvoleného bodu skoro jistě, pravděpodobnost pokrytí skoro celé kružnice skoro jistě, resp. pokrytí celé kružnice skoro jistě.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Zadané téma hodnotím jako zajímavé, technicky méně náročné. Zadání práce bylo naplněno.

Vlastní příspěvek. Příspěvek autorky spočívá v sepsání uceleného textu v jednotném značení a doplnění důkazu dvou tvrzení v částech 3.1 a 3.2.

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je dobrá, práce obsahuje rigorózně zformulovaný matematický text.

Práce se zdroji. Použité zdroje jsou řádně citovány.

Formální úprava. Formální stránka práce je na vysoké úrovni, stejně jako jazyková stránka. Množství překlepů je přiměřené rozsahu práce.

PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

V práci studentka operuje s konceptem geometrické pravděpodobnosti, v úvodní části používá zobrazení mezi množinami jevů apod. Proto považuji za nešťastné, že v práci není uvedeno, na jakém pravděpodobnostním prostoru se bude pracovat. Jaký tvar má množina v eukleidovském prostoru, jejíž body považujeme za elementární jevy?

Další podstatnou připomínkou je, že věta 1 neplatí bez dalších předpokladů na rozdělení náhodného vektoru. Už jen samotná definice $f(h)$ není korektní, obecně závisí na volbě indexů j_k . Uvažme například situaci s dvousložkovým náhodným vektorem s $\mathbb{P}(X_1 = H) = 1, \mathbb{P}(X_2 = H) = 1/2$. Potom $f(1)$ není korektně definováno a závisí na tom, zda $j_1 = 1$ nebo $j_1 = 2$.

Považuji také za nešťastné použití stejného symbolu pro operátor zpětné diference Δ použitého jak pro funkci jedné proměnné, tak pro funkci dvou proměnných (poslední rovnice v důkazu věty 1).

V poznámce na konci sekce 1.3 autorka uvádí, že vzorec (1.2) dává smysl pro všechna přirozená čísla n . S tím se dá souhlasit v tom smyslu, že neobsahuje nedefinované symboly. Není však vůbec jasné, zda vzorec (1.2) dává pro $n \leq 1/a$ požadovanou hodnotu 0. To by zasloužilo podrobnější komentář.

Umístění lemmatu 2 v části nazvané Numerické výsledky je poněkud nevhodné.

V důkazu věty 5 narážíme na dělení nulou (pro $1/a \in \mathbb{N}$ a $k = 1/a$) a také výraz 0^0 , u kterého autorka neuvádí, jak s ním bude pracovat (například v první rovnici v důkazu věty, opět pro $1/a \in \mathbb{N}, k = 1/a$ a $n = 1$).

Na konci definice 4 autorka používá operaci doplňku, neuvádí však, v jaké množině pracuje. I když se dá odhadnout, že jde o doplněk v intervalu $[0,1]$ a ne v \mathbb{R} , mělo by to být v textu uvedeno.

Při výpočtu druhého momentu na konci důkazu věty 7 narážím na nejasnosti dané tím, že je ztotožněna kružnice s intervalem $[0,1]$. Z výpočtů na předchozí straně je zřejmé, že integrujeme pro ξ_1 i ξ_2 přes interval $[0,1]$. Po první úpravě a rozdělení jednoho integrálu do dvou částí však dostáváme pro ξ_1 integrační obor například od $\xi_2 + a$ do 1. Pro určité kombinace hodnot ξ_2 a a je však $\xi_2 + a > 1$ a dostáváme se tak mimo původní integrační obor (nemyslím tím tedy pouze to, že spodní mez integrace má vyšší hodnotu než horní mez).

Dotazy, které mohou zaznít u obhajoby, jsou následující:

1. Jak vypadá pravděpodobnostní prostor uvažovaný v první kapitole? Mezi jakými množinami pracuje zobrazení T_r , tedy co je jeho definičním oborem a oborem hodnot?
2. Jaké předpoklady je nutné doplnit do věty 1, aby její tvrzení platilo a šlo aplikovat v kontextu sekce 1.3?
3. Proč je možné zaměnit pořadí sumace na začátku důkazu věty 5? Jak v tomto důkazu ošetřit situaci, kdy $1/a$ je přirozené číslo a pro $k = 1/a$ v jednom členu dělíme nulou? Jak interpretovat výraz 0^0 , který se ve výpočtu může objevit?
4. Na konci důkazu věty 7 jsem narazil na určité nejasnosti v integračních oborech, viz poznámku výše. Prosim o podrobné vysvětlení postupu, konkrétně pro integrál s podmínkou $||\xi_1 - \xi_2|| > a$, jak je rozepsán do dvou částí a přes jaké množiny se pak integruje.

ZÁVĚR

Přes uvedené výhrady soudím, že předložená práce splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci na MFF UK. Doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

V Nehvizdech, dne 14. 8. 2017

RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D.