

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav Bára

Elektromagnetická rotační superradiace

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Podpis autora

Název práce: Elektromagnetická rotační superradiace

Autor: Václav Bára

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V této práci ukazujeme rozptyl elektromagnetického záření na rotujícím válci a na rotující sféře s využitím formalismu vektorových sférických harmonik. Za splnění specifické podmínky pak nalézáme rotační superradiaci, jev původně objevený Y. B. Zel'dovičem v 70. letech, při němž záření rozptylem na rotujícím objektu získává energii. V tomto specifickém případě je podstatou jevu disipace energie v podobě Jouleova tepla, které vzniká díky generaci plošných proudů na vodiči. Superradiace nastává i při rozptylu záření na rotující černé díře, zde však není disipace energie přítomna. Shrnujeme výsledky převzaté z literatury pro rozptyl záření na rotující černé díře včetně aplikace zvané Black-hole bomb, kdy je černá díra uzavřena do ideálně odrazivého zrcadla. Ukazujeme, že pro nejnižší módy záření lze na určitých intervalech aproximovat výsledky obecné relativity rozptylem na plochém prostoročase.

Klíčová slova: superradiace Kerrova černá díra

Title: Electromagnetic rotational superradiance

Author: Václav Bára

Institute: Institute of theoretical physics

Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Institute of theoretical physics

Abstract: We show the scattering of electromagnetic radiation on a rotating cylinder and a rotating sphere using formalism of the vector spherical harmonics in this thesis. If a specific condition is satisfied then we can observe the rotational superradiance, phenomena originally discovered by Y. B. Zel'dovich in 1970s saying that the radiation can gain power by scattering on a rotating body. In this particular case there is an underlying principle of the rotational superradiance, the energy dissipation in the form of Joule heating created due to the induction of surface currents on the conductor. Superradiance can occur in the radiation scattering on the rotating black hole background, although there is no dissipation present. We summarize the results of scattering on the Kerr black hole from the literature, including an application called Black hole bomb, when the black hole is enclosed into a perfectly reflecting mirror. We show that for the lowest modes of the radiation at specific intervals the general relativity results can be approximated by scattering on the flat spacetime.

Keywords: superradiance Kerr black hole

Rád bych poděkoval svému vedoucímu, Mgr. Tomáši Ledvinkovi, Ph. D., za cenné připomínky, důležité rady, vstřícnost během celého mého studia a v neposlední řadě za to, že mě mnohému zajímavému naučil.

Obsah

Úvod	3
1 Příběh extrakce energie	5
1.1 Zel'dovič a rotační superradiace	5
1.2 Extrakce energie z černé díry	6
1.3 Membránové paradigma	7
1.4 Současná doba	8
2 Rozptyl na rotujícím válci	9
2.1 Vlny ve válcových souřadnicích	9
2.2 Rovnice na rotujícím rozhraní	10
2.2.1 Dopadající TE polarizovaná vlna	12
2.2.2 Dopadající TM polarizovaná vlna	13
2.3 Energetická bilance TM vlny	15
2.3.1 Skok Poyntingova vektoru	15
3 Rozptyl na sféře	17
3.1 Superradiace a termodynamika	17
3.2 Rovnice na rozhraní	19
3.3 Vlny na rozhraní	19
3.4 Stojící sféra	20
3.5 Rotující sféra	22
3.6 Chyba konečných dimenzí	25
3.7 Výkon nesený vlnou	26
4 Rotující tělesa a zrcadla	29
4.1 Rotující válec	29
4.2 Stojící sféra	31
4.3 Rotující sféra	32
4.4 Aproximace	35
5 Rozptyl na rotující černé díře	39
5.1 Termodynamický důkaz superradiace	39
5.2 Rotující nenabitá černá díra	40
5.3 Teukolskeho rovnice	42
5.4 Superradiantní rozptyl na Kerrově černé díře	45
5.4.1 Úhlová rovnice	45
5.4.2 Radiální rovnice a superradiace	45
5.5 Black hole bomb	47
Závěr	51

A	Matematika	53
A.1	Sférické Besselovy funkce	53
A.2	Asociované Legendreovy polynomy	55
A.3	Skalární sférické harmoniky	56
A.4	Vektorové sférické harmoniky	57
B	Elektromagnetismus	59
B.1	EM vlny ve válcových souřadnicích	59
B.2	EM vlny ve sférických souřadnicích	59
B.3	Tensor EM pole ve sférických souřadnicích	62
B.4	Podmínky na rozhraní sféry	63
B.5	Kulový rezonátor	63
B.6	Skok tečného magnetického pole	64
B.7	Maticové rovnice rotující sféry	66
	B.7.1 Skok f'	66
	B.7.2 Skok g	68
	B.7.3 Tvar matic	70
C	Separace Teukolského rovnice	71
D	Další superradiantní procesy	73
D.1	Spontánní emise	73
D.2	Skalární bosony a potenciálová bariéra	74
D.3	Metoda efektivního potenciálu	75
	Seznam použité literatury	77

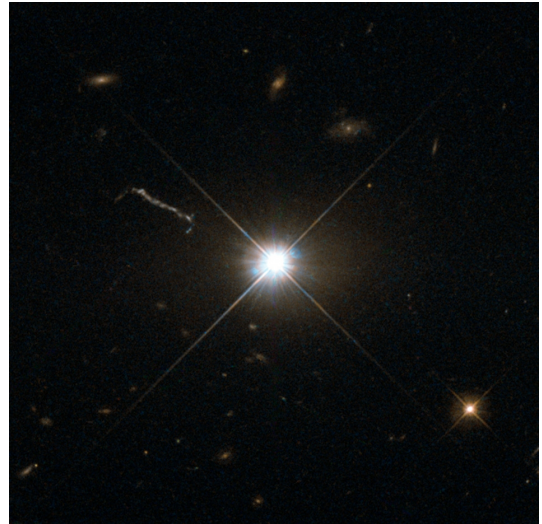
Úvod

Obecná teorie relativity předpověděla existenci černých děr. V roce 1963 našel Roy Kerr za pomoci tehdy moderních algebraických metod řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole [1], které odpovídá rotující černé díře, jež je popsána hmotností M a momentem hybnosti J . Ve stejném roce identifikoval Maarten Schmidt zářivý objekt 3C 273 (obrázek 1) v souhvězdí Panny na nebeském rovníku jako kvazistelární objekt (kvazar) skládající se převážně z vodíku [2]. Spektrální čáry byly však výrazně posunuty a jeho závěrem bylo, že objekt musí být velice daleko. Svůj objev prezentoval Jessemu Greensteinovi, tehdejšímu řediteli astronomického ústavu na Caltechu, který poté ukázal, že první pozorovaný kvazistelární objekt 3C 48 má také výrazný rudý posuv a vzdaluje se od Země ještě vyšší rychlostí [3].

Fyzici tehdejší doby se domnívali, a správně, že v jádrech kvazarů rotují supermasivní černé díry, které jsou zdrojem rádiového vlnění, jež poprvé identifikoval jako kosmické záření Karl Jansky [4] roku 1933 při objasňování šumu na bezdrátové telekomunikační lince nad Atlantikem.

Zel'dovič ukázal [5, 6], že rotující vodivé objekty v plochém prostoročasu mohou předávat svou energii do vln, které se na nich rozptylují, ba co víc, že i při nedopadajícím záření může rotující těleso vyzařovat energii. Termodynamický důkaz této teorie vedl Bekensteina [7] k myšlence, že i rotující černé díry musí vykazovat stejné vlastnosti, neboť i pro ně existuje série termodynamických zákonů [8]. Při studiích perturbací na pozadí Kerrových černých děr pak Teukolsky a Press ukázali [9, 10, 11], že černá díra skutečně může zesilovat rozptylované záření, a dochází tak k extrakci energie z této černé díry.

Zel'dovičův model rotujícího válce [6] ukazuje, že extrakce energie je disipativní proces, při němž se uvolňuje teplo. Teukolsky-Pressovo řešení [11] však žádnou disipaci neuvažuje. V ergosféře, která obklopuje vnější horizont Kerrových černých děr, mohou existovat vlny se zápornou energií, které černá díra pohltí, čímž přijde o část své vlastní energie. Je tedy superradiace v obecné relativitě stejný, či alespoň analogický, proces, který nastává u rotujícího Zel'dovičova válce?



Obrázek 1: Pozorování kvazaru 3C 273. Obrázek je vypůjčený ze stránek www.nasa.gov. Jedná se o snímek nejzářivějšího kvazaru pořízený Hubbleovým vesmírným teleskopem.

Thibault Damour [12] ukázal, že na černou díru, konkrétně pak na její vnější horizont, lze pohlížet jako na membránu o plošném odporu $\sqrt{\mu\epsilon} = 377 \Omega$, na níž vznikají při rozptylech proudy stejně jako na Zel'dovičově válci a platí pro ně Ohmův i Jouleův zákon.

Elektromagnetická rotační superradiace je proces, při němž se zesiluje elektromagnetické záření rozptylem na rotujícím objektu. V této práci řešíme Zel'dovičův model pro rozptyl TM záření na rotujícím válci, čímž navazujeme na bakalářskou práci [13], kde je analyzován rozptyl TE polarizovaných vln na stejném válci. Dále ukazujeme odraz záření na stojící a rotující sféře pro obecné úhlové rychlosti. Situaci nahlížíme pro parciální vlny, které jsou v obou případech úměrné $e^{i(m\phi - \omega t)}$, kde m je azimutální vlnové číslo, ω její frekvence a ϕ úhlová azimutální souřadnice v rovině kolmé na osu otáčení.

Dále rekonstruuje Teukolskeho postup nalezení vlnové rovnice pro elektromagnetické pole za pomoci Newman-Penroseova formalismu [9]. Následně shrnujeme poznatky o řešení rovnice v souladu s postupy Cardosa, Brita a Paniho [14]. Ukazujeme jednu z prvních aplikací superradiace, kterou je konstrukce černo-děrové bomby, tedy Kerrovy černé díry uzavřené do ideálně odrazivého zrcadla. Zrcadlo má takový tvar, aby v každém jeho bodě bylo nulové normálové magnetické a tečné elektrické pole, modelujeme jej tedy vodivým rezonátorem.

Superradiace však nenastává jen rozptylem na rotujících objektech. Abychom ukázali, že superradiace je jev objevující se i v klasické fyzice, ukazujeme interakci nehmotného Klein-Gordonova pole s vnějším potenciálem v dodatku D.2. Pojem superradiace poprvé použil R. H. Dicke [15] a vůbec první efekt považovaný za superradiaci (spontánní vyzařování objektu pohybujícího se nadsvětelnou rychlostí v daném médiu) popisujeme v dodatku D.1 po vzoru práce [16].

1. Příběh extrakce energie

1.1 Zel'dovič a rotační superradiace

Na počátku 70. let vyslovil Yakov Borisovič Zel'dovič hypotézu, že lze extrahovat energii z rotující černé díry stejně, jako v klasickém případě lze čerpat kinetickou energii rotujících objektů rozptylem záření.

Nechá-li se akustická vlna dopadnout a odrazit na médium, které se pohybuje v daném prostředí rychleji než zvuk, dojde ke zvýšení hlasitosti zvuku. Za podobný efekt byla roku 1958 udělena Nobelova cena za fyziku „*Za objev a interpretaci Čerenkovova jevu*“. Ta říká, že částice pohybující se v médiu rychleji než světlo spontánně vyzařuje elektromagnetické vlny. Pohyb částice v dielektrickém prostředí lze nahlédnout v dodatku D.1.

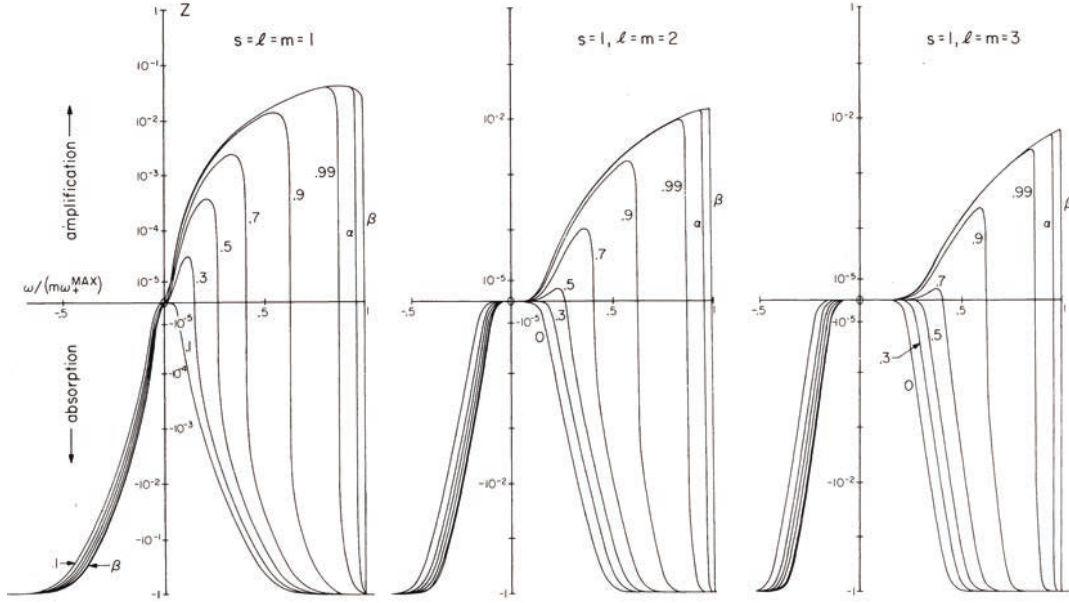
Zel'dovič si všiml, že analogie odrazu vlny na desce nebude fungovat ve vakuu, neboť se zde nemůže hmotná deska pohybovat rychleji než světlo, ovšem v zakřivené geometrii lze zesílení elektromagnetických vln získat. Ve svém článku [6] tvrdí: „It can be assumed that the effect in question appears also when the interaction of the waves with the rotating body is connected with the gravitational field of this body and does not depend on dissipated processes in the material of the body.“ S touto myšlenkou se původně nemohl ztotožnit Kip S. Thorne, kterému ji Zel'dovič prezentoval [17]. Sázku o lahev brandy však se Zel'dovičem prohrál [17], efekt se o pár let později skutečně objevil v obecné teorii relativity.

Ve stejném článku Zel'dovič také navrhl obalit rotující objekt polopropustným zrcadlem. Ve člancích [6, 5] ukázal rozptyl skalárního a elektromagnetického pole na pomalu rotujícím válci. Elektromagnetické pole se rozptylem zesílí za splnění podmínky

$$\omega - m\Omega < 0,$$

kde ω je kladná frekvence záření, m počet period vlny v azimutálním směru a Ω je velikost úhlové rychlosti válce.

Jako nejjednodušší je (jako varianta Zel'dovičova původního modelu) v této práci uvažována rotující válcová slupka. Práce nejprve shrnuje výsledky bakalářské práce [13] v podkapitole 2.2.1, kde stejně jako Zel'dovič [6] studujeme rozptyl válcové TE vlny. V této práci se v několika modelech zkoumají vlastnosti rotační superradiace. Přidán je rozptyl TM vlny na rotujícím válci a obecný rozptyl na rotující vodivé sféře. V kapitole 3 podáváme termodynamický důkaz superradiace pro obecné axiálně symetrické těleso rotující okolo své osy symetrie dle vzoru Bekensteinova článku [16]. Návazně na to přebíráme i důkaz superradiace v obecné relativitě v kapitole 5.1 pro Kerr-Newmanovu černou díru za pomoci Bardeenových-Carterových-Hawkingových mechanických zákonů černých děr [8], které jsou dnes známy jako termodynamické zákony Kerr-Newmanova prostoročasu.



Obrázek 1.1: Amplification and absorption of electromagnetic ($s = 1$) waves by a rotating black hole. The fractional energy amplification (positive Z) or absorption (negative Z) of the three most strongly amplified spheroidal-wave modes is shown as a function of the wave's frequency ω (in units of m times the hole's maximum rotation frequency $\omega_+^{\text{max}} = 2/M$). The different curves parametrize the specific angular momentum a of the hole in units of its mass M , ranging from $a/M = 0$ (Schwarzschild) to $a/M \approx 1$ (extreme Kerr). The curves labeled α and β indicate values $a/m = 0.999$ and 0.99999 , respectively. To show five logarithmic decades of both positive and negative values, and a linear region where the zero crossings occur, the ordinate has been plotted proportional to $\sinh^{-1}(10^5 Z)$. The significance of $Z \rightarrow -1$ as $|\omega|$ becomes large is that the hole becomes "black", with all incident energy absorbed. The significance of a range of ω with Z positive is that waves in this range extract energy from the rotating hole, and come out "superradiantly amplified." (Převzatý popis a obrázek z [11])

1.2 Extrakce energie z černé díry

Na konci 60. let minulého století ukázali James M. Bardeen, Brandon Carter a Stephen Hawking, že pro černé díry platí specifické mechanické zákony [8]. Jedním z těchto zákonů je zákon rostoucího horizontu černé díry, tedy fakt, že velikost horizontu nemůže žádným nekvantovým jevem klesat.

Jacob Bekenstein uviděl analogii růstu horizontu s růstem entropie [18], jeho argument se však neshodl s pochopením, alespoň zprvu. Hlavním protiargumentem termodynamické teorie byla špatná představa toho, že černé díry nemohou vyzařovat. Jakékoliv těleso o nenulové teplotě by však zářit mělo. Naopak argument pro přijetí teorie byl, že spadne-li těleso do černé díry, neměla by se ztrácet entropie, černá díra by tedy měla mít svou entropii a tu při přijetí jakéhokoliv objektu zvýšit. Spor nakonec rozhodl Stephen Hawking ve prospěch Bekensteinovy představy, když ukázal, že díky kvantovým efektům v blízkosti horizontu může docházet k vyzařování energie černé díry – k vypařování černých děr. Za pomoci termodynamických zákonů pak Bekenstein dokonce ukázal [7], že lze rozptylem vlny úměrné $e^{im\varphi}e^{-i\omega t}$, kde φ je azimutální Boyer-Lindquistova souřadnice, z rotující nabitě černé díry extrahovat rotační elektromagnetickou energii, a to za splnění speciální podmínky

$$\omega - m\Omega_H < 0,$$

kde Ω_H je úhlová rychlost vnějšího horizontu $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$.

Spolu s termodynamickými argumenty byla extrakce energie potvrzena i řešením perturbačních rovnic pro pole v okolí černých děr. Saul A. Teukolsky v roce 1972 [19] ukázal shrnutí chování Kerrova prostoročasu s lehkými perturbacemi. V následujících dvou letech vydal spolu s Williamem Pressem trojici článků [9, 10, 11], v nichž nejprve ukazuje elegantní odvození vlnové rovnice pro gravitační a elektromagnetické vlny za pomoci Newman-Penroseova (NP) tetradového formalismu a následně ukazuje, že Kerrova černá díra je stabilní vůči takovým perturbacím. V posledním zmíněném článku pak spolu s Pressem ukazují interakci Kerrovy černé díry se zářením. Zesílení rozptylem, které získali pro elektromagnetickou vlnu, je ukázáno na obrázku 1.1. Jejich postup částečně shrnujeme v kapitole 5.

1.3 Membránové paradigma

Spolu s astronomickými objevy přichází vždy i mnoho inspirace pro astrofyziky a ve 20. století nově i pro relativisty, kteří se stali nedílnou součástí astrofyziky ve chvíli, kdy se černé díry přijaly jako existující a pozorované objekty našeho vesmíru.

„In theoretical physics a special role is played by the diagrams, pictures, mental images, and descriptive phrases that accompany our equations,“ píše Richard H. Price a Kip S. Thorne v první kapitole své knihy Membránové paradigma [20]. V knize popisují jednu z takových mnemotechnických pomůcek pro chápání černých děr, kterým membránové paradigma je.

Jeden z klíčových článků pro membránové paradigma [12] vyšel v lednu roku 1978. Thibault Damour v něm popsal způsob, jak se na černou díru dívat jako na vodivou membránu, po jejímž povrchu teče proud. Damour uvažuje čtyřproud J^a , který se zachovává napříč celým prostoročasem. Určitý náboj či proud může skončit pod horizontem černé díry. Pokud nás ale nezajímá, co se v oblasti $r < r_+$ děje, lze situaci vyřešit fenomenologicky přidáním plošného čtyřproudu tekoucího na horizontu. Jak sám v článku píše: „Matematicky je problém následující: Se zadaným proudem $J^a(v, r, \theta, \bar{\varphi})$ takovým, že $J^a_{;a} = 0$, najdeme komplementární proud j^a s nosičem na $r = r_+$ takovým, že $J^a Y(r - r_+) + j^a$ se zachovává, kde Y je Heavisideova funkce.“ Výsledkem Damourova snažení při zavedení plošných proudů je vztah

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_\perp = 4\pi(\mathbf{K} - \sigma\mathbf{V}),$$

kde \mathbf{K} je plošný proud, σ zavedená plošná hustota náboje a \mathbf{V} je rychlost horizontu, kterému je přiřknut odpor $4\pi \approx 377 \Omega$.

Pokud tedy lze zkonstruovat tvar plošného Ohmova zákona na vnějším horizontu $r = r_+$, je možné dívat se na procesy, k nimž dochází při rozptylu elektromagnetického vlnění, jako na procesy disipativní. Právě disipace je základním kamenem superradiace. Pokud to tak je, musí existovat nějaký tvar Jouleova zákona pro rotující černou díru, který bude vyjadřovat změnu výkonu rozptýlené oproti dopadající vlně, a tento rozdíl musí souviset se změnou rotace černé díry.

V kapitole VI článku [12] Damour nalézá tento tvar Jouleova zákona

$$\dot{Q} = \int_H 4\pi |\mathbf{K} - \sigma \mathbf{V}|^2 dA$$

kde $\dot{Q} = \dot{M} - \Omega \dot{S}_z$ a $\dot{S}_z = dS_z/dv$ je tok momentu hybnosti (v je časová souřadnice spadající do Kerrových souřadnic, jež článek [12] využívá).

Dále Damour formuluje Ohmův zákon ve tvaru $A_v(\theta_2) - A_v(\theta_1) = RI$, kde I je celkový proud a rozdíl ΔA_v zde má charakter napětí mezi dvěma body na horizontu. Díky tomu je možné najít celkový výkon dodaný do černé díry $\dot{M} = RI^2$.

Membránové paradigma tedy jako mnemotechnická pomůcka dovoluje představovat si nejasný, nedisipativní proces superradiace na rotující černé díře jako disipativní proces roztyplu na vodivé membráně, kde k disipaci dochází. To vše platí jen díky tomu, že každý bod na horizontu rotuje stejnou úhlovou rychlostí Ω_H , a chová se tak jako tuhá membrána – okomentováno v rešeršní kapitole 5.

1.4 Současná doba

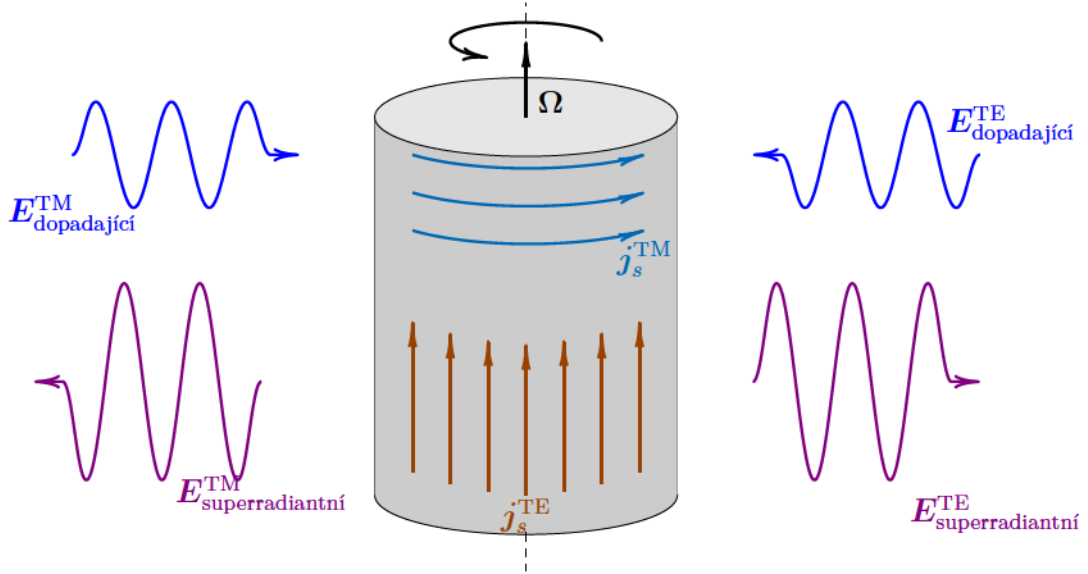
Superradiací se dnes zabývá především Vitor Cardoso a Richard Brito, kteří společně s Paolem Panim vydali knihu [14], kde se diskutují všemožné typy superradiantních efektů. Od těchto autorů lze nalézt více publikací k danému tématu, za zmínku stojí pojednání o nestabilitách černých děr [21, 22] či dizertační práce Richarda Brita [23] zabývající se mimo jiné hmotnými bosonovými poli se spinem 2.

V knize [14] ukázali výše zmínění autoři, jak lze řešit rozptyly mnoha typů polí. Jev elektromagnetické superradiace, který je ústředním tématem této práce, je pouze jedním z procesů extrakce energie. Superradiaci lze pozorovat i pro skalární a gravitační pole, a to nejen pro rotující objekty. Zajímavostí je, že superradiace se objevuje pro bosonová pole, nikoliv pro fermionová [14]. Řešení výše zmíněné Teukolskeho rovnice tak povede na superradiaci pro skalární, elektromagnetické a gravitační vlny, nikoliv pro pole neutrinová či elektronová.

2. Rozptyl na rotujícím válci

Rozptyl elektromagnetické vlny na rotujícím objektu je demonstrován v této kapitole nalezením refrakčních koeficientů intenzity a výkonu pro rotující válcovou slupku o konstantní vodivosti.

Rozptyl TE vlny byl již rozebrán v bakalářské práci [13], a proto zde nebude podrobně rozpracován, výsledky budou shrnuty v prvních dvou sekcích.



2.1 Vlny ve válcových souřadnicích

Úmluva: Rychlost světla ve vakuu napříč kapitolou 2 pokládáme rovnou jedné, $c = 1$, proto v textu platí $k = \omega/c = \omega$, také $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2 = 1$.

Vlnovou rovnici pro elektromagnetické potenciály lze separovat ve válcových souřadnicích (ρ, φ, z) . Aby měly rovnice pro potenciály vlnový tvar

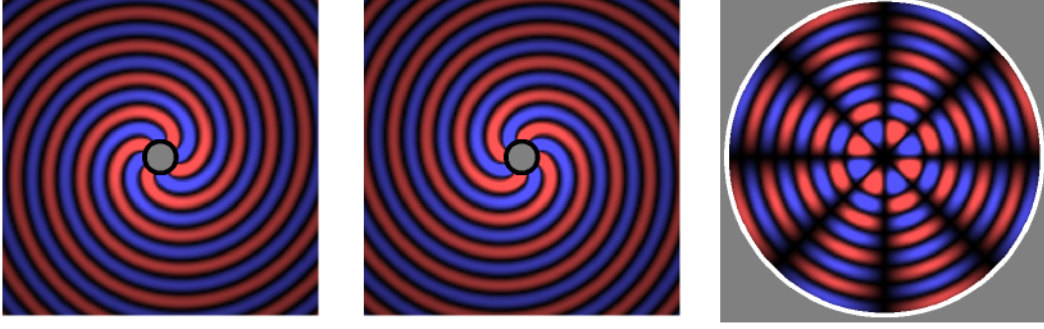
$$\square \mathbf{A} = 0, \quad \square \Phi = 0, \quad (2.1)$$

či zkráceně $\square A^\mu = 0$, musí být splněna harmonická kalibrační podmínka

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0 \partial_t \Phi = 0. \quad (2.2)$$

Vlnové rovnice ve vybraných souřadnicích [24] lze řešit pomocí separace proměnných. Pro jednoduchost zavedeme stejně jako v práci [13] vektorový potenciál $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_z$, který je tečný k povrchu rotujícího válce a vede na TE polarizované záření. Z vlnových rovnic a kalibrační podmínky pak automaticky plyne

$$\Phi = 0, \quad A = \sum_m b_m(\omega r) e^{i(m\varphi - \omega t)}, \quad (2.3)$$



Obrázek 2.1: Na obrázcích je znázorněno elektrické pole TE vlny či magnetické pole TM vlny. Na levém obrázku vidíme přicházející vlnu, uprostřed je vlna odcházející a pravý obrázek ukazuje stojaté vlnění uvnitř válce. Obrázek je vyhotoven pro $m = 4$.

kde b_m je libovolné řešení Besselovy rovnice [13]. Elektromagnetické pole lze získat

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.5)$$

či ve 4D zápisu $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$.¹ Druhou polarizaci TM lze získat transformací

$$\mathbf{E} \mapsto c\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \mapsto -\frac{1}{c}\mathbf{E}, \quad (2.6)$$

díky níž $\mathbf{B} \sim \mathbf{e}_z$. Výsledné elektromagnetické pole bude mít tvar

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \sum_m \left(i\omega f_m^{\text{TE}}(\rho) \mathbf{e}_z - \frac{im}{\rho} f_m^{\text{TM}}(\rho) \mathbf{e}_\rho + \frac{df_m^{\text{TM}}}{d\rho} \mathbf{e}_\varphi \right) e^{i(m\varphi - \omega t)}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \sum_m \left(i\omega f_m^{\text{TM}}(\rho) \mathbf{e}_z + \frac{im}{\rho} f_m^{\text{TE}}(\rho) \mathbf{e}_\rho - \frac{df_m^{\text{TE}}}{d\rho} \mathbf{e}_\varphi \right) e^{i(m\varphi - \omega t)}, \quad (2.8)$$

kde $f_m^{\text{TE}}, f_m^{\text{TM}}$ jsou radiální profily TE a TM polarizovaných vln. Rozvojem funkcí

$$H_m^{(1)}(x) \stackrel{0}{\sim} H_m^{(2)}(x) \stackrel{0}{\sim} \frac{1}{x^m}, \quad J_m(x) \stackrel{0}{\sim} x^m, \quad (2.9)$$

$$H_m^{(1/2)}(x) \stackrel{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{ix}, \quad H_m^{(2)}(x) \stackrel{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-ix}, \quad J_m(x) \stackrel{\infty}{\sim} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} - x \right] \quad (2.10)$$

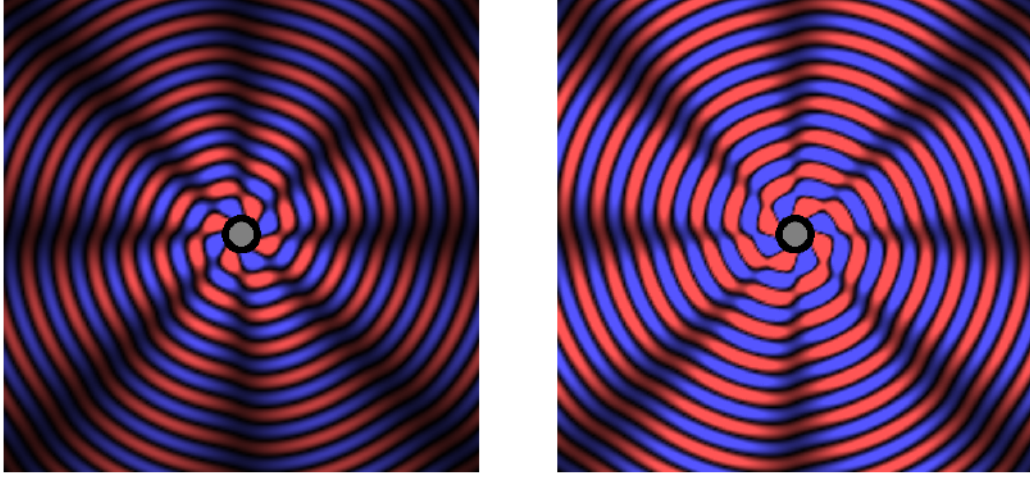
lze vidět, že $H_m^{(2)}$, resp. $H_m^{(1)}$ odpovídá pro $\omega > 0$ přicházející, resp. odcházející vlně a jediné regulární řešení v počátku souřadné soustavy je stojaté vlnění J_m . V dodatku B.1 je navíc diskutováno i další řešení, kdy $A \sim e^{iqz}$.

Grafické znázornění z -ové složky elektrického TE či magnetického TM pole je vidět na obrázcích 2.1 a 2.2.

2.2 Rovnice na rotujícím rozhraní

Pokud se elektromagnetické záření rozptyluje na válci o plošné vodivosti σ_s , musí splnit Maxwellovy rovnice nejen ve vakuu, ale také na rozhraní vnitřku

¹Kovariantní derivace zde značí křivost souřadnic, nikoliv křivost prostoru.



Obrázek 2.2: Pole vně válce se skládají. Na levém obrázku lze vidět pole, pokud válec absorbuje záření, pravý obrázek je naopak pole, pokud nastává superradiace. Hodnoty jsou zde nadsazené (poměry odchozí:příchozí jsou 1:1.9 a 1.9:1), aby byl efekt poznatelný oproti stojatému vlnění.

a vnějšku válcové slupky. Tyto rovnice mají po složkách tvar [13]

$$\begin{cases} [E_\rho] = \gamma(\rho_s + \sigma_s v E_\varphi)/\epsilon_0, \\ [E_\varphi] = 0, \\ [E_z] = 0, \end{cases} \quad \left\| \begin{cases} [B_\rho] = 0, \\ [B_\varphi] = \mu_0 \sigma_s \gamma (E_z - v B_\rho), \\ [B_z] = -\mu_0 \gamma (\sigma_s E_\varphi + v \rho_s). \end{cases} \right. \quad (2.11)$$

kde $\gamma = (1 - \Omega^2 a^2)^{-1/2}$ je Lorentzův faktor a $v = \Omega a$ je povrchová rychlost válce o poloměru a , který rotuje s úhlovou rychlostí $\Omega = \Omega e_z$. V aproximaci pomalých rychlostí $\Omega a \ll c$ lze psát $\gamma \approx 1$ a v této aproximaci z rovnic taktéž vymizí všechny členy, v nichž se vyskytuje $v\gamma$.

Výhodné je ze skoku $[E_\rho]$ vyjádřit plošnou hustotu náboje ρ_s , která se na válcové slupce rozprostírá,

$$\rho_s = \left(\frac{\epsilon_0}{\gamma} [E_\rho] - v \sigma_s E_\varphi \right) \quad (2.12)$$

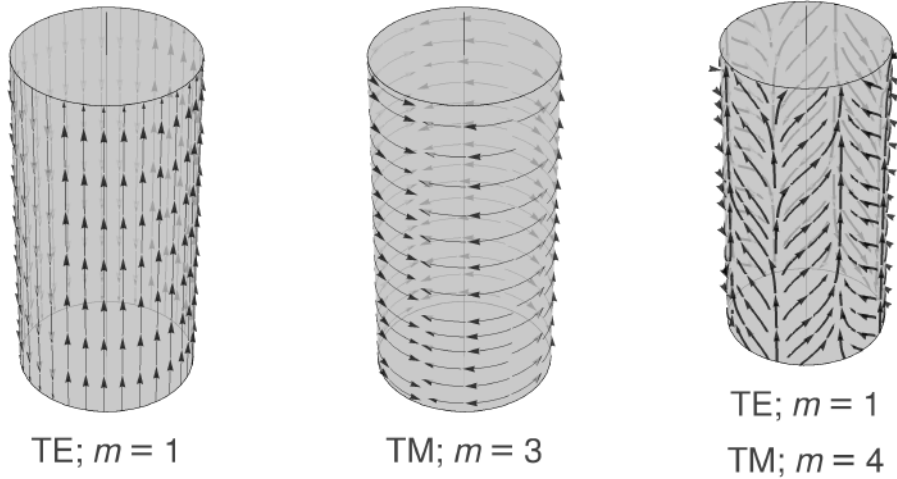
a následně dosadit do rovnice pro skok $[B_z]$

$$[B_z] = -\mu_0 \gamma \left(\sigma_s E_\varphi + \frac{v}{\gamma} [E_\rho] - v^2 \sigma_s E_\varphi \right) = -v [E_\rho] - \mu_0 \frac{\sigma_s}{\gamma} E_\varphi. \quad (2.13)$$

Elektromagnetické pole složené ze všech TE i TM módů

$$\mathbf{E} = \sum_m \left[- \left(\frac{im}{\rho} f_m^{\text{TM}}(\rho) e_\rho - \frac{df_m^{\text{TM}}}{d\rho}(\rho) e_\varphi \right) + i\omega e_z f_m^{\text{TE}}(\rho) \right] e^{i(m\varphi - \omega t)} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B} = \sum_m \left[\left(\frac{im}{\rho} f_m^{\text{TE}}(\rho) e_\rho - \frac{df_m^{\text{TE}}}{d\rho}(\rho) e_\varphi \right) + i\omega e_z f_m^{\text{TM}}(\rho) \right] e^{i(m\varphi - \omega t)} \quad (2.15)$$



Obrázek 2.3: Na rotujícím válci se generuje plošný proud, který je úměrný $\cos(m\varphi)$. Tečné složky elektrického pole jsou pro TE vlnu nenulové ve směru z a pro TM ve směru φ , jak je vidět. Efekt členu $\rho_s v$ vymizí pro TE vlnu ($\rho_s = 0$) a pro TM nezmění směr, na obrázku je tak znázorněný celkový proud na povrchu válce. Pro dopadající TE vlnu je vidět, že m má skutečně význam period v azimutálním směru, neboť toto číslo udává počet regionů, kde proud teče ve směru a proti směru osy z . Analogicky pro TM vlnu ve směru e_φ . Na posledním obrázku na válec dopadá vlna složená z TE $\ell = 1$ a TM $\ell = 4$.

lze dosadit do rovnice na rozhraní (2.11) a získat sérii rovnic pro neznámé koeficienty $\beta^{\text{TE}}, \gamma^{\text{TE}}, \beta^{\text{TM}}, \gamma^{\text{TM}}$ se známým vstupem dopadajících TE i TM vln $\alpha^{\text{TE}}, \alpha^{\text{TM}}$.

Při rozptylu se bude generovat plošný proud na povrchu válce. Pro různé dopadající vlny je ukázán na obrázku 2.3.

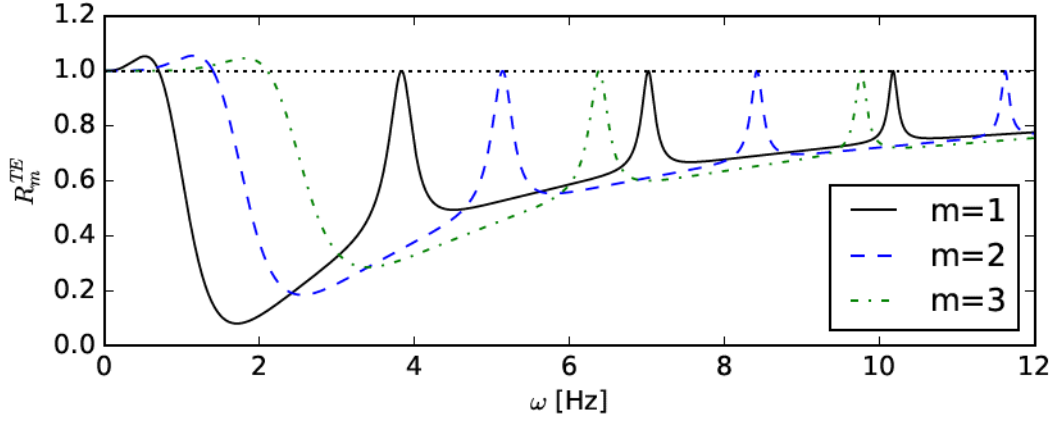
2.2.1 Dopadající TE polarizovaná vlna

Tato část byla náplní práce [13], proto přejaté výsledky v této části nejsou podrobně zdůvodněny. Rovnice (2.11) nemísí TE a TM polarizace, jak lze snadno nahlédnout.

Pro TE polarizaci se nemísí ani jednotlivé módy m . Relativní amplitudové koeficienty odrazu a vnitřní vlny jsou

$$\frac{\beta_m^{\text{TE}}}{\alpha_m^{\text{TE}}} = \frac{\Delta - H_m^{(2)}(\omega a) J_m(\omega a)}{\Delta + H_m^{(1)}(\omega a) J_m(\omega a)} \quad \text{pro} \quad \Delta = \frac{2}{\pi \sigma_s \gamma \mu_0 \omega a} \cdot \frac{\omega}{\omega - m\Omega}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\gamma_m^{\text{TE}}}{\alpha_m^{\text{TE}}} = \frac{4}{2 + \Delta^{-1} J_m(ak) H_m^{(1)}(ak)}. \quad (2.17)$$



Obrázek 2.4: Na rotující válec dopadá elektromagnetická vlna TE polarizace. Odráží se a relativní poměr výkonů R_m^{TE} je v určité oblasti větší než jedna, tedy vlna odnáší energii, kterou extrahovala z rotujícího válce.

Relativní odcházející výkon je dán pro každou parciální vlnu

$$R_m^{\text{TE}} = \frac{\langle S_r^{\text{odcházející}} \rangle}{\langle S_r^{\text{přicházející}} \rangle} = \left| \frac{\beta_m^{\text{TE}}}{\alpha_m^{\text{TE}}} \right|^2, \quad (2.18)$$

kde je výhodnější definovat tento výkon za pomoci středních hodnot, neboť tím vypadnou příspěvky od stojatých vln uvnitř válce. Podmínka na to, aby $R_m^{\text{TE}} > 1$,

$$\omega - m\Omega < 0, \quad (2.19)$$

se nazývá Misner-Zel'dovičova podmínka existence superradiace při rozptylu vlny dopadající na rotující válec. Energetická bilance má tvar

$$|\beta_m^{\text{TE}}|^2 = 1 - \pi a \gamma \sigma_s (\omega - m\Omega) |\gamma_m^{\text{TE}}|^2 |J_m(\omega a)|^2, \quad (2.20)$$

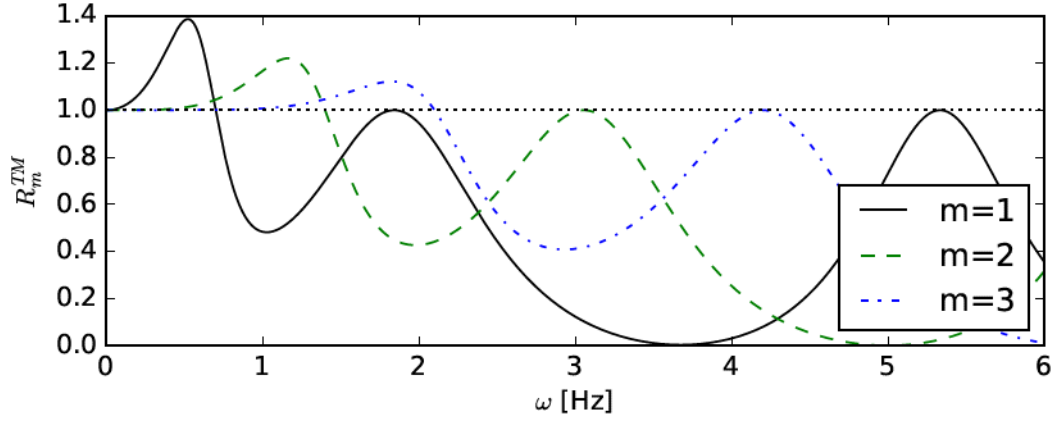
odkud lze přímo vyčíst, že $|\beta_m^{\text{TE}}|^2 > 1 \Leftrightarrow \omega - m\Omega < 0$. Tento relativní odražený výkon R_m^{TE} je znázorněn na obrázku 2.4.

2.2.2 Dopadající TM polarizovaná vlna

Dosazením TM pole do rovnic (2.11) lze uvážit, že skok jedné tečné složky $[E_z]$ elektrického pole je automaticky splněn, neboť tato složka je pro TM polarizaci nulová. Stejně tak skok radiální složky pole magnetického. Nulová je i složka B_φ , a tudíž i její skok musí být nulový. V rovnici pro skok $[B_\varphi]$ se navíc objevuje E_z a B_φ , které jsou nulové, rovnice je také automaticky splněna.

Jediné rovnice přinášející nějakou informaci na rozhraní pro rozptyl TM vlny jsou rovnice

$$[E_\varphi] = 0 \quad \text{a} \quad [B_z] = -\frac{\mu_0 \sigma_s}{\gamma} E_\varphi - v [E_\rho], \quad (2.21)$$



Obrázek 2.5: Na válec rotující s povrchovou rychlostí $v = \Omega a = 0.7c$ dopadá elektromagnetická vlna TM polarizace. Stejně jako u rozptylu TE vlny je pro každou z vln typická oblast superradiance, v níž platí $\omega < m\Omega$. Na první pohled je zřejmé, že zesílení vlny je nejsilnější pro mód $m = 1$.

pro obecnou superpozici všem TM módů lze rovnice upravit do tvaru

$$\sum_m \left[\frac{df_m}{d\rho} \right] e^{im\varphi} = 0 \quad \text{a} \quad \sum_m (\omega - m\Omega) [f_m] e^{im\varphi} = i \frac{\mu_0 \sigma_s}{\gamma} \sum_m \frac{df_m}{d\rho}(a) e^{im\varphi}. \quad (2.22)$$

Stejně jako u TE vlny lze nahlédnout, že jednotlivé módy se nemísí, soustava je v tomto smyslu separovatelná a stačí řešit rovnice

$$\left[\frac{df_m}{d\rho} \right] = \alpha_m^{\text{TM}} \frac{dH_m^{(2)}}{d\rho}(\omega a) + \beta_m^{\text{TM}} \frac{dH_m^{(1)}}{d\rho}(\omega a) - \gamma_m^{\text{TM}} \frac{dJ_m}{d\rho}(\omega a) = 0, \quad (2.23)$$

$$[f_m] = \alpha_m^{\text{TM}} H_m^{(2)}(\omega a) + \beta_m^{\text{TM}} H_m^{(1)}(\omega a) - \gamma_m^{\text{TM}} J_m(\omega a) = i\kappa \gamma_m^{\text{TM}} \frac{dJ_m}{d\rho}(\omega a), \quad (2.24)$$

kde $\kappa = \frac{\mu_0 \sigma_s}{\gamma} \frac{1}{\omega - m\Omega}$. Rešením rovnic je relativní amplitudový koeficient odražené vlny

$$\frac{\beta_m^{\text{TM}}}{\alpha_m^{\text{TM}}} = \frac{\Delta - J'_m(\omega a) H_m^{(2)'}(\omega a)}{\Delta + J'_m(\omega a) H_m^{(1)'}(\omega a)} \quad \text{pro} \quad \Delta = \frac{2\gamma}{\pi \sigma_s \mu_0 \omega a} \cdot \frac{\omega - m\Omega}{\omega}. \quad (2.25)$$

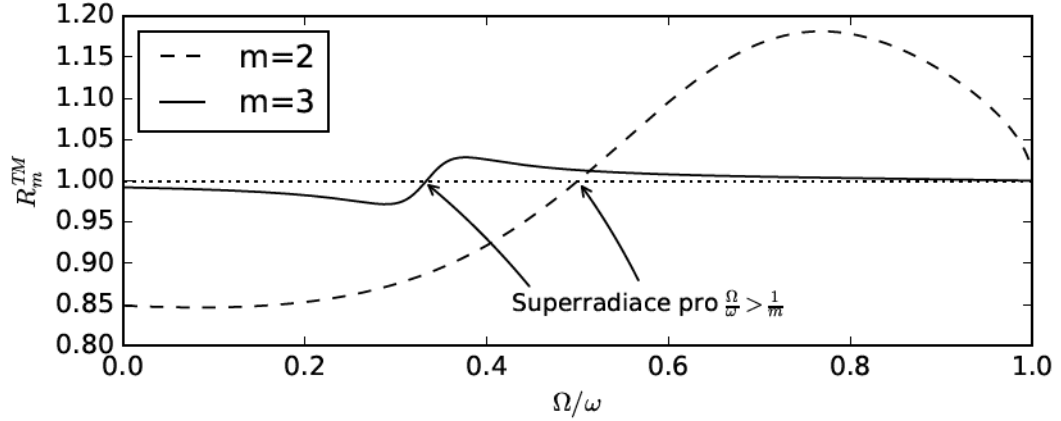
Na rozdíl od TE vln zde vyšly derivace Besselových a Hankelových funkcí. Navíc v parametru Δ je bezrozměrný člen $\omega/\gamma(\omega - m\Omega)$ na mínus první oproti TE polarizaci.

U odraženého výkonu parciální vlny

$$R_m^{\text{TM}} = \left| \frac{\beta_m^{\text{TM}}}{\alpha_m^{\text{TM}}} \right|^2 \quad (2.26)$$

lze analogicky určit, že $R_m > 1$, právě když je splněna Misner-Zel'dovičova podmínka

$$\omega - m\Omega < 0, \quad (2.27)$$



Obrázek 2.6: Závislost odrazu výkonu na podílu Ω/ω dává jasný výsledek. Superradiantní rozptyl nastává ve chvíli, kdy $\Omega/\omega > 1/m$, jak ukazuje graf.

průběh relativního výkonu je znázorněn na obrázku 2.5. Superradiance pro závislost na podílu Ω/ω je znázorněna na 2.6.

2.3 Energetická bilance TM vlny

2.3.1 Skok Poyntingova vektoru

Ve zmiňované bakalářské práci byla rozebrána energetická bilance při rozptylu cylindrické TE vlny, stejný vztah je proto potřeba nalézt i pro TM vlnu. Poyntingův teorém na rozhraní nám říká, že

$$\langle \mathbf{n} \cdot [\mathbf{S}] \rangle = -\langle \text{Re}[j_s] \cdot \text{Re}[\mathbf{E}] \rangle = \langle P_J \rangle, \quad (2.28)$$

odkud lze zjistit střední hodnotu výkonu mechanických sil za pomoci skoku radiální složky Poyntingova vektoru

$$\langle P_J \rangle = \langle [S_\rho] \rangle = \mathbf{n} \cdot \langle [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m] \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m^*] = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}[E_{\varphi,m} B_{z,m}^*]. \quad (2.29)$$

Nejprve diskutujeme vnitřní řešení. Střední hodnota radiální složky Poyntingova vektoru je zde nulová, neboť je úměrná $\text{Re}[iJ_m(\omega a)J'_m(\omega a)]$. Sbíhavá (+) a rozbíhavá (-) vlna dá příspěvek

$$\langle S_{\rho,m}^+ \rangle = -\frac{\omega}{2\mu_0} |\alpha_m^{\text{TM}}|^2 \text{Re} \left[i \frac{dH_m^{(2)}}{d(\omega\rho)}(\omega a) H_m^{(1)}(\omega a) \right], \quad (2.30)$$

$$\langle S_{\rho,m}^- \rangle = -\frac{\omega}{2\mu_0} |\beta_m^{\text{TM}}|^2 \text{Re} \left[i \frac{dH_m^{(1)}}{d(\omega\rho)}(\omega a) H_m^{(2)}(\omega a) \right] = -R_m^{\text{TM}} \langle S_\rho^+ \rangle, \quad (2.31)$$

reálná část ve střední hodnotě může být vyhodnocena za pomoci Wronskiánu. Pro zjednodušení zápisu $\omega\rho \equiv x$

$$\operatorname{Re} \left[i \frac{dH_m^{(1)}}{dx} H_m^{(2)} \right] = -\operatorname{Im} \left[\frac{dJ_m}{dx} J_m - \frac{dY_m}{dx} Y_m + i \left(\frac{dJ_m}{dx} Y_m - \frac{dY_m}{dx} J_m \right) \right] = \quad (2.32)$$

$$= \frac{dY_m}{dx} J_m - \frac{dJ_m}{dx} Y_m = \frac{2}{\pi\omega a}. \quad (2.33)$$

Výsledně tedy lze psát

$$\langle [S_{\rho,m}] \rangle = \langle S_{\rho,m}^+ \rangle + \langle S_{\rho,m}^- \rangle - 0 = \frac{R_m^{\text{TM}} - 1}{\pi\mu_0 a}. \quad (2.34)$$

Při superradiantním rozptylu je $R_m^{\text{TM}} > 1$ a $\langle [S_{\rho,m}] \rangle$ má kladnou hodnotu. Tomuto skoku je roven výkon mechanických sil (Jouleův výkon)

$$P_J = -\mathbf{j}_s \cdot \mathbf{E} = \frac{R_m^{\text{TM}} - 1}{\pi\mu_0 a}, \quad (2.35)$$

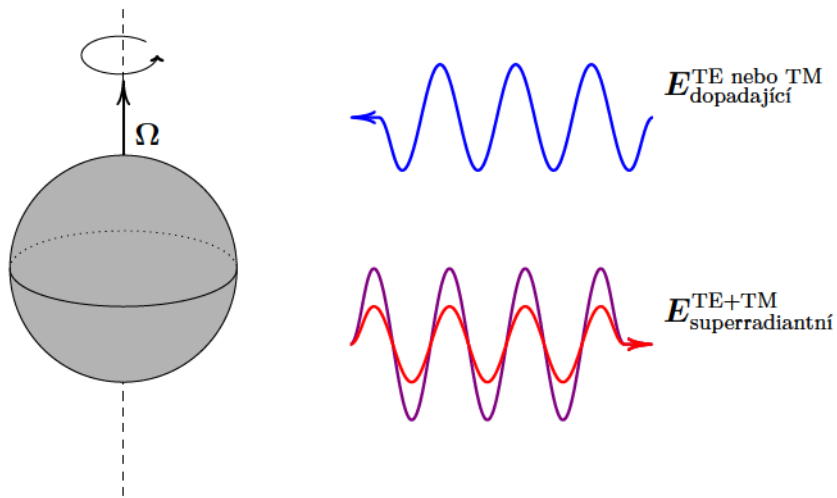
odkud je vidět, že $P_J > 0$ za předpokladu, že $\omega < m\Omega$, a systém tak předává energii vlně v podobě tepla. Tento disipativní proces je podstatou superradiace. Jouleův výkon přímo souvisí s momentem síly, který na rotující válec působí, $P_J = -\Omega M_z \simeq R_m^{\text{TM}} - 1$, odkud $M_z \simeq 1 - R_m^{\text{TM}}$. V případě superradiantního rozptylu je $M_z < 0$, což by odpovídalo brzdění válce. Vnější silou však tento efekt vyrovnáváme, aby úhlová rychlost byla konstantní a výše uvedené postupy měly jednoduchý tvar.

3. Rozptyl na sféře

Úmluva: V této kapitole je počítáno s obecnou rychlostí světla ve vakuu c . Až ke konci pro potřeby vykreslování výsledků je položena rovna jedné analogicky kapitole 2. Zavádí se také bezrozměrný parametr $\hat{r} = kr$, resp. $\delta = \sigma_s \mu_0 c$, který má význam škálovaného poloměru sféry, resp. bezrozměrné vodivosti povrchu.

Značení: Necht f je funkce, poté $\hat{f}(x) = xf(x)$. Platí $\hat{f}'(x) = f(x) + xf'(x)$.

Sférická slupka o poloměru a , jež rotuje s úhlovou frekvencí Ω , rozptyluje elektromagnetickou vlnu popsanou v dodatku B.2 (věta 13).



Fyzikální změnou oproti rozptylu na válcové slupce bude především mísení jednotlivých módů i polarizací při rozptylu. Samotná dopadající TE vlna se rozptýlí na superpozici TE i TM polarizovaných vln o různých módech.

Tato vlastnost vede k tomu, že rovnice je potřeba řešit numericky a podmínku superradiantního rozptylu lze určit pouze termodynamicky.

3.1 Superradiace a termodynamika

V této kapitole je ukázáno, jak vypadá rozptyl na rotující sféře. Dopadající parciální vlna se rozptýlí do mnoha módů. Kvůli tomuto efektu není možné získat přesnou podmínku na superradiantní rozptyl, neboť matematicky se jedná o úlohu invertování čtvercové matice s nekonečně řádky a sloupci.

Zde po vzoru Bekensteina [16] podejme termodynamický důkaz superradiace na rotujícím tělese, které je axiálně symetrické dle osy rotace. Dopadající vlny lze charakterizovat frekvencí ω a azimutálním číslem m , které udává počet period v rovině kolmé na osu rotace objektu [nebo v kvantové představě nese moment hybnosti ve směru osy rotace]. Dopadající výkon dP na úhlovém rozsahu $d\omega$ má

hodnotu

$$dP = I(\omega, m)d\omega, \quad (3.1)$$

kde faktor $I(\omega, m)$ je výkon nesený vlnou dané frekvence. Veškerý dopadající výkon se rozdělí na výkon P_a absorbovaný rotujícím objektem a výkon P_s rozptýlený. Zavedením koeficientu absorpce parciální vlny $a(\omega, m)$ lze psát

$$dP_a = a(\omega, m)I(\omega, m)d\omega, \quad (3.2)$$

$$dP_s = dP - dP_a = [1 - a(\omega, m)] I(\omega, m)d\omega, \quad (3.3)$$

kde se projeví axiální symetrie objektu, kdy a je závislá pouze na dopadající vlně. Pro ne-axiální symetrii jsou koeficienty dopadu závislé i na dalších parametrech.

Celková změna vnitřní energie objektu má tvar

$$\frac{dU_m}{dt} = \int dP_a - \epsilon = \int a(\omega, m)I(\omega, m) d\omega - \epsilon, \quad (3.4)$$

kde ϵ je koeficient spontánní emise výkonu. Změna momentu hybnosti ve směru osy z má tvar [16]

$$\frac{dJ_m^3}{dt} = \int \frac{m}{\omega} a(\omega, m)I(\omega, m) d\omega - J_e^3 \quad (3.5)$$

při spontánním úbytku časové hustoty momentu hybnosti J_e^3 . Přijaté teplo má tvar

$$\delta Q = dU - \delta W = dU - \Omega \cdot d\mathbf{J}. \quad (3.6)$$

Derivujme první termodynamický zákon dle času za konstantní teploty T , se zavedením entropie $dS = \delta Q/T$ nabývá první termodynamický zákon tvaru

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \left[\frac{dU_m}{dt} - \Omega \frac{dJ_m^3}{dt} \right] = \frac{1}{T} \int \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) a(\omega, m)I(\omega, m) d\omega - \frac{\epsilon - \Omega J_e^3}{T} \quad (3.7)$$

a druhý termodynamický zákon říká $dS/dt > 0$. V režimu, kdy je spontánní emise zanedbatelná, platí že lze zapsat časový průběh dodávaného tepla jen za pomoci integrálu

$$\frac{dS}{dt} \approx \frac{1}{T} \int \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) a(\omega, m)I(\omega, m) d\omega. \quad (3.8)$$

Jelikož integrál nabývá platnosti pro libovolný rozsah frekvencí, na jejichž výběru nezávisí mikroskopické fyzikální zákony, musí být nutně integrand kladný. Koeficient neseného výkonu $I(\omega, m)$ je kladný vždy, proto platí

$$\left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) a(\omega, m) > 0. \quad (3.9)$$

S konfigurací $\omega < m\Omega$ pak musí být absorpční koeficient záporný, tudíž vlna svým rozptylem z objektu extrahuje energii. Tato podmínka se nazývá *Zel'dovičova podmínka rotační superradiace*.

Pokud by byla splněna podmínka $\omega = m\Omega$, vypadne integrál úplně a změna entropie bude dána pouze spontánní emisí

$$T \frac{dS}{dt} = \Omega J_e^3 - \varepsilon, \quad (3.10)$$

a tedy $\varepsilon - \Omega J_e^3 < 0$ pro libovolnou úhlovou rychlost. Odtud plyne $\varepsilon < \Omega J_e^3 \stackrel{0}{\rightarrow} 0$, pro koeficient platí $J_e^3 > \varepsilon/\Omega$. Na základě této představy uvažoval Zel'dovič analogii, kdy Kerrova černá díra musí spontánně vyzařovat energii a snižovat svůj moment hybnosti. V pozdější době se tato představa ukázala jako správná.

3.2 Rovnice na rozhraní

Maxwellovy rovnice na rozhraní rotující sféry o poloměru a úhlovou rychlostí $\Omega = \Omega e_z$ jsou odvozeny v dodatku B.4. Lze je zapsat ve skalární

$$\begin{aligned} [E_r] &= \gamma(\rho_s/\epsilon_0 + \mu_0\sigma_s v E_\phi), & [B_r] &= 0, \\ [E_\theta] &= 0, & [B_\theta] &= \mu_0\gamma(\sigma_s E_\phi + v\rho_s), \\ [E_\phi] &= 0, & [B_\phi] &= -\mu_0\sigma_s\gamma(E_\theta + vB_r) \end{aligned} \quad (3.11)$$

i vektorové podobě

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}] = \rho_s/\epsilon_0, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}] = c\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}] = 0, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{B}] = \gamma\mu_0\sigma_s (\mathbf{E}_\parallel + vB_r\mathbf{e}_\theta) + \gamma\mu_0\rho_s\mathbf{v}, \quad (3.14)$$

kde $\mathbf{v} = \Omega a \sin(\theta)\mathbf{e}_\phi$ je rychlost bodu na povrchu sféry. Ze skoku radiální složky elektrického pole lze získat plošnou hustotu náboje a plošný proud upravit do tvaru

$$\mathbf{j}_s = \gamma\sigma_s \left(\mathbf{E}_\parallel + vB_r\mathbf{e}_\theta + \frac{v^2}{c^2} E_\phi\mathbf{e}_\phi \right) + \frac{1}{\mu_0} \frac{v}{c^2} [E_r]\mathbf{e}_\phi. \quad (3.15)$$

3.3 Vlny na rozhraní

Řešení vlnové rovnice ve sférických souřadnicích je podrobněji popsáno v dodatku B.2. Kip Thorne ve svém článku [25] zavedl nové funkce, mezi nimi i vektorové sférické harmoniky, díky nimž lze zapsat obecné elektromagnetické pole

v podobě

$$\mathbf{E} = \sum_{\ell m} \left(f_{\ell}(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} - ic \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}} g_{\ell}(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} - ic \left(g'_{\ell}(\hat{r}) + \frac{g_{\ell}(\hat{r})}{\hat{r}} \right) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \right) e^{-i\omega t}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\ell m} \left(g_{\ell}(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} + \frac{i}{c} \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}} f_{\ell}(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} + \frac{i}{c} \left(f'_{\ell}(\hat{r}) + \frac{f_{\ell}(\hat{r})}{\hat{r}} \right) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \right) e^{-i\omega t}, \quad (3.17)$$

kde $\mathbf{Y}_{\ell m}^a$ jsou vektorové sférické harmoniky (dodatek A.4) a pro funkce f_{ℓ}, g_{ℓ} platí

$$f_{\ell}(r) = \begin{cases} \alpha_{\ell m} h_{\ell}^{(2)}(\hat{r}), & \text{sbíhavá TE vlna,} \\ \beta_{\ell m} h_{\ell}^{(1)}(\hat{r}), & \text{rozbíhavá TE vlna,} \\ \gamma_{\ell m} j_{\ell}(\hat{r}), & \text{stojatá TE vlna,} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$g_{\ell}(r) = \begin{cases} A_{\ell m} h_{\ell}^{(2)}(\hat{r}), & \text{sbíhavá TM vlna,} \\ B_{\ell m} h_{\ell}^{(1)}(\hat{r}), & \text{rozbíhavá TM vlna,} \\ G_{\ell m} j_{\ell}(\hat{r}), & \text{stojatá TM vlna.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Rovnice s nulovou pravou stranou (3.13) lze projekcí na elektrické a magnetické vektorové harmoniky (věta 6) převést na tvar

$$[f_{\ell}] = 0, \quad \left[\frac{d\hat{g}_{\ell}}{d\hat{r}} \right] = 0, \quad (3.20)$$

a zůstává tak pouze rovnice pro plošnou rotaci magnetického pole. Její projekce nyní probereme zvlášť pro stojící a rotující sféru.

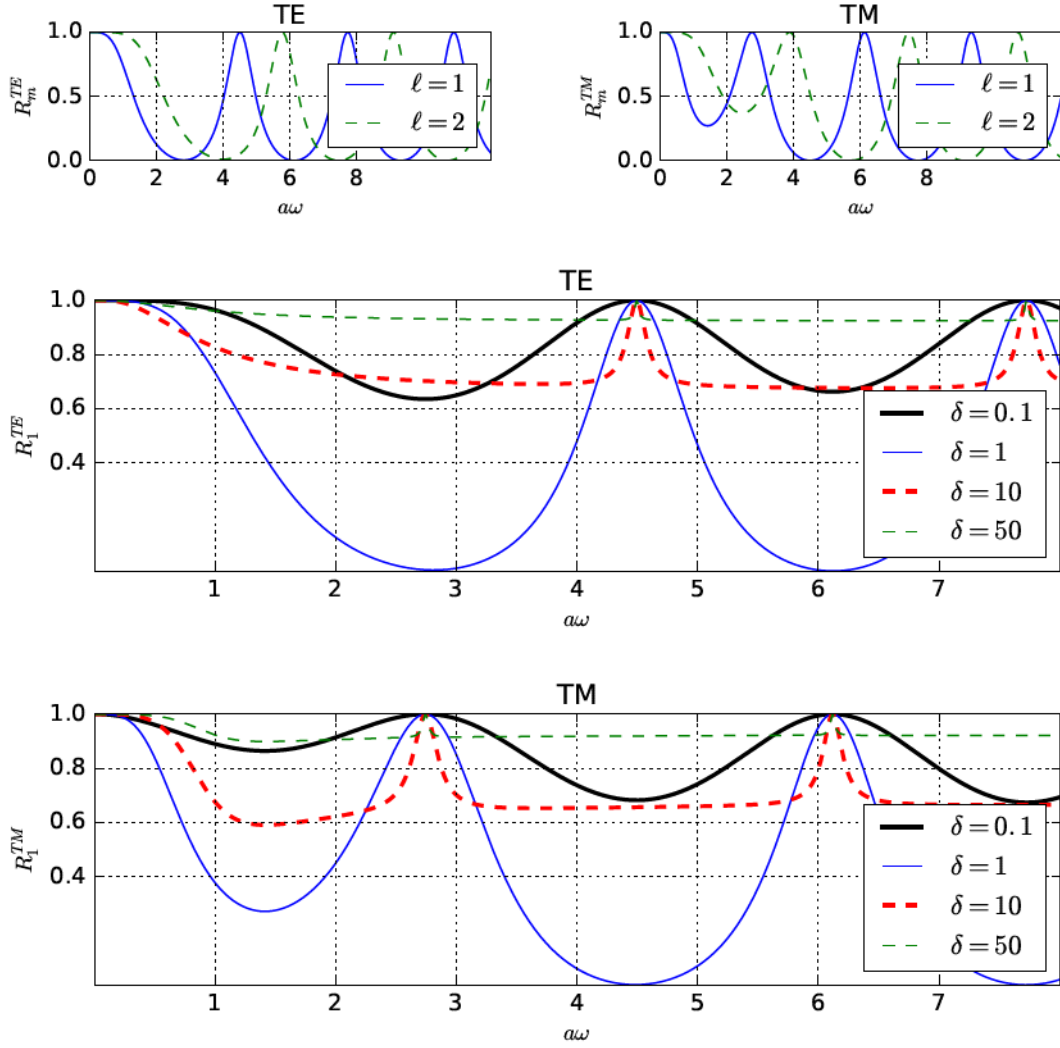
Koeficienty rozptylu pro stojící sféru jsou známy již dlouhou dobu. Kompletně popsal rozptyl na stojící sféře Mie při svém zkoumání rozptylu záření na sférických částicích. Zajímavé zobecnění pro homogenní dielektrickou sféru lze najít např. v [26]. Řešení Maxwellových rovnic na rozhraní rotující sféry je analogický postup, který se ovšem z důvodu složitosti řešení v literatuře nevyskytuje.

3.4 Stojící sféra

Nejsnazším případem je volba $\Omega = 0$, kdy se sféra nepohybuje. Plošný proud na rozhraní nabývá triviálního tvaru $\mathbf{j}_s = \sigma_s^0 \mathbf{E}_{\parallel}$, skládá se tedy pouze z vodivostní části. Rovnici (3.14) lze opět projektovat na jednotlivé harmoniky

$$\int (\mathbf{n} \times [\mathbf{B}] - \mu_0 \sigma_s^0 \mathbf{E}_{\parallel}) \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^a d\Omega = 0, \quad (3.21)$$

přičemž index 0 u σ_s^0 symbolizuje nulovou rotaci. V následující kapitole pak zobecníme situaci na $\sigma_s = \sigma_s(\Omega)$, σ_s^0 je konstantní.



Obrázek 3.1: Koeficienty β_m, B_m jsou komplexní, poměry $R_m^{\text{TE}} = |\beta_m/\alpha_m|^2$, $R_m^{\text{TM}} = |B_m/A_m|^2$ jsou úměrné rozptýlenému výkonu. Pro rozptyl TE i TM vlny existují různé rezonanční frekvence, při nichž dochází k totálnímu odrazu. Tyto frekvence odpovídají rezonancím popsaným v dodatku B.5.

Díky ortogonalitě vektorových harmonik lze rovnice na rozhraní zapsat v elegantním tvaru

$$\begin{aligned}
 [f_\ell] &= 0, & [\hat{g}'_\ell] &= 0, \\
 [f'_\ell] &= -i\delta^0 f_\ell, & [g_\ell] &= \frac{i\delta^0}{\hat{a}} g'_\ell(\hat{a}),
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

kde $\hat{a} = ka$ je škálovaný poloměr dané koule a $\delta^0 = \mu_0\sigma_s^0 c$ je bezrozměrná vodivost. Specifickou vlastností při rozptylu vlny na stojící sféře je, že rovnice směšují TE a TM polarizace, tedy v rovnicích nevystupují f_ℓ, g_ℓ provázaně. Tato vlastnost již při pomalé rotaci vymizí.

Hledaná vlna má radiální profil (3.18), (3.19) daný větou 14, řešením jsou potom koeficienty rozptýlené vlny β_ℓ, B_ℓ a koeficienty vnitřních řešení γ_ℓ, G_ℓ (řecká

písmena odpovídají TE polarizaci, kapitálky latinské abecedy TM)

$$\beta_\ell = \alpha_\ell \frac{1 - \delta^0 \hat{j}_\ell(\hat{a}) \hat{h}_\ell^{(2)}(\hat{a})}{1 + \delta^0 \hat{j}_\ell(\hat{a}) \hat{h}_\ell^{(1)}(\hat{a})}, \quad \gamma_\ell = \alpha_\ell \frac{2}{1 + \delta^0 \hat{j}_\ell(\hat{a}) \hat{h}_\ell^{(1)}(\hat{a})}, \quad (3.23)$$

$$B_\ell = A_\ell \frac{1 - \delta^0 \hat{j}'_\ell(\hat{a}) (\hat{h}_\ell^{(2)})'(\hat{a})}{1 + \delta^0 \hat{j}'_\ell(\hat{a}) (\hat{h}_\ell^{(1)})'(\hat{a})}, \quad G_\ell = A_\ell \frac{2}{1 + \delta^0 \hat{j}'_\ell(\hat{a}) (\hat{h}_\ell^{(1)})'(\hat{a})}. \quad (3.24)$$

Řešení je graficky zpracováno na obrázku 3.1.

Jak je vidět z řešení, existují takové poloměry, kdy dochází k totálnímu odrazu. Jedná se o případy, kdy nastává rezonance. Více lze nahlédnout v dodatku B.5.

Značení: Názvem ℓ -vektory je míněna posloupnost prvků $\vec{\beta} = \{\beta_\ell\}_\ell$. Endomorfismy na tomto vektorovém prostoru jsou ℓ -matice, které lze pro přehlednost zapisovat s následujícími pravidly:

- D_α – Diagonální ℓ -matice odpovídající α .
- T_α – Tridiagonální ℓ -matice odpovídající α .
- N_α – Obecnější ℓ -matice odpovídající α .

Formálně lze zapsat rovnice v ℓ -maticové podobě za pomoci S-matic D_i

$$\vec{\beta} = D_{\beta\alpha} \vec{\alpha}, \quad \vec{\gamma} = D_{\gamma\alpha} \vec{\alpha}, \quad \vec{B} = D_{BA} \vec{A}, \quad \vec{G} = D_{GA} \vec{A}. \quad (3.25)$$

3.5 Rotující sféra

Rotující sféra musí splnit rovnice na rozhraní, nyní s nenulovou povrchovou rychlostí $v = \Omega a \sin(\theta) e_\phi$. I v případě rotující sféry musí být splněno

$$[f_\ell] = 0 \quad \text{a} \quad \left[\frac{d\hat{g}_\ell}{d\hat{r}} \right] = 0, \quad (3.26)$$

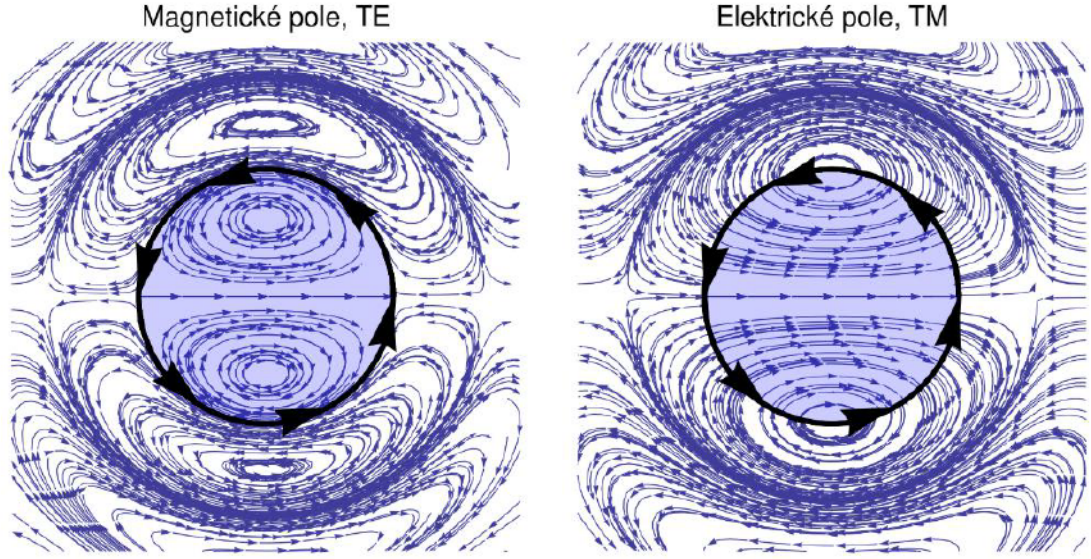
poslední z rovnic (3.14) je ovšem provázaná, vyskytuje se v ní mísení polarizací i módů. Tuto rovnici lze opět projektovat na magnetické, elektrické a radiální harmoniky. Integrály vzniklé projekcí obsahují Lorentzův faktor

$$\gamma = \left(1 - \frac{\Omega^2 a^2}{c^2} \sin^2(\theta) \right)^{-1/2}, \quad (3.27)$$

a integrace přes θ se tak stává obecně náročnou. Jednou z možností, jak integrace urychlit, je zavést vodivost takovým způsobem, aby tento člen vyrušila, v limitě nulových otáček se pak blížila hodnotě σ_s^0 , která je použita pro stojící sféru. Nejsnazší způsob, jak takovou vodivost zavést, je

$$\sigma_s = \sigma_s^0 / \gamma = \sigma_s^0 \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 a^2}{c^2} \sin^2(\theta)}. \quad (3.28)$$

Takto zavedené plošné vodivosti bude odpovídat i bezrozměrná vodivost $\delta = \delta^0 / \gamma$.



Obrázek 3.2: Na sféře (řez sférou je modře zabarvený, rotace naznačena šipkami) se generují proudy, které jsou důvodem disipace energie na rozhraní. Tyto plošné proudy jsou dány skokem magnetického pole. Na levém obrázku je patrné, že magnetické pole má na rozhraní rotující sféry v rovině (x,y) nulový skok. Vpravo je vidět elektrické pole pro TM vlnu, které je čistě radiální. Skok radiální složky udává hustotu plošného náboje na sféře. V tomto speciálním případě je ale pole spojitě, a jeho skok je tudíž nulový. Jelikož je pole čistě radiální, je $\mathbf{j}_s = \sigma_s \mathbf{E}_{\parallel} + \rho_s \mathbf{v} = 0$ a k disipaci opět nedochází. Obrázek je vyhotoven pouze pro jeden řez $z = 0$, avšak zde popsané vlastnosti platí obecně.

Projekce rovnic na radiální harmoniky dává triviálně $0 = 0$. Projekce na elektrické a magnetické pak vede na rovnice (odvozeno v dodatku B.6)

$$\begin{aligned} \left[\frac{df_\ell}{d\hat{r}} \right] &= -i\delta^0 \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) j_\ell - c \frac{\Omega}{\omega} \sum_{\ell'} \frac{\ell'(\ell'+1)}{\ell(\ell+1)} [g_\ell] \mathcal{I}_{\ell'm}^{\ell'm} + \\ &+ \frac{\mu_0 \sigma_s^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} \left(f_{\ell'} K_{\ell'm}^{\ell'm} + \frac{mc}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_{\ell'}}{d\hat{r}} \mathcal{I}_{\ell'm}^{\ell'm} \right), \quad (3.29) \\ (\omega - m\Omega) [g_\ell] &= \frac{i\delta^0 \omega}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_\ell}{d\hat{r}} - \frac{i\Omega\delta^0}{c} \sum_{\ell'} \frac{\ell'(\ell'+1)}{\ell(\ell+1)} f_{\ell'} \mathcal{I}_{\ell'm}^{\ell'm} - \\ &- \frac{\mu_0 \sigma_s^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} \left((f_{\ell'} \mathcal{I}_{\ell'm}^{\ell'm}) + \frac{im^2 c}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_{\ell'}}{d\hat{r}} \right) \quad (3.30) \end{aligned}$$

za využití integrálů

$$\mathcal{I}_{\ell'm}^{\ell'm} = \int d\Omega \left(\sin(\theta) Y_{\ell'm} \overline{\partial_\theta Y_{\ell'm}} \right), \quad K_{\ell'm}^{\ell'm} = \int d\Omega \left(\sin^2(\theta) \partial_\theta Y_{\ell'm} \overline{\partial_\theta Y_{\ell'm}} \right). \quad (3.31)$$

V tomto tvaru jsou rovnice příliš dlouhé a nepřehledné. Struktura rovnic napovídá, že by bylo výhodnější zapsat je v maticovém tvaru

$$\mathbf{N}_\alpha \vec{\alpha}_m + \mathbf{N}_\beta \vec{\beta}_m = \mathbf{T}_A \vec{A}_m + \mathbf{T}_B \vec{B}_m, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{D}_A \vec{A}_m + \mathbf{D}_B \vec{B}_m = \mathbf{T}_\alpha \vec{\alpha}_m + \mathbf{T}_\beta \vec{\beta}_m. \quad (3.33)$$

Každou z matic lze rozdělit na její příspěvek od pomalé (P) rotace a relativistickou korekci (R)

$$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha^P - \mathbf{N}_\alpha^R, \quad \mathbf{N}_\beta = \mathbf{D}_\beta^P - \mathbf{N}_\beta^R, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{T}_A = \mathbf{T}_A^P + \mathbf{T}_A^R, \quad \mathbf{T}_B = \mathbf{T}_B^P + \mathbf{T}_B^R, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{D}_A = \mathbf{D}_A^P + \mathbf{D}_A^R, \quad \mathbf{D}_B = \mathbf{D}_B^P + \mathbf{D}_B^R, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_\alpha^P - \mathbf{T}_\alpha^R, \quad \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_\beta^P - \mathbf{T}_\beta^R, \quad (3.37)$$

tvary jednotlivých matic je možné najít v dodatku B.7.3. Odvození těchto matic a příslušné zavedení šipkových vektorů je podáno v dodatcích B.7.1 a B.7.2. Jedná se o matice $\infty \times \infty$ a formálně je lze vyřešit pro $\vec{\beta}, \vec{B}$, tedy koeficienty odražených výkonů TE a TM polarizací elektromagnetických vln. Toto formální řešení

$$\vec{\beta} = -\mathbf{N}_1^{-1} \left(\mathbf{N}_2 \vec{\alpha}_m - \mathbf{T}_3 \vec{A}_m \right) \quad (3.38)$$

$$\vec{B} = \mathbf{D}_B^{-1} \left(\mathbf{T}_\alpha \vec{\alpha}_m + \mathbf{T}_\beta \vec{\beta}_m - \mathbf{D}_A \vec{A}_m \right), \quad (3.39)$$

kde jsou pro přehlednost zavedeny nové matice

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_\beta - \mathbf{T}_B \mathbf{D}_B^{-1} \mathbf{T}_\beta, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_\alpha - \mathbf{T}_B \mathbf{D}_B^{-1} \mathbf{T}_\alpha, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_A - \mathbf{T}_B \mathbf{D}_B^{-1} \mathbf{D}_A, \quad (3.40)$$

však není pro počítání koeficientů odražených vln příliš užitečné, neboť je potřeba dělat inverzi nediagonálních matic nekonečné dimenze.

Speciálním případem je limita $\Omega \rightarrow 0$, kdy všechny matice mimo diagonálních matic pomalé transformace vymizí. Lze tak získat dvě separované rovnice

$$\mathbf{D}_\alpha^P|_{\Omega=0} \vec{\alpha}_m + \mathbf{D}_\beta^P|_{\Omega=0} \vec{\beta}_m = 0, \quad \mathbf{D}_A^P|_{\Omega=0} \vec{A}_m + \mathbf{D}_B^P|_{\Omega=0} \vec{B}_m = 0. \quad (3.41)$$

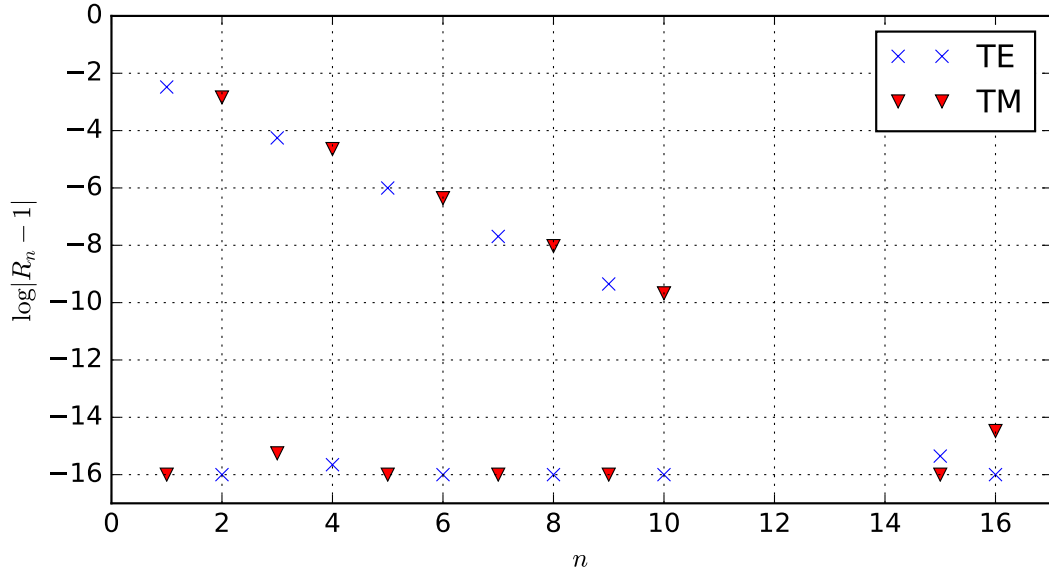
Řešením těchto rovnic jsou koeficienty pro odraženou vlnu

$$\vec{\beta}_m = -\mathbf{D}_\beta^P|_{\Omega=0}^{-1} \mathbf{D}_\alpha^P|_{\Omega=0} \vec{\alpha}_m \quad \text{a} \quad \vec{B}_m = -\mathbf{D}_B^P|_{\Omega=0}^{-1} \mathbf{D}_A^P|_{\Omega=0} \vec{A}_m. \quad (3.42)$$

Tyto výsledky jsou totožné s řešením podkapitoly 3.4 se zavedením diagonálních matic

$$\mathbf{D}_{\beta\alpha} \equiv -\mathbf{D}_\beta^P|_{\Omega=0}^{-1} \mathbf{D}_\alpha^P|_{\Omega=0} \quad \text{a} \quad \mathbf{D}_{BA} \equiv -\mathbf{D}_B^P|_{\Omega=0}^{-1} \mathbf{D}_A^P|_{\Omega=0}. \quad (3.43)$$

Jev superradiace je spojený s disipací energie, která nastává díky generování plošných proudů na povrchu sféry. Existují však i speciální případy, při nichž k disipaci docházet nebude a nastane totální odraz, jak je vidět např. v obrázku 3.4, kdy je pro specifické frekvence hodnota odcházejícího výkonu vlnou rovna hodnotě výkonu přineseného. V takovém případě na rozhraní splývá magnetické pole a pole elektrické má nulovou tečnou projekci. Magnetické pole pro TE, resp. elektrické pole pro TM polarizaci v rovině (x,y) je vykresleno v obrázku 3.2.



Obrázek 3.3: Je vidět, že pro TE vlny jsou řešení dostatečně přesná pro sudé dimenze, naopak pro dopadající TM vlny vychází koeficient odrazu přesně pro liché dimenze matic. Rychlost konvergence ke strojové přesnosti je různá pro různé hodnoty vodivosti, tento graf je vyhotoven pro bezrozměrnou vodivost $\delta^0 = 0.9$.

3.6 Chyba konečných dimenzí

Namísto matic řádu $\infty \times \infty$ lze vzít pouze matice typu $n \times n$. Tím se v řešení objeví nová chyba. Jelikož se budou rovnice řešit numericky, postačí, bude-li tato chyba menší než chyba numerické metody.

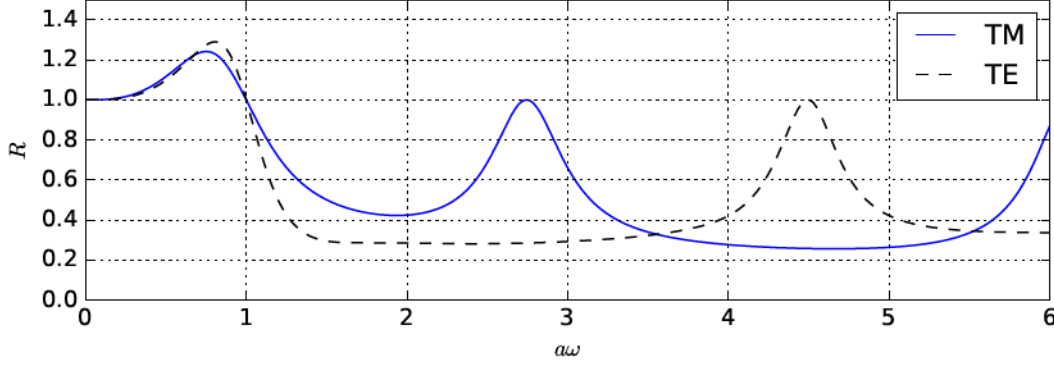
Termodynamika (podkapitola 3.1) říká, že pro $\omega < m\Omega$ nastává superradiantní rozptyl a pro $\omega > m\Omega$ klasický, při němž sféra absorbuje výkon přinášený zářením. Samotná termodynamika nepožaduje totální odraz pro $\omega = m\Omega$. Elektromagnetické rovnice však již požadují, aby byl výkon spojitou funkcí frekvence, a proto musí totální odraz nastat. V tomto bodě tak lze vzít řešení pro matice $n \times n$ a ukázat odchytku od totálního odrazu. Graficky je *truncation error* zpracován v obrázku 3.3.

Jak je vidět, už pro nízké hodnoty lze pro dopadající TE (2×2) případně TM (1×1) vlnu najít chybu srovnatelnou se zaokrouhlovací chybou 10^{-15} . Tyto nejnižší aproximace jsou znázorněny v obrázku 3.4.

V obrázku 3.4 je zajímavá oblast $\omega < m\Omega$, kde má podle termodynamického důkazu docházet k superradiantnímu rozptylu. To se zde s přesností 10^{-14} potvrzuje.

Pro volbu nulové vodivosti $\delta_s^0 = 0$ má sféra nekonečný odpor. V takovém případě vlna projde dál a žádný proud na povrchu se negeneruje. Veškerá energie, která tak prošla dovnitř sféry ji musí zase opustit

V obrázcích 3.5, resp. 3.6 jsou ukázány relativní odražené výkony pro každou



Obrázek 3.4: Graf ukazuje dopadající TE, resp. TM vlnu o čísle $\ell = 1$, tedy vlny nese nejmenší možný moment hybnosti. Existují frekvence, při nichž dochází k totálnímu odrazu. První z nich je $\omega_0 = m\Omega$. V dalších nastává lokální maximum, které opět odpovídá situacím, kdy vnitřní řešení (stojaté vlnění) vymizí na povrchu sféry.

parciální vlnu, pokud dopadá TE polarizovaná vlna, resp. TM polarizovaná vlna s $\ell = 1$, pro něž dochází k největšímu efektu zesílení vln rozptylem.

Na těchto obrázcích je vidět, že i při dopadu jediné polarizované vlny se odrazí vlna složená z obou polarizací a více módů. Dopadá-li mód ℓ , odrazí se ve stejné polarizaci módy $\ell + 2k$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a v opačné $\ell + 2k + 1$. Např. v obrázku 3.5 dopadá TE polarizovaná vlna o $\ell = 1$, proto se bude odražená vlna skládat z TE módů 1, 3, 5, ... a TM módů 2, 4, 6, ...

3.7 Výkon nesený vlnou

V předchozích podkapitolách je používán relativní odražený výkon pro demonstraci superradiantního rozptylu na rotující sféře. Připomeňme, že energie elektromagnetického pole má tvar

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.44)$$

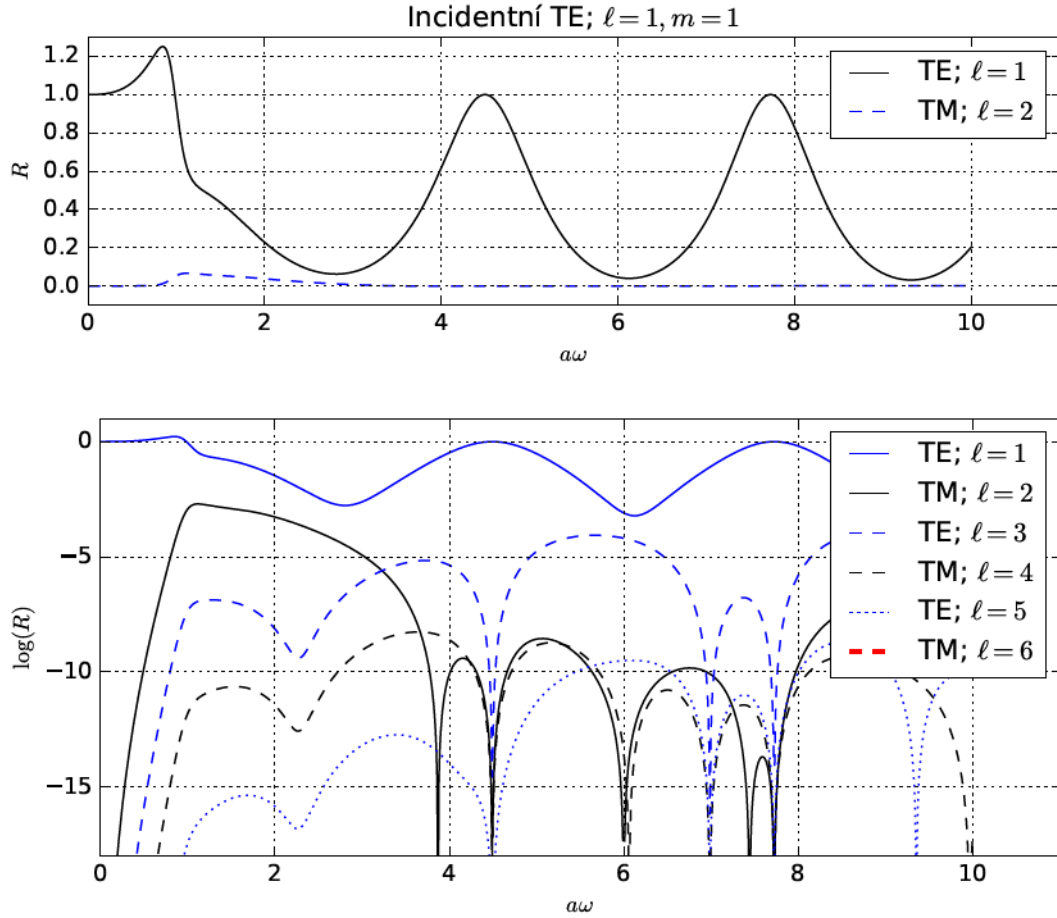
Z normalizace magnetických a elektrických vektorových sférických harmonik (věta 6)

$$\int d\Omega \mathbf{Y}_{\ell m}^a \cdot \overline{\mathbf{Y}_{\ell' m'}^b} = \ell(\ell + 1) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta_{ab} \quad (3.45)$$

plyne, že parciální vlna (ℓ, m) bude mít výkon úměrný $\ell(\ell + 1)|A|^2$, kde $|A|^2$ je kvadrát amplitudy vlny. Např. příchozí TE vlna nese výkon $\ell(\ell + 1)|\alpha_\ell|^2$ atd.

Pro obecně dopadající vlnu s rozdělením $\{\alpha_i, A_i\}$ lze zapsat relativní odražený výkon jako podíl celkové odcházející a příchozí energie

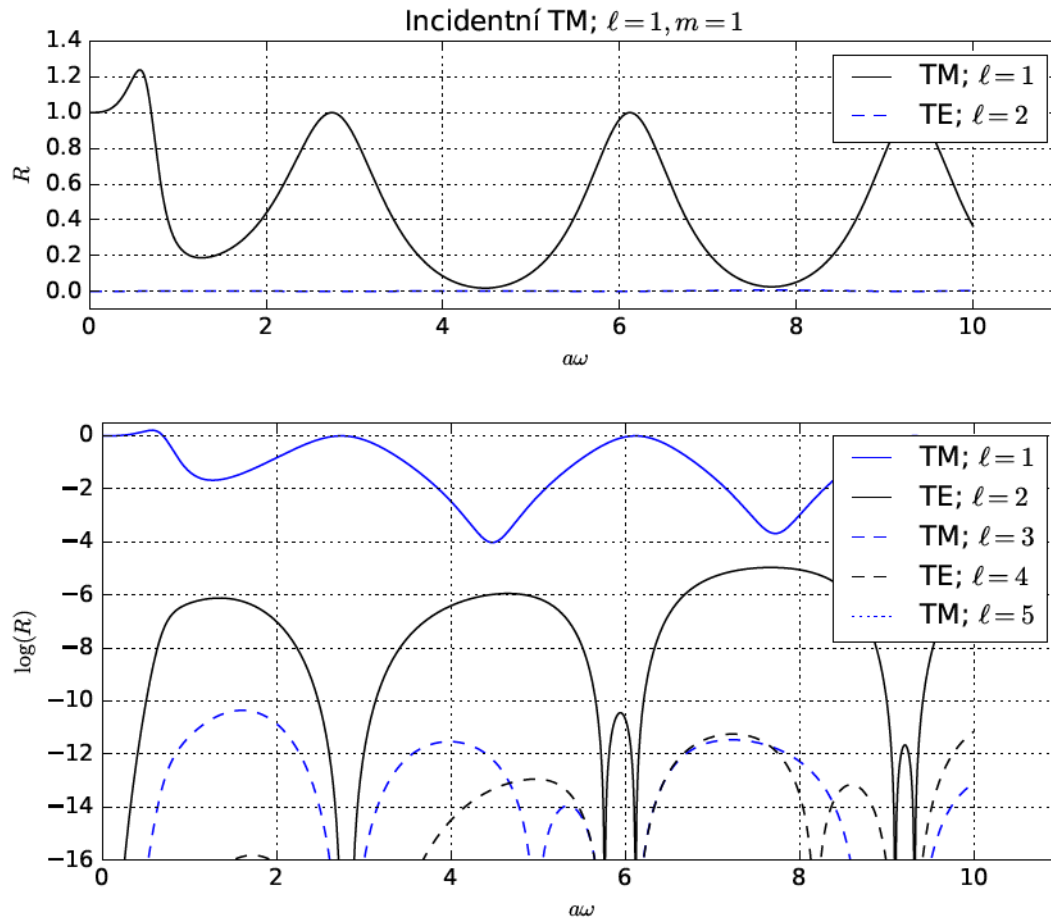
$$R = \frac{P_-}{P_+} = \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell(\ell + 1) [|\beta_{\ell m}|^2 + |B_{\ell m}|^2]}{\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell(\ell + 1) [|\alpha_{\ell m}|^2 + |A_{\ell m}|^2]}. \quad (3.46)$$



Obrázek 3.5: Vodivá sféra o bezrozměrné vodivosti $\delta^0 = 0.9$ rotuje s úhlovou rychlostí $\Omega = 1$. Řešíme situaci v aproximaci 6×6 , kde je chyba aproximace úměrná zaokrouhlovací chybě double-precision 10^{-16} . Dopadající TE polarizovaná vlna o módu $\ell = m = 1$ se rozptyluje a odcházející záření je složeno ze šesti vln, tří TM a tří TE (TM mód $\ell = 6$ již nemá v grafu žádný pozorovaný účinek). První vlna (TE, $\ell = m = 1$) je v odraženém svazku jasně dominující. Pro specifické rezonanční frekvence dochází k totálnímu odrazu. V obrázku je vidět, že pro tyto frekvence amplitudy všech vln mimo dominantní vymizí a nedochází k mísení módů rozptylem.

V příkladech výše jsou normalizované dopadající parciální vlny, tedy vlny, pro něž platí $|A_\ell|^2 = \delta_{\ell 1}$ a $|\alpha_\ell|^2 = \delta_{\ell 1}$, tedy přinášený výkon má číselný koeficient 2. Relativní odražený výkon má pro parciální vlny, resp. celou kolekci odražených vln tvar

$$R_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2} (|\beta_\ell|^2 + |B_\ell|^2) \quad \text{resp.} \quad R^{(1)} = \sum_\ell \frac{\ell(\ell+1)}{2} (|\beta_\ell|^2 + |B_\ell|^2). \quad (3.47)$$



Obrázek 3.6: TM vlna (mód $\ell = m = 1$) dopadá na rotující sféru o bezroměnné vodivosti $\delta^0 = 0.9$ a úhlové rychlosti $\Omega = 0.7$. Situace je řešena v aproximaci 5×5 , odráží se tak pět vln, z toho tři TM a dvě TE polarizované vlny ($\ell = 5$ je již zanedbatelná, v grafu se ani neobjeví nad hodnotou -16). Je vidět, že pro $\omega < m\Omega$ nastává superradiace. Stejně jako pro dopadající TE vlnu na obrázku 3.5 pro rezonanční frekvence, při nichž dochází k totálnímu odrazu, vymizí všechny vlny až na dominantní TM vlnu $\ell = m = 1$.

4. Rotující tělesa a zrcadla

V této kapitole je demonstrován původní Zel'dovičův návrh [6] na uzavření rotujícího axiálně-symetrického tělesa do dokonale odrazivého zrcadla. V takovém případě (jak je ukázáno níže) bude mít frekvence záření komplexní charakter $\omega = \omega_R + i\omega_I$ a platí

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_R t} e^{\omega_I t}. \quad (4.1)$$

Reálná část má tak význam skutečné frekvence záření, imaginární složka udává zesílení vlny (v případě útlumu musí být tato složka záporná).

Předchozí kapitoly ukázaly, jak se chová záření při rozptylu na rotující válcové a kulové slupce. Jelikož je uvažováno dokonale odrazivé zrcadlo, může být takové pouze pro jednu základní frekvenci a jí příslušné vyšší harmonické vlny. V této kapitole jsou ukázány ty z těchto vln, které mají největší vlnovou délku. U rotující sféry je pro srovnání ukázáno několik vyšších vln.

4.1 Rotující válec

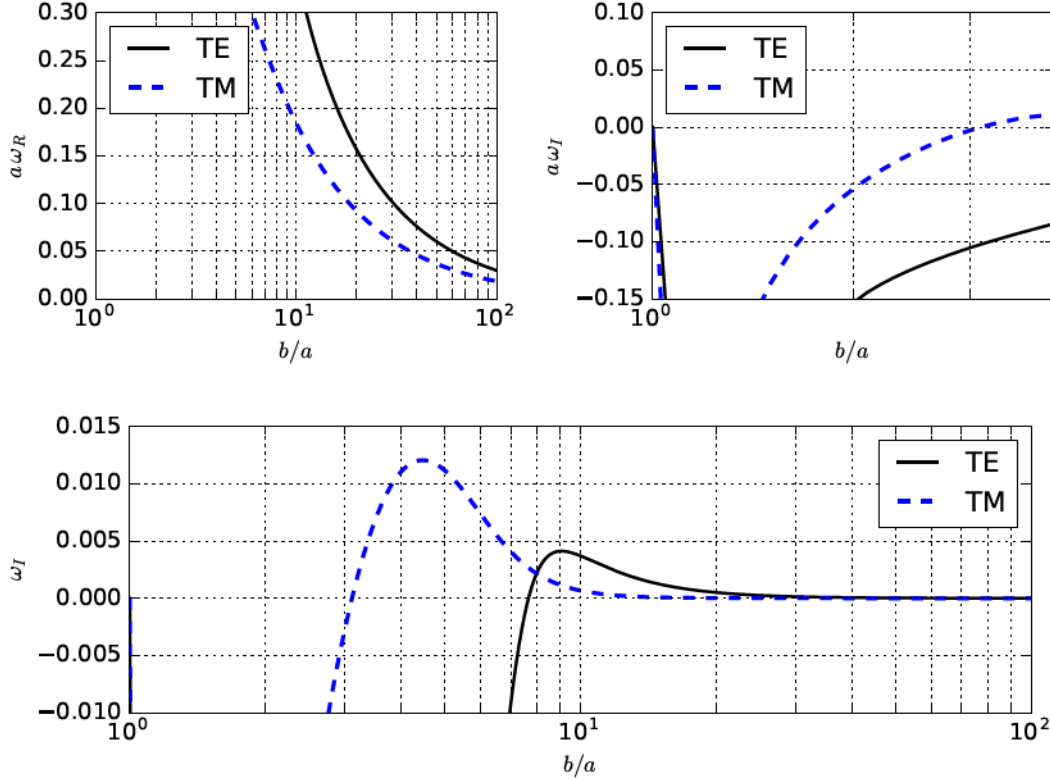
První ze zkoumaných objektů je rotující válec. Z předchozích kapitol plyne vztah na rozhraní rotujícího válce pro TE a TM polarizované záření

$$\begin{aligned} \text{TE :} \quad & \left[\Delta - J_m(\omega a) H_m^{(2)}(\omega a) \right] \alpha_m^{\text{TE}} - \left[\Delta + J_m(\omega a) H_m^{(1)}(\omega a) \right] \beta_m^{\text{TE}} = 0, \\ \text{TM :} \quad & \left[\Delta - \frac{dJ_m}{d\rho}(\omega a) \frac{dH_m^{(2)}}{d\rho}(\omega a) \right] \alpha_m^{\text{TM}} - \left[\Delta + \frac{dJ_m}{d\rho}(\omega a) \frac{dH_m^{(1)}}{d\rho}(\omega a) \right] \beta_m^{\text{TM}} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pokud je válcová slupka obklopena válcovým zrcadlem o poloměru $b > a$, bude i na této slupce docházet k absorpci, která je závislá na frekvenci. Na rozhraní zrcadla musí stále platit Maxwellovy rovnice a musí vymizet tečné elektrické pole. V případě zrcadla nehraje roli pole vně této válcové slupky a platí

$$\begin{aligned} \text{TE :} \quad & (1 - \xi_m^{\text{TE}}) H_m^{(2)}(\omega b) \alpha_m^{\text{TE}} + H_m^{(1)}(\omega b) \beta_m^{\text{TE}} = 0, \\ \text{TM :} \quad & (1 - \xi_m^{\text{TM}}) \frac{dH_m^{(2)}}{d\rho}(\omega b) \alpha_m^{\text{TM}} + \frac{dH_m^{(1)}}{d\rho}(\omega b) \beta_m^{\text{TM}} = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde ξ_m^{TE} a ξ_m^{TM} jsou koeficienty absorpce při odrazu. Rovnice (4.2) a (4.3) tvoří pro každou z polarizací soustavu rovnic, kde neznámými jsou amplitudy intenzity α_m, β_m . Jedná se o homogenní soustavy rovnic. Podmínka na existenci pole o jedné základní frekvenci v takovém systému říká, že determinant matice sou-



Obrázek 4.1: Imaginární složka frekvence záření ω_I se dostává do kladných hodnot, když začíná platit podmínka superradiace $\omega_R < m\Omega$. V takovém případě je vidět zesílení $\sim e^{\omega_I t}$. V limitě $b \rightarrow \infty$ je však vidět, že $\omega_I \rightarrow 0$ a vnější zrcadlo přestává mít vliv na experiment, neboť se k němu světlo nikdy nedostane. Stejně tak je vidět, že existuje místo největšího útlumu (vpravo nahoře), ovšem při velkém přiblížení se bude útlum opět minimalizovat a platí $\omega_I \rightarrow 0$ pro $b \rightarrow a$.

stavy musí být nulový. Pro každou polarizaci tak existuje rovnice

$$\text{TE} : \left[\Delta - J_m(\omega a) H_m^{(2)}(\omega a) \right] H_m^{(1)}(\omega b) + \left[\Delta + J_m(\omega a) H_m^{(1)}(\omega a) \right] (1 - \xi_m^{\text{TE}}) H_m^{(2)}(\omega b) = 0, \quad (4.4a)$$

$$\text{TM} : \left[\Delta - \frac{dJ_m}{d\rho}(\omega a) \frac{dH_m^{(2)}}{d\rho}(\omega a) \right] \frac{dH_m^{(1)}}{d\rho}(\omega b) + \left[\Delta + \frac{dJ_m}{d\rho}(\omega a) \frac{dH_m^{(1)}}{d\rho}(\omega a) \right] (1 - \xi_m^{\text{TM}}) \frac{dH_m^{(2)}}{d\rho}(\omega b) = 0, \quad (4.4b)$$

kde neznámou proměnnou je $\omega \in \mathbb{C}$, neboť všechny ostatní parametry v rovnici jsou pevně zadány.

Na obrázku 4.1 je vidět TE a TM polarizované záření pro rotující válec. Je vidět, že pro určitou hodnotu b/a klesne reálná složka frekvence na hodnotu takovou, že $\omega_R < m\Omega$, díky čemuž začne vnitřní válec odrážet více záření, a chovat se tak jako zdroj. Přechod od útlumu k zesílení záření je vidět v imaginární složce frekvence, která pro tento specifický poměr b/a , kdy $\omega_R < m\Omega$, mění své znaménko.

4.2 Stojící sféra

Rozptyluje-li se záření na stojící sféře, platí diagonální vztah mezi koeficienty dopadající a rozptýlené vlny

$$\begin{aligned} \text{TE} : \quad R_\ell^{\text{TE}}(\hat{a})\alpha_{\ell m} - \beta_{\ell m} &= 0, \\ \text{TM} : \quad R_\ell^{\text{TM}}(\hat{a})A_{\ell m} - B_{\ell m} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde $R_\ell^{\text{TE}} = R_\ell^{\text{TM}}(\hat{a})$ obsahuje informaci o rozptylu na stojící sféře. Na rozdíl od aproximace 1×1 pro rotující sféru platí pro libovolné ℓ . Funkce je proměnnou součinu poloměru sféry a úhlové frekvence záření

$$R_\ell^{\text{TE}}(0, \hat{a}) = \frac{1 - \delta^0 \hat{j}_\ell(\hat{a}) \hat{h}_\ell^{(2)}(\hat{a})}{1 + \delta^0 \hat{j}_\ell(\hat{a}) \hat{h}_\ell^{(1)}(\hat{a})}, \quad R_\ell^{\text{TM}}(0, \hat{a}) = \frac{1 - \delta^0 \frac{d\hat{j}_\ell}{d\hat{r}}(\hat{a}) \frac{d\hat{h}_\ell^{(2)}}{d\hat{r}}(\hat{a})}{1 + \delta^0 \frac{d\hat{j}_\ell}{d\hat{r}}(\hat{a}) \frac{d\hat{h}_\ell^{(1)}}{d\hat{r}}(\hat{a})}. \quad (4.6)$$

Přidáním kulového zrcadla přibudou nové podmínky pro odraz na rozhraní vnější kulové slupky o poloměru $\hat{r} = \hat{b} = \omega b$

$$\begin{aligned} \text{TE} : \quad [f_\ell]_b &= (1 - \xi_\ell^{\text{TE}}) \hat{h}_\ell^{(2)}(\omega b) \alpha_{\ell m} + \hat{h}_\ell^{(1)}(\omega b) \beta_{\ell m} = 0, \\ \text{TM} : \quad [g'_\ell]_b &= (1 - \xi_\ell^{\text{TM}}) \frac{d\hat{h}_\ell^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega b) A_{\ell m} + \frac{d\hat{h}_\ell^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega b) B_{\ell m} = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

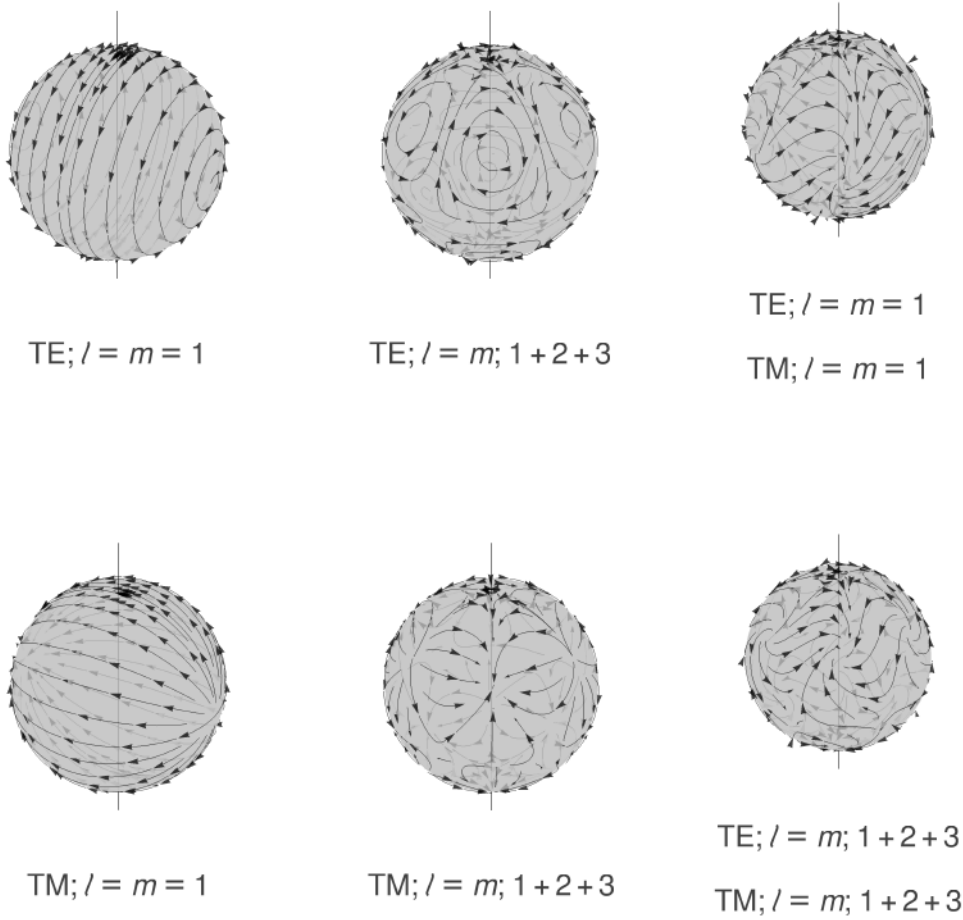
kde $\xi_\ell^{\text{T}\square} \in [0, 1]$ jsou opět koeficienty absorpce, které mohou být také funkcí ω . Proudů, které jsou generovány na sféře při volbách různých polarizací a módů, jsou znázorněny v obrázku 4.2. Podmínka na existenci monochromatického elektromagnetického pole uvnitř zrcadla je opět dána nulovostí determinantu homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \text{TE} : \quad R_\ell^{\text{TE}}(\hat{a}) \hat{h}_\ell^{(1)}(\omega b) + (1 - \xi_\ell^{\text{TE}}) \hat{h}_\ell^{(2)}(\omega b) &= 0, \\ \text{TM} : \quad R_\ell^{\text{TM}}(\hat{a}) \frac{d\hat{h}_\ell^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega b) + (1 - \xi_\ell^{\text{TM}}) \frac{d\hat{h}_\ell^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega b) &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Jelikož sféra stojí, jsou koeficienty $R_\ell^{\text{TE}}, R_\ell^{\text{TM}}$ vždy menší než jedna až na případ rezonančních frekvencí. Musí tak nutně docházet k útlumu, nikdy k nárůstu. Imaginární složka frekvence tak splní $\omega_I \leq 0$.

Nyní uvažujme dokonale odrazivé zrcadlo pro každou frekvenci, mód i polarizaci, koeficienty absorpce jsou nulové. A rovnice se zjednoduší. V limitě, kdy je sféra dokonale nevodivá, platí $\delta^0 \rightarrow 0$ a v této limitě jsou odrazové koeficienty $R_\ell^{\text{TE}}, R_\ell^{\text{TM}}$ rovny jedné. Z rovnice (4.8) tak zůstane jen podmínka pro rezonátor o poloměru b , který je více rozebraný v dodatku B.5.

Pro speciální vodivost $\sigma_s = 1/377 \Omega^{-1}$ je vykreslena reálná i imaginární část frekvence TE i TM polarizované vlny v obrázku 4.3.

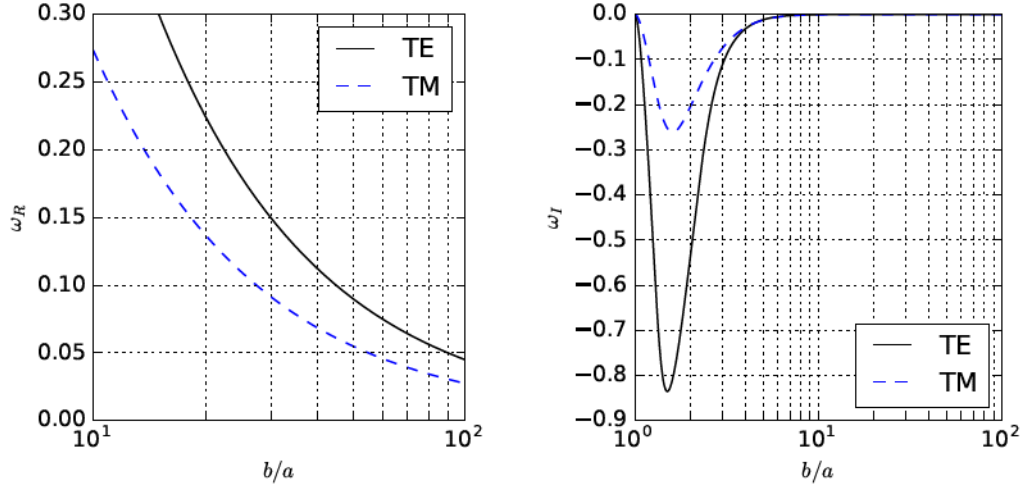


Obrázek 4.2: Obrázky ukazují pro jednotlivé módy, jak budou vypadat plošné proudy na rezonátoru. V prvním sloupci jsou vidět elektrické proudy generované na povrchu dokonale odrazivého zrcadla, s níž jsou konstruovány obrázky 4.3, 4.4, 4.5 a 4.6. Plošný proud vznikající při odrazu pole se smíšenými módy je ukázán ve druhém sloupci, se smíchanými módy i polarizacemi potom ve třetím.

4.3 Rotující sféra

Rotující sféra je komplikovanější, neboť mixuje módy a polarizace. Již aproximace maticového problému 1×1 je však dostatečně přesná a má smysl ji použít díky její jednoduchosti. Neboť se vnější kulová slupka, která plní funkci zrcadla nepohybuje, platí pro ni stále stejné polarizace i módy nemixující podmínky. V této aproximaci existují vlny pouze s $\ell = 1$. Společně s podmínkami na rotující sféře opět získáváme homogenní soustavu rovnic, která je řešitelná, je-li determinant příslušné matice nulový:

$$\begin{aligned}
 TE : \quad R_1^{TE}(\hat{a})\hat{h}_1^{(1)}(\omega b) + (1 - \xi_1^{TE})\hat{h}_1^{(2)}(\omega b) &= 0, \\
 TM : \quad R_1^{TM}(\hat{a})\frac{d\hat{h}_1^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega b) + (1 - \xi_1^{TM})\frac{d\hat{h}_1^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega b) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$



Obrázek 4.3: Reálná a imaginární část frekvence mají rozdílné významy. Zatímco reálná část určuje skutečnou frekvenci záření, imaginární složka reprezentuje nárůst energie. Je vidět, že čím je zrcadlo blíže stojící sféře, tím větší tlumení nastává, neboť koeficient zesílení ω_I zde klesá směrem doleva. Naopak čím dále kulové zrcadlo je, tím méně dochází k útlumu a systém se chová tak, jakoby zrcadlo nemělo vliv. Samozřejmě v limitě, kdy je vnější kulová plocha v nekonečnu, je útlum nulový. Uvažovaná vlna má $\ell = m = 1$ (pro obě polarizace), a generuje tedy proudy na povrchu zrcadla odpovídající prvnímu sloupci obrázku 4.2.

tentokrát však mají odrazové koeficienty tvar (dle dodatku B.7.3)

$$R_1^{\text{TE}} = \frac{\omega - \delta^0 \left[(\omega - m\Omega) - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \omega K_{11}^{11} \right] \hat{j}_1(\omega a) \hat{h}_1^{(2)}(\omega a)}{\omega + \delta^0 \left[(\omega - m\Omega) - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \omega K_{11}^{11} \right] \hat{j}_1(\omega a) \hat{h}_1^{(1)}(\omega a)}, \quad (4.10)$$

$$R_1^{\text{TM}} = \frac{(\omega - m\Omega) - \delta^0 \omega \left[1 + \frac{m}{2}\Omega^2 a^2 \omega \right] \frac{d\hat{j}_1}{d\hat{r}}(\omega a) \frac{d\hat{h}_1^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega a)}{(\omega - m\Omega) + \delta^0 \omega \left[1 + \frac{m}{2}\Omega^2 a^2 \omega \right] \frac{d\hat{j}_1}{d\hat{r}}(\omega a) \frac{d\hat{h}_1^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega a)}. \quad (4.11)$$

S využitím dokonale odrazivého zrcadla (nulové koeficienty absorpce) lze zapsat podmínku pro existenci elektromagnetického pole ve tvaru

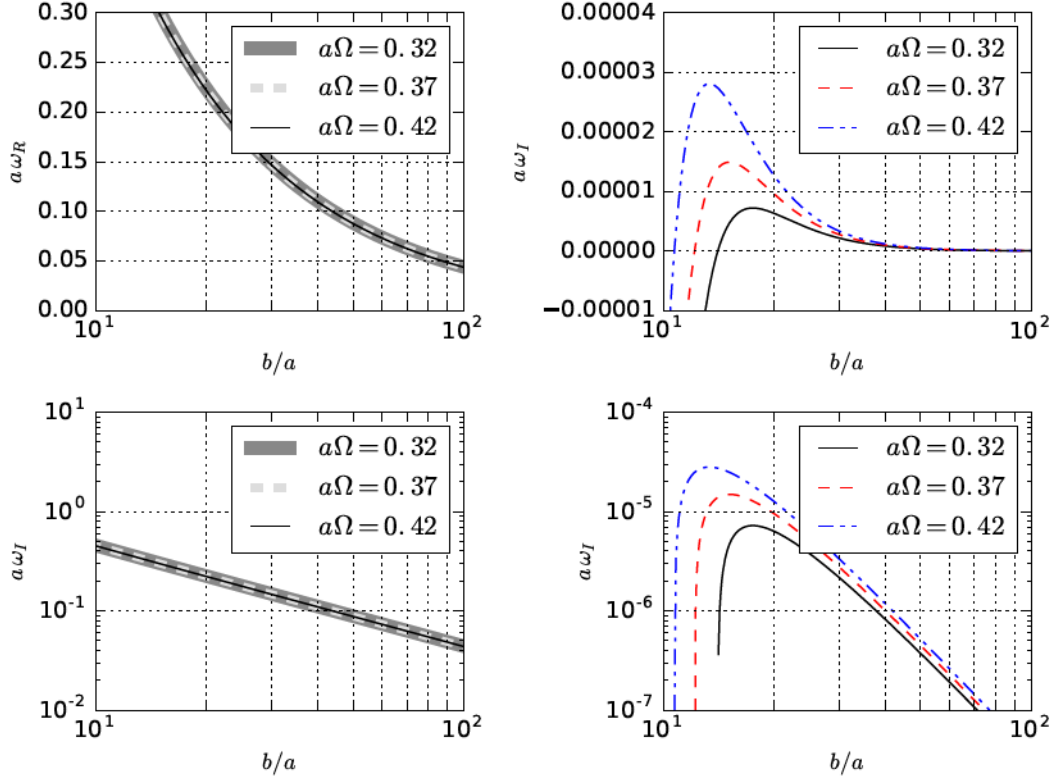
$$\text{TE : } \frac{10\omega - \delta^0 [10(\omega - m\Omega) - \Omega^2 a^2 \omega] \hat{j}_1(\omega a) \hat{h}_1^{(2)}(\omega a)}{10\omega + \delta^0 [10(\omega - m\Omega) - \Omega^2 a^2 \omega] \hat{j}_1(\omega a) \hat{h}_1^{(1)}(\omega a)} \hat{h}_1^{(1)}(\omega b) + \hat{h}_1^{(2)}(\omega b) = 0, \quad (4.12)$$

$$\text{TM : } \frac{(\omega - m\Omega) - \delta^0 \omega \left[1 + \frac{m}{2}\Omega^2 a^2 \omega \right] \frac{d\hat{j}_1}{d\hat{r}}(\omega a) \frac{d\hat{h}_1^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega a)}{(\omega - m\Omega) + \delta^0 \omega \left[1 + \frac{m}{2}\Omega^2 a^2 \omega \right] \frac{d\hat{j}_1}{d\hat{r}}(\omega a) \frac{d\hat{h}_1^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega a)} \frac{d\hat{h}_1^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega b) + \frac{d\hat{h}_1^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega b) = 0,$$

kde jsme využili znalosti

$$K_{11}^{11} = \int d\Omega \left(\sin^2(\theta) \partial_\theta Y_{11} \overline{\partial_\theta Y_{11}} \right) = \frac{3}{32\pi} \int d\Omega \sin^2(2\theta) = \frac{1}{5}. \quad (4.13)$$

I zde je pro nulovou vodivost reflexní koeficient roven jedné a vlna si vnitřní kulové slupky vůbec nevšímá. Systém se tak opět chová jako ideální rezonátor o poloměru b .



Obrázek 4.4: Mezi zrcadlem a rotující sférou je TE polarizované záření módu $\ell = m = 1$. Reálné složky frekvence nezávisí na úhlové rovňkové rychlosti otáčejícího se válce, pouze na vzdálenosti b . Rotace totiž nijak nemění vzdálenost mezi vnitřní sférou a zrcadlem. Ovšem mění se odrazivé koeficienty, a proto je imaginární složka úhlové frekvence záření různá pro různé typy rotací. Čím vyšší rotace je, tím menší musí být poloměr zrcadla, aby došlo k nárůstu neseného výkonu.

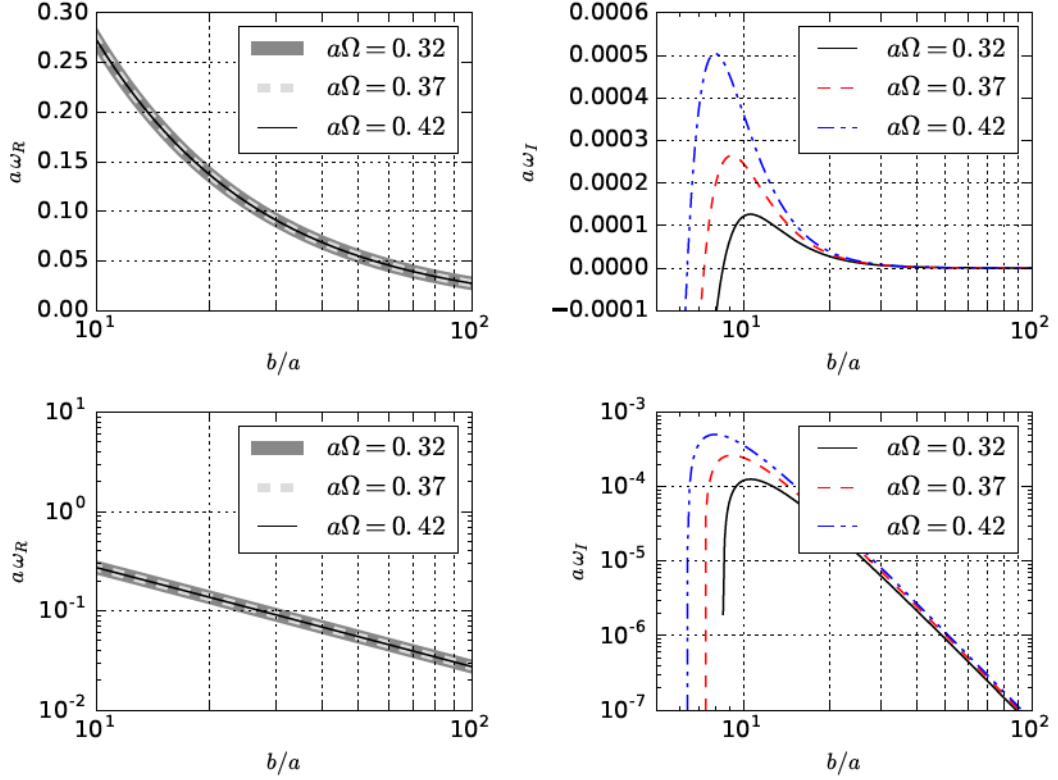
S volbou $\ell = m = 1$ a $\delta^0 = 1/4\pi$ lze rovnice (4.12) přepsat do tvaru

$$\text{TE : } \frac{40\pi\omega - [10(\omega - m\Omega) - \Omega^2 a^2 \omega] \hat{j}_1(\omega a) \hat{h}_1^{(2)}(\omega a)}{40\pi\omega + [10(\omega - m\Omega) - \Omega^2 a^2 \omega] \hat{j}_1(\omega a) \hat{h}_1^{(1)}(\omega a)} \hat{h}_1^{(1)}(\omega b) + \hat{h}_1^{(2)}(\omega b) = 0, \quad (4.14)$$

$$\text{TM : } \frac{4\pi(\omega - \Omega) - \omega [1 + \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \omega] \frac{d\hat{j}_1}{d\hat{r}}(\omega a) \frac{d\hat{h}_1^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega a)}{4\pi(\omega - \Omega) + \omega [1 + \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \omega] \frac{d\hat{j}_1}{d\hat{r}}(\omega a) \frac{d\hat{h}_1^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega a)} \frac{d\hat{h}_1^{(1)}}{d\hat{r}}(\omega b) + \frac{d\hat{h}_1^{(2)}}{d\hat{r}}(\omega b) = 0,$$

kde neznámá $\omega = \omega_R + i\omega_I$ je funkcí $\omega = \omega(b, a\Omega)$. Pro některé vybrané hodnoty jsou příslušné hodnoty $a\omega$ vykresleny v závislosti na b/a v obrázku 4.4, resp. 4.5 pro TE, resp. TM polarizaci.

V obrázcích 4.1, 4.3, 4.4, 4.5 jsou znázorněny frekvence vln, které mohou existovat mezi objektem a zrcadlem. Nejedná se ovšem o jediné vlny. Rovnice (4.4), (4.8), (4.9) řeší i jiné frekvence ω . Výše uvedené vlny jsou charakteristické nejnižší možnou existující frekvencí, pro které je snadné splnit podmínku super-radiace $\omega_R < m\Omega$ již pro malé poměry b/a . Existovat budou i vyšší harmonické frekvence. Pro rotující sféru uzavřenou v zrcadle s TE polem je pět různých řešení znázorněno v obrázku 4.6.



Obrázek 4.5: Pro TM polarizovanou vlnu uvnitř zrcadla je vidět podobný průběh reálné i imaginární složky frekvence záření. Na reálnou složku opět nemá rotace žádný vliv, ovšem imaginární složka má rychlejší nárůst s vyšší rovinnovou rychlostí $a\Omega$. Z analýzy superradiace v kapitole 3 je patrné, že TM polarizované pole má větší relativní amplitudu odrazu, a i zde je vidět o řád větší nárůst amplitudy oproti TE polarizaci.

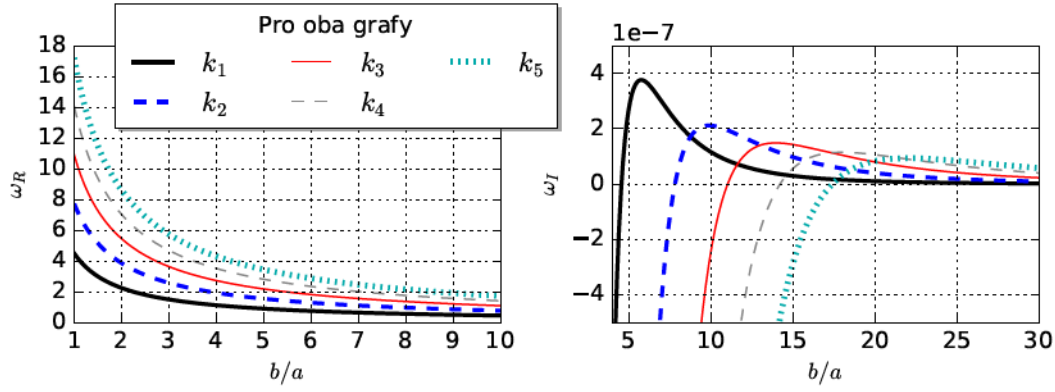
4.4 Aproximace

Z numerického řešení rovnic je patrné, že imaginární složky jsou velice malé, a proto lze pro každou reálnou frekvenci ω_R hledat $\omega = \omega_0 + i\epsilon$, kde ϵ je malá porucha reálné frekvence. Nabízí se tak otázka, jak moc by byla aproximace do prvního řádu ϵ pro příslušné rovnice (4.4) pro válec nebo (4.9) pro sféru přesná.

Počítačový software zvládne počítat rovnice po aproximaci velice rychle, a proto má smysl ji provést. Rovnice pro sféru jsou však stále příliš komplikované. Pro válec lze rozvojem rovnice pro TE polarizaci (4.4) do prvního řádu v ϵ najít jeho přibližnou hodnotu

$$\epsilon = \text{Re} \left\{ \frac{2a\mu\sigma_s\omega_0(\omega_0 - m\Omega)J_m(\omega_0a)Y_m(\omega_0b)}{\frac{4}{\gamma}b\omega_0J_{m+1}(\omega_0b) + \mu_0\sigma_s aJ_m(\omega_0a)\Upsilon} \right\} \quad (4.15)$$

kde vinou aproximativní metody vznikne nefyzikální imaginární část (ta by se



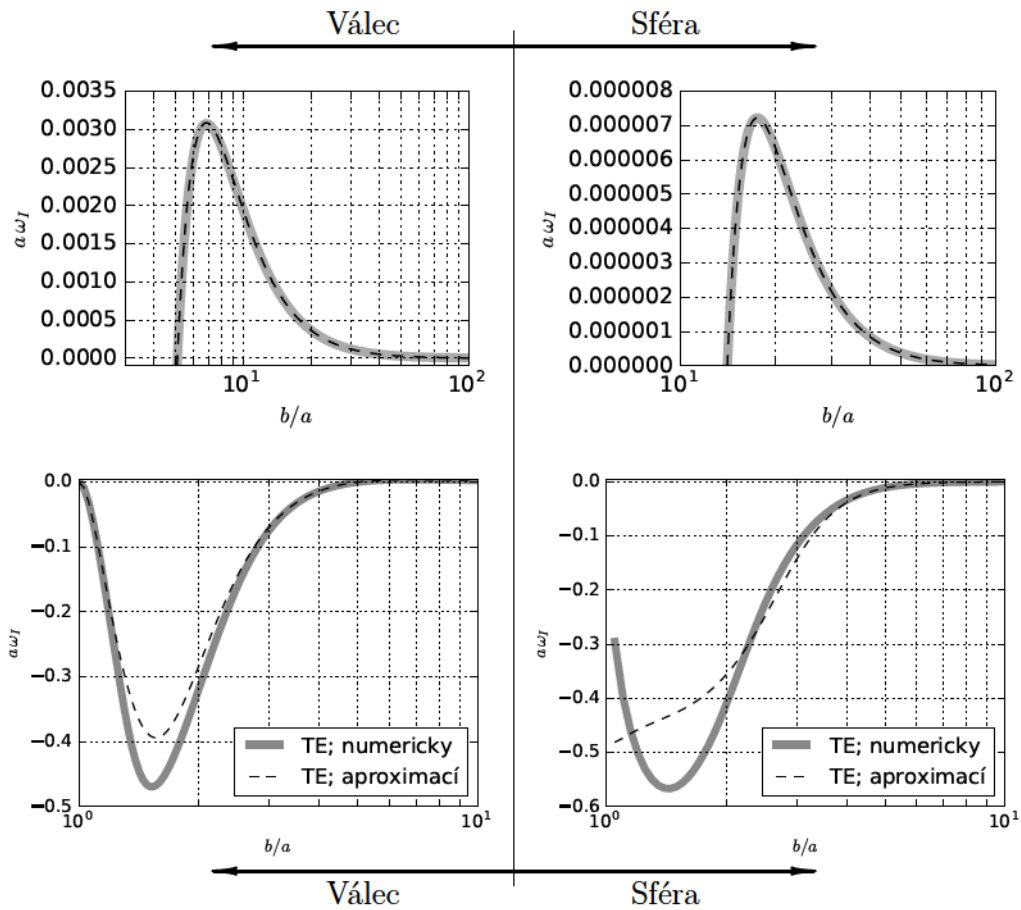
Obrázek 4.6: Je vidět, že čím vyšší kořen k_i rovnice (4.9) pro TE polarizaci máme, tím vyšší reálnou frekvenci vlna má. Situace tak odpovídá existenci vyšších harmonických frekvencí. Na imaginární složce je vidět, že nejvyšší zesílení vln mnohonásobným odrazem nastává pro základní frekvenci. Také je vidět, že čím vyšší je ω_R (a tedy i poměr b/a), tím později nastává superradiace a změna znaménka imaginární části.

jinak s vyššími členy řady sečetla na nulu). Koeficient Υ má tvar

$$\begin{aligned} \Upsilon = & -4iY_m(\omega_0 b) \left[\left(m^2 \Omega - m\omega_0 - \frac{\omega_0}{2} \right) J_m(\omega_0 a) + \omega_0 a (\omega_0 - m\Omega) J_{m+1}(\omega_0 a) \right] - \\ & - 2\omega_0 b (\omega_0 - m\Omega) \left(J_m(\omega_0 a) Y'_m(\omega_0 b) + J_{m+1}(\omega_0 b) H_m^{(2)}(\omega_0 a) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

a je patrné, že o znaménku ϵ rozhoduje $\omega_0(\omega_0 - m\Omega)$ superradiantní nárůst amplitudy se objeví pro $\omega_0(\omega_0 - m\Omega) < 0$.

Graficky je aproximace pro rotující válec i rotující sféru znázorněna spolu s numerickým řešením v obrázku 4.7



Obrázek 4.7: Numerická, tedy přesnější řešení, jsou znázorněna plnou šedou čarou. Z obrázků je vidět, že jak pro sféru, tak pro válec jsou obě řešení velmi přesná v oblasti, kde je $|a_{\omega_I}| \ll 1$. Jakmile se však hodnota $|a_{\omega_I}|$ začne zvětšovat, rovnice dávají jiný výsledek. V superradiantní oblasti, kde nás výsledek zajímá především, je však možné aproximaci použít.

5. Rozptyl na rotující černé díře

V této kapitole shrneme poznatky o superradiantním rozptylu záření na černé díře. Kapitola má čistě rešeršní charakter a veškeré výsledky jsou převzaté z již existující literatury, především potom z článků [9, 10, 11], z knihy [14] a z dizertační práce Richarda Pirese Brita [23].

První podkapitola je věnována existenci jevu superradiace dle mechanických zákonů černých děr [7, 8, 18] jako analogie podkapitoly o termodynamice v klasickém modelu 3.1, jež je také inspirována J. Bekensteinem [16]. V podkapitole druhé shrnujeme známé poznatky o rotující černé díře. Třetí podkapitola se věnuje po vzoru článku [9] odvození Teukolskeho rovnice pro porušenou Kerrovu metriku. Závěrem ve dvou podkapitolách shrnujeme superradiaci při rozptylu na Kerrově černé díře a aplikaci na tzv. *black hole bomb*, tedy Kerrovu černou díru uzavřenou v ideálně odrazivém zrcadle.

5.1 Termodynamický důkaz superradiace

Jacob Bekenstein [18] ukázal, že existuje možnost nahlížet na Bardeen-Carter-Hawkingovy rovnice [8] jako na čtyři termodynamické zákony černých děr. Jeho hlavní argument byl, že se z vesmíru nesmí ztrácet entropie, a proto pád předmětu do černé díry musí zvýšit entropii tohoto vesmírného objektu. Pro efekt superradiace však nemá interpretace rovnic význam a stejně se zde objeví. První z mechanických zákonů říká, že

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q, \quad (5.1)$$

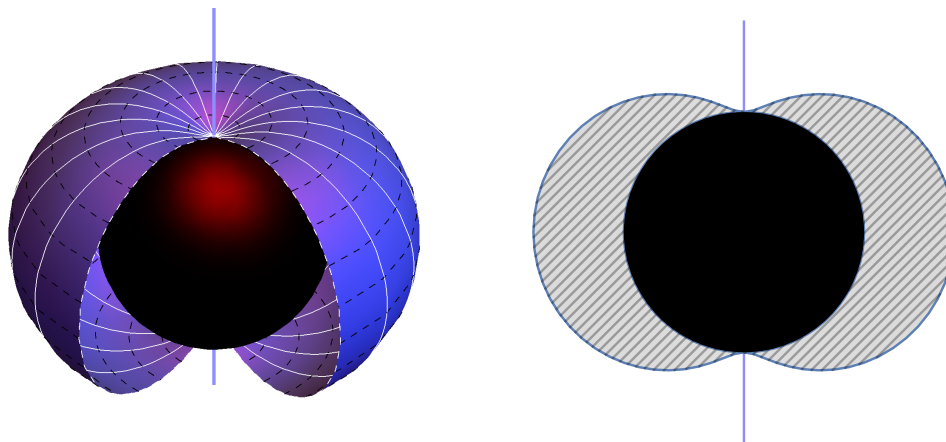
kde κ je povrchová gravitace, Ω_H , resp. Φ_H jsou úhlová rychlost, resp. elektrostatický potenciál vnějšího horizontu, jehož plocha je A . Pro Kerrovu černou díru je $\Phi_H = 0$, pro Reissner-Nordströmodu zase $\Omega_H = 0$. S ohledem na stacionární a axiálně symetrický prostoročas uvažujeme perturbace polí $\sim e^{im\phi - i\omega t}$ (t, ϕ jsou souřadnice svázané s Killingovými vektory příslušných symetrií). Pak platí [14], že

$$\frac{\delta J}{\delta M} = \frac{m}{\omega} \quad \text{resp.} \quad \frac{\delta Q}{\delta M} = \frac{q}{\omega}, \quad (5.2)$$

kde q je specifický náboj pole. Potom lze vyjádřit změnu velikosti vnějšího horizontu černé díry

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\omega}{\omega - m\Omega_H} \delta A \quad \text{resp.} \quad \delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\omega}{\omega - q\Phi_H} \delta A. \quad (5.3)$$

Druhý mechanický zákon říká, že $\delta A > 0$ bez ohledu na zkoumaný proces. Pokud je to pravda, platí při zvolení $\omega < m\Omega_H$, resp. $\omega < q\Phi_H$, že $\delta M < 0$, a černá díra tak ztrácí energii. Ta je odnášena odcházející vlnou, která je tak oproti vlně dopadající zesílena.



Obrázek 5.1: Černá díra, jejíž vnější horizont (černá koule) je $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$, má ve svém okolí ergoregion – vyšrafovanou oblast mezi vnějším horizontem a statickou mezí, kde platí $g_{tt} = 0$ (modrá oblast na levém obrázku).

5.2 Rotující nenabitá černá díra

„Jev superradiace vyžaduje disipaci. Ta se může objevit v různých podobách, např. viskozita, tření, turbulence, radiační chlazení atd. Všechny tyto formy disipace jsou spojeny s nějakým médiem nebo hmotovým polem, které zprostředkovává prostředí pro superradiaci,“ praví Richard Brito [23].

V obecné relativitě je prostředím pro efekt superradiace černá díra, pro rotační superradiaci poté Kerrova či Kerr-Newmanova. V této podkapitole shrňme základní poznatky o rotující nenabitě černé díře, tedy Kerrově, neboť o ní se v této kapitole bavíme především.

Jednotky: V této kapitole uvažujeme geometrizované jednotky $c = G = 1$.

Zajímavost: Pojem „černá díra“ poprvé použil J. A. Wheeler v roce 1967 (dle [14]), tedy čtyři roky po Kerrově objevu řešení Einsteinových rovnic a více než padesát let po zrodu Schwarzschildova řešení. V roce 1971 se potom tento termín objevil v článku *Introducing the black hole* [27].

Roy Kerr objevil třídu řešení Einsteinových rovnic pole [1], která je charakterizovaná dvěma parametry – hmotností černé díry M a parametrem a . Celkový moment hybnosti černé díry je součin $J = Ma$. Toto řešení je asymptoticky ploché ve velké vzdálenosti od černé díry, tedy metrika v dostatečné vzdálenosti odpovídá metrice Minkovského prostoročasu. V limitě $a \rightarrow 0$ se metrika redukuje na Schwarzschildovu. Prostorový interval lze vyjádřit např. v Boyerových-

Lindquistových (dále jen BL) souřadnicích [28] t, r, θ, ϕ

$$ds^2 = -\frac{\Delta\Sigma}{\mathcal{A}}dt^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma}\sin^2(\theta)\left(d\phi - \frac{2Mar}{\mathcal{A}}dt\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (5.4)$$

kde $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$ a $\mathcal{A} = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)$. V tomto tvaru je vidět podobnost Kerrova řešení s metrikou plochého prostoročasu

$$ds^2 = -dt^2 + r^2 \sin^2(\theta)[d\tilde{\phi} - \Omega dt]^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (5.5)$$

kde je využita rotační transformace azimutální souřadnice $\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi + \Omega t$. Roli úhlové frekvence tedy hraje $\Omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi} = 2Mar/\mathcal{A}$. V plochem prostoročase se jedná o rotující souřadnice na jinak statickém pozadí. Na Kerrovo řešení se však dá dívat jako na rotující černou díru, neboť souřadnice jsou z pohledu pozorovatele v nekonečnu statické, jak je vidět pro

$$\Omega = \frac{2Mar}{\mathcal{A}} \sim \frac{1}{r^3}. \quad (5.6)$$

Metrika je singulární pro $\Delta = 0$ a tímto vztahem je definován horizont Kerrovy černé díry. Řešeními jsou hned dva horizonty, vnitřní a vnější

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (5.7)$$

kteří se v limitě $a \rightarrow 0$ mění na singularitu $r_- \rightarrow 0$ a Schwarzschildův poloměr $r_+ \rightarrow r_s$. Pro demonstraci superradiace je důležitý vnější horizont r_+ , jenž má úhlovou rychlost [23]

$$\Omega_H = -\left.\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right|_{r=r_+} = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2Mr_+} \quad (5.8)$$

nezávislou na (θ, ϕ) , chová se proto jako celistvá tuhá membrána.

Vně horizontu lze najít statickou mez, která je definována vymizením složky metrického tenzoru $g_{tt} = 0$. Tato statická mez má průběh

$$r_{\text{ergo}}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)}. \quad (5.9)$$

Maximální poloměr statické meze je na rovníkové oblasti černé díry $r_s = 2M$ a minimální na pólech, kde se mez dotýká vnějšího horizontu $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$. Oblasti mezi vnějším horizontem a statickou mezí se říká ergosféra (nebo také ergoregion). Vykreslení vnějšího horizontu, statické meze i ergosféry je v obrázku 5.1. Název „ergosféra“ pochází od J. A. Wheelera a vychází z řeckého slova ergon – čin, jednání. Tento název si zaslouží právě díky možnosti extrakce rotační energie černé díry, a to za pomoci Penroseova procesu [29] nebo zde probírané rotační superradiace.

Penroseův proces uvažuje geodetiky částic s negativní energií. Grib, Pavlov a Vertogradov ukázali [30], že takové geodetiky nemohou začínat ani končit uvnitř ergosféry.

Superradiace využívá existence záření se zápornou energií, které může v ergo-sféře existovat [31]. Ve vší obecnosti se dopadající vlna rozdělí na vlnu odcházející a vlnu pohlcenou rotující černou dírou. Pokud by se jednalo o Schwarzschildovu černou díru, veškeré záření by bylo pohlceno. V případě nenulového parametru a má však i odcházející vlna nenulovou amplitudu a za splnění podmínky $\omega - m\Omega_H < 0$ má vlna pohlcená černou dírou zápornou energii.

5.3 Teukolskeho rovnice

Ve stejném období, kdy Roy Kerr objevil metriku rotující černé díry, byla obecná teorie relativity popisována pomocí nulového tetradového formalismu, který nese jméno po Newmanovi a Penroseovi – NP formalismus.

Rozlišení tenzorových a tetradových indexů: Tenzorové indexy značíme řeckými písmeny μ, ν, \dots a tetradové indexy stejnými písmeny v závorkách $(\mu), (\nu), \dots$

Základem NP formalismu je nulová tetráda

$$e_{(0)}^\mu = \ell^\mu, \quad (5.10)$$

$$e_{(1)}^\mu = n^\mu, \quad (5.11)$$

$$e_{(2)}^\mu = m^\mu, \quad (5.12)$$

$$e_{(3)}^\mu = \bar{m}^\mu, \quad (5.13)$$

kde ℓ^μ, n^μ jsou reálné a m^μ je komplexní čtyřvektor. Všechny tyto tetradové čtyřvektory jsou nulové, tedy jejich velikost je nulová. Skalární součin je dán skrze metriku

$$e_{(\alpha)}^\mu e_{\mu(\beta)} = \eta_{(\alpha)(\beta)} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

tato metrika se pak používá ke snižování i zvyšování indexů v tetradovém formalismu, neboť je sama sobě inverzí.

Projekcí na nulovou tetrádu NP formalismu lze šest nezávislých složek antisymetrického tenzoru elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ zapsat pomocí tří komplexních NP veličin

$$\Phi_0 = F_{\mu\nu} \ell^\mu m^\nu, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\ell^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu), \quad \Phi_2 = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu \quad (5.15)$$

a z nich lze zpětně zkonstruovat Maxwell-Faradayův tenzor

$$F_{\mu\nu} = 2 \left(\ell_{[\mu} m_{\nu]} \Phi_0 + (n_{[\mu} \ell_{\nu]} + m_{[\mu} \bar{m}_{\nu]}) \Phi_1 + \bar{m}_{[\mu} m_{\nu]} \Phi_2 \right) + \text{c.c.} \quad (5.16)$$

V NP formalismu se též zavádějí projekce kovariantní derivace $D = \ell^\mu \partial_\mu$, $d = n^\mu \partial_\mu$, $\delta = m^\mu \partial_\mu$, $\bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu$, s jejichž pomocí lze velmi úsporně zapsat rovnice

pro komplexní pole ϕ_i , ty lze najít odvozené např. v diplomové práci Williama M. Kinnersleyho [32]

$$(D - 2\rho)\phi_1 - (\bar{\delta} + \pi + 2\alpha)\phi_0 = 2\pi J_{(\ell)}, \quad (5.17)$$

$$(\delta - 2\tau)\phi_1 - (d + \mu - 2\gamma)\phi_0 = 2\pi J_{(m)}, \quad (5.18)$$

$$(D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 = 2\pi J_{(\bar{m})}, \quad (5.19)$$

$$(\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (d + 2\mu)\phi_1 = 2\pi J_{(n)}, \quad (5.20)$$

kde proudy na pravé straně jsou projekcemi na tetrádu, např. $J_{(n)} = J_\mu n^\mu$. Rovnici lze zapsat i v kompaktním maticovém tvaru [33]

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (5.21)$$

kde \mathcal{D} je maticový (4×3) diferenciální operátor nepropojující ϕ_0 a ϕ_2 v žádné skalární rovnici.

Ukazuje se, že Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole v NP formalismu jsou separovatelné pro ϕ_0 a ϕ_2 , jak ukázal Teukolsky při studiu perturbací Kerrova prostoročasu [9]. Za využití identit

$$(\alpha - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(D - 2\rho) - (D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\delta - 2\tau) = 0, \quad (5.22)$$

$$(d + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(\bar{\delta} + 2\pi) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(d + 2\mu) = 0 \quad (5.23)$$

lze rovnice zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} & [(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(d + \mu - 2\gamma) - \\ & \quad - (\alpha - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)]\phi_0 = 2\pi J_0, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} & [(d + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) - \\ & \quad - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta)]\phi_2 = 2\pi J_2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

což odpovídá rovnicím (3.5) – (3.8) práce [9], kde jsou zároveň podrobněji popsány zdrojové proudy J_0, J_2 , které pro tuto práci nejsou důležité.

Pro Kerrovu černou díru je výhodné použít BL souřadnice. Rovnici (5.30) však lze odvodit i v Kerr-Schildových souřadnicích za pomoci různě volených tetrad, jak ukazuje část II. práce [11]. Při volbě Kinnersleyho tetrády

$$\ell^\mu = \left[\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right], \quad n^\mu = [r^2 + a^2, -\Delta, 0, a], \quad (5.26)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r + ia \cos(\theta)} \left[ia \sin(\theta), 0, 1, \frac{i}{\sin(\theta)} \right], \quad (5.27)$$

v BL souřadnicích (t, r, θ, ϕ) lze vyjádřit jednotlivé NP veličiny [9]

$$\rho = -\frac{1}{r - ia \cos(\theta)}, \quad \beta = -\frac{\cot(\theta)}{2\sqrt{2}}\bar{\rho}, \quad \pi = \frac{ia \sin(\theta)}{\sqrt{2}}\rho^2, \quad \alpha = \pi - \bar{\beta}, \quad (5.28)$$

$$\tau = -\frac{ia \sin(\theta)}{\sqrt{2}}|\rho|^2, \quad \mu = \frac{\Delta}{2}\rho|\rho|^2, \quad \gamma = \mu + \frac{r - M}{2}|\rho|^2, \quad \epsilon = 0, \quad (5.29)$$

s	ψ	T
0	Φ	T_μ^μ
$1/2$	χ_0	Bez zdroje
$-1/2$	$\rho^{-1}\chi_1$	Bez zdroje
1	ϕ_0	J_0
-1	$\rho^{-2}\phi_2$	$\rho^{-2}J_2$
2	ψ_0	$2T_0,$
-2	$\rho^{-4}\psi_4$	$2\rho^{-4}T_4$

Tabulka 5.1: Tabulka obsahuje několik NP veličin. ϕ_0, ϕ_2 již bylo ukázáno v předchozím textu. ψ_0, ψ_4 jsou dvě z pěti reprezentací Weylova tenzoru v NP formalismu a χ_0, χ_1 jsou vyjádřením Diracova pole. Zdroje T_0, T_4 jsou zavedeny analogicky k J_0, J_2 příslušnými úpravami NP rovnic. Tabulka je převzata z [9].

a dosazením získat Teukolského rovnici. Ta představuje chytře upravený tvar (5.24), resp. (5.25) tak, že při volbě $s = 1$ je neznámou funkcí $\psi = \phi_0$ a pro $s = -1$ je neznámá $\rho^{-2}\phi_2$. Rovnice má překvapivě jednoduchý tvar, poprvé publikovaný v *Physical review letters* 1972 [19] a později (1973) v *The Astrophysical Journal* [9]

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\
& - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\
& - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos(\theta) \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2(\theta) - s) \psi = 4\pi \Sigma T \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Tato rovnice popisuje nejen pro perturbované elektromagnetické pole, ale i pole skalární, spinorové a gravitační. Význam jednotlivých neznámých funkcí a jim příslušející hodnoty spinové váhy s lze najít v tabulce 5.1. Pro elektromagnetické pole tak lze najít ϕ_0 a ϕ_2 . Pro nalezení kompletního řešení je ještě potřeba řešit neseparovanou rovnici pro ϕ_1 .

Alternativní odvození rovnice, ovšem jen pro gravitační pole, podává Ryan [34] s využitím Penroseovy vlnové rovnice pro gravitační pole.

„Zázračnou“ předností Teukolského rovnice je, že ji lze řešit metodou separace proměnných. Uvažujme neznámou ve tvaru $\psi = R(r)S(\theta)P(\phi)T(t)$, potom je snadné přesvědčit se, že $P(\phi)T(t) = \exp[i(m\phi - \omega t)]$. Zavedením funkcí

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am, \quad (5.31)$$

$$\lambda = A + (a\omega)^2 - 2m(a\omega), \quad (5.32)$$

$$\eta_s = \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} + \frac{2ms \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} + s^2 \cot^2(\theta) - s, \quad (5.33)$$

kde $A = {}_s A_{\ell m}$ je separační konstanta, lze rovnice zapsat v separovaném tvaru.

Separované rovnice našel poprvé Teukolsky [9]

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R = 0, \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dS}{d\theta} \right] + (a^2\omega^2 \cos^2(\theta) - 2a\omega s \cos(\theta) - \eta_s + A) S = 0 \quad (5.35)$$

a zde je tento tvar rovnic odvozený v dodatku C.

5.4 Superradiantní rozptyl na Kerrově černé díře

Rovnice (5.34) a (5.35) jsou obyčejnými diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Neznámé funkce ${}_sR_{\ell m}$, ${}_sS_{\ell m}$ popisují část pole záření, které se rozptyluje na rotující černé díře. Funkci R má potom smysl hledat především v radiálním nekonečnu, kde je možné porovnat výkony nesené přicházející a rozptýlenou vlnou, a poblíž horizontu, kde je potřeba řešit okrajové podmínky. Separální konstantu ${}_sA_{\ell m}$ lze získat z rovnice (5.35) a tu pak použít pro určení hodnot funkce R .

5.4.1 Úhlová rovnice

Úhlová rovnice pro funkci $S = S(\theta)$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dS}{d\theta} \right] + (a^2\omega^2 \cos^2(\theta) - 2a\omega s \cos(\theta) - \eta_s + A) S = 0 \quad (5.36)$$

má řešení závislé hned na třech parametrech. Rovnice totiž spolu s požadavkem na regularitu v $S(0)$ a $S(\pi)$ [9] představuje Sturm-Liouvilův problém vlastních čísel [35]. Řešením jsou funkce ${}_sS_{\ell m} = {}_sS_{\ell m}(-a^2\omega^2, \cos \theta)$, které se pro $a = 0$, $s = 0$ redukují na asociované Legendreovy polynomy. Nazývají se spinem-vážené sferoidální harmoniky. Příslušná vlastní čísla ${}_sA_{\ell m}$ těmito funkcím jsou seřazena vzeštně dle indexu s a v nízkofrekvenční aproximaci $a\omega \ll 1$ platí [23]

$${}_sA_{\ell m} \simeq \ell(\ell + 1) + s(s + 1) + \mathcal{O}(a^2\omega^2). \quad (5.37)$$

Ze Sturm-Liouvilova teorému vyplývá, že řešení rovnice jsou ortogonální za použití váhové funkce $\sin(\theta)$ a lze je vhodně normovat a po vzoru [14, 23]

$$\int_0^\pi |{}_sS_{\ell m}|^2 \sin(\theta) d\theta = 1. \quad (5.38)$$

Více se o funkcích lze dozvědět v zajímavém matematickém článku [36].

5.4.2 Radiální rovnice a superradiace

Elegantní metodou nalezení efektu superradiace je metoda efektivního potenciálu popsaná v dodatku D.3, kterou ve své knize používají Cardoso, Brito

a Pani [14]. Rovnici (5.34) lze zavedením funkce $Y = \sqrt{\Delta^s(r^2 + a^2)}R$ a želví souřadnice r_* vztahem $dr_*/dr = (r^2 + a^2)/\Delta$ převést do asymptotických tvarů [9]

$$r_* \rightarrow \infty : \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial r_*^2} + \frac{\omega^2 + 2i\omega s}{r} Y = 0, \quad (5.39)$$

$$r_* \rightarrow -\infty : \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial r_*^2} + \left[k_H^2 - \frac{2isk_H(r_+ - M)}{2Mr_+} - \frac{s^2(r_+ - M)^2}{(RMr_+)^2} \right] Y = 0, \quad (5.40)$$

kde $r_* \rightarrow \infty$, resp. $r_* \rightarrow -\infty$, v řeči původní BL souřadnice to znamená $r \rightarrow \infty$ resp $r \rightarrow r_+$, a kde $k_H = \omega - m\Omega_H$. Jak ukazuje rovnice (4.77) knihy [14], asymptotickými řešeními radiální části Teukolského rovnice $R = {}_sR_{\ell m}$ jsou

$${}_sR_{\ell m} \overset{r_+}{\sim} \mathcal{T} \Delta^{-s} e^{-ik_H r_*} \quad \text{a} \quad {}_sR_{\ell m} \overset{\infty}{\sim} \mathcal{I} \frac{e^{-i\omega r_*}}{r} + \mathcal{R} \frac{e^{i\omega r_*}}{r^{2s+1}}, \quad (5.41)$$

kde $\mathcal{I}, \mathcal{R}, \mathcal{T}$ jsou amplitudové koeficienty dopadající, rozptýlené a pohlcené vlny, přičemž již neuvažujeme řešení odpovídající vlně opouštějící vnější horizont směrem od černé díry, tedy \mathcal{O} v [14, 23] volíme nulové. Vztah mezi amplitudovými koeficienty lze nyní řešit za pomoci metody efektivního potenciálu [23] popsané v dodatku D.3. To vede na vztah [23]

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{k_H}{k_\infty} |\mathcal{T}|^2. \quad (5.42)$$

Při nenulovém koeficientu $|\mathcal{T}|^2$, $k_\infty > 0$ a za splnění podmínky

$$k_H = \omega - m\Omega_H < 0 \quad (5.43)$$

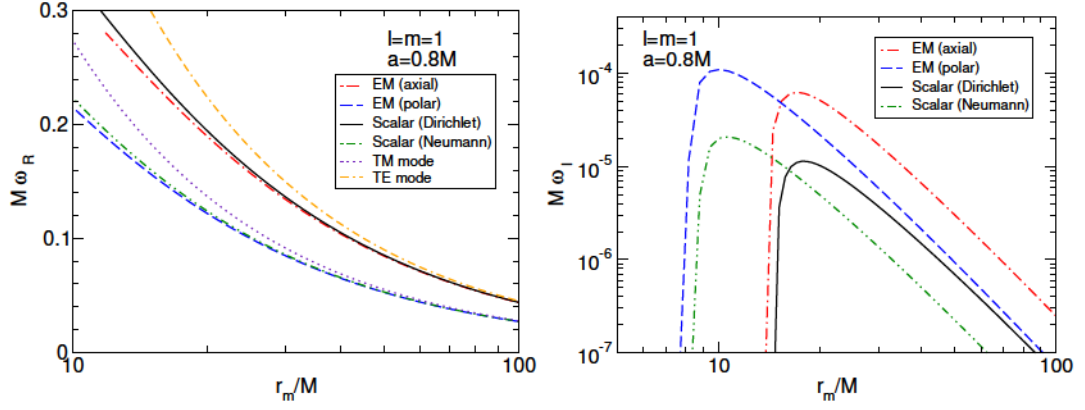
je pak $|\mathcal{R}|^2 > |\mathcal{I}|^2$, a odcházející vlna má tak větší amplitudu než vlna přicházející. Kvadrát amplitudových koeficientů pak přímo souvisí s koeficienty výkonu. Podrobně lze najít rozbor koeficientů výkonu pro elektromagnetické i gravitační pole v [11, 14]. Jak píše Brito [23] ve své dizertační práci, efekt superradiace by nenastal bez možnosti disipace na horizontu rotující černé díry. Za příklad uvádí rotující hvězdu, u níž k superradiantnímu rozptylu nedochází, neboť nemá horizont.

Teukolského rovnice přináší komplikovaná řešení ${}_sR_{\ell m}$, která musí splnit rovnici (5.34). Výsledkem jsou pole ϕ_0, ϕ_2 , která přímo souvisí s výkonem pole v radiální zóně – daleko od Kerovy černé díry. Teukolsky [11] zavádí relativní koeficient výkonu pro rozptylovanou elektromagnetickou vlnu

$$Z_{\ell m} = \frac{dE_{\text{out}}/dt}{dE_{\text{in}}/dt} - 1 = -\frac{dE_{\text{BH}}/dt}{dE_{\text{in}}/dt}, \quad (5.44)$$

který vyjadřuje relativní úbytek energie černé díry. Numericky je koeficient spočten a znázorněn v [11], odkud jsme převzali obrázek pro superradiantní rozptyl záření v první kapitole této práce 1.1.

Koeficient $Z_{\ell m}$ určili Starobinsky a Churilov [37] v nízkofrekvenční limitě $\omega M \ll 1$ za využití aproximace řešení Teukolského rovnice hypergeometrickými



Obrázek 5.2: Brito v tomto obrázku ukazuje reálnou a imaginární složku frekvence rezonátoru o poloměru r_m pro skalární a vektorové elektromagnetické pole, jak je vidět na pravém obrázku, kde je vykreslena imaginární složka úhlové frekvence, která je kladná. Na levém obrázku je vidět reálná část, navíc jsou zde přidány TE a TM módy, které znázorňují stejnou úlohu pro elektromagnetické pole, pouze v plochém prostoročase. (Převzato z [23])

funkcemi. V notaci Brita a Cardosa [23], kterou přejímá i tato práce, má vztah tvar

$$Z_{\ell m} = -8Mr_+(\omega - m\Omega_H)\omega^{2\ell+1}(r_1 - r_-)^{2\ell} \left[\frac{\ell!^2(\ell+1)}{\ell(2\ell)!(2\ell+1)!!} \right]^2 \times \quad (5.45)$$

$$\times \prod_{k=1}^{\ell} \left[1 + \frac{M^2}{k^2} \left(\frac{\omega - m\Omega_H}{\pi r_+ T_H} \right)^2 \right], \quad (5.46)$$

kde T_H je teplota vnějšího horizontu. Je vidět, že vztah je o hodně složitější analogií vztahu (2.20) odvozeného v bakalářské práci [13]. Za splnění

$$\omega - m\Omega_H < 0 \quad (5.47)$$

je $Z_{\ell m}$ kladné, a proto se energie černé díry zmenšuje, neboť je odnášena rozptýlenou vlnou.

5.5 Black hole bomb

Stejně jako v kapitole 4 byly uzavřeny rotující objekty do ideálního zrcadla, lze i Kerrovu černou díru myšlenkově obalit ideálním zrcadlem. V takovém případě přibudou okrajové podmínky na zrcadle a úhlová frekvence vlny ω má nenulovou imaginární složkou.

Elektromagnetické pole je v obecné relativitě popsáno skrze tenzor $F_{\mu\nu}$, ten lze projektovat na nulovou Kinnersleyho tetradu [38]

$$\mathcal{E}_{(a)} = F_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu e_{(t)}^\nu, \quad (5.48)$$

$$\mathcal{B}_{(a)} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} e_{(a)}^\mu e_{(t)}^\nu \quad (5.49)$$

v jednotlivých složkách

$$\mathcal{E}_{(r)} = \left[\frac{ia \sin(\theta)}{\sqrt{2\mathcal{A}\rho}} \left(\Phi_2 - \frac{\Delta\rho^2}{2}\Phi_0 \right) + \text{c.c.} \right] + 2\frac{r^2 a^2}{\sqrt{\mathcal{A}}} \text{Re } \phi_1, \quad (5.50)$$

$$\mathcal{E}_{(\theta)} = \left[\frac{\sqrt{\Delta}(r^2 + a^2)}{\sqrt{2\mathcal{A}\rho^*\Sigma}} \left(\frac{1}{2}\Phi_0 - \frac{\Phi_2}{\rho^2\Delta} \right) + \text{c.c.} \right] - 2a\sqrt{\frac{\Delta}{\mathcal{A}}} \sin(\theta) \text{Im } \phi_1, \quad (5.51)$$

$$\mathcal{E}_{(\phi)} = -i\rho\sqrt{\Delta} \left(\frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}} + \frac{\Phi_2}{\sqrt{2}\rho^2\Delta} \right) + \text{c.c.}, \quad (5.52)$$

$$\mathcal{B}_{(r)} = \left[\frac{a \sin(\theta)}{\sqrt{2\mathcal{A}\rho}} \left(\Phi_2 - \frac{1}{2}\Delta\rho^2\Phi_0 \right) + \text{c.c.} \right] + 2\frac{r^2 + a^2}{\sqrt{\mathcal{A}}} \text{Im } \phi_1, \quad (5.53)$$

$$\mathcal{B}_{(\theta)} = - \left[\frac{i\sqrt{\Delta}(r^2 + a^2)}{\sqrt{2\mathcal{A}\rho^*\Sigma}} \left(\frac{1}{2}\Phi_0 - \frac{\Phi_2}{\rho^2\Delta} \right) + \text{c.c.} \right] + 2a\sqrt{\frac{\Delta}{\mathcal{A}}} \sin(\theta) \text{Re } \phi_1, \quad (5.54)$$

$$\mathcal{B}_{(\phi)} = -\rho\sqrt{\Delta} \left(\frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}} + \frac{\Phi_2}{\sqrt{2}\rho^2\Delta} \right) + \text{c.c.}, \quad (5.55)$$

kde připomeňme $\mathcal{A} = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)$. Tečné elektrické a normálové magnetické pole musí na zrcadle vymizet. To je možné splnit za podmínek [23]

$$\rho\Phi_0 = \frac{\rho^*\Phi_2^*}{\Delta}, \quad \rho^*\Phi_0^* = \frac{\rho\Phi_2}{\Delta}, \quad \text{Im } \phi_1 = 0. \quad (5.56)$$

Z těchto podmínek lze zavedením $\Phi_0 = \Phi_0, \Phi_2 = 2\Phi_2/\rho^2$ získat podmínku

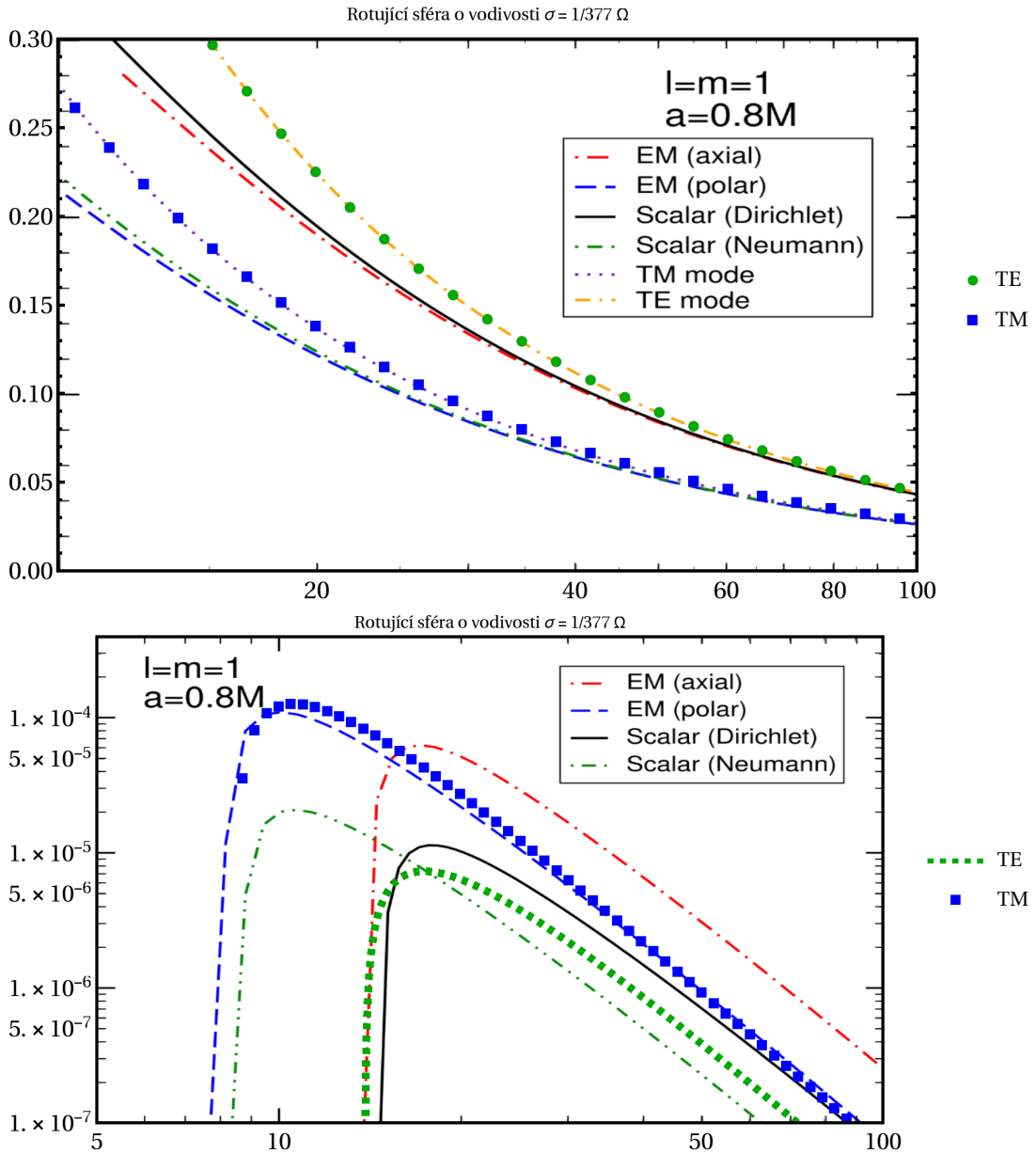
$$|\Phi_0|^2 = \frac{|\Phi_2|^2}{\Delta^2} \quad (5.57)$$

a následně využít vlastností řešení Teukolskeho rovnice. V řeči Teukolského funkce ${}_sR_{\ell m}$ lze zapsat překvapivě podmínku pro obě polarizace v jedné rovnici

$$\partial_r R_{-1} = \dots \quad (5.58)$$

Řešení znázornil Brito [23] (zde v obrázku 5.2) pro axiální (TM polarizace) a polární (TE) módy. Řešením je reálná a imaginární část úhlové frekvence záření, které není okamžitě během několika odrazů pohlcené zrcadlem.

Nabízí se otázka, zda by nešla superradiace na Kerrově černé díře modelovat pomocí klasického modelu. Kapitola 4 řeší také model rotujícího objektu uzavřeného v dokonale odrazivém zrcadle. Ukazuje se, že rotující válec má odlišné vlastnosti, avšak v nejnižší aproximaci je vidět podobnost obrázků 5.2 a 4.4, 4.5. Podrobně je vše popsáno v obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Původní obrázek vypůjčený z práce [23] je zde obohacený o výsledky této práce. Modré čtverečky, resp. zelená čárkovaná čára představují rozptyl TM, resp. TE módu na rotující sféře. S volbou klasických parametrů $a \rightarrow M, \Omega \rightarrow 1.28\Omega_H$ při $r_+ = 1, a = 0.8M$ se reálné složky frekvencí shodují s výsledky R. Brita pro rovnice obecné relativity v plochem prostoročasu. Imaginární složka pro TM mód pak odpovídá s výraznou přesností řešení komplikovaných obecně-relativistických rovnic. TE mód dává dobrou představu pro chování poblíž hranice $\omega_R - m\Omega_H = 0$.

Závěr

Elektromagnetické záření může být zesíleno odrazem od rotujících objektů. Termodynamické argumenty ukazují, že tak musí nastat pro libovolný axiálně symetrický objekt rotující okolo své osy symetrie úhlovou rychlostí o velikosti Ω , dopadá-li na něj vlna o frekvenci ω úměrná $e^{i(m\phi - \omega t)}$, kde ϕ je azimutální souřadnice v rovině kolmé na osu rotace, a pokud je splněna podmínka

$$\omega - m\Omega < 0.$$

Rotující válcová slupka odráží vlny, aniž by směšovala jednotlivé polarizace a módy záření. Problém rozptylu na rotující válcové slupce je tak mnohem snazší než rozptyl na rotující sféře, kde se mísí jak polarizace, tak módy. Na rozdíl od rotující sféry lze pro jakoukoliv dopadající vlnu na rotující válec nalézt explicitní podmínku superradiace $\omega < m\Omega$, která souhlasí s termodynamickou předpovědí. Pro rotující sféru nelze podmínku explicitně najít za pomoci Maxwellových rovnic, neboť řešení dokážeme najít pouze numerickou metodou, která nevede na absolutně přesné řešení.

Uzavření rotujících objektů do dokonale odrazivých zrcadel vede k existenci komplexních úhlových frekvencí vln $\omega = \omega_R + i\omega_I$, kde $-\omega_I$ je koeficient útlumu. Úhlová frekvence ω_R nezávisí na rotaci objektu, pouze na poměru b/a . Podmínka superradiace je závislá pouze na této reálné frekvenci, tedy superradiace nastane, pokud je splněna podmínka $\omega_R - m\Omega < 0$. Jelikož je $\omega_R \rightarrow 0$ pro $b/a \rightarrow \infty$, vždy pro vlnu s $m \neq 0$ k superradiaci a následnému exponenciálnímu nárůstu dojde, stačí dostatečně zvětšit zrcadlo, v němž se rotující objekt vyskytuje.

Efekt superradiace (stejně jako jev absorpce) je spojený s disipací energie na povrchu rotujícího válce či sféry, kde se vytváří Jouleovo teplo. Tento efekt reálně nastává při rozptylu záření na vodivých objektech, nikoliv potom při rozptylu na černé díře, kde je podstatou superradiace vlna se zápornou energií vznikající v ergosféře. Ukázalo se, že výsledky klasické fyziky lze dobře aproximovat rozptyl záření na Kerrově černé díře pro mód $\ell = m = 1$. Dle fenomenologické představy, kdy je na černou díru pohlíženo jako na tuhou vodivou membránu o impedanci vakua, taktéž dochází k disipaci vznikem příslušných plošných proudů a na jev se dá nahlížet jako na disipativní. Práce tedy ukazuje, že rotační superradiace zde není důsledkem mimořádného chování speciálních řešení polních rovnic v Kerrově prostoročase, ale jev obecnější.

Je vidět, že postupy vedoucí k výsledkům jak v klasické fyzice, tak v obecné relativitě jsou podobné. Hlavním rozdílem je však složitost příslušných funkcí, která si vynucuje využití komplikovanějších a výpočetně náročnějších metod k získání správných výsledků. Je tedy možné, že v některých situacích by elektromagnetickou část interakce mezi rotující černou dírou a hmotou v jejím okolí šlo úspěšně aproximovat klasickým modelem, např. právě zde uvažované rotující vodivé slupky.

A. Matematika

V tomto dodatku je shrnuta matematika používaná v rámci diplomové práce. Nejedná se o podrobný výkladový text, nýbrž o průřez látkou s nejdůležitějšími definicemi a teorémy, které jsou v rámci práce využívány.

A.1 Sférické Besselovy funkce

Cylindrické Besselovy funkce byly probrány v práci [13]. Lze ukázat, že tyto funkce odpovídají radiálním profilům řešení Laplaceovy i vlnové rovnice ve válcových souřadnicích. Řešení těchto rovnic se zvolenou sférickou bází je již různé. Radiální průběh řešení vlnové rovnice odpovídá právě sférickým Besselovým funkcím.

Definice 1 (Sférická Besselova rovnice). *Nechť $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je třídy $C^2(\mathbb{C})$. Funkce f splní sférickou Besselovu rovnici ℓ . řádu, právě když*

$$\left(z^2 \frac{d^2}{dz^2} + 2z \frac{d}{dz} + z^2 - \ell(\ell + 1) \right) f(z) = 0. \quad (\text{SBR})$$

Definice 2 (Sférická Besselova funkce). *Nechť je $J_\ell(z)$ cylindrická Besselova funkce prvního druhu, resp. $Y_\ell(z)$ Weberova cylindrická funkce. Sférická Besselova funkce prvního druhu $j_\ell(z)$, resp. Weberova sférická funkce $y_\ell(z)$ je definována vztahem*

$$j_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(z) \quad \text{resp.} \quad y_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(z). \quad (\text{A.1})$$

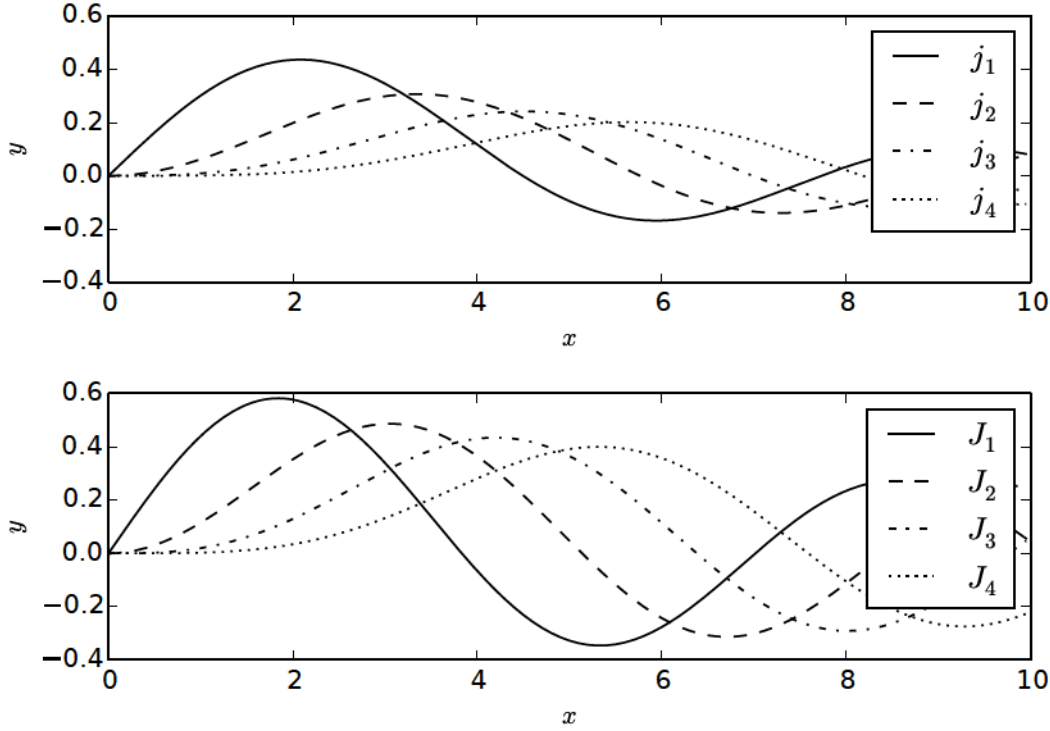
Poznámka. Již u cylindrických funkcí šla najít dvojznačnost v terminologii, kdy Weberova funkce Y_ℓ je občas nazývána Neumannovou funkcí N_ℓ . Stejně tak se lze setkat se značením n_ℓ pro sférickou Neumannovu funkci na místo y_ℓ . Analogické je také zavedení sférických Hankelových funkcí $h_\ell^{(i)}$.

Věta 1 (Řešení SBR). *Sférická Besselova funkce j_ℓ a sférická Weberova funkce y_ℓ řeší (SBR).*

Komentář. Ze série knih o transcendentálních funkcích [39] je známo, že Besselovy funkce J_ℓ, Y_ℓ řeší Besselovu rovnici. Jedním z důsledků je, že pokud F_ℓ reprezentuje libovolnou funkci z množiny $\{J_\ell, Y_\ell\}$, platí vztah

$$\frac{dF_\ell}{dz}(z) = \frac{F_{\ell-1}(z) - F_{\ell+1}(z)}{2}, \quad (\text{A.2})$$

nechť f_ℓ reprezentuje funkci z množiny $\{j_\ell, y_\ell\}$, poté platí díky rekurentním vzor-



Obrázek A.1: Sférické Besselovy funkce j_ℓ jsou s válcovými J_ℓ svázány vztahem (A.1). Zajímavostí je, že sférické Besselovy funkce jsou z hlediska speciálních funkcí poměrně jednoduché – jde o kombinace sinů, kosinů a mocnin argumentu, např. $j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x}$.

cúm

$$\frac{df_\ell}{dz}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z^3}} \left[\ell F_{\ell+\frac{1}{2}}(z) - z F_{\ell+\frac{3}{2}}(z) \right], \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^2 f_\ell}{dz^2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z^7}} \left[(\ell(2\ell^2 + \ell - 3) - (2\ell + 1)z^2) F_{\ell+\frac{3}{2}}(z) + \right. \quad (\text{A.4})$$

$$\left. + z(-\ell^2 + \ell + z^2) F_{\ell+\frac{5}{2}}(z) \right], \quad (\text{A.5})$$

odtud lze získat s použitím rekurentních vzorců

$$z^2 \frac{d^2 f_\ell}{dz^2}(z) + 2z \frac{df_\ell}{dz}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\ell^2 + \ell - z^2) F_{\ell+\frac{1}{2}}(z) = (\ell^2 + \ell - z^2) f_\ell(z). \quad (\text{A.6})$$

■

Důsledek. Sférická Besselova rovnice (SBR) má dvoudimenzionální prostor řešení. Báze tohoto prostoru je množina $B = \{j_\ell, y_\ell\}$. Zavedením sférických Hankelových funkcí prvního a druhého druhu

$$h_\ell^{(1)}(z) = j_\ell(z) + iy_\ell(z) \quad \text{a} \quad h_\ell^{(2)}(z) = j_\ell(z) - iy_\ell(z) \quad (\text{A.7})$$

lze zapsat alternativní tvar báze $\{h_\ell^{(1)}, h_\ell^{(2)}\}$, který bude v této práci využíván především.

Poznámka. Sférická Besselova rovnice nabízí možnost využívat Wronského determinanty (dále Wronskiány), pro (SBR) jsou ve vlastní práci využity tyto:

$$\text{Wr}(j_\ell(z), h_\ell^{(1)}(z)) = \frac{i}{z^2}, \quad \text{Wr}(j_\ell(z), y_\ell(z)) = \frac{1}{z^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Wr}(j_\ell(z), h_\ell^{(2)}(z)) = -\frac{i}{z^2}, \quad \text{Wr}(h_\ell^{(2)}(z), h_\ell^{(1)}(z)) = \frac{2i}{z^2}. \quad (\text{A.9})$$

V práci jsou také používány funkce $\hat{j}_\ell(x) = xj_\ell(x)$ a analogicky $\hat{h}_\ell^{(i)}(x)$. Wronskiány pro tyto funkce jsou potom

$$\text{Wr}(\hat{j}_\ell(z), \hat{h}_\ell^{(1)}(z)) = i, \quad \text{Wr}(\hat{j}_\ell(z), \hat{y}_\ell(z)) = 1, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Wr}(\hat{j}_\ell(z), \hat{h}_\ell^{(2)}(z)) = -i, \quad \text{Wr}(\hat{h}_\ell^{(2)}(z), \hat{h}_\ell^{(1)}(z)) = 2i. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Asociované Legendreovy polynomy

Při řešení vlnové rovnice ve sférických souřadnicích je potřeba sledovat nejen radiální část, jejíž profil odpovídá řešení sférické Besselovy rovnice, ale také úhlovou část, v níž se objeví kulové funkce (sférické harmoniky). K tomu je potřeba definovat asociované Legendreovy polynomy (dále jen ALP) a ukázat základní z jejich vlastností.

Definice 3 (Rovnice ALP). *Nechť $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell\}$ a necht $f_\ell^m \in C^\infty((-1,1))$, potom rovnici*

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{df_\ell^m}{dz} \right] + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] f_\ell^m = 0 \quad (\text{RALP})$$

nazveme rovnici asociovaných Legendreových polynomů (RALP).

Definice 4 (ALP). *Nechť P_ℓ jsou Legendreovy polynomy, potom*

$$P_\ell^m(z) := (-1)^m \sqrt{(1 - z^2)^m} \frac{d^m}{dz^m} P_\ell(z) \quad (\text{ALP})$$

se nazývají ALP. Analogicky lze polynomy zavést za pomoci [40] formule

$$P_\ell^m(z) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} \sqrt{(1 - z^2)^m} \frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}} \left[(z^2 - 1)^\ell \right]. \quad (\text{A.12})$$

Poznámka. Skutečnost, že dvě zavedení ALP nejsou ve sporu, lze nahlédnout v [40]. Rodrigezova formule je především návodná k počítání polynomů se záporným m .

Poznámka. Práce s ALP vyžaduje vyšší pozornosti především díky dvěma konvencím, které se aktivně používají. První konvence je spojena se jmény Abramowitza a Steguna, které obsahují Condon-Shortleyho fázi $(-1)^m$. Druhá konvence tuto fázi opomíjí [40], poté se index m píše dole a platí $P_\ell^m = (-1)^m P_{\ell m}$.

Věta 2 (ALP při $\pm m$). *Nechť P_ℓ^m je ALP, kde ℓ probíhá celá nezáporná čísla a m všechna celá čísla od $-\ell$ do ℓ . Potom platí*

$$P_\ell^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(z). \quad (\text{A.13})$$

Komentář. Odůvodnění je podáno v [39]. ■

A.3 Skalární sférické harmoniky

Skalární sférické harmoniky (SSH) se ve fyzice objevují při řešení Schrödingrovovy rovnice pro vodíkový atom nebo při hledání řešení Laplaceovy úlohy na sféře. V této práci je nalezneme při řešení vlnové rovnice ve sférických souřadnicích, je proto užitečné studovat jejich vlastnosti.

Definice 5 (Definice SSH). *Nechť P_ℓ^m je ALP, ℓ nezáporné celé číslo a m probíhá celá čísla od $-\ell$ do ℓ , poté je SSH definována vztahem*

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (\text{SSH})$$

Věta 3 (Sdružení SSH). *Nechť je $Y_{\ell m}$ SSH, potom*

$$Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell, -m}(\theta, \phi). \quad (\text{A.14})$$

Komentář. Z definice lze rozepsat díky vlastnosti (A.13) pravá strana

$$RHS = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} P_\ell^{-m}(\cos \theta) e^{-im\phi} = \quad (\text{A.15})$$

$$= (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\cos(\theta)) (e^{im\phi})^* = Y_{\ell m}^*(\theta, \phi), \quad (\text{A.16})$$

během úpravy předpokládáme reálnost ALP při reálném definičním oboru $[-1, 1]$. ■

Věta 4 (Ortogonalita SSH). *Nechť je $Y_{\ell m}$ SSH, potom platí*

$$\int d\Omega [Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi)] = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.17})$$

kde je obor integrace jednotková sféra.

Komentář. Platnost vztahu v [39]. ■

A.4 Vektorové sférické harmoniky

Efektivně využitý formalismus sférických harmonik dovoluje definovat vektorové sférické harmoniky VSH. Ty poprvé spařily světlo světa v Thornově článku [25]. Použil je např. Barrera [41] při rozvoji magnetostatického pole a později Carrascal [42], který ukázal, že obecné řešení Maxwellových rovnic ve vakuu lze dekomponovat do zářivých polí, která jsou dána právě VSH.

Definice 6 (VSH). *Nechť je dána referenční soustava s polohovým vektorem \mathbf{r} , $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ a $Y_{\ell m}$ je SSH, potom definujeme tři VSH (magnetickou, elektrickou a radiální)*

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} = r\mathbf{n} \times \nabla Y_{\ell m}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} = r \nabla Y_{\ell m} = -\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} = Y_{\ell m} \mathbf{n}. \quad (\text{A.20})$$

Lemma 5. *Nechť jsou $Y_{\ell m}$ SSH, nechť $\mathbf{A} = Y_{\ell m}^* \nabla Y_{\ell' m'}$, poté*

$$\int d\Omega \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{A.21})$$

pro obecný poloměr a sféry, přes níž integrujeme.

Komentář. K důkazu využijeme triku z [42], kdy budeme zkoumat integrál

$$\mathcal{I} = \int d^3\mathbf{x} \nabla \cdot [\Theta(r - \|\mathbf{x}\|)\mathbf{A}] = 0, \quad (\text{A.22})$$

jehož pravá strana je nulová, neboť integrace přes hranici oblasti $\{\|\mathbf{x}\| > r\}$ dává nulový příspěvek. Integrál lze přepsat pomocí per partes

$$\mathcal{I} = \int d^3\mathbf{x} \Theta(r - \|\mathbf{x}\|) \nabla \cdot \mathbf{A} - \int d^3\mathbf{x} \delta(r - \|\mathbf{x}\|) \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{A.23})$$

očividně $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$, tudíž získáváme

$$\mathcal{I} = \underbrace{\int_0^a r^2 dr}_{\text{číslo}} \int d\Omega \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.24})$$

■

Věta 6. *VSH jsou ortogonální pod skalárním součinem daným integrací přes jednotkovou sféru*

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int d\Omega (\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g}), \quad (\text{A.25})$$

kde $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Komentář. Nejprve lze jednoduše ukázat, že libovolná harmonika elektrická je kolmá na magnetickou či radiální, neboť platí vztah $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} = -\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}$, přičemž

\mathbf{n} je směr harmoniky radiální. Stejným způsobem lze ukázat, že magnetická harmonika je kolmá na radiální, díky tomu tedy skalární součin dvou typově-různých harmonik je nulový.

Ortogonalitu jednotlivých módů stejných typů dokážeme prostým dosazením

$$\left\langle \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \middle| \mathbf{Y}_{\ell' m'}^{(\text{el})} \right\rangle = \int d\Omega \left(r^2 \nabla Y_{\ell m}^* \cdot \nabla Y_{\ell' m'} \right) = -r^2 \int d\Omega \left(Y_{\ell m}^* \Delta Y_{\ell' m'} \right) = \quad (\text{A.26})$$

$$= \ell(\ell + 1) \int d\Omega \left(Y_{\ell m}^* Y_{\ell' m'} \right) = \ell(\ell + 1) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.27})$$

$$\left\langle \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \middle| \mathbf{Y}_{\ell' m'}^{(\text{mag})} \right\rangle = \int d\Omega \left(r^2 \nabla Y_{\ell m}^* \cdot \nabla Y_{\ell' m'} \right) = \ell(\ell + 1) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.28})$$

$$\left\langle \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} \middle| \mathbf{Y}_{\ell' m'}^{(\text{rad})} \right\rangle = \int d\Omega \left(Y_{\ell m}^* Y_{\ell' m'} \right) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.29})$$

přičemž využíváme (A.21) z lemmatu 5 v integraci per partes a pro magnetické harmoniky navíc

$$\left(\mathbf{n} \times \nabla Y_{\ell m}^* \right) \cdot \left(\mathbf{n} \times \nabla Y_{\ell' m'} \right) = \nabla Y_{\ell m}^* \cdot \nabla Y_{\ell' m'}. \quad (\text{A.30})$$

■

Věta 7. Necht $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ a $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}$ je VSH, poté platí

$$\nabla \cdot \left[f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \right] = 0. \quad (\text{A.31})$$

Komentář. Obecnou platnost vztahu lze dokázat v jedné referenční soustavě, v tomto případě je ideální využít divergenci ve sférických souřadnicích

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta \left(\sin \theta A_\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A_\phi, \quad (\text{A.32})$$

a tedy

$$\nabla \cdot \left[f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \right] = \underbrace{\nabla f(r) \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}}_0 + f(r) \nabla \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} = f(r) \nabla \cdot (r \mathbf{n} \times \nabla Y_{\ell m}) = \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\partial_\theta \left(\sin \theta (\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})})_\theta \right) + \partial_\phi (\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})})_\phi \right) = \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left(-\partial_\theta \partial_\phi Y_{\ell m} + \partial_\phi \partial_\theta Y_{\ell m} \right) = 0. \quad (\text{A.35})$$

■

Věta 8. Necht $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ a $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}$ je VSH, poté platí

$$\nabla \times \left[f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \right] = -\frac{\ell(\ell + 1)}{r} f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} - \left(f'(r) + \frac{f(r)}{r} \right) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \quad (\text{A.36})$$

Věta 9. Necht $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}$ je magnetická VSH, potom platí

$$\Delta \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} = -\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}. \quad (\text{A.37})$$

B. Elektromagnetismus

B.1 EM vlny ve válcových souřadnicích

V hlavním textu jsme ukázali tvar válcových vln, které kolmo dopadají na rotující válec. Nejedná se však o kompletní řešení vlnových rovnic při volbě vektorového potenciálu $\mathbf{A} = A e_x$. Vlnovou rovnici pro skalární potenciál lze vyřešit za pomoci Fourierovy transformace. Výsledné potenciály mají tvar

$$A^{\text{TE}}(\rho, \varphi, z) = \int_{\mathbb{R}} dq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d\omega \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{mq\omega}^{\text{TE}}(\rho) \exp[i(m\varphi + qz - \omega t)]}_{A_q^{\text{TE}}(\rho, \varphi, z)} \quad (\text{B.1})$$

$$\Phi^{\text{TE}}(\rho, \varphi, z) = \int_{\mathbb{R}} dq \frac{qc^2}{\omega} A_q^{\text{TE}}(\rho, \varphi, z), \quad (\text{B.2})$$

radiální funkce $f_{mq\omega}^{\text{TE}}$ lze za volby specifického $\omega > 0$ a definice $k = \omega/c$ psát ve tvaru

$$f_{mq\omega}^{\text{TE}}(\rho) = \begin{cases} \alpha_{mq\omega}^{\text{TE}} H_m^{(2)}(\rho\sqrt{k^2 - q^2}), & \text{sbíhavá TE vlna,} \\ \beta_{mq\omega}^{\text{TE}} H_m^{(1)}(\rho\sqrt{k^2 - q^2}), & \text{rozbíhavá TE vlna,} \\ \gamma_{mq\omega}^{\text{TE}} J_m(\rho\sqrt{k^2 - q^2}), & \text{stojatá TE vlna.} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Důležitá je podmínka harmonické kalibrace

$$\Phi_q^{\text{TE}} = \frac{qc^2}{\omega} A_q^{\text{TE}}, \quad (\text{B.4})$$

kteřá říká, že při volbě jednoho fixního $q = 0$ vymizí skalární potenciál. Pokud bychom nepožadovali $q = 0$, objevil by se v elektrickém poli dodatečný člen úměrný $\nabla \Phi_{mq\omega}^{\text{TE}}$, který by způsobil, že výsledná vlna ve skutečnosti nebude mít TE polarizaci.

B.2 EM vlny ve sférických souřadnicích

Jak ukázal Thorne [25] či Carrascal [42], existuje dekompozice řešení homogenních Maxwellových rovnic do VSH, jejichž vlastnosti byly ukázány v dodatku A.4.

Věta 10 (Vlnová rovnice). *Elektromagnetické pole ve vakuu splní polní rovnice*
 $\square \mathbf{E} = 0$ a $\square \mathbf{B} = 0$.

Komentář. Důkaz je triviální s využitím rotace na rotační Maxwellovy rovnice, jež musí každé EM pole splnit. Důkaz stačí provést pro \mathbf{E} , magnetické pole je

analogické

$$0 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.5})$$

$$= \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_0) - \Delta \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t (\partial_t \mathbf{E}) = -\square \mathbf{E}, \quad (\text{B.6})$$

kde fázová rychlost šíření je $v = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = c$. ■

Věta 11 (Magnetické vlny). *Nechť $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}$ je VSH, $b_{\ell m}(x)$ reprezentuje libovolnou sférickou Besselovu funkci a vektorové pole \mathbf{E} má tvar*

$$\mathbf{E}(x^\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(b_{\ell m}(kr) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} e^{-i\omega t} \right), \quad (\text{B.7})$$

poté pole \mathbf{E} řeší vlnovou rovnici $\square \mathbf{E} = 0$.

Komentář. Sčítání řady komutuje s vlnovým operátorem \square (důkaz této vlastnosti nepodáváme), a proto se stačí ptát na otázku, zda je platná rovnice

$$0 = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \right) \left(b_{\ell m}(kr) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} e^{-i\omega t} \right), \quad (\text{B.8})$$

$$0 = \Delta \left(b_{\ell m}(kr) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \right) e^{-i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} b_{\ell m}(kr) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.9})$$

$$0 = \Delta (b_{\ell m}(kr)) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} + b_{\ell m}(kr) \Delta \left(\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} b_{\ell m}(kr) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}, \quad (\text{B.10})$$

$$0 = \Delta (b_{\ell m}(kr)) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} - b_{\ell m}(kr) \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} + \frac{\omega^2}{c^2} b_{\ell m}(kr) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}, \quad (\text{B.11})$$

$$0 = \Delta (b_{\ell m}(kr)) - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) b_{\ell m}(kr), \quad (\text{B.12})$$

poslední z výrazů je sférickou Besselovou rovnicí, avšak pouze tehdy, platí-li definiční vztah $\omega = kc > 0$. ■

Věta 12 (Elektrické a radiální vlny). *Nechť $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}$ je VSH, $b_{\ell m}(x)$ reprezentuje libovolnou sférickou Besselovu funkci a vektorové pole \mathbf{E} má tvar*

$$\mathbf{E}(x^\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \nabla \times \left(b_{\ell m}(kr) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} e^{-i\omega t} \right), \quad (\text{B.13})$$

poté pole \mathbf{E} řeší vlnovou rovnici $\square \mathbf{E} = 0$.

Komentář. Laplaceův operátor komutuje s operátorem rotace, jak lze nahlédnout skrze definice těchto operátorů. Odtud $\Delta (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, pokud $\Delta \mathbf{A} = 0$. Časová derivace s rotací také komutuje, a proto je-li pole \mathbf{A} vlnou, je i jeho rotace vlnou. Komutaci nekonečného součtu a Laplaceova operátoru opět ponecháváme nedokázanou. ■

Důsledek. Pokud elektrické pole nabude tvaru (B.7), lze magnetické pole \mathbf{B} vyjádřit pomocí (B.13), neboť musí platit

$$\mathbf{B} = \int dt \nabla \times \mathbf{E} = \frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (\text{B.14})$$

navíc musí platit, že $\square \mathbf{B} = 0$, a díky větě 12 víme, že rotace elektrického pole není problém. Opačně, pokud by magnetické pole mělo tvar (B.7), bude mít elektrické pole tvar (B.13) až na přidanou konstantu z Maxwellových rovnic.

Věta 13 (Řešení Maxwellových rovnic). *Nechť $f_\ell(r), g_\ell(r)$ jsou sférické Besselovy funkce radiální souřadnice, $\omega > 0$, úhlové závislosti $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})}, \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})}, \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})}$ jsou VSH, potom obecné monochromatické řešení vakuových Maxwellových rovnic ve sférických souřadnicích má tvar*

$$\mathbf{E} = \sum_{\ell m} \left(f_\ell(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} - ic \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}} g_\ell(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} - ic \left(g'_\ell(\hat{r}) + \frac{g_\ell(\hat{r})}{\hat{r}} \right) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \right) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\ell m} \left(g_\ell(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} + \frac{i}{c} \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}} f_\ell(\hat{r}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} + \frac{i}{c} \left(f'_\ell(\hat{r}) + \frac{f_\ell(\hat{r})}{\hat{r}} \right) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \right) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.16})$$

kde je využita škálovaná radiální souřadnice $\hat{r} = kr = \omega r/c$ a derivace f'_ℓ, g'_ℓ vyjadřují derivaci dle této nové souřadnice.

Komentář. O úplnosti řešení podal důkaz Barrera a Carascal [41, 42]. ■

Věta 14 (Radiální průběh vln). *Nechť \mathbf{E}, \mathbf{B} je elektromagnetická vlna z věty 13 a $\alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}, \gamma_{\ell m}, A_{\ell m}, B_{\ell m}, G_{\ell m}$ jsou libovolná komplexní čísla. Potom platí*

$$f_\ell(r) = \begin{cases} \alpha_{\ell m} h_\ell^{(2)}(\hat{r}), & \text{sbíhavá vlna,} \\ \beta_{\ell m} h_\ell^{(1)}(\hat{r}), & \text{rozbíhavá vlna,} \\ \gamma_{\ell m} j_\ell(\hat{r}), & \text{stojatá vlna,} \end{cases} \quad g_\ell(r) = \begin{cases} A_{\ell m} h_\ell^{(2)}(\hat{r}), & \text{sbíhavá vlna,} \\ B_{\ell m} h_\ell^{(1)}(\hat{r}), & \text{rozbíhavá vlna,} \\ G_{\ell m} j_\ell(\hat{r}), & \text{stojatá vlna,} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

kde j_ℓ je sférická Besselova funkce prvního druhu a $h_\ell^{(i)}$ je sférická Hankleova funkce i . druhu.

Komentář. Důkaz je důsledkem rozvoje

$$j_\ell(x) \underset{0}{\sim} x^\ell, \quad h_\ell^{(1)}(x) \underset{0}{\sim} h_\ell^{(2)}(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\ell}, \quad (\text{B.18})$$

$$j_\ell(x) \underset{\infty}{\sim}, \quad h_\ell^{(1/2)}(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x} e^{\pm ix}, \quad (\text{B.19})$$

kdy je zřejmé, že jediné regulární řešení v počátku je j_ℓ . Řešení věty 13 navíc předpokládá $\omega > 0$ a časový periodický průběh $e^{-i\omega t}$. ■

B.3 Tensor EM pole ve sférických souřadnicích

Elektromagnetická teorie v relativistickém formalismu při výběru nějaké inerciální soustavy musí být konzistentní s klasickou Maxwellovou teorií. Tvar tenzoru elektromagnetického pole tedy může být určen ze srovnání Maxwellových rovnic v obou formalismech.

Inhed z definice Maxwell-Faradayova tenzoru $F^{\mu\nu} = \nabla^\nu A^\mu - \nabla^\mu A^\nu$ je patrné, že je antisymetrický, tedy $F^{\mu\mu} = 0$ pro každé μ . Dále $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$ lze rozepsat pro $\mu = 0$

$$\nabla_b F^{0b} = \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\alpha (\sqrt{-\eta} F^{0\alpha}) = \mu j^0 \equiv c^{-2} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (\text{B.20})$$

$$\sqrt{-\eta} = r^2 \sin \theta, \quad (\text{B.21})$$

$$\nabla_\alpha F^{0\alpha} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} [r^2 \sin \theta F^{01}] + \frac{\partial}{\partial \theta} [r^2 \sin \theta F^{02}] \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} F^{03} = \quad (\text{B.22})$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 F^{01}] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta F^{02}] + \frac{\partial F^{03}}{\partial \phi}, \quad (\text{B.23})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 E_r] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta E_\theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}, \quad (\text{B.24})$$

a díky srovnání $j^0 = c\rho$ plyne

$$F^{01} = \frac{1}{c} E_r, \quad F^{02} = \frac{1}{rc} E_\theta, \quad F^{03} = \frac{1}{cr \sin \theta} E_\phi. \quad (\text{B.25})$$

Podruhé lze položit index v Maxwellově rovnici prostorový

$$\mu j^1 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta F^{12}] + \frac{\partial F^{13}}{\partial \phi} - \frac{1}{c^2} \partial_t E_r \quad (\text{B.26})$$

$$\mu j^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 F^{21}] + \frac{\partial F^{23}}{\partial \phi} - \frac{1}{c^2 r} \partial_t E_\theta, \quad (\text{B.27})$$

$$\mu j^3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 F^{31}] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta F^{32}] - \frac{1}{c^2 r \sin \theta} \partial_t E_\phi \quad (\text{B.28})$$

a srovnat s vakuovým 3D tvarem $\nabla \times \mathbf{B} - c^{-2} \partial_t \mathbf{E} = \mu \mathbf{j}$ ve složkách

$$\mu j^r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} [B_\phi \sin \theta] - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{c^2} \partial_t E_r, \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\mu}{r} j_\theta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} [r B_\phi] \right) - \frac{1}{c^2 r} \partial_t E_\theta, \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\mu}{r \sin \theta} j_\phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} [r B_\theta] - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{c^2 r \sin \theta} \partial_t E_\phi. \quad (\text{B.31})$$

Čtyřproud j^μ tedy identifikujeme vztahy

$$j^0 = \rho, \quad j^1 = j_r, \quad j^2 = \frac{1}{r} j_\theta, \quad j^3 = \frac{1}{r \sin \theta} j_\phi \quad (\text{B.32})$$

a Maxwellovy rovnice jsou splněny za platnosti

$$F^{12} = \frac{1}{r}B_\phi, \quad F^{13} = -\frac{1}{r \sin \theta}B_\theta, \quad F^{23} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}B_r. \quad (\text{B.33})$$

Maticový (složkový) tvar tenzoru EM pole a čtyřproudu tak nabývají tvaru

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_r & \frac{1}{cr}E_\theta & \frac{1}{cr \sin \theta}E_\phi \\ -F^{01} & 0 & \frac{1}{r}B_\phi & -\frac{1}{r \sin \theta}B_\theta \\ -F^{02} & -F^{12} & 0 & \frac{1}{r^2 \sin \theta}B_r \\ -F^{03} & -F^{13} & -F^{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_r \\ \frac{1}{r}j_\theta \\ \frac{1}{r \sin \theta}j_\phi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

B.4 Podmínky na rozhraní sféry

Elektromagnetické pole lze popsat tensorem druhého řádu $F^{\mu\nu}$. Maxwellovy rovnice udávající evoluci Maxwell-Faradaya tensoru

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \mu_0 j^\mu, \quad F_{[\mu\nu;\rho]\text{cycl.}} = 0 \quad (\text{B.35})$$

musí být splněny v každém bodě prostoročasu. Ke sférické slupce o poloměru a je tečný čtyřvektor ve sférických souřadnicích $n^\mu = (0 \ 1 \ 0 \ 0)_{\text{spher.}}$. Na rozhraní mají Maxwellovy rovnice tvar

$$n_\nu [F^{\mu\nu}] = [F^{\mu 1}] = \mu_0 j_s^\mu = \mu_0 \left(\rho_s u^\mu + (\delta_\beta^\mu + n^\mu n_\beta) F^{\beta\lambda} u_\lambda \right), \quad (\text{B.36})$$

$$n_\nu [{}^*F^{\mu\nu}] = 0. \quad (\text{B.37})$$

Rovnice odpovídají šesti podmínkám na rozhraní, z nichž duální tenzor určuje nulové skoky $[B_r] = [E_\theta] = [E_\phi] = 0$ a první z rovnic definuje podmínky

$$[E_r] = \gamma \left(\rho_s / \epsilon_0 + \mu_0 \sigma_s v E_\phi \right), \quad (\text{B.38})$$

$$[B_\theta] = \mu_0 \gamma \left(\sigma_s E_\phi + v \rho_s \right), \quad (\text{B.39})$$

$$[B_\phi] = -\mu_0 \sigma_s \gamma (E_\theta + v B_r). \quad (\text{B.40})$$

B.5 Kulový rezonátor

Dekomponované řešení Maxwellových rovnic z věty 13 existuje v libovolném bodě prostoročasu x^μ . Uvnitř koule o poloměru a existuje jediné regulární řešení,

kořen	$j_1(x)$	$j_2(x)$	$\frac{d\hat{j}_1}{dx}(x)$	$\frac{d\hat{j}_2}{dx}(x)$
1	4.49341	5.76346	2.74371	3.87024
2	7.72525	9.09501	6.11676	7.44309
3	10.9041	12.3229	9.31662	10.713
4	14.0662	15.5146	12.4859	13.9205
5	17.2208	18.6890	15.6439	17.1027
6	20.3713	21.8539	18.7963	20.272

Tabulka B.1: Rezonanční frekvence jsou dány kořeny sférických Besselových funkcí a jejich příslušných derivací. Jedná se o ty frekvence, při nichž elektrické pole vymizí na povrchu příslušné sféry. Díky této vlastnosti mají frekvence význam i při rozptylu vnějšího záření, neboť pro tyto hodnoty \hat{a} dochází k nulovému skoku magnetického pole, nedochází k disipaci, a tudíž dochází k totálnímu odrazu.

a to stojaté vlnění reprezentované sférickou Besselovou funkcí $j_l(\hat{r})$. Maxwellovy rovnice na rozhraní pro skok \mathbf{E}^{\parallel} a \mathbf{B}^{\perp} dají

$$[f_\ell] = 0, \quad \left[\frac{d\hat{g}_\ell}{d\hat{r}} \right] = 0 \quad (\text{B.41})$$

odkud ihned plyne nutná podmínka rezonátoru

$$j_\ell(\hat{a}) = 0, \quad \frac{d\hat{j}_\ell}{d\hat{r}}(\hat{a}) = 0 \quad (\text{B.42})$$

pro TE, resp. TM vlnu. Vybrané hodnoty pro $\ell = 1, 2$, při nichž dochází k rezonanci, ukazuje tabulka B.1.

B.6 Skok tečného magnetického pole

Cílem této kapitoly je ukázat tvar Maxwellových rovnic na rozhraní rotující vodivé slupky pro elektromagnetické pole z věty 13. Spojitosti na rozhraní

$$[f_\ell] = 0, \quad [\hat{g}'_\ell] = 0 \quad (\text{B.43})$$

jsou již ukázány v hlavním textu. Uvažován je speciální vodivostní profil $\delta = \delta^0/\gamma$, neboli $\sigma_s = \sigma_s^0/\gamma$. Skok tečného magnetického pole na rozhraní generuje plošné proudy na sféře

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}_s = \gamma \mu_0 \sigma_s \left(\mathbf{E}_{\parallel} + v B_r \mathbf{e}_\theta - \frac{v^2}{c^2} E_\phi \mathbf{e}_\phi \right) + \frac{v}{c^2} [E_r] \mathbf{e}_\phi, \quad (\text{B.44})$$

kde $\mathbf{j}_s = \sigma_s \tilde{\mathbf{E}} + \rho_s \mathbf{v}$ a plošná hustota náboje ρ_s je daná z rovnice pro skok normálové složky elektrického pole (B.38). V tomto elegantním tvaru lze rovnice

projektovat na magnetické a elektrické harmoniky. Vektorového součinu na levé straně rovnice se lze zbavit pomocí vztahů

$$\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} + \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} - \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} = 0. \quad (\text{B.45})$$

Při dosazení příslušných polí \mathbf{E} , \mathbf{B} automaticky vypadávají radiální části, také díky tomu, že $\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{rad})} = 0$ a na pravé straně se části obsahující radiální pole neobjevují. Rovnice (B.44) tak získává tvar

$$\begin{aligned} \sum_{\ell m} \left(-[g_\ell] \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} + \frac{i}{c\hat{a}} [\hat{f}'_\ell] \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \right) = & -i \frac{v}{c} \sum_{\ell m} \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{a}} [g_\ell] Y_{\ell m} \mathbf{e}_\phi + \\ & + \gamma \mu_0 \sigma_s \sum_{\ell m} \left(f_\ell(\hat{a}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} - \frac{ic}{\hat{a}} \hat{g}'_\ell(\hat{a}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} + i \frac{v}{c} \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{a}} f_\ell(\hat{a}) Y_{\ell m} \mathbf{e}_\theta \right) - \\ & - \gamma \mu_0 \sigma_s \frac{v^2}{c^2} \sum_{\ell m} \left(f_\ell(\hat{a}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \cdot \mathbf{e}_\phi - \frac{ic}{\hat{a}} \hat{g}'_\ell(\hat{a}) \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Při projekci rovnic je potřeba využít vztahů

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \cdot \mathbf{e}_\phi = \partial_\theta Y_{\ell m}, \quad \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \cdot \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\phi Y_{\ell m}, \quad (\text{B.47})$$

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{mag})} \cdot \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\phi Y_{\ell m}, \quad \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\text{el})} \cdot \mathbf{e}_\theta = \partial_\theta Y_{\ell m}, \quad (\text{B.48})$$

a navíc ortogonalitu VSH. Schématicky má projekce tvar

$$\int d\Omega (\text{LHS} - \text{RHS}) \cdot \mathbf{Y}_{\ell' m'}^{(A)} = 0, \quad (\text{B.49})$$

kde příslušný index A rozlišuje magnetickou a elektrickou harmoniku. Jak již bylo naznačeno, projekce na radiální harmoniky není zajímavá, neboť je triviální a dává rovnost $0 = 0$. Po přeuspořádání členů mají rovnice na rozhraní tvar

$$\begin{aligned} \left[\frac{df_\ell}{d\hat{r}} \right] = & -i\delta^0 \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) j_\ell - c \frac{\Omega}{\omega} \sum_{\ell'} \frac{\ell'(\ell'+1)}{\ell(\ell+1)} [g_\ell] \mathcal{I}_{\ell' m}^{\ell m} + \\ & + \frac{\mu_0 \sigma_s^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} \left(f_{\ell'} K_{\ell' m}^{\ell m} + \frac{mc}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_{\ell'}}{d\hat{r}} \mathcal{I}_{\ell' m}^{\ell m} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

$$\begin{aligned} (\omega - m\Omega) [g_\ell] = & \frac{i\delta^0 \omega}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_\ell}{d\hat{r}} - \frac{i\Omega\delta^0}{c} \sum_{\ell'} \frac{\ell'(\ell'+1)}{\ell(\ell+1)} f_{\ell'} \mathcal{I}_{\ell' m}^{\ell m} - \\ & - \frac{\mu_0 \sigma_s^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} \left((f_{\ell'} \mathcal{I}_{\ell' m}^{\ell m}) + \frac{im^2 c}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_{\ell'}}{d\hat{r}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

kde jsou označeny integrály

$$\mathcal{I}_{\ell' m}^{\ell m} = \int d\Omega (\sin(\theta) Y_{\ell' m} \overline{\partial_\theta Y_{\ell m}}), \quad K_{\ell' m}^{\ell m} = \int d\Omega (\sin^2(\theta) \partial_\theta Y_{\ell' m} \overline{\partial_\theta Y_{\ell m}}). \quad (\text{B.52})$$

Tyto integrály lze více zjednodušit s použitím Wignerových $3j$ symbolů, které jsou se sférickými harmonikami svázány vztahem

$$\int d\Omega Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell_3 m_3} = \quad (\text{B.53})$$

$$= \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.54})$$

Identifikací $\sin(\theta)$, resp. $\sin^2(\theta)$ se sférickou harmonikou a rozepsáním vztahů pro $\partial_\theta Y_{\ell m}$, který je také úměrný lineární kombinaci sférických harmonik, lze integrály přepsat do tvaru

$$\mathcal{I}_{\ell m}^{\ell' m'} = \left[(\ell - 1) \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}} \delta_\ell^{\ell'+1} - (\ell' + 1) \sqrt{\frac{\ell'^2 - m'^2}{4\ell'^2 - 1}} \delta_\ell^{\ell'-1} \right] \delta_m^{m'}, \quad (\text{B.55})$$

$$K_{\ell m}^{\ell' m'} = \left[\frac{2\ell(\ell + 1)(\ell^2 + \ell - m^2) - 3m^2}{4\ell(\ell + 1) - 3} \delta_\ell^{\ell'} - \right. \quad (\text{B.56})$$

$$\left. - \frac{(\ell - 2)(\ell + 1)}{2\ell - 1} \sqrt{\frac{((\ell - 1)^2 - m^2)(\ell^2 - m^2)}{(2\ell - 3)(2\ell + 1)}} \delta_\ell^{\ell'+2} - \right. \quad (\text{B.57})$$

$$\left. - \frac{(\ell' - 2)(\ell' + 1)}{2\ell' - 1} \sqrt{\frac{((\ell' - 1)^2 - m'^2)(\ell'^2 - m'^2)}{(2\ell' - 3)(2\ell' + 1)}} \delta_\ell^{\ell'-2} \right] \delta_m^{m'}. \quad (\text{B.58})$$

B.7 Maticové rovnice rotující sféry

Cílem tohoto dodatku je přepsat rovnice (3.29) a (3.30), kde se uvažuje průběh vodivosti $\delta = \delta^0/\gamma$, do maticového tvaru. V rovnicích se vyskytuje člen pomalé rotace $\sim \Omega$ a relativistická korekce $\sim \Omega^2$. Každou rovnici tak v maticovém tvaru rozdělíme také na příspěvek od pomalých rotací a na korekci vysokých otáček.

Značení: Pro potřeby této kapitoly není potřeba explicitně vypisovat argument sférických funkcí. Situace je řešena pro skok na sféře o poloměru \hat{a} , proto pro zkrácení zápisu budeme psát $j_\ell \equiv j_\ell(\hat{a})$ atd.

Derivace dle parametru \hat{r} budeme značit jen pomocí diferenciálu, tedy

$$\frac{d}{d\hat{r}} \hat{h}_\ell^{(1)} \equiv d\hat{h}_\ell^{(1)} \quad (\text{B.59})$$

a analogicky u ostatních funkcí.

B.7.1 Skok f'

První z rovnic, kterou chceme upravit, je rovnice pro skok derivace f_ℓ , která má tvar

$$\begin{aligned} \left[\frac{df_\ell}{d\hat{r}} \right] &= -i\delta^0 \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) j_\ell - c \frac{\Omega}{\omega} \sum_{\ell'} \frac{\ell'(\ell' + 1)}{\ell(\ell + 1)} [g_{\ell'}] \mathcal{J}_{\ell' m}^{\ell m} + \\ &+ \frac{\mu_0 \sigma_s^0}{\ell(\ell + 1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} \left(f_{\ell'} K_{\ell' m}^{\ell m} + \frac{mc}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_{\ell'}}{d\hat{r}} \mathcal{J}_{\ell' m}^{\ell m} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

k tomu využijeme získaných vztahů z $[f_\ell] = 0$ a $[\hat{g}'_\ell] = 0$. Ty lze zapsat ve tvaru

$$\gamma_{\ell m} = \frac{\alpha_{\ell m} h_\ell^{(2)} + \beta_{\ell m} h_\ell^{(1)}}{j_\ell} \quad \text{a} \quad G_{\ell m} = \frac{A_{\ell m} d\hat{h}_\ell^{(2)} + B_{\ell m} d\hat{h}_\ell^{(1)}}{d\hat{j}_\ell}. \quad (\text{B.61})$$

Díky těmto rovnicím lze upravit levou stranu rovnice

$$\text{LHS} = \alpha_{\ell m} dh_{\ell}^{(2)} + \beta_{\ell m} dh_{\ell}^{(1)} - \frac{dj_{\ell}}{j_{\ell}} \left(\alpha_{\ell m} h_{\ell}^{(2)} + \beta_{\ell m} h_{\ell}^{(1)} \right) = \quad (\text{B.62})$$

$$= \frac{\alpha_{\ell m}}{j_{\ell}} \text{Wr}[j_{\ell}, h_{\ell}^{(2)}] + \frac{\beta_{\ell m}}{j_{\ell}} \text{Wr}[j_{\ell}, h_{\ell}^{(2)}] = -\frac{i}{\hat{a}^2 j_{\ell}} (\alpha_{\ell m} - \beta_{\ell m}). \quad (\text{B.63})$$

Na pravé straně rovnice se objevují členy úměrné první a druhé mocnině velikosti úhlové rychlosti. Označme příspěvky k pravé straně $\text{RHS}_{1/2}$. Potom

$$\text{RHS}_1 = -i\delta^0 \left(1 - m\frac{\Omega}{\omega} \right) \left(\alpha_{\ell m} h_{\ell}^{(2)} + \beta_{\ell m} h_{\ell}^{(1)} \right) - \quad (\text{B.64})$$

$$- c\frac{\Omega}{\omega} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} [g_{\ell-1}] \mathcal{J}_{\ell-1, m}^{\ell m} + \frac{\ell+2}{\ell} [g_{\ell+1}] \mathcal{J}_{\ell+1, m}^{\ell m} \right). \quad (\text{B.65})$$

Skok veličiny $[g_{\ell}]$ bude potřeba i v následující podkapitole, lze velice zjednodušit za použití wronskiánu sférické Besselovy funkce

$$\begin{aligned} [g_{\ell}] &= \frac{1}{\hat{a}} \left(A_{\ell m} \hat{h}_{\ell}^{(2)} + B_{\ell m} \hat{h}_{\ell}^{(1)} - \frac{\hat{j}_{\ell}}{\hat{d}\hat{j}_{\ell}} \left(A_{\ell m} d\hat{h}_{\ell}^{(2)} + B_{\ell m} d\hat{h}_{\ell}^{(1)} \right) \right) = \\ &= \frac{A_{\ell m}}{\hat{a} \hat{d}\hat{j}_{\ell}} \text{Wr}[\hat{h}_{\ell}^{(2)}, \hat{j}_{\ell}] + \frac{B_{\ell m}}{\hat{a} \hat{d}\hat{j}_{\ell}} \text{Wr}[\hat{h}_{\ell}^{(1)}, \hat{j}_{\ell}] = -\frac{i}{\hat{a} \hat{d}\hat{j}_{\ell}} (A_{\ell m} - B_{\ell m}), \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

odtud lze zapsat rovnici (B.60) ve tvaru

$$\left[-\frac{i}{\hat{a}^2 j_{\ell}} + i\delta^0 \left(1 - m\frac{\Omega}{\omega} \right) h_{\ell}^{(2)} \right] \alpha_{\ell m} + \left[\frac{i}{\hat{a}^2 j_{\ell}} + i\delta^0 \left(1 - m\frac{\Omega}{\omega} \right) h_{\ell}^{(1)} \right] \beta_{\ell m} = \quad (\text{B.67})$$

$$= -\sum_{\ell'} \frac{ic\Omega}{\hat{a}\omega} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell-1, \ell'} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell+1, \ell'} \right) \frac{\mathcal{I}_{\ell' m}^{\ell m}}{\hat{d}\hat{j}_{\ell}} A_{\ell' m} + \quad (\text{B.68})$$

$$+ \sum_{\ell'} \frac{ic\Omega}{\hat{a}\omega} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell-1, \ell'} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell+1, \ell'} \right) \frac{\mathcal{I}_{\ell' m}^{\ell m}}{\hat{d}\hat{j}_{\ell}} B_{\ell' m} + \text{RHS}_2, \quad (\text{B.69})$$

Rovnici lze zapsat i v maticovém tvaru, kdy zavedené sumy mají charakter maticového násobení. První řádka rovnice je násobení diagonální maticí. V aproximaci, kdy $O(\Omega^2) \rightarrow 0$, lze rovnici zapsat ve tvaru

$$\sum_{\ell'} (D_{\alpha}^P)_{\ell\ell'} \alpha_{\ell' m} + \sum_{\ell'} (D_{\beta}^P)_{\ell\ell'} \beta_{\ell' m} \approx \sum_{\ell'} (T_A^P)_{\ell\ell'} A_{\ell' m} + \sum_{\ell'} (T_B^P)_{\ell\ell'} B_{\ell' m}. \quad (\text{B.70})$$

Relativistická korekce rovnice (B.60) obsahuje jak f , tak dg , tudíž bude obsahovat všechny prvky $\alpha_{\ell' m}, \beta_{\ell' m}, A_{\ell' m}, B_{\ell' m}$. Proto je každá z matice výše označena indexem P – pro pomalé rotace. Korekci rozdělme na část s funkcí f a část s dg ,

tj. $\text{RHS}_2 = O_f(\Omega^2) + O_g(\Omega^2)$,

$$O_f(\Omega^2) = \frac{\mu_0 \sigma_s^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \left(f_{\ell-2} K_{\ell-2,m}^{\ell m} + f_\ell K_{\ell m}^{\ell m} + f_{\ell+2} K_{\ell+2,m}^{\ell m} \right) = \quad (\text{B.71})$$

$$= \frac{\delta^0}{c\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} (\delta_{\ell'\ell-2} + \delta_{\ell'\ell} + \delta_{\ell'\ell+2}) K_{\ell'm'}^{\ell m} \left(h_{\ell'}^{(2)} \alpha_{\ell'm} + h_{\ell'}^{(1)} \beta_{\ell'm} \right), \quad (\text{B.72})$$

$$= \sum_{\ell'} \left(\mathbf{N}_\alpha^R \right)_{\ell\ell'} \alpha_{\ell'm} + \sum_{\ell'} \left(\mathbf{N}_\beta^R \right)_{\ell\ell'} \beta_{\ell'm} \quad (\text{B.73})$$

$$O_g(\Omega^2) = \frac{m}{\hat{a}} \frac{\delta^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} (\delta_{\ell'\ell-1} + \delta_{\ell'\ell+1}) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \left(d\hat{h}_{\ell'}^{(2)} A_{\ell'm} + d\hat{h}_{\ell'}^{(1)} B_{\ell'm} \right) = \quad (\text{B.74})$$

$$= \sum_{\ell'} \left(\mathbf{T}_A^R \right)_{\ell\ell'} A_{\ell'm} + \sum_{\ell'} \left(\mathbf{T}_B^R \right)_{\ell\ell'} B_{\ell'm}, \quad (\text{B.75})$$

pokud byla tedy původní rovnice $\text{LHS} = \text{RHS}_1 + \text{RHS}_2$, lze matici celkově zapsat ve tvaru

$$\left(\mathbf{D}_\alpha^P - \mathbf{N}_\alpha^R \right) \vec{\alpha}_m + \left(\mathbf{D}_\beta^P - \mathbf{N}_\beta^R \right) \vec{\beta}_m = \left(\mathbf{T}_A^P + \mathbf{T}_A^R \right) \vec{A}_m + \left(\mathbf{T}_B^P + \mathbf{T}_B^R \right) \vec{B}_m, \quad (\text{B.76})$$

$$\mathbf{N}_\alpha \vec{\alpha}_m + \mathbf{N}_\beta \vec{\beta}_m = \mathbf{T}_A \vec{A}_m + \mathbf{T}_B \vec{B}_m. \quad (\text{B.77})$$

B.7.2 Skok g

V této části upravíme do maticového zápisu druhou rovnici

$$\begin{aligned} (\omega - m\Omega) [g_\ell] &= \frac{i\delta^0 \omega}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_\ell}{d\hat{r}} - \frac{i\Omega\delta^0}{c} \sum_{\ell'} \frac{\ell'(\ell'+1)}{\ell(\ell+1)} f_\ell \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} - \\ &\quad - \frac{\mu_0 \sigma_s^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} \left(\left(f_{\ell'} \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \right) + \frac{im^2 c}{\hat{a}} \frac{d\hat{g}_{\ell'}}{d\hat{r}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

na levé straně se vyskytuje skok, který již byl určen vztahem (B.66)

$$\text{LHS} = (\omega - m\Omega) [g_\ell] = -(\omega - m\Omega) \frac{i}{\hat{a} \hat{j}_\ell} A_{\ell m} + (\omega - m\Omega) \frac{i}{\hat{a} \hat{j}_\ell} B_{\ell m}. \quad (\text{B.79})$$

Na pravé straně se nevyskytují žádné skoky, díky čemuž je situace snazší. S využitím spojitosti tečného elektrického a radiálního magnetického pole na rozhraní (B.61) lze vyloučit parametry $\gamma_{\ell m}$, $G_{\ell m}$ a zapsat pravou stranu ve tvaru

$$\text{RHS} = \frac{i\delta^0 \omega}{\hat{a}} \left(A_{\ell m} d\hat{h}_\ell^{(2)} + B_{\ell m} d\hat{h}_\ell^{(1)} \right) - \quad (\text{B.80})$$

$$- i\delta^0 \frac{\Omega}{c} \sum_{\ell'} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell'\ell-1} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell'\ell+1} \right) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \hat{h}_{\ell'}^{(2)} \alpha_{\ell'm}, \quad (\text{B.81})$$

$$- i\delta^0 \frac{\Omega}{c} \sum_{\ell'} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell'\ell-1} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell'\ell+1} \right) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \hat{h}_{\ell'}^{(1)} \beta_{\ell'm} + O(\Omega^2) = \quad (\text{B.82})$$

$$\approx \frac{i\delta^0 \omega}{\hat{a}} \left(A_{\ell m} d\hat{h}_\ell^{(2)} + B_{\ell m} d\hat{h}_\ell^{(1)} \right) + \sum_{\ell'} \left(\mathbf{T}_\alpha^P \right)_{\ell\ell'} \alpha_{\ell'm} + \sum_{\ell'} \left(\mathbf{T}_\beta^P \right)_{\ell\ell'} \beta_{\ell'm}, \quad (\text{B.83})$$

kde je opět využita aproximace pro pomalé otáčky. Relativistická korekce může být opět rozdělena na dva členy. První $\Omega_f(\Omega^2)$ odpovídá funkci f a $\Omega_g(\Omega^2)$ funkci dg ,

$$\Omega_f(\Omega^2) = -\frac{\delta^0}{c\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \sum_{\ell'} (\delta_{\ell'\ell+1} + \delta_{\ell'\ell-1}) \left(\hat{h}_{\ell'}^{(2)} \alpha_{\ell'm} + \hat{h}_{\ell'}^{(1)} \beta_{\ell'm} \right) \mathfrak{Y}_{\ell'm}^{\ell m} = \quad (\text{B.84})$$

$$= \sum_{\ell'} \left(\mathbb{T}_{\alpha}^R \right)_{\ell\ell'} \alpha_{\ell'm} + \sum_{\ell'} \left(\mathbb{T}_{\beta}^R \right)_{\ell\ell'} \beta_{\ell'm}, \quad (\text{B.85})$$

$$\Omega_g(\Omega^2) = -\frac{m}{\hat{a}} \frac{\delta^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} \left(d\hat{h}_{\ell}^{(2)} A_{\ell m} + d\hat{h}_{\ell}^{(1)} B_{\ell m} \right) = \quad (\text{B.86})$$

$$= \sum_{\ell'} \left(\mathbb{D}_A^R \right)_{\ell\ell'} A_{\ell'm} + \sum_{\ell'} \left(\mathbb{D}_B^R \right)_{\ell\ell'} B_{\ell'm}. \quad (\text{B.87})$$

Celou rovnici (B.78) tak lze přepsat do maticového tvaru

$$\left(\mathbb{D}_A^P + \mathbb{D}_A^R \right) \vec{A}_m + \left(\mathbb{D}_B^P + \mathbb{D}_B^R \right) \vec{B}_m = \left(\mathbb{T}_{\alpha}^P - \mathbb{T}_{\alpha}^R \right) \vec{\alpha}_m + \left(\mathbb{T}_{\beta}^P - \mathbb{T}_{\beta}^R \right) \vec{\beta}_m, \quad (\text{B.88})$$

$$\mathbb{D}_A \vec{A}_m + \mathbb{D}_B \vec{B}_m = \mathbb{T}_{\alpha} \vec{\alpha}_m + \mathbb{T}_{\beta} \vec{\beta}_m. \quad (\text{B.89})$$

B.7.3 Tvar matic

V předchozích podkapitolách jsme ukázali, že rovnice lze přepsat v maticovém formalismu za pomoci šestnácti diagonálních, triagonálních a pentadiagonálních matic, které mají tvar

$$(D_\alpha^P)_{\ell\ell'} = -\frac{i}{\hat{a}^2 j_\ell} \left[1 - \delta^0 \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) \hat{j}_\ell \hat{h}_\ell^{(2)} \right] \delta_{\ell\ell'}, \quad (\text{B.90})$$

$$(D_\beta^P)_{\ell\ell'} = \frac{i}{\hat{a}^2 j_\ell} \left[1 + \delta^0 \left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) \hat{j}_\ell \hat{h}_\ell^{(1)} \right] \delta_{\ell\ell'}, \quad (\text{B.91})$$

$$(D_A^P)_{\ell\ell'} = \frac{i\omega}{\hat{a} d\hat{j}_\ell} \left[\left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) - \delta^0 d\hat{j}_\ell d\hat{h}_\ell^{(2)} \right] \delta_{\ell\ell'}, \quad (\text{B.92})$$

$$(D_B^P)_{\ell\ell'} = -\frac{i\omega}{\hat{a} d\hat{j}_\ell} \left[\left(1 - m \frac{\Omega}{\omega} \right) + \delta^0 d\hat{j}_\ell d\hat{h}_\ell^{(1)} \right] \delta_{\ell\ell'}, \quad (\text{B.93})$$

$$(T_A^P)_{\ell\ell'} = -\frac{ic\Omega}{\hat{a}\omega} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell-1,\ell'} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell+1,\ell'} \right) \frac{\mathcal{I}_{\ell'm}^{\ell m}}{d\hat{j}_\ell}, \quad (\text{B.94})$$

$$(T_B^P)_{\ell\ell'} = \frac{ic\Omega}{\hat{a}\omega} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell-1,\ell'} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell+1,\ell'} \right) \frac{\mathcal{I}_{\ell'm}^{\ell m}}{d\hat{j}_\ell}, \quad (\text{B.95})$$

$$(T_A^R)_{\ell\ell'} = \frac{m}{\hat{a}} \frac{\delta^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} (\delta_{\ell'\ell-1} + \delta_{\ell'\ell+1}) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} d\hat{h}_{\ell'}^{(2)}, \quad (\text{B.96})$$

$$(T_B^R)_{\ell\ell'} = \frac{m}{\hat{a}} \frac{\delta^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} (\delta_{\ell'\ell-1} + \delta_{\ell'\ell+1}) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} d\hat{h}_{\ell'}^{(1)}, \quad (\text{B.97})$$

$$(T_\alpha^P)_{\ell\ell'} = -i\delta^0 \frac{\Omega}{c} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell'\ell-1} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell'\ell+1} \right) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \hat{h}_{\ell'}^{(2)}, \quad (\text{B.98})$$

$$(T_\beta^P)_{\ell\ell'} = -i\delta^0 \frac{\Omega}{c} \left(\frac{\ell-1}{\ell+1} \delta_{\ell'\ell-1} + \frac{\ell+2}{\ell} \delta_{\ell'\ell+1} \right) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \hat{h}_{\ell'}^{(1)}, \quad (\text{B.99})$$

$$(T_\alpha^R)_{\ell\ell'} = -\frac{\delta^0}{c\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} (\delta_{\ell'\ell+1} + \delta_{\ell'\ell-1}) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \hat{h}_{\ell'}^{(2)}, \quad (\text{B.100})$$

$$(T_\beta^R)_{\ell\ell'} = -\frac{\delta^0}{c\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} (\delta_{\ell'\ell+1} + \delta_{\ell'\ell-1}) \mathcal{J}_{\ell'm}^{\ell m} \hat{h}_{\ell'}^{(1)}, \quad (\text{B.101})$$

$$(N_\alpha^R)_{\ell\ell'} = \frac{\delta^0}{c\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} (\delta_{\ell'\ell-2} + \delta_{\ell'\ell} + \delta_{\ell'\ell+2}) K_{\ell'm}^{\ell m} h_{\ell'}^{(2)}, \quad (\text{B.102})$$

$$(N_\beta^R)_{\ell\ell'} = \frac{\delta^0}{c\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} (\delta_{\ell'\ell-2} + \delta_{\ell'\ell} + \delta_{\ell'\ell+2}) K_{\ell'm}^{\ell m} h_{\ell'}^{(1)}, \quad (\text{B.103})$$

$$(D_A^R)_{\ell\ell'} = -\frac{m}{\hat{a}} \frac{\delta^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} d\hat{h}_\ell^{(2)} \delta_{\ell\ell'}, \quad (\text{B.104})$$

$$(D_B^R)_{\ell\ell'} = -\frac{m}{\hat{a}} \frac{\delta^0}{\ell(\ell+1)} \frac{\Omega^2 \hat{a}^2}{\omega^2} d\hat{h}_\ell^{(1)} \delta_{\ell\ell'}. \quad (\text{B.105})$$

C. Separace Teukolského rovnice

V tomto dodatku je ukázána separace Teukolskeho rovnice (5.30) do rovnic (5.34) a (5.35). Držíme se vzoru původního Teukolskeho článku [9], abychom došli ke stejnému výsledku.

Teukolskeho vlnová rovnice ve vakuu

$$\begin{aligned} \mathbb{T}[\psi] = & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ & - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos(\theta) \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2(\theta) - s) \psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

je separovatelná v BL souřadnicích, platí tedy $\psi = R(r)S(\theta)P(\phi)T(t)$. Triviální je ukázat, že $P(\phi)T(t) = e^{i(m\phi - \omega t)}$ a že lze nahradit derivace ve výrazu $\mathbb{T}[\psi]$

$$\partial_t \psi = -i\omega \psi, \quad \partial_{tt} \psi = -\omega^2 \psi, \quad (\text{C.2})$$

$$\partial_\phi \psi = im \psi, \quad \partial_{\phi\phi} \psi = -m^2 \psi, \quad \partial_{t\phi} \psi = m\omega \psi, \quad (\text{C.3})$$

dosazením do rovnice (C.1) a po následném vydělení rovnice nenulovým řešením ψ získáme

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{T}[\psi]}{\psi} = & -\omega^2 \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] + \frac{4Marm\omega}{\Delta} - m^2 \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] - \\ & - \Delta^{-s} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{S} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dS}{d\theta} \right) \\ & - -2ism \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \right] + \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$+ 2is\omega \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos(\theta) \right] + (s^2 \cot^2(\theta) - s) = 0. \quad (\text{C.5})$$

První část výrazu $\mathbb{T}[\psi]/\psi$ je závislá pouze na radiální BL souřadnici r , druhá pouze na θ . Lze tedy obě tyto části položit rovné separační konstantě \tilde{A} za získání dvou rovnic

$$\tilde{A} = a^2 \omega^2 \sin^2(\theta) + \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{S} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dS}{d\theta} \right] + 2ms \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \quad (\text{C.6})$$

$$+ 2\omega sa \cos(\theta) + (s^2 \cot^2(\theta) - s), \quad (\text{C.7})$$

$$-\tilde{A} = -\frac{\omega^2 (r^2 + a^2)^2}{\Delta} + \frac{4Marm\omega}{\Delta} - \frac{m^2 a^2}{\Delta} - \Delta^{-s} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right] - \quad (\text{C.8})$$

$$- 2ims \frac{a(r-M)}{\Delta} + 2is\omega \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r \right]. \quad (\text{C.9})$$

Abychom získali stejný výsledek jako Teukolsky [9], je potřeba ještě poupravit separační konstantu vztahem $\tilde{A} = A + a^2\omega^2$, potom v první rovnici vznikne $a^2\omega^2 \cos^2(\theta)$ namísto $a^2\omega^2 \sin^2(\theta)$ a na levé straně se objeví pouze A . První rovnici lze rovnou vyjádřit ve tvaru z [9] vynásobením funkcí S

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dS}{d\theta} \right] + \left(a^2\omega^2 \cos^2(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} - 2a\omega s \cos(\theta) - \right. \quad (\text{C.10})$$

$$\left. - \frac{2ms \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} - s^2 \cot^2(\theta) + s + A \right) S = 0. \quad (\text{C.11})$$

Pro radiální rovnici, která po separaci nabývá tvaru

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left[\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{\omega^2(r^2 + a^2)^2 - 4Mar\omega m + m^2 a^2}{\Delta} R + \quad (\text{C.12})$$

$$\left(\frac{2isma(r - M) - 2is\omega M(r^2 - a^2)}{\Delta} + 2is\omega r - a^2\omega^2 - A \right) R = 0, \quad (\text{C.13})$$

lze šikovným přičtením nuly $2ma\omega(r^2 + a^2)$ v čitateli prvního zlomku získat

$$2ma\omega(r^2 + a^2) - 4Mmawr = 2ma\omega(r^2 - 2Mr + a^2) = 2ma\omega\Delta \quad (\text{C.14})$$

a tento člen z rovnice vyloučíme tak, že jej odečteme v konstantě $\lambda = A + a^2\omega^2 - 2ma\omega$. Část rovnice bez derivace má tak tvar

$$\left(\frac{[\omega(r^2 + a^2) - ma]^2 + 2is(am[r - M] - \omega M[r^2 - a^2])}{\Delta} + 2i\omega sr - \lambda \right) R.$$

Druhý výraz v čitateli lze upravit s pomocí člene za zlomkem $2i\omega sr$

$$2is \left(am[r - M] - \omega M[r^2 - a^2] \right) - 2is\omega r [r^2 - 2Mr + a^2] \quad (\text{C.15})$$

$$= 2is \left(am(r - M) - \omega M(r^2 - a^2) - \omega r(r^2 - 2Mr + a^2) \right) =$$

$$= 2is \left(am(r - M) + \omega [Mr^2 - a^2r + a^2M - r^3] \right) =$$

$$= 2is \left(am(r - M) - \omega(r^2 + a^2)(r - M) \right) = 2is(r - M)(am - \omega(r^2 + a^2)).$$

Již podruhé je zde vidět člen $\omega(r^2 + a^2) - am$, a proto jej označíme speciálním písmenkem K . Radiální rovnici tak lze přepsat ve finálním tvaru, ke kterému došel i Teukolsky v [9]

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left[\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right] + \left(\frac{K^2 - 2is(r - M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R = 0, \quad (\text{C.16})$$

$$K = \omega(r^2 + a^2) - am, \quad \lambda = A + a^2\omega^2 - 2ma\omega. \quad (\text{C.17})$$

D. Další superradiantní procesy

D.1 Spontánní emise

Tento dodatek je konstruován po vzoru prací [16, 14]. Opět v plochém prostoru uvažme částici, která se pohybuje vůči pozorovateli se čtyřhybností $p_i^\mu = (E, \mathbf{p})$ a následně vyzáří foton, její čtyřhybnost se tak změní na $p_f^\mu = (E - \hbar\omega, \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})$. Energie částice se změní dle vztahu

$$\Delta E = \hbar\omega \quad (\text{D.1})$$

a přechodem do soustavy spojené s částicí bude tato změna energie mít tvar

$$\Delta E' = E'_f - E'_i = \frac{E - (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})}{\sqrt{1 - (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})}} - \frac{E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}, \quad (\text{D.2})$$

rozvojem předchozího vztahu do mocnin $\delta\mathbf{v}$

$$\Delta E' = -\frac{\delta E - \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{p}}{\sqrt{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} + o(\delta\mathbf{v}) = -\gamma\hbar(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) + o(\delta\mathbf{v}), \quad (\text{D.3})$$

kde veličiny bez indexů odpovídají hodnotám na počátku procesu emise fotonu. Aby byla změna energie kladná, tedy částice získala emisí energii, musí platit Ginzburg-Frankova podmínka

$$\omega(k) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} < 0. \quad (\text{D.4})$$

Lze si rozmyslet, že takovou podmínku nelze nikdy splnit ve vakuu, kde disperzní relace má vztah $k = \omega/c$, a tudíž nerovnice

$$k [1 - v \cos(\theta)] < 0 \quad (\text{D.5})$$

nenastane, neboť v nikdy nemůže dosáhnout rychlosti světla $c = 1$. Podmínku by však bylo možné splnit, pokud by platila disperzní relace $\omega(k) < k$. Po vzoru [14] uvažujme relaci pro homogenní izotropní médium $\omega = k/n(\omega)$, kde $n(\omega) > 1$ je absolutní index lomu daného prostředí. Podmínku na zvýšení energie tak lze napsat ve tvaru

$$\frac{k}{n(\omega)} (1 - vn(\omega) \cos(\theta)) < 0, \quad (\text{D.6})$$

což lze splnit pro vybrané úhly θ

$$\frac{1}{n(\omega)v} < \cos(\theta), \quad (\text{D.7})$$

kde $n(\omega) = k/\omega = 1/(\omega/k) = 1/v_f$ je inverze fázové rychlosti světla v daném prostředí. Pokud je tedy rychlost částice v prostředí v větší než rychlost světla, bude docházet k superradiaci.

Tento příklad si vybíráme, neboť jde o jeden z vůbec prvních příkladů super-radiace, které se objevily. Původně byl tento jev označen za anomální Dopplerův jev [43]. Tento jev úzce souvisí s Vavril-Čerenkovovým zářením, které vzniká v dielektriku, pokud se jím pohybuje částice bez vnitřní struktury. Pro ni musí platit $\Delta E' = 0$ a tato podmínka může být splněna jen za předpokladu, že vyzařuje fotony pod úhlem [14]

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{vf}{v}\right). \quad (\text{D.8})$$

D.2 Skalární bosony a potenciálová bariéra

V této části uvažujeme skalární bosony, tedy částice nesoucí nulový spin. Vlnové funkce skalárního nehmotného pole musí splnit Klein-Gordonovu rovnici

$$\Phi_{;\mu}{}^{;\mu} = 0, \quad (\text{D.9})$$

jíž lze vyřešit separací proměnných. Nadále je vhodné pracovat se zářením, které se šíří ve směru x a problém se stává 1D (+ 1D za čas). Po vzoru knihy [14] je vhodné uvažovat skalární pole provázané s elektromagnetickým potenciálem $A^\mu = (A_0, 0)$. Zde zavedme skokový potenciál

$$A_0(x) = V\Theta(x - x_0), \quad (\text{D.10})$$

kde v místě x_0 je potenciálový schod. V nízkoenergetické kvantové teorii, kdy pole splní Schrödingerovu rovnici, bude napravo od x_0 nastávat exponenciální útlum pravděpodobnosti nálezů částice, ať už jde o fermiony, či bosony.

Kovariantní derivace zde má tvar $\nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, Klein-Gordonova rovnice tak lze zapsat ve tvaru

$$\square \Phi - e^2 A^2 \Phi - ie(\partial_\mu(A^\mu \Phi) + A_\mu \partial^\mu \Phi) = 0, \quad (\text{D.11})$$

v asymptotách $x \rightarrow \pm\infty$ tak lze řešit

$$\frac{d^2 \Phi_-}{dx^2} \Phi_- + \omega^2 \Phi_- = 0, \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{d^2 \Phi_+}{dx^2} \Phi_+ + (\omega - eV)^2 \Phi_+ = 0, \quad (\text{D.13})$$

potom lze řešení v asymptotických oblastech zapsat ve tvaru

$$\Phi_- = \left(\mathcal{I}e^{i\omega(x-x_0)} + \mathcal{R}e^{-i\omega(x-x_0)}\right)e^{-i\omega t}, \quad \Phi_+ = \mathcal{T}e^{i(\omega-eV)(x-x_0)}e^{-i\omega t}, \quad (\text{D.14})$$

kde volba znaménka je volena tak, aby původní a prošlá vlna postupovaly v kladném směru osy x . Nyní určíme Wronskiány pro obě asymptoty

$$f = \mathcal{I}e^{i\omega x} + \mathcal{R}e^{-i\omega x}, \quad f^* = \mathcal{I}^*e^{-i\omega x} + \mathcal{R}^*e^{i\omega x}, \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{df}{dx} = i\omega(\mathcal{I}e^{i\omega x} - \mathcal{R}e^{-i\omega x}), \quad \frac{df^*}{dx} = -i\omega(\mathcal{I}^*e^{-i\omega x} - \mathcal{R}^*e^{i\omega x}), \quad (\text{D.16})$$

$$g = \mathcal{T}e^{i(\omega-eV)x}, \quad g^* = \mathcal{T}^*e^{-i(\omega-eV)x}, \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{dg}{dx} = i(\omega - eV)\mathcal{T}e^{i(\omega-eV)x}, \quad \frac{dg^*}{dx} = -i(\omega - eV)\mathcal{T}^*e^{-i(\omega-eV)x}, \quad (\text{D.18})$$

Wronskiány mají tvar

$$\text{Wr}_- = f \frac{df^*}{dx} - f^* \frac{df}{dx} = -i\omega (|\mathcal{I}|^2 - |\mathcal{R}|^2) - i\omega (|\mathcal{I}|^2 - |\mathcal{R}|^2) \quad (\text{D.19})$$

$$= -2i\omega (|\mathcal{I}|^2 - |\mathcal{R}|^2) \quad (\text{D.20})$$

$$\text{Wr}_+ = g \frac{dg^*}{dx} - g^* \frac{dg}{dx} = -i(\omega - eV) |\mathcal{T}|^2 - i(\omega - eV) |\mathcal{T}|^2 \quad (\text{D.21})$$

$$= -2i(\omega - eV) |\mathcal{T}|^2 \quad (\text{D.22})$$

a jejich porovnáním lze získat

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{\omega - eV}{\omega} |\mathcal{T}|^2. \quad (\text{D.23})$$

Je tedy vidět, že za splnění podmínky $\omega - eV < 0$ je $|\mathcal{R}|^2 \geq 1$.

D.3 Metoda efektivního potenciálu

Metoda určení amplitudových koeficientů z diferenciální rovnice lze provést porovnáním Wronskiánů této rovnice ve dvou asymptotických limitách. Jedná se o rovnici s efektivním potenciálem

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + V_{\text{eff}} f = 0, \quad (\text{D.24})$$

kde $f = f(x)$ je neznámá hodnota funkce. Hledáme řešení pro $x \rightarrow x_1$ a $x \rightarrow x_2$, potom lze řešit rovnici ve dvou asymptotických tvarech

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + y_1 f = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + y_2 f = 0, \quad (\text{D.25})$$

kde y_i jsou asymptotická chování efektivního potenciálu pro $x \rightarrow x_i$. Řešení rovnic odpovídajících rovnicí lineárního harmonického oscilátoru je

$$f \simeq \begin{cases} \mathcal{I}e^{-iy_1 x} + \mathcal{R}e^{iy_1 x}, & x \rightarrow x_1, \\ \mathcal{T}e^{-iy_2 x} + \mathcal{O}e^{iy_2 x}, & x \rightarrow x_2, \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

pokud asymptotické chování y_i není závislé na x . Je-li efektivní potenciál reálný, lze původní rovnici komplexně sdružit a jejími řešeními budou komplexně sdružená řešení původní rovnice f^* . Wronskiány jednotlivých asymptotických rovnic mají tvar

$$\text{Wr}_1(f_1, f_1^*) = \begin{vmatrix} f_1 & f_1^* \\ \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1^*}{dx} \end{vmatrix} = -2iy_1 (|\mathcal{I}|^2 - |\mathcal{R}|^2), \quad (\text{D.27})$$

$$\text{Wr}_2(f_2, f_2^*) = \begin{vmatrix} f_2 & f_2^* \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2^*}{dx} \end{vmatrix} = -2iy_2 (|\mathcal{T}|^2 - |\mathcal{O}|^2) \quad (\text{D.28})$$

a musí se rovnat. Jejich porovnáním

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{y_2}{y_1} (|\mathcal{T}|^2 - |\mathcal{O}|^2). \quad (\text{D.29})$$

Příkladem může být skalární boson z předchozí sekce, kde řídicí rovnice je

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + A(x)\Phi = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$|\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{\omega - eA(\infty-)}{\omega - eA(-\infty+)} |\mathcal{T}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{\omega - eV}{\omega} |\mathcal{T}|^2,$$

kde $\mathcal{O} = 0$, neboť v nekonečnu spontánně nic nevyzařuje energii. Volbu $\mathcal{O} = 0$ používáme také na vnějším horizontu černé díry $r \rightarrow r_+$, kde opět tvrdíme, že černá díra není zdrojem záření.

Seznam použité literatury

- [1] Roy P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, Sep 1963.
- [2] M. Schmidt. 3C 273 : A Star-Like Object with Large Red-Shift. *Nature*, 197:1040, March 1963.
- [3] Matthews Thomas A. Greenstein, Jesse L. Red-shift on the unusual radio source: 3c 48. *Nature*, March 1963.
- [4] APS News, Physics history, May 5, 1933, 2015.
- [5] Y. B. Zel'Dovich. Generation of Waves by a Rotating Body. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 14:180, August 1971.
- [6] Y. B. Zel'Dovich. Amplification of Cylindrical Electromagnetic Waves Reflected from a Rotating Body. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 35:1085, 1972.
- [7] Jacob D. Bekenstein. Extraction of energy and charge from a black hole. *Phys. Rev. D*, 7:949–953, Feb 1973.
- [8] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 31(2):161–170, 1973.
- [9] S. A. Teukolsky. Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations. *The Astrophysical Journal*, 185:635–648, October 1973.
- [10] W. H. Press and S. A. Teukolsky. Perturbations of a Rotating Black Hole. II. Dynamical Stability of the Kerr Metric. *The Astrophysical Journal*, 185:649–674, October 1973.
- [11] S. A. Teukolsky and W. H. Press. Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *The Astrophysical Journal*, 193:443–461, October 1974.
- [12] Thibaut Damour. Black-hole eddy currents. *Phys. Rev. D*, 18:3598–3604, Nov 1978.
- [13] Václav Bára. Řešení polních rovnic se superradiací. Bakalářská práce, Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy v Praze, Červenec 2014.
- [14] R. Brito, V. Cardoso, and P. Pani, editors. *Superradiance*, volume 906 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 2015.
- [15] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93:99–110, Jan 1954.

- [16] Jacob D. Bekenstein and Marcelo Schiffer. The many faces of superradiance. *Phys. Rev. D*, 58:064014, Srpen 1998.
- [17] Stephen Hawking Kip S. Thorne. *Black Holes and Time Warps*.
- [18] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, Apr 1973.
- [19] S. A. Teukolsky. Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbations. *Physical Review Letters*, 29:1114–1118, October 1972.
- [20] D. A. MacDonald K. S. Thorne, R. H. Price. *Black Holes: The Membrane Paradigm*. Silliman Memorial Lectures. Yale University Press, 1986.
- [21] Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani. Superradiant instability of black holes immersed in a magnetic field. *Phys. Rev.*, D89(10):104045, 2014.
- [22] Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani. Black holes as particle detectors: evolution of superradiant instabilities. *Class. Quant. Grav.*, 32(13):134001, 2015.
- [23] Richard Brito. *Fundamental fields around compact objects: Massive spin-2 fields, Superradiant instabilities and Stars with dark matter cores*. PhD thesis, Lisbon U., 2016.
- [24] Morse Feshbach. *Methods of theoretical physics*, volume 1.
- [25] Kip S. Thorne. Multipole expansions of gravitational radiation. *Rev. Mod. Phys.*, 52:299–339, Apr 1980.
- [26] G Gouesbet and G Grehan. Generalized lorenz-mie theory for assemblies of spheres and aggregates. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 1(6):706, 1999.
- [27] R. Ruffini and J. A. Wheeler. Introducing the black hole. *Physics Today* **24** 30, 1971.
- [28] Robert H. Boyer and Richard W. Lindquist. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *J. Math. Phys.*, 8:265, 1967.
- [29] R. Penrose and Floyd R. M. Extraction of rotational energy from a black hole. *Nature*, pages 177–179, 1971.
- [30] A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, and V. D. Vertogradov. Geodesics with negative energy in the ergosphere of rotating black holes. *Mod. Phys. Lett.*, A29:1450110, 2014.
- [31] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Number díl 3 in Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
- [32] William Morris Kinnersley. Type d gravitational fields. Thesis, California Institute of Technology, July 1968.

- [33] F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S.-T. Yau. Linear Waves in the Kerr Geometry: A Mathematical Voyage to Black Hole Physics. *ArXiv e-prints*, January 2008.
- [34] Michael P. Ryan. Teukolsky equation and penrose wave equation. *Phys. Rev. D*, 10:1736–1740, Sep 1974.
- [35] Angelo B. Mingarelli F.V. Atkinson. *Multiparameter Eigenvalue Problems: Sturm-Liouville Theory*. CRC Press, 1 edition, 2010.
- [36] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Marc Casals. Eigenvalues and eigenfunctions of spin-weighted spheroidal harmonics in four and higher dimensions. *Phys. Rev.*, D73:024013, 2006. [Erratum: *Phys. Rev.*D73,109902(2006)].
- [37] A. A. Starobinskij and S. M. Churilov. Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating black hole. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1973.
- [38] A. R. King. Black-hole magnetostatics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 81:149, 1977.
- [39] Erdelyi A. Bateman H. *Higher Transcendental Functions – Vol 1-3*. McGraw-Hill Book Company, 1953.
- [40] Ravi P. Agarwal and Donal O’Regan. *Ordinary and Partial Differential Equations: With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*, chapter Legendre Polynomials and Functions. Springer New York, New York, NY, 2009.
- [41] R G Barrera, G A Estevez, and J Giraldo. Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics. *European Journal of Physics*, 6(4):287, 1985.
- [42] B Carrascal, G A Estevez, Peilian Lee, and V Lorenzo. Vector spherical harmonics and their application to classical electrodynamics. *European Journal of Physics*, 12(4):184, 1991.
- [43] V. L. Ginzburg and I. M. Frank. Radiation of a uniformly moving electron due to its transition from one medium into another. *J. Phys.(USSR)*, 9:353–362, 1945. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*16,15(1946)].

