Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Katedra pedagogické a školní psychologie

Chápání zlomků u dětí ze 7. a 8. třídy

Autor: **Jitka Sedláková**
Obor: Psychologie – Speciální pedagogika
Vedoucí práce: **PhDr. Miroslav Rendl, CSc.**

Praha 2006

Abstrakt

Těžištěm této práce je analýza dětských způsobů řešení zadaných problémových situací v oblasti zlomků a snaha o rozpoznání představ, které za těmito způsoby stojí. Zadané problémové situace (úlohy) jsou vybrány tak, aby pokrývaly pět interpretací zlomku (srovnání část-celek, kvocient, operátor, míra a poměr) vyčleněné Lamon (1999). Sada úloh je předložena dětem ze sedmé a z osmé třídy. Metody získávání dat jsou pozorování dětí při řešení, rozhovor s dětmi o tom, jakým způsobem úlohy řešily a rozbor pracovních listů. Prostřednictvím kvalitativní analýzy získaných dat je ukázána řada dětských strategií. Strategie řešení u jednotlivých úloh jsou kategorizovány podle způsobu řešení a uvažování. V práci je poukázáno na řadu souvislostí mezi strategiemi v jednotlivých zadaných úlohách. Práce dále ukazuje problematičnost jazykového osvojení matematických výrazů a nutnost naučení se vnímat zadání úlohy podle požadavků matematického kontextu. V práci se poukazuje na možné prolínání jednotlivých interpretací zlomku z etického hlediska a hlavně reálné prolínání z hlediska emického. Jednotlivé interpretace zlomku jsou v dětských řešeních přítomny, jejich výskyt ale nezávisí na typu příkladu. V práci se dochází k závěru, že uchopení zlomkového konceptu vyžaduje propojení a flexibilní pohyb mezi různými kontexty, což si dítě osvojí jedině zacházením se zlomky při činnosti v různých situacích.

Abstract

Submitted work deals with an analysis of children's ways of solving mathematical problem situations in the domain of fractions and further with an effort to recognize mechanisms that stands behind these ways of solving. The problem situations (mathematical tasks) which the children have to solve are chosen in order to cover five interpretations of fractions (part-whole comparison, quotient, operator, measure and ratio) specified by Lamon (1999). A set of tasks is given to the children from the sixth and seventh grades. Data obtaining methods used in this work are as follows: observation of the children during the task solving; discussion with them about their strategies for solving and work paper analysis. The different children strategies are shown herein by means of qualitative analysis of obtaining data. The solution strategies of individual tasks are categorized according to way of solving and way of thinking. In the work it is pointed out many connections between strategies in individual tasks which were solved. It is furthermore shown, how big problem the linguistic acquirement of mathematical terms can be. Due to this problem it is necessary to learn to understand task assignments according to mathematical context requirements. It is pointed out a possible diffusion of individual fraction interpretations from the ethical point of view and mainly a real diffusion from the emical point of view. Individual fraction interpretations are presented in the children‘s solutions but their occurrence is independent on the type of the task. On the basic of the investigation made in this work we come to the conclusion that gripping of the fraction concept demands connection and flexible movement among different contexts, which the child acquires only by using the fractions in different situations.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením PhDr. Miroslava Rendla, CSc. V práci jsem použila informační zdroje uvedené v seznamu.

Praha, 31. července 2006

Ráda bych na tomto místě poděkovala PhDr. Miroslavu Rendlovi, CSc. za trpělivé a profesionální vedení diplomové práce, za podnětné diskuze a podporu, kterou mi při vedení projevoval. Děkuji za vstřícnost a ochotu všem dětem, které počítaly zadané úlohy, a tím umožnily vznik této práce. Děkuji též jejich učitelce matematiky, že mi umožnila s nimi pracovat a poskytla cenné informace.

Obsah

Úvod

Dětské vysvětlování si věcí ve světě a dětský způsob poznávání jevů světa bývají velmi specifické a my o nich mluvíme jako o dětské interpretaci světa. Také jevy ve škole si dítě svým způsobem interpretuje. Dítě v roli žáka se musí naučit a nějakým způsobem zvládnout předepsané učivo a žák se s tímto požadavkem vyrovnává po svém. Svým svébytným způsobem uchopuje a zachází s učivem, které je mu předkládáno, a tak si vytváří své pojetí učiva.

Žákovo pojetí učiva je široký termín a podle Mareše a Ouhrabka (2001) jde o souhrn žákových subjektivních poznatků, představ, přesvědčení, emocí a očekávání týkajících se školního učiva. Zahrnuje tedy oblast kognitivní, afektivní i konativní a může se pohybovat od velmi mlhavých představ o učivu až po velmi vyhraněné názory na učivo.

Protože mě zajímá, jakými svébytnými způsoby se děti vyrovnávají s matematickým učivem na základní škole, chtěla jsem se ve své diplomové práci přiblížit k dětskému uvažování o světě matematiky. Vybrala jsem zlomky jako tematickou oblast pro toto zkoumání. Zlomky mě zaujaly svou problematičností. Proč většina didaktiků pokládá zlomek za jeden z nejtěžších pojmů, který si děti na základní škole v matematice musí osvojit? Odpověď jsem se snažila nejprve nalézt v literatuře. Proto práce ve své teoretické části nastiňuje témata, o kterých píší autoři zabývající se problematikou předávání zlomkového učiva a problematikou uchopování nového pojmu (konceptu).

Dětskému uchopení učiva zlomků se chci přiblížit pomocí kvalitativní analýzy dětských strategií při řešení úloh se zlomky. Práce si neklade za cíl objevit celá žákovská pojetí učiva zlomků. Pouze se snaží přes konativní stránku alespoň trochu přiblížit ke stránce kognitivní. V této práci se snažím ukázat různé způsoby řešení zadaných problémových situací a implicitní představy, které za těmito způsoby stojí.

ČÁST I

Zlomky

1 Výzkumné otázky problematiky zlomků

Upozornění, že učivo o zlomcích je jedno z nejtěžších témat, které se děti v matematice učí, obsahuje většina prací o zlomkové problematice na základní škole, se kterými jsem se setkala. Autoři zabývající se zlomkovou problematikou zkoumají, proč je tato učební látka tak obtížná, jakým způsobem si děti koncept zlomek osvojují, jakým způsobem probíhá výstavba nového pojmu, jaké překážky vstupují do uchopování nového pojmu nebo jaké strategie a řešení děti používají. Následně se autoři snaží řešit, jak pomoci dětem s uchopením nového pojmu, jak zabránit dětským chybným konceptům nebo jak co nejlépe obtížný koncept zlomku vystavět.

Cesta didakticky zaměřených autorů začíná od poznání dětských předcházejících konceptů (prekonceptů)[1] a rozpoznání miskoncepcí. Každé dítě má svoje vlastní unikátní koncepce, dosavadní koncepce (prekoncepty), které se vyvíjejí spontánně na základě individuálních zkušeností, a které následně ovlivňují osvojování nových pojmů, konceptů (Steinberg, 2003). Na základě poznání dětských konceptů a strategií řešení cesta pokračuje přes pochopení dětských obtíží při uchopování pojmu až k navržení účinných způsobů, jak děti naučit zlomkovému konceptu (Lamon, 1999; Steinberg, 2003; Tichá, 2003).

Jak pomoci s uchopováním konceptu zlomku? Zdůrazňuje se učení s porozuměním (Steinberg, 2003; Hejný, 2001, 2003; Tichá, 2003; a další). Řada autorů navrhuje, aby se při výstavbě zlomkového konceptu děti seznamovaly s pojmem zlomek z různých úhlů pohledu, aby se používaly různé modely pro reprezentaci zlomků a aby se tyto modely co nejvíce variovaly (Lamon, 1999; Tichá, 2003; Hejný, 2003; a další). Často se také objevuje apel, aby se koncept zlomků postupně rozvíjel už od nižších ročníků, protože děti potřebují na uchopení problematiky zlomků čas (Lamon, 1999; Tichá, 2003).

Tématem kognitivně psychologicky zaměřených autorů je nejčastěji zkoumání mechanismů, které vyvolávají kognitivní procesy a podílejí se na jejich průběhu v oblasti problematiky zlomků. Jakým způsobem zde probíhá vytváření nových konceptů nebo pojmů?

[1] Pojem prekoncept užívám ve smyslu „žákovo pojetí učiva před systematickou výukou", jak o něm mluví Mareš (Čáp, Mareš, 2001). Prekoncepce zahrnuje žákovy předškolní a mimoškolní znalosti a zkušenosti s tématy, o nichž se teprve bude učit. Učení dítěte začíná dlouho před učením ve škole, školní učení nikdy nezačíná z ničeho (Vygotskij, 1976). Žák si do školy přináší své dětské představy a dětské interpretace pojmů, vztahů. Prekoncepty jsou představy o pojmech, věcech, jevech předtím, než je škola začne zpřesňovat (Čáp, Mareš, 2001).

Jak probíhají myšlenkové procesy? Jaké mechanismy, faktory a struktury ovlivňují konceptuální změnu? Jak se vytvářejí vztahy a souvislosti konceptu?

Problematikou uvažování dětí o zlomcích a především kognitivní a konceptuální změnou, která při výuce zlomků nastává, se zabývá řada autorů (např. Empson, 1999; Saxe, Gearhart a Seltzer, 1999; Weinberg, 2001; Merenluoto, 2004). Na učení se dívají jako na sociálně organizovanou aktivitu a při studiu kognitivní a konceptuální změny berou v potaz systém sociálních procesů a zprostředkující (mediační) struktury, které organizují a transformují myšlení během vyučovacího procesu. Tito autoři často zmiňují myšlenky Vygostkého, který zdůrazňoval vliv kultury a učení samotného na vývoj vyšších psychických funkcí.

Vygotskij (1976, s.314) mluví o tom, že vyšší psychické funkce vznikají ze vzájemných vztahů dítěte s okolními lidmi. Každá vyšší psychická funkce probíhá ve vývoji dítěte nadvakrát – nejprve jako kolektivní sociální činnost, tj. funkce interpsychická, podruhé jako činnost individuální, jako vnitřní způsob myšlení dítěte, tedy funkce intrapsychická.

Vygotskij (1976, s. 315 a 316) poukazuje také na velký význam učení pro vývoj vyšších psychických funkcí. Školní učení vyvolává vnitřní vývojové procesy a v souvislosti s průběhem školního učení nastává vznik a vývoj těchto vnitřních změn. Vzdělávání vytváří zónu nejbližšího vývoje. To znamená, že vyvolává, probouzí a stimuluje celou řadu vnitřních procesů vývoje, které jsou v daném okamžiku pro samotné dítě nedostupné a otvírají se mu jen v oblasti vzájemných vztahů a kooperace s vrstevníky, ale které se po určitém vývoji stávají vnitřní vlastností dítěte.

Kognitivní změny se účastní zprostředkující (mediační) struktury. Hutchins (1995, podle: Empson, 1999, s. 288) definuje mediační struktury jako prostředky myšlení, cestu organizující myšlení, které jsou zahrnuty v artefaktech, v idejích, v systémech sociální interakce a mohou existovat před aktivitou jako kulturní předpoklad nebo být již individuálně ovládnuté nebo se vynořovat v interakci skrze sdílenou konstrukci. Empson (1999) dodává, že mediačními strukturami, které ve vyučování drží (nesou) matematickou logickou souvislost, jsou úkoly a nástroje sloužící k reprezentaci.

Nástroji používanými k reprezentaci myslí Empson (1999) jakékoliv materiální nebo symbolické objekty sloužící k rozšíření nebo podpoře matematického myšlení. Je to například číselný systém, algebraické symboly, zlomkové kousky, grafy, modely, předtištěné mřížky, diagramy atd.

Kognitivní změna a tedy porozumění zlomkům se děje v činnosti a je závislé na účasti v komunitě. Jestliže tedy chceme porozumět kognitivní změně, která se u dítěte odehraje, potřebujeme brát v úvahu nejen obsahovou otázku myšlení dětí, ale také sociálně organizovaný proces, který se učení o zlomcích účastní a který motivuje aktivitu a formuje produkty myšlení (Empson, 1999). Empson proto nejprve zkoumá počáteční zdroje (prekoncepty), které si děti přinášejí do třídy, poté zkoumá zdroje, které poskytuje výklad, a dále pak to, jak výklad transformuje dosavadní dětské koncepce do variabilního systému matematických znalostí o zlomcích (například na základě rozboru reakcí dětí v jedné hodině navrhuje postup výuky pro další vyučování a zkoumá jeho účinky). Empson ukázala, že to, jak děti přemýšlí o zlomcích, je významně ovlivňováno způsobem, jakým je strukturován kontext, ve kterém se odehrává myšlení a diskutování o zlomcích.

Podobně jako Empson (1999) zkoumají vztah mezi děním ve třídě a chápáním zlomků u dětí také Saxe, Gearhart a Seltzer (1999). Ti ale na rozdíl od Empson zkoumají vztah mezi vyučováním ve třídě na základě reformních principů (jako je nememorování, větší názornost, zapojení studentů do výuky, atp.) a znalostmi studentů po proběhlé výuce. Zkoumají, jaký druh výuky produkuje lepší znalosti o zlomcích a menší miskoncepce. Empson se oproti tomu zaměřuje více na detailní rozbor interakce v průběhu výuky, jejího vlivu na konceptuální změnu a přemýšlení dětí.

I když metodika výzkumů a zaměření pohledu je u Empson a oproti tomu u Saxe, Gearharta a Selttzera jiná, oba výzkumy se shodují v následujícím. Při poznávání kognitivních procesů u dětí je třeba vyjít z analýzy dosavadních dětských koncepcí. Zároveň však se dětské struktury pojmů neformují jen ve vztahu k prekoncepcím, ale také ve vztahu ke struktuře výuky ve třídě, k formám reprezentace, které jsou používány v hodinách matematiky, a ke vzorcům sociální interakce mezi učitelem a žáky a mezi žáky navzájem.

Stejně jako výše uvedení autoři i Weinberg (2001) si uvědomuje vliv mediačních struktur na vytváření dětských konceptů o zlomcích a zkoumá další z nich. Zkoumá způsob, jakým byl v učebnicích prezentován vztah mezi zlomky a dělením. Učebnice podle něj neukazují, jaký je vztah mezi dělením a zlomky, a děti mají tedy s vysvětlením tohoto vztahu problém.

Merenluoto (2004) se ve svém výzkumu zabývala dalším faktorem působícím na podobu změny přemýšlení o zlomcích. Zkoumala vliv motivačních faktorů na konceptuální změnu.

Konceptuální změna nastává v situacích, kdy jedincova dosavadní znalost je inkompatibilní s novým konceptem. V situacích konceptuální změny má jedinec sklon k neporozuměním a chybám, které naznačují, že se dosavadní znalosti míchají s osvojovaným novým konceptem. Svoje dosavadní koncepty si studenti moc neuvědomují a mají sklon vytvářet modely, kdy předcházející koncept je nekonzistentně kombinován s novými myšlenkami. V této situaci můžeme mluvit o problému konceptuální změny (Merenluoto, 2004).

V matematice je tato situace častá, jak podotýká Merenluoto (2004), když se studenti snaží naučit koncept racionálních čísel. U dětí se objevují konceptuální chyby pramenící z přenášení poznatků z přirozených čísel. Koncepty přirozených čísel jsou velice silné a působí na pocit vlastní schopnosti, zdatnosti, pocit ospravedlňování sebe sama nebo vysvětlování sebe sama a snadněji tak vedou k přílišné sebedůvěře (Fischbein, 1987, podle: Merenluoto, 2004, s. 297). Koncepty přirozených čísel pak mohou být překážkou pro konceptuální změnu nebo vedou k chybám a neporozuměním při výstavbě pokročilejších číselných principů (Merenluoto, 2004; Lamon, 1999).

Lamon (1999, s. 25-26) uvádí konkrétní příklady problematického přenosu z přirozených čísel na oblast čísel racionálních. Cesty myšlení, které děti běžně používaly při práci s celými čísly, už nelze v plné míře použít v oblasti čísel racionálních. Například v racionálních číslech už jednoduchý model opakujícího se sčítání pro násobení a přidělovací model, kdy rozděluji nějaký balík objektů mezi určitý počet jiných objektů, který má pomoci pochopit proces dělení, není dostačující. Děti se učí přemýšlet o kvantitách v nových souvislostech a vzájemných vztazích[2]. Dřívější kognitivní zkušenosti mohou být překážkou ve zlomkových souvislostech. Děti se snaží vytvořit souvislost s celými čísly a operacemi, která dobře zvládají. Některé z představ, které jsou rozvíjeny u dětí, dokud pracují s celými čísly, ve skutečnosti narušují jejich pozdější schopnost rozumět zlomkům a jejich akcím. Například většina dětí myslí, že násobení způsobuje zvětšování a dělení zmenšuje. Díky této zkušenosti jsou zmateny, když mají například provést $2/3 \times 1/4 = 2/12$ ($2/3 > 2/12$).

Sternberg (2002) mluví v tomto kontextu o mentálním nastavení, které brzdí vhled do nového problému. Mentální nastavení (mental set) je rámec mysli, který zahrnuje existující způsob reprezentace problému, souvislost nebo postup řešení. Pokud mají lidé zablokované mentální nastavení, zafixují se na strategii, která obvykle dobře funguje pro řešení spousty problémů, ale při řešení dalšího problému již tak vhodná není.

Duit (1996, podle Čáp, Mareš, 2001) upozorňuje, že mnohé prekoncepce a miskoncepce učiva jsou v dětech hluboce zakořeněné a vysoce rezistentní vůči snahám je

---

[2] Lamon uvádí příklady úloh: 1) Auto jelo průměrnou rychlostí 52 mil/h. Cesta trvala 3,4 hodiny. Jak daleko auto dojelo? (52mil/h x 3,4 h = 176,8 mil). 2) Auto jelo průměrnou rychlostí 51 mil/h a spotřebovávalo po celou cestu 1,5 gal/h. Jakou vzdálenost ujelo na jeden galon? (51 mil/h÷1,5 gal/h = 34 mil/gal) – opakující se sčítam u prvního příkladu a rozdělovací model u druhého příkladu nepomůže dětem odpovědět na otázku (1999, s. 25)

změnit. To proto, že žák se k nim propracoval sám, jsou jeho, on si je vytvořil a nehodlá se jich okamžitě na pokyn (příkaz) dospělých lidí vzdát. Tichá (2003) mluví o stejné zkušenosti u zlomkových konceptů. Vytvořené miskoncepce, které vyplývají z předchozích znalostí o číslech, jsou neobyčejně stálé. Možné příčiny však neuvádí.

Merenluoto (2004) podotýká, že vyrovnání se s novým komplexním konceptuálním systémem je možné pouze tehdy, když jedinec má dostatečné metakognitivní dovednosti vyrovnat se s konfliktními pojmy a dvojznačností (například vyrovnání se s možností presentace čísla nekonečným množstvím různých reprezentací, nebo vyrovnání se s nekonečností).

Žákův zájem a posouzení vlastních schopností (self-efficacy) jsou základními aspekty vysoké tolerance dvojznačnosti a mohou tedy pozitivně ovlivňovat konceptuální změnu. Na druhou stranu však vysoké self-efficacy a sebejistota spojená s mírnou senzitivitou ke kognitivním požadavkům úloh a nízkou ochotou řešit matematické problémy jsou, zdá se, překážkou k větší radikální změně a hlubšímu porozumění konceptu (Merenluoto, 2004).

Merenluoto (2004) také vyšlo v souladu s výše uvedenými teoriemi, že studenti mají vysokou tendenci k chybným transferům z přirozených čísel na oblast racionálních čísel. Typické bylo, že studenti měli větší problémy vyrovnat se se zlomky než s desetinnými čísly. Jestliže byla kognitivní distance mezi studentovou předchozí znalostí a novým fenoménem (racionální čísla) příliš velká, zůstala možnost kognitivního konfliktu (uvědomění si konfliktnosti pojmů či dvojznačnosti) bez povšimnutí. V tomto případě je tedy dosažení konceptuální změny obtížné.

Jak už jsem uvedla, Merenluoto (2004) kromě vlivu kognitivních faktorů na konceptuální změnu upozorňuje na působení motivačních faktorů. Měřila, jak žáci posuzují sebe sama ve směru matematických dovedností, rozumění matematickým otázkám, sebeúčinnost v matematice (self-efficacy) a jejich ochotu řešit obtížné matematické problémy. Poté měli totéž u žáků posuzovat učitelé. Žáků se dále ptala, jak si jsou jisti odpověďmi, které zapsali do testu, a který úkol se jim zdál nejtěžší a nejlehčí.

Merenluoto (2004) vyšly vysoké korelace mezi měřenými kognitivními a motivačními proměnnými. Stupeň úspěšnosti v matematice posuzovaný učitelem vysoce koreloval s testovým skórem (měřícím vědomosti), sebeposouzením zdatnosti v matematických otázkách (self-efficacy), porozuměním matematice a odhadovanou ochotou řešit matematické problémy, ale nižší korelace měl s položkou zahrnující počet, kvalitu a pečlivost vypracovaných úloh a s mírou, jak si jsou studenti jisti správností svých odpovědí. Stupeň úspěšnosti žáků v matematice měl signifikantně významný vztah k vysoké citlivosti na kognitivní požadavky a k vysoké toleranci k nejednoznačnosti, které by měly pozitivně ovlivňovat konceptuální změnu. Tyto korelace podle Merenluoto ukazují nutnost zaměřit pohled na motivační aspekty při studiu konceptuálni změny.

Zdá se mi, že Merenluoto v podstatě neříká nic objevného. Korelační vztahy, které ukazuje, podle mě říkají pouze to, že kdo je dobrý v matematice, ten si v ní víc věří. Případně mohou ukazovat vliv mínění učitelů o žácích na jejich úspěšnost. Připadá mi logické, že kdo je dobrý v matematice, více si v ní věří a je schopen řešit složitější úlohy, kde se musí vyrovnat s dvojznačností (tj. vzít v úvahu několik možný kontextuálních variant současně). Kdo je dobrý v matematice, bude tedy i snadněji chápat nové koncepty (opouštět nebo upravovat staré představy na základě nových poznatků).

Když někdo naopak bude v matematice průměrný (s mírnou senzitivitou ke kognitivním požadavkům úloh, jak říká Merenluoto), nebude schopen (ochoten) řešit obtížné úlohy a může mít problémy s konceptuální změnou. Otázkou ale stále zůstává, jestli v tom hraje významnou roli vysoké self-efficacy, tedy nakolik je sebehodnocení nezávislým faktorem.

2 Zlomek a jeho významy

2.1 Zlomek v každodenním životě

Slovo zlomek se neužívá pouze v matematických souvislostech. Běžně se užívá v každodenním životě ve smyslu kousek, trochu, malá část něčeho, maličko něčeho (zlomek vteřiny, koupil jsem za zlomek původní ceny). Také názvy některých zlomků jako je ½ (půlka), ¼ (čtvrtka) a ¾ (třičtvrtě) zdomácněly a používají se v běžném životě. Často se užívají v odhadech: „zhruba polovina“, „asi tak čtvrtka“, „kousek“, „trochu“, „o trochu míň než je to celé“, atd.

Tichá uvádí prekonceptní výpovědi dětí o zlomcích, ze kterých je používání zlomků v každodenních situacích patrné: „Každý den se setkávám se zlomky, nakupuji půlku chleba nebo čtvrtku koláče.“ „Představuji si zlomek jako zlomenou řadu ... jako něco zlomeného ... něco na těle může být zlomené ... větev může být zlomená“ (2003, s. 17 -18).

Děti používají zlomkové výrazy běžného života i v situacích, kdy se po nich vyžaduje matematický popis. Takovou situaci ukazuje například Rendl (2000, s. 6-7). Děti (2.-5. třída) měly řešit úlohu, ve které byl koláč rozdělen na pět kousků a jeden kousek byl vysunut. Úkolem dětí bylo označit, jakou část z koláče představuje vysunutý kousek. Některé děti nevztahovaly zlomkové pojmenování, které užily („čtvrtina“, „čtvrtka“, „čtvrt“ nebo

„třetina“) k počtu kousků, na něž byl koláč rozkrájen, ale braly toto označení jako „kus“ nebo „kus s určitým tvarem“. Děti používaly výrazů „čtvrtina“, „čtvrtka“, „čtvrt“ jako synonymum za „kus koláče“ a výraz „třetina“ jako označení tvaru (třetina je šikmá, jako vysunutá část na obrázku, není to pravoúhlá čtvrtka).

Používání významů zlomků z běžných situací v matematických souvislostech, může vést k nepřesnostem a nedorozuměním. V následujících dvou příkladech uvádím případy, se kterými jsem se setkala osobně.

Příklad 1[3]
(8. třída, Pavel, 3)
D: .... Došel jsem k tomu tak, že každý dítě musí mít tři čtvrtě tý čokolády, 4 tyhle čtverečky.
J: Ehm.
D: Protože aby to bylo stejný, protože když rozdělím tady ty 4 čtverečky, tak jsou tam 6krát.
J: Ehm. Takže každej dostane tady ty čtyři čtverečky?
D: Jo.
J: Tak s tím souhlasím. Ale prosím tě, zase jsi tam hodil nějaký ¾ nebo co. Ty to vždycky nějak odhadneš. Je to přesně tři čtvrtiny?
D: ...... No, to je nějaký 4/6.
...
J: tak já souhlasím s tím, že to jsou 2/3, ale neříkej mně, že 2/3 jsou to samý jako ¾.
D: No není.
...
D: Ale opticky to tak vypadá.

Příklad2
(7. třída, Kristýna, 5, s.61)
D: Tak je to čtvrtka tý kuličky.
J: Čtvrtka kuličky, když je to třetina?
D: Jako 1/3 tý kuličky.
J: hm. Ale čtvrtka kuličky je ¼, ne?
D: No. já to myslela ***jako kousek****.*

U Kristýny vidíme, že užívá výrazu „čtvrtka“ jako synonyma za „kousek“ ještě v 7. třídě. I když dokáže označit část správně matematicky, matematický význam zlomkového výrazu je pro ni až druhý. Primárně, spontánně, využívá významu z běžného či hovorového jazyka.

---

[3] Příklady pochází z transkripce rozhovorů s dětmi. Jména byla změněna. Zkratky znamenají: „D“ – dítě; „J“ – já, jako vedoucí rozhovoru; „tečky (........) v řeči“ – pomlka v řeči, množství teček ukazuje na delší či kratší pauzu; „tři tečky mezi řádky“ – nevložená část rozhovoru, z kapacitních důvodů. Z výkladových důvodů zdůrazňuji některé části tučným písmem. Zdůrazňování tedy bylo prováděno až dodatečně (není v původní transkripci). Ukazuje klíčové pasáže pro podávaný výklad.

2.2 Zlomek v matematice

V matematice pojmem zlomek můžeme myslet symbol. Takový symbol se skládá ze dvou čísel zapsaných v podobě a/b, který čteme určitým způsobem. Horní číslo oddělené od spodního čarou je nazýváno čitatel a dolní číslo jmenovatel. Obvykle se přidává podmínka, že jmenovatel nesmí být nula. V tomto smyslu je zlomek jistý způsob zapsání čísel, jde o symbol.

Zlomkový zápis může být také vnímán jako číslo. Když mluvíme o zlomku jako o čísle, máme na mysli racionální číslo, které zlomek reprezentuje. Rozumění zlomku jako číslu sebou nese například uvědomění, že ¼ vyjadřuje to samé relativní množství v různých zobrazení (4/16, 3/12, 2/8). Když vnímáme zlomky jako čísla, zaměřujeme se na relativní množství vyjádřené prostřednictvím zlomkového symbolu. Bez ohledu na velikost kousků, jejich barvy, ostrosti, a dalších fyzických charakteristik, základní problém je, že ¼ odkazuje na skryté relativní číslo (Lamon, 1999).

Takto mluví o zlomku jako o čísle Lamon. Já když budu mluvit o zlomku jako o čísle, budu akcentovat jeho pozici v číselném prostoru, na číselné ose, nebo jeho úlohu jako člena účastnícího se matematických operací.

Ačkoliv někteří lidé vzájemně zaměňují pojem zlomek a racionální číslo, Lamon (1999) upozorňuje, že se nejedná o identické koncepty. Ukazuje to podle ní například fakt, že všechny zlomky nejsou racionální čísla (π/2 není racionální číslo, i když je zapsáno ve zlomkové formě).[4] I skutečnosti, že stejné racionální číslo může být vyjádřeno více zlomky (2/3, 6/9, 10/15), a také že všechna racionální čísla sice mohou být zapsána jako zlomek, ale mohou být zapsána i v jiných formách, ukazují různost konceptů.

Zlomkový symbol se učí děti na počátku interpretovat ve vztahu „část - celek". Učí se tedy, že jmenovatel značí celkový počet částí, na které je rozdělen celek a čitatel určitý počet takových částí. Když se čísla napíší obráceně, myslí se tím něco jiného. Zlomkový číselný výraz je tedy zavedené uspořádání a v tomto kontextu reprezentuje část celku, který je rozdělen na nějaký počet stejně velkých kousků (volně podle Lamon, 1999, s. 27 a 60).

Zde jsme se dotkli jedné z interpretací zlomkového symbolu, jednoho vysvětlení významu zlomkového symbolu, určité oblasti zlomkového konceptu. Možných interpretací zlomkového symbolu je celá řada. Zlomkový symbol lze v odlišných situacích interpretovat různě, ne jen jako srovnání části a celku uvedené v předchozím odstavci. Zlomek může poukazovat i na jiné souvislosti a vztahy. Lamon (1999) mluví o pěti hlavních interpretacích

---

[4] Vždy, když budu dále v této práci mluvit o zlomku, budu mít na mysli takový, který je racionálním číslem.

zlomku: srovnání část-celek (part-whole comparison), operátor (operator), kvocient (quotient), míra (measure) a poměr (ratio).

2.3 Zlomek a celek

Zlomek se vždy vztahuje k nějakému celku, a když není celek uveden (ani explicitně ani implicitně), bereme jako celek číslo jedna.

Celky mohou být kontinuální (koláč, čokoláda, kruh, obdélník) a diskrétní (tvořené tečkami, kuličkami určitého počtu). Celky mohou být předčleněné nebo bez předcházejícího členění, mřížky. Weinberg (2001) nazývá kontinuální předčleněné celky přechodem od kontinuálních celků k diskrétním (continuous-to-discrete).

Lamon (1999, s. 23) upozorňuje na rozdíl mezi několika samostatnými celky a celkem, který je tvořen z několika samostatných objektů. Tři sáčky bonbónů (tři čokolády) můžeme chápat jako tři samostatné celky (3 „jednocelky“), nebo mohou být kontextem určeny jako jeden celek složený ze tří balíčků bonbónů (tří čokolád) a viděny jako jeden „třícelek“.

První a nejdůležitější otázka při řešení úloh se zlomky zní „Co je celek?“. Celek je něco odlišného v každém novém kontextu. Když celek není specifikován nebo je celek špatně určen, může být dáno několik odpovědí na stejnou situaci. V následující úloze nejenže nevíme, co je celek, ale nevíme ani, jaký druh srovnání se požaduje: srovnání část-celek nebo poměrové srovnání?

Příklad 3

Popiš zlomkem, co vyjadřuje pět černých teček.

● ● ● ○

● ● ○ ○

5/1 celků (každá tečka je celek), 2 a ½ (každý sloupec je celek), 5/3 nebo 3/5 (poměrová interpretace), 1 a ¼ (každá sada čtyř teček je celek), 5/8 (všechno je celek). (Lamon, 1999, s.41).

2.4 Zlomek jako srovnání části a celku

Srovnání část-celek definuje Lamon (1999) jako srovnání jedné nebo více stejných částí celku s celkovým počtem stejných částí, na které je celek rozdělen.

Zde myslí Lamon část jako n-tinu, jestliže máme n částí. Celek totiž může být rozčleněn na určitý počet kousků, a přitom jedna část (n-tina) se nemusí rovnat jednomu kousku. Někdy se část skládá z více kousků. Počet kousků v části závisí na tom, jak jsou stejně velké části formovány.

Počet kousků a velikost části závisí na tom, jak je celek[5] (unit) „jednotkován" (unitized). Z jakých částí se celek (unit) spojí, z jakých částí je celek vytvořen. V zavedeném srovnání část – celek (part-whole) musí čitatel a jmenovatel být „jednotkován" (unitized) na části stejně velké.

Proces spojený se srovnáním část-celek je „jednotkování" (unitizing). Lamon (1999) definuje „jednotkování" jako proces odehrávající se v hlavě, jako kognitivní proces, který se odehrává v mysli po rozhodnutí o celku a předvídá nebo vytvoří konstrukci pro operování na celku. „Jednotkování" je spojování do celku. Jde o subjektivní preferenci, cestu myšlení související s celkem (unit). Je to jiný proces, než rozhodnutí o celku (tedy o tom, co budeme považovat za celek, k čemu budeme vztahovat zlomek). Je to kognitivní převod celku z velikosti na danou kvantitu. Udává velikost souboru konstruovaného ve vztazích, ve kterých přemýšlíme o daných objektech patřících do celku. Když nám někdo řekne, představ si kapesníky, co se nám vybaví? Jeden balíček papírových kapesníků? Balení po šesti balíčcích kapesníků? Balení po dvanácti balíčcích kapesníků?

„Jednotkování" (unitizing) celku celek nemění. Mění se pouze velikost částí, na které celek rozčleňujeme. Stejné množství nebo velikost části určitého celku mohou být vyjádřeny odlišnými názvy zlomků v závislosti na jiném „jednotkování" celku (Lamon, 1999).

Lamon (1999) upozorňuje, že je výhodné být schopen flexibilně přemýšlet o jakémkoliv celku, být schopen utvořit celek v závislosti na odlišném kontextu situace a v případě nevyhovujícího „jednotkování" být schopen nového utvoření celku ve vztahu k odlišné velikosti souboru. V závislosti na řešeném problému flexibilně využívat „jednotkování" a „re-jednotkování" (reunitizing). Například jestliže rozděluji 24 vín mezi 4 lidi, je výhodné si představit 4 přepravky po šesti lahvích vína. Když budu rozdělovat víno mezi 2 lidi, je lepší si představit 2 přepravky po 12 lahvích vína. Soubor - přepravka, je konstruován ve vztahu k počtu lidí, mezi které je víno rozdělováno.

Příklad 4

●●●● *je 1 a 1/2 ($1^1/_2$)*
●●●●
●●●● *(Lamon, 1999, s.55)*

[5] Anglické slovo „unit" používá Lamon (i ostatní anglická literatura, kterou jsem prošla) ve významu, pro který se v české literatuře používá slovo „celek". Proto ho takto překládám. Slovo „whole" používá Lamon ve významu „celkové množství", „celkový počet prvků" , proto v překladu používám těchto opisů. Pouze ve výrazu „part-whole comparison" překládám „whole" jako celek. Nastává proto problém s překladem procesu „unitizing". Ve shodě s překladem slova „unit" jako celek, by bylo logické překládat „unitizing" jako „celkování". Výraz by se dal použít i proto, že proces „unitizing" nějakým způsobem vytváří celek. Jak ale uvidíme dále, bude výstižnější přeložit „unitizing" jako „jednotkování". „Jednotkování" více akcentuje strukturaci na jednotky, zavedení jednotky, jejímž prostřednictvím se celek strukturuje.

Abychom viděli ve znázornění jeden celek a jednu polovinu tohoto celku, je výhodnější „jednotkovat" tečky po řádcích a vytvořit tak celek ze dvou řádků, než hledat celek po sloupcích a vytvořit ho ze dvou sloupců a dvou teček.

2.5 Zlomek jako kvocient

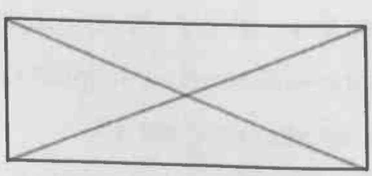
2.5.1 Kvocientová interpretace a rozdělování

Další možnou interpretací zlomku, kterou uvádí Lamon (1999), je zlomek jako kvocient. Kvocient je výsledek dělení. Vezměme si úlohu, kde se rozdělují 3 koláče mezi 4 děti, aby měl každý stejně. Kolik koláče dostane každé dítě? Jestliže q je množství koláče, který dostane každá osoba, tak výsledek bude získán řešením rovnice 4q=3, q= ¾. Každé dítě dostane ¾, což je právě kvocient (Lamon, 1999, s. 76).

Při takovém rovnoměrném rozdělování se hovoří o spravedlivém podělování (equal sharing) (Empson, 1999; a další).

Kvocient souvisí se schopností rozdělovat, tzv. partitioning. Schopnost rozdělování je proces dělení objektu nebo objektů na oddělené a obsažné díly. Znamená to rozdělování, při kterém se části nepřekrývají a o všem můžeme říct, že patří do nějaké části. Při rozdělování celku na n-tiny, tedy při rozdělování ve zlomkovém kontextu, musí také platit, že díly mají stejnou velikost. Díly nemusí mít stejný tvar, ale musí zahrnovat stejně velkou oblast. (Lamon, 1999).

obr. 1



Obrázek ukazuje rozdělení na čtvrtiny. I když díly nemají stejný tvar, mají stejný obsah.

2.5.2 Otázky požadující kvocientový pohled oproti otázkám akcentujícím srovnání část-celek

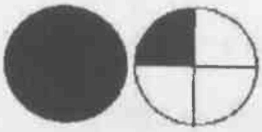
Jak jsme viděli výše, celek musí být zadán kontextem situace. Lamon (1999) stejně jako Tichá (2003) zdůrazňují důležitost učit děti zaměřovat se na hledání celku a procvičovat rozpoznávání zadaného celku. Někdy je ale i pro odborníky těžké se dohodnout, co zadání úlohy určuje jako celek. Tím spíše to potom může být těžké pro děti, zvláště u implicitně zadaných celků, kde hraje velký význam jazykové uchopení zadání úlohy.

Rozdílné názory odborníků na zadaný celek, ukazuje následující příklad uvedený Lamon (1999, s. 39).

Příklad 5

Jan si objednal dvě pizzy. Tmavá část je množství, které snědl. Kolik pizzy (z pizzy) je vyčerněno? (How much of the pizza is shaded?)

obr. 2



Podle Lamon musí dítě ze zadané otázky rozpoznat, že jako celek má brát 8 kousků pizzy. Výsledek tedy má znít 5/8 a ne 5/4, kdy se bere jako celek jedna pizza. Nemůže přece sníst víc, než si objednal. Jak uvidíme dále, s označením 5/4 jako nesprávné odpovědi, by někteří autoři pravděpodobně nesouhlasili.

Lamon (1999, s. 82-83) rozlišuje dále dva druhy otázek. Každý druh vyžaduje jinou interpretaci toho, co má být bráno jako celek a zároveň mění význam, v jakém vystupuje zlomek. Otázky typu „Kolik je jeden díl?“ nebo „Kolik jedna osoba obdrží?“ směřují ke kvocientové interpretaci situace (zlomek jako kvocient). Jestliže rozdělujeme 3 pizzy mezi 6 dětí a ptáme se „Kolik pizzy každá osoba dostane?“, výsledek je 3/6 nebo ½. Počet objektů k rozdělení se v tomto případě dělí počtem objektů, které mají mít něco přiděleno.

Oproti tomu když se ptáme „Jakou část pizzy (z pizzy) dostane každá osoba?“ nebo „Jaká část z celku je jeden díl pizzy?“, akcentujeme srovnání část-celek. Srovnáváme ½ pizzy (jeden podíl) k celku, což jsou v tomto případě 3 pizzy. ½ / 3 = 1/6. Odpověď na otázku vyžadující srovnání část-celek vždy dostaneme dělením 1 celku počtem podílníků.

Ve hře jsou tady tři základní kvantity: počet lidí, jeden podíl a celek. Když se ptám „Kolik je jeden díl?“ neboli „Kolik pizzy obdrží jedna osoba?“ (How much pizza does one person receive?) chci kvocientovou interpretaci a jako celek se má brát jedna pizza. Když otázka zní „Jaká část celku je tento díl?“ neboli „Kolik z pizzy obdrží jedna osoba?“ (How much of **the** pizza does one person receive?), vyžaduje se srovnání část-celek. **The** pizza znamená množství pizzy, se kterou jsme začínali. Znamená brát jako celek tři pizzy.

Otázka v příkladě 5, kde podle Lamon vystupuje zlomek ve významu srovnání část-celek, vyžaduje tedy brát jako celek obě pizzy, protože „the pizza“ znamená „množství pizzy, se kterou jsme začínali“.

Jiní autoři tyto dva typy otázek (a jednoznačnost správných odpovědí s nimi spojených) nerozlišují. Například Steinberg (2003, s. 146) uvádí příklad s dělením pizzy. Děti měly za úkol rozdělit čtyřem dětem tři pizzy. Otázka zněla, kolik pizzy dostane každé dítě (How much pizza does each child get?). Steinberg považuje za správné obě odpovědi. Každé dítě dostalo ¾ pizzy (podle Lamon kvocientový kontext) i každé dítě dostalo 3/12 z pizz (podle Lamon situace „srovnání část-celek"). Steinberg by tedy pravděpodobně oba výsledky z příkladu 5 (5/8 i 5/4) považoval(a) za správné. Dítě by pouze muselo vědět, s jakým celkem vyčerněnou část srovnává.

2.5.3 Dělení „na" a dělení „po" - Partitive and quotitive division

Rozlišují se dva způsoby dělení. Při prvním se kvantita rozděluje na určitý počet stejných částí a ptáme se, jak velká bude jedna část, jeden díl. Toto dělení je nazýváno partitivní dělení (partitive division) (Lamon, 1999; Weinberg, 2001). U nás se mu říká „dělení na stejné části" (tzv. rozdělování) (Divíšek, a kol., 1989, s. 109). Při druhém způsobu dělení máme uvedeno, jak velká je jedna část, a my máme určit, kolik takových částí může být z nějaké kvantity vytvořeno. Pro označení druhého typu dělení najdeme v literatuře například následující názvy: podílové dělení (quotitive division – Lamon, 1999), předjednané dělení (quotative division - Weinberg, 2001) nebo rozměrové dělení (measurement division – Empson, 1999). U nás se mluví o „dělení po částech" (tzv. dělení podle obsahu) (Divíšek, a kol., 1989, s. 109).

Vezměme si příklad 10÷5=2. Můžeme vytvořit dva druhy úlohy podle dvou typů dělení.

Příklad 6

Paní v květinářství má deset květin a chce je rozdělit do pěti váz tak, aby v každé váze bylo stejné množství květin. Kolik květin bude v jedné váze?

Máme deset květin a pět váz. Květiny rovnoměrně rozdělujeme do váz. Jednu květinu do jedné vázy, druhou květinu do druhé vázy, atd. Až bude květina i v páté váze, začneme opět znovu od první vázy, dokud nerozdělíme všech deset květin. V každé váze budou nakonec 2 květiny. 10:5=2.

Příklad 7

Paní v květinářství má deset květin a chce je rozdělit do váz tak, aby v každé váze bylo pet květin. Kolik váz paní využije?

Máme deset květin. Vezmeme skupinu pěti květin a dáme ji do jedné vázy, vezmeme skupinu dalších pěti květin a dáme je do druhé vázy, a tak bychom pokračovali i dále, kdyby bylo květin více. Využily jsme dvě vázy. 10:5 =2.

Příklad 6 ukazuje „dělení na". Počet prvků dělíme na pět částí a ptáme se: „Kolik prvků bude v jedné části?". Odpověď zní: „dva prvky". Příklad 7 je příkladem „dělení po".

Počet prvků dělíme po pěti prvcích a ptáme se, kolik můžeme utvořit částí. Odpovědí budou 2 části.

Lamon (1999, s. 85) uvádí následující úlohu na kvocientové dělení se zlomky: Každý chlapec potřebuje 5/8 metrového lana. Máme 6 metrů lana. Kolik chlapců bude moci dostat svůj díl? Svůj díl dostane 9 chlapců a 3/8 metrového lana zůstanou.

2.6 Zlomek jako operátor

Další ze zlomkových interpretací je zlomek v roli operátora. Hejný píše, že zlomek jako operátor (O) vyjadřuje vztah mezi základem (Z = celek) a částí (Č). Vzájemný vztah O, Z a Č je vyjádřen rovnicí: Č = O×Z. Tedy například 2/5 z tyče dlouhé 3m je tyč dlouhá 120cm (120 = 2/5×300) (Hejný, 1990, s. 69-70).

I Lamon (1999, s. 97-98) mluví o operátoru jako o nástroji vyjadřujícím vztah mezi počáteční kvantitou (u Hejného základem) a výslednou kvantitou (u Hejného částí). Operátor pak definuje vztah mezi kvantitou na vstupu a kvantitou na výstupu (input×operator =output).

Operátor je tak součástí funkce, která je dána rovnicí Č = O×Z. Operátor určuje zobrazení, při kterém se vezme nějaký soubor nebo oblast a zobrazí se na další soubor nebo oblast. Velmi zjednodušeně operátor způsobí zmenšování nebo zvětšování, stahování nebo expandování, zvětšování nebo redukci, násobení nebo dělení. Operátor je transformátor, který zdelšuje nebo zkracuje délkové segmenty, způsobuje vzrůstání nebo snižování počtu položek v balíku s diskrétními objekty, nebo zvětšuje či zmenšuje geometrické objekty či mapy při zachování stejných proporcí (Lamon, 1999, s. 94).

V běžné praxi ale zlomek jako operátor znamená A/B z C a nese zprávu: „vyděl množství jmenovatelem a výsledek vynásob čitatelem“, což je nejběžnější způsob, jakým se učí děti výrazu A/B z C rozumět. Výraz A/B z C ale také můžeme chápat jako pobídku k vynásobení množství čitatelem a vydělení výsledku jmenovatelem.

2.7 Zlomek jako míra (veličina)

2.7.1 Míra nebo veličina?

Lamon (1999) je jedním z autorů, kteří vyčleňují zlomek ve smyslu míry jako další interpretaci zlomku. Zlomek jako míru můžeme vidět na číselné ose, na stupnici, na metru, na odměrném válci, na ciferníku nebo na teploměru. Na stupnicích těchto nástrojů jsou značkami vyznačeny nějaké pododdíly celku. Každý pododdíl může být vždy dělen na menší a menší podcelky. Jestliže značky na měřících přístrojích nestačí, můžeme si celek rozčlenit tak, jak potřebujeme. Jestliže potřebujeme přesnější měření, můžeme si celek rozčlenit více. Když nestačí metr, může se celek rozdělit na decimetry nebo centimetry (1m = 10dm = 100cm).

Zlomek ve smyslu míry je tedy spojený s procesem rozdělování (partitioning), který hraje důležitou roly i v dalších modelech a interpretacích zlomkových čísel, jak jsme viděli výše, ale v případě zlomku jako míry je rozdělovací proces obohacen o dynamický aspekt. Jestliže mluvíme o zlomku jako o míře, zaměřujeme pohled na postupné rozdělování celku. Například celek rozdělím na deset dílků, každý jednotlivý dílek opět na deset dílků, atd. Nebo rozdělím celek na dvě části, každou část rozdělím na tři části a pak ještě každou část na čtyři části (1/24 = ¼ z (1/3 z (1/2 z 1))). Namísto stanovení fixního počtu stejných částí v celku se zde počet stejných částí v celku může měnit. Jak nazveme zlomkové množství pak závisí na tom, kolikrát budeme provádět rozdělovací proces (Lamon, 1999).

Lamon (1999) upozorňuje, že o racionálních číslech často mluvíme jako o bodech na číselné ose. Ony jsou ale ve skutečnosti rozměrem, vzdálenostní mírou. Zlomek viděný jako míra obvykle označuje nějaký interval, vzdálenost od nuly na číselné ose, kde celek je většinou interval o délce 1.

I když interpretace zlomku jako míry se velmi blíží jiným interpretacím a řada autorů ji vůbec samostatně neuvažuje, Lamon ji vyčleňuje zvlášť. Podle ní totiž osvětluje další aspekty racionálních čísel, na které ostatní interpretace zaměřeny nejsou. Práce se zlomkem jako s mírou přináší dynamický pohyb mezi nekonečnými čísly. Ukazuje „hustotu" racionálních čísel. Pomáhá pochopit smysl posloupnosti, řád racionálních čísel nebo stupně přesnosti při měření.

Lamon (1999, s. 121) uvádí tři předpoklady rozumění zlomku v kontextu míry: schopnost představit si i další členění než jen půlení, schopnost najít další zlomková čísla mezi dvěma danými zlomky a schopnost použít daný jednotkový interval jako míru jakékoli vzdálenosti od počátku. Jako pomoc k uchopení aspektu zlomku jako míry používá Lamon hodně úlohy pracující s číselnou osou, zvláště pak její postupné rozčleňování až na úroveň, kterou potřebujeme k zakreslení daného zlomku na číselnou osu.

Podle Tiché (2006, konzultace), jestliže umístíme zlomek na číselnou osu, jedná se už vlastně o číslo. Podobně jestliže hledáme nějaké zlomky mezi dvěma zadanými zlomky, vystupují v takovém případě v roli čísla. Zlomek v kontextu míry, jak ho chápe Lamon, Tichá nevyčleňuje. Pojem míra (measure) Tichá používá v jiném smyslu. Jako „measure" označuje kvantitativní údaj u veličiny a zkráceně mluví o zlomku jako veličině. Například: Pepa nasbíral ¼ kg hub a Jana ½ kg hub. Kolik hub nasbírali dohromady? (Tichá, 2003, s.20). Tichá tak vlastně nevyčleňuje žádný další, samostatný, specifický kontext zlomku.

2.7.2 Číselná osa a míra

Vztahem číselné osy a interpretace zlomku jako míry se zabýval také Ni (2000). Ni zkoumal, zda je validní používat na měření dovedností a znalostí v oblasti racionálních čísel položky obsahující práci s číselnou osou a zda schopnost reprezentace zlomku na číselné ose ukazuje schopnost chápat jeden z aspektů zlomku, zlomek jako míru. Vytyčil si tři oblasti znalostí zlomkové problematiky, které u dětí zkoumal. Jednalo se o aritmetické počítání se zlomky (computation), aplikace (application) a výklad (explanation).

Oblast aritmetického počítání se zlomky obsahovala úlohy na aritmeticky zadané úlohy na sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků (bez zadání slovní úlohou).

Oblast aplikace obsahovala úlohy na užití grafických vyjádření, procedur a operací ve smysluplných situacích. Do této oblasti patřily úlohy pěti typů: a) zlomek vystupující v roli operátora (např. Kolik je 1/6 z 8 dolarů?); b) srovnání velikosti dvou rozměrů zlomků (např. Co je delší: 2/5 metru nebo 1/3 metru?); c) najít zlomek mezi dvěma danými zlomky; d) najít, kolik jednotkových zlomků je obsaženo v zadaném čísle nebo zlomku (např. Kolik 1/5 je ve 2?); e) použít čísla daného celku k prezentování jiného čísla z odlišného celku (např. Mary má 2 pytlíky se 3 tužkami v každém z nich a 5 pytlíků se 6 tužkami v každém z nich. Kolik pytlíků se 2 tužkami může udělat?).

Výklad, třetí oblast znalostí pracujících se zlomky, obsahoval položky zkoumající porozumění některým jevům typickým pro zlomkovou problematiku (např. Kolik zlomků je mezi 0 a 1? nebo 12×3/4=9 a 12×7/4=21: Proč je výsledek menší než činitel (první číslo), když je násoben pravým zlomkem a větší než činitel, když je násoben nepravým zlomkem?)

Ni zkoumal korelační vztahy mezi těmito třemi oblastmi znalostí zlomkové problematiky a znalostí a) části-celku srovnání (part-whole knowledge), b) zlomku jako míry zjišťovanou pomocí práce s obrázkovou reprezentací zlomku na číselné ose (measure knowledge A), c) zlomku jako míry zjišťovanou pomocí srovnávání velikosti dvou zlomků (measure knowledge B).

Ke zjištění porozumění vztahu mezi částí a celkem používá Ni úkoly, kde se zlomek reprezentuje modelem „část z oblasti“ (obdélník nebo koláč) a k porozumění aspektu míry racionálních čísel používá úkoly, kde se k místu na číselné ose přiřazuje zlomek. Takové úkoly, jak uvádí Ni, se pro tyto účely běžně užívají[6]. Ke zjištění porozumění aspektu míry racionálních čísel používá Ni ještě srovnání velikostí dvou zlomků (dětem se zadají dva zlomky a ony mají za úkol určit, který ze zlomků je větší nebo menší).

---

[6] Práci s číselnou osou používá k procvičování a zjišťování znalostí v kontextu zlomku jako míry například Lamon (1999, viz výše).

Ni objevil, že naměřená schopnost pracovat s reprezentací zlomku na číselné ose neměla žádnou nebo zanedbatelnou souvislost (nekorelovala nebo korelovala zanedbatelně) se znalostí „část-celek“ a se všemi třemi zkoumanými oblastmi dovedností (aritmetické počítání, aplikace a vyložení). Naproti tomu schopnost porovnávat velikost dvou zlomků se ukázala být v těsné souvislosti se třemi měřenými kritérii dovedností i znalostí „část-celek“. Úspěšnost v porovnávání velikosti zlomků předpovídá úspěšnost ve všech třech zkoumaných oblastech dovedností.

Výsledky také ukázaly, že schopnost reprezentace zlomků pomocí číselné osy neukazuje, jak děti rozumí aspektu zlomku jako míry. O porozumění aspektu míry vypovídá lépe schopnost porovnat velikost zlomků.

Výsledky také ukázaly, že spolu nesouvisí schopnost pracovat s modelem „část z oblasti“ a schopnost pracovat s modelem číselné osy.

Ni vychází z teze, že pro děti je porozumění matematickým symbolům jeden z nejtěžších úkolů matematického učení. Při výuce se používají manipulativní materiály a grafické reprezentace, aby se matematické koncepty a procedury konkretizovaly, a tak pomohly dětem matematický koncept uchopit. Ale existují určité potíže při používání obrázkových a grafických analogií pro znázornění pojmu, konceptu. Jednou z obtíží je fakt, že ne vždy jsou používané modely méně abstraktní než symboly a tedy se může stát, že ne zrovna dobře plní funkci přemosťování k symbolu. Například graficky znázorněné vztahy určité úlohy nemusí být méně abstraktní než rovnice, která úlohu reprezentuje. A tedy čtení grafů nemusí být pro děti jednodušší než čtení rovnic. Takové obtíže se mohou objevit i při znázorňování zlomku jako míry různými reprezentacemi.

Ni také upozorňuje, že řada studií píše o velkých obtížích dětí s reprezentací racionálních čísel na číselné ose. Například děti často berou celou číselnou osu jako celek, místo aby vzaly jako celek segment od nuly do jedné. Autoři těchto studií vysvětlují tento fakt buď tím, že děti mají tyto obtíže kvůli tomu, že nedokáží pracovat se zlomkem jako se samostatnou entitou a berou ho jako entitu skládající se ze dvou čísel (Behr, et al., 1993, podle: Ni, 2000) nebo vidí problém v neuchopení „hustoty“ racionálních čísel. (Hiebert, et al., 1991, podle: Ni, 2000).

Ni zdůvodňuje obtíže při používání číselné osy k reprezentaci zlomků velkou abstraktností číselné osy pro děti. Protože je číselná osa pro děti příliš abstraktní, mají tendenci použít cokoliv, co je jim bližší, k uchopení reprezentace, které pro ně není dobře představitelná. Proto se například stane, že na číselnou osu napasují představu z modelu část-celek (část z oblasti), která je pro ně dobře uchopitelná. Pak mohou vnímat celou číselnou osu jako celek, jako skupinu prvků, atp. Ale to nemusí znamenat, že nerozumí aspektu míry zlomků.

Ni nepopírá, že výborné ovládání této reprezentace může ukazovat porozumění aspektu zlomku jako míry, ale upozorňuje, že obráceně to nemusí platit. Jestliže děti selžou při zobrazování zlomku na číselné ose, nemůžeme automaticky říct, že postrádají schopnost porozumět aspektu míry racionálních čísel.

Jak je možné, že schopnost používat model „část z oblasti" nekoreluje se schopností vyjádřit zlomek modelem číselné osy? Ni tento jev vysvětluje zkreslením na základě předchozích zkušeností. Rozsáhlé zkušenosti dětí se zlomkovým model „část z celku" a obzvláště s modelem „část z oblasti" zkreslují jejich porozumění kritickým znakům spojených s číselnou osou. Rozsáhlé jednostranné zkušenosti brzdí jejich představy (podobně také problém konceptuální změny a přenosu zkušeností z přirozených čísel na oblast racionálních čísel, viz kapitola 1). Popsané rušení může způsobovat nepřesnosti při měření toho, co děti vědí nebo nevědí o racionálních číslech.

Ni ale rozhodně nechce říci, že se číselná osa nemá používat, nebo že by nemohla vyjadřovat koncept racionálních čísel, nebo že nepomáhá dětem abstrahovat koncept racionálních čísel.

2.8 Zlomek jako poměr

Poměr je srovnání jakýchkoliv dvou množství a nemůže být vyjádřen jako jedno číslo. Poměr může srovnávat množství stejného typu (hnědá a bílá vajíčka v kartonu) nebo množství různého typ (5km/h). Při srovnání množství stejného typu existují dva druhy poměrů: srovnání část-celek a srovnání část-část. Při srovnání část-celek je v poměru kvantita části sady s kvantitou celé sady. Poměr část ku části srovnává kvantitu nějaké části sady ke kvantitě jiné části sady. Když máme 12 vajec a 5 z nich je bílých a 5 hnědých, můžeme utvořit poměr 5:7 a 7:5 (srovnání část – část) nebo 5:12 a 7:12 (srovnání část-celek) (Lamon, s. 164).[7]

Na rozdíl od Lamon existují autoři, kteří vztah 5:12 a 7:12 nepovažují za vztah poměrový (Tichá, 2006, konzultace). Podle nich jde čistě o srovnání část-celek (o něm viz výše). A 5:7 a 7:5 jsou poměry a ne zlomky. Zlomky 5/7 a 7/5 vyjadřují něco jiného.

[7] Lamon zde používá výrazy „part of a set" nebo „whole set". Proč nepoužívá „part of the unit nebo „unit" jako jinde, nevím. Lamon to nevysvětluje. Možná to nemá žádný význam, ale možná chce Lamon zdůraznit. že se nejedná o typický zlomek vztažený k typickému celku (například chce odlišit „typicky zlomkové" srovnání část-celek od „poměrového" srovnání část-celek) nebo chce zdůraznit diskrétnost celku v následujícím příkladu (vajíčka).

2.9 Pět interpretací 3/4

V předchozích kapitolách jsem popsala, jakým způsobem Lamon (1999) vnímá pět interpretací zlomku a také názory jiných autorů na tyto interpretace. Zde uvádím volně přeloženou shrnující tabulku významů jednotlivých interpretací pro zlomek 3/4 uvedenou Lamon (2006, s.220). Originál tabulky je uveden v přílohách.

tabulka 1

Racionálně číselné interpretace 3/4	Význam	Vybrané aktivity pro vyučování
Srovnání část-celek s „jednotkováním" "3 části ze 4 stejných částí"	3/4 znamenají tři části ze čtyř stejných částí celku a ekvivalentní zlomky nalezené díky dívání se na části prostřednictvím vztahů k větším nebo menším souborům. 3/4 koláčů=12/16(1/4 koláčů)=(1a1/2)/2 (páru koláčů)	„Jednotkování" (unitizing) pro vytváření ekvivalentních zlomků a srovnávání zlomků
Míra "3 (1/4tinové celky)"	3/4 znamenají vzdálenost danou 3 (1/4tinovými celky) od 0 na číselné ose nebo 3 (1/4tinovými celky) dané oblasti.	Postupné rozdělování číselné osy; práce s měřícími přístroji
Operátor "3/4 z něčeho"	3/4 obsahují pravidlo udávající, jak operovat na celku (nebo na výsledku předchozí operace); násob 3 a vyděl výsledek 4 nebo děl 4 na vynásob výsledek 3. 3/4 tak mohou znamenat: 3(1/4 celky), 1(3/4 celku) and 1/4(3-celku)	Aktivity ukazující zvětšování a zmenšování (skládání papíru, xeroxování...) a modely ukazující násobení a dělení.
Kvocient "3 děleno 4"	3/4 je množství, které obdrží každá osoba, když si 4 lidé dělí 3-celek („třícelek") něčeho.	Rozdělování (partitioning)
Poměr "3 ku 4"	3:4 je vztah, ve kterém jsou 3 přirovnány (v multiplikativním spíše než aditivním smyslu) ku 4	Aktivity s dvojbarevnými žetony

3 Relativní myšlení

3.1 Relativní a absolutní myšlení

Lamon (1999, s. 12-13) ukazuje rozdíl mezi relativním a absolutním myšlením na následující úloze. Představme si dva hady Aloise a Kubu. Aloise měřil před dvěmi lety 4 metry a Kuba měřil 5 metrů. Nyní měří Alois 7 metrů a Kuba 8 metrů. Je přírůstek obou hadů stejný? Na otázku můžeme odpovědět dvěma způsoby, v závislosti na užití dvou odlišných pohledů na problém. První pohled vidí skutečnou (actual) změnu délky. Vidí změnu velikosti od původní velikosti k nynější délce, o kterou hadi vzrostli, bez jakékoliv závislosti nebo relace k něčemu dalšímu. Při takovém způsobu uvažování o problému konstatujeme, že oba hadi vyrostli stejně, a to o 3 metry. V tomto případě se jedná o absolutní vnímání změny a o přemýšlení v absolutních souvislostech, o tzv. absolutní myšlení (absolute thinking). Někdy je také nazýváno aditivní myšlení (additive thinking).

Druhý pohled srovnává přírůstek obou hadů vzhledem k jejich původní délce. Velikost změny je tedy závislá na původní velikosti hada. V tomto případě jde o relativní pohled na změnu a uplatňuje se relativní myšlení (relative thinking). Alois vyrostl více vzhledem k jeho původní délce. Vyrostl o ¾ své původní délky a překonal tak Kubu, který vyrostl jen o 3/5 své původní délky. Relativní myšlení je také někdy nazýváno multiplikativní myšlení (multiplicative thinking).

Relativní myšlení umožňuje vidět souvislosti typické pro zlomkovou problematiku. Lamon (1999) uvádí, že na základě relativního myšlení například vidíme vztah mezi velikostí částí a počtem částí. Vysvětluji si to jako uvědomování si skutečnosti, že jestliže rozdělujeme celek na libovolný počet stejných částí, pak čím více stejných částí vytvoříme, tím budou menší. A tedy jestliže rozdělíme celek na stejné části a tyto části ještě rovnoměrně rozdělíme, celek se nezvětší. Situaci dobře vystihuje vtip, který uvádí Lamon. Osoba si objednává pizzu a nabádá zaměstnance pizzerie: „Cut that pizza into four slices. I can't eat eight." (1999, s. 19).

Lamon uvádí i další souvislosti zlomkové problematiky, které chápeme díky relativnímu myšlení. Kromě vztahu mezi velikostí kusů a počtem kusů v celku sem patří i vědomí, že zlomky se mohu vzájemně srovnávat pouze ve vztahu ke stejnému celku. Můžeme říct, že ½ je větší než ¼, pouze když jsou v relaci ke stejnému celku.

Na základě relativního myšlení také můžeme vidět, že stejný počet, nebo množství, může být vyjádřeno různými zlomky, jestliže se vztahují k různým celkům. Tři čtverečky mohou být ½ i ¼. A opačně zlomek může zůstat stejným zlomkem, i když je znázorněn různými reprezentacemi, i když vyjadřuje různá množství, tvary nebo úseky, jestliže ukazuje stejný vztah k celku. A také, i když je zlomek vyjádřen v rozšířených či zkrácených tvarech (3/5 = 12/20 = 6/10), pojmenovává stejné relativní množství, ať už je celek rozdělen na pětiny, dvacetiny nebo desetiny.

3.2 Vývoj chápání vztahu dvou kvantit

Rendl (2006, konzultace) uvažuje o vývoji chápání vztahu mezi dvěmi kvantitami u dětí ve třech etapách. V první etapě určí dítě, čeho je víc a čeho je míň, podle zabraného prostoru nebo tvaru dané kvantity. Jedna hromádka kuliček je větší než druhá, protože zabírá víc prostoru. Nebudu zde rozebírat všechny případné omyly, kterých se děti při takovém způsobu srovnávání dopouštějí (viz Piaget, např. 1966).

Ve druhé etapě už dítě dokáže kvantity vyjádřit počtem. Nejprve ví, že 5 je víc než 2, ale neví ještě o kolik. Později dokáže i vztah dvou počtů vyjádřit počtem. Počty nejprve srovnává aditivně („o x víc/míň“ - 5 je o 3 víc než 2), ale později si osvojí multiplikativní srovnání („xkrát víc/míň“). Zprvu dítě nechápe vztah mezi aditivním (absolutním) a multiplikativním (relativní) srovnáním a provádí je podle toho, jak je zadána úloha nebo náhodně vybírá.

Teprve později si děti ujasní, že jde o dvě různá hlediska, která mohu pro srovnání volit. Dostávají se do třetí etapy, kdy vidí „relativnost hledisek“. Tato relativnost („jak se to vezme“) je vyšším stádiem než pouhé ovládnutí relativního (multiplikativního) srovnání.

4 „Dělení množství na nestejné části“

Děti se ve škole setkávají s úlohou, která požaduje rozdělit množství na nestejné části, přičemž je zadán vztah mezi množstvím v každé části. Zadaný vztah může akcentovat aditivní (příklad 8) nebo multiplikativní (příklad 9) strukturu. Úlohy mohou znít například takto:

Příklad 8

Jirka a Martin mají dohromady 25 kuliček. Jirka jich má o 5 víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

$25-5=20,\ 20 \div 2=10,\ 10+5=15,\ J=15.$

nebo

$25=J+M,\ J=M+5,\ 25=M+5+M,\ 25=2M+5,\ M=(25-5)/2,\ M=10,\ J=10+5,\ J=15.$

Příklad 9

Jirka a Martin mají dohromady 20 kuliček. Jirka jich má 3krát víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

$20 = J + M,\ \boldsymbol{J = 3M},\ 20 = 3M + M,\ 20 = 4M,\ M = 20/4,\ M=5,\ J=3\times 5,\ J=15.$

Děti se neučí počítat typy příkladů, jako je příklad 8 a 9, pomocí rovnic. Uvádím je proto, aby bylo zřejmé, že východiskem pro výpočet Jirkova množství je Martinův počet kuliček.

Děti se učí vypočítat Jirkovo množství pomocí algoritmu, který je uveden jako první způsob výpočtu příkladu 8. To, o co má Jirka víc, odečti od celkového množství. Množství, které ti vyjde, rozděl na polovinu a přičti k němu 5, protože Jirka má mít o 5 víc. Vyjde ti množství, které má Jirka.

Úloha typu „delení množství na nestejné části“ může obsahovat i zlomky. Jedno z možných znění uvádí následující příklad.

Příklad 10

Jirka a Martin mají dohromady 35 kuliček. Jirka jich má o 1/3 víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

35=J+M, ***J=M+1/3M****, 35=M+M+1/3M, 35=7/3M, M=15, 1/3M=5, J=15+5, J=20.*

Zde vystupuje zlomek jako operátor. Úloha je ztížena díky implicitnímu zadání celku. Dítě si musí uvědomit, že základem pro výpočet části určené 1/3 je, ve shodě s logikou příkladů 8 a 9, počet kuliček, které má Martin. Celkem pro výpočet 1/3 je tedy Martinovo množství. Jirka má to, co Martin a ještě 1/3 z toho, co má Martin.

Příklad 10 zadávala dětem Tichá (1998, s. 133). Tichá uvádí dvě odlišná řešení příkladu 10 a ukazuje na nich dvě odlišná chápání podmínek úlohy.

Adéla počítá: 3/3+3/3+1/3=7/3, 35÷7=5, 1/3=5, 35-5=30, 30÷2=15, 15+5=20

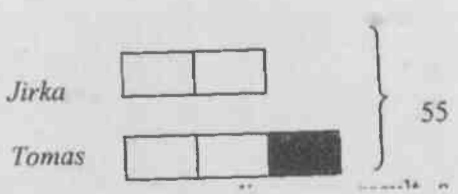
Karel počítá: Jirka má 2/3 z 35 a Martin má 1/3 z 35. A ještě kreslí kruh rozdělený na třetiny s vyznačenou jednou třetinou.

Karel chápe formulaci „A má o jednu n-tinu víc než B“ tak, že A má (p+1) n-tin, B má (p) n-tin a oba z téhož celku, přičemž hledá se p (p=?); nezáleží na tom, zda n je liché nebo sudé číslo. Karlův postup uvádí Tichá jako jeden z případů neporozumění úloze. Naopak v Adélině řešení se podle Tiché ukazuje hluboký vhled do situace. Adéla nechápe „1/3“ jako zlomek, ale jako symbol k označení jistého objektu. Rozdělí celek na n stejných částí. Jednu n-tinu chápe jako novou jednotku jiné kategorie, jako základ nového pohledu (nazírání). Neni primárně důležité, že se jedná o třetinu. Důležité je, že mám sedm stejných částí, sedm stejných košíků, sedm stejných obdélníčků, atd. (Tichá, 1998).

Stejný problém ukazuje Tichá i na jiném místě (2003, s. 23-24) prostřednictvím jiného zadání úlohy. Děti mají napsat slovní úlohu, která bude korespondovat se zadaným obrázkem.

Příklad 11
(Tichá, 2003, s. 23-24)

obr. 3



řešení 11.1: Jirka a Tomáš vydělali 55 korun dohromady. Jirka dostal 2/5 a Tomáš dostal 3/5. Kolik dostal každý peněz? (chápe zlomek jako operátor, 2/5 z 55 a 3/5 z 55).

řešení 11.2: Jirka má 22 hrušek a Tomáš má o ½ hrušek víc než Jirka. Kolik mají dohromady? (napočítal přidaná data a pak vytvořil problém).

řešení 11.3: Matka koupila 55 malých koláčků. Jirka snědl 2/5 koláčků, ale Tomáš snědl o 1/5 víc než Jirka. Kolik koláčků každý snědl?

řešení 11.4: Jirka a Tomáš, oba sbírají známky. Mají dohromady 55 známek. Tomáš má o 1/5 víc známek než Jirka. Kolik známek každý má?

Tichá (2003) uvádí, že autor řešení 11.1 chápe zlomek jako operátor. Počítá 2/5 z 55 a 3/5 z 55.

Řešitelé 11.2 a 11.3 vytvářejí správné znění s výrokem „o 1/b víc než“, i když každý jinak. Způsob řešení 11.2 je principiálně stejný jako Adélino řešení z příkladu 10 a je na první pohled správné. S autorem řešení 11.3 Tichá vedla dodatečný rozhovor, ve kterém se zjistilo, že dítě uchopuje zlomek 1/5 jako nový objekt, jako pojmenované číslo, jako novou jednotku, pro kterou použilo označení „pětina“. Při rozhovoru dítě řeklo, že každý obdélníček je stejný a Tomáš má o jeden obdélníček víc než Jirka. A tedy i řešitel 11.3 má správný pohled na situaci „o 1/5 víc než“.

Řešení 11.4 je narozdíl od předchozích chybné a svědčí, jak píše Tichá, o vážném nedostatku, kdy studenti nejsou schopni rozeznat, co je celek a co je část. Slovo „než“ studenti nepovažují za indikátor celku a jsou ovlivněni výrokem „mají dohromady“, který je pro řadu studentů „signálem“ udávajícím celek. Tichá uvádí, že studenti také nerozeznají odlišnost mezi výrokem „Jirka má 2/5 a Tomáš o 1/5 víc“ a „Tomáš má o 1/5 víc než Jirka“.

Tichá (1998) k tomu uvádí, že v běžných textech, se kterými se žáci setkávají, hrají hlavní roli zpravidla podstatná jména a slovesa. V úlohách tohoto typu mají podstatnou, dominantní roli také předložky „o“ a částice „než“. To může souviset s nerozeznáním významu výroku „o...než“.

5 Které příklady jsem zadala, proč a jaké byly moje předpoklady

Chtěla jsem postihnout vnímání a představy dětí o zlomcích v různých významových kontextech. Vyšla jsem proto z pěti hlavních interpretací zlomkového vyjádření vyčleněných Lamon (1999, viz výše). Možné zlomkové interpretace, které uvádí Lamon, by totiž měly pokrýt kontexty, ve kterých se děti se zlomky setkávají. Zadala jsem osm úloh, ve kterých je zastoupeno všech pět základních zlomkových interpretací.

5.1 Srovnání část-celek a „jednotkování"

Předpokládala jsem, že klasické úlohy na srovnání část-celek jsou pro děti ze sedmé a osmé třídy jednoduché. Zadávat úlohu: „vyjádři zlomkem jak velká část kruhu je vyznačena červeně", by byla pravděpodobně jen ztráta času. Proto jsem vybrala příklady, ve kterých se musí významně zapojit proces „unitizing" (viz výše). Srovnání část-celek a proces „jednotkování" měly mapovat první dvě úlohy.

5.1.1 úloha 1

a) Rozděl tento celek na třetiny. Kolik teček obsahují 2/3?
b) Rozděl tento celek na šestiny. Kolik teček obsahuje 5/6?
c) Rozděl tento celek na devítiny. Kolik teček obsahují 2/9?
d) Rozděl tento celek na dvanáctiny. Kolik teček obsahuje 5/12?
e) Rozděl tento celek na osmnáctiny. Kolik teček obsahují 4/18

(úloha od Lamon, 1999, s. 73).

V úloze 1 jsem chtěla pozorovat, jak si děti poradí se strukturováním celku a jaké strategie zvolí. Zda dokáží flexibilně opustit předchozí představu rozčleněného celku a vidět jeho jinou strukturaci.

Předpokládala jsem, že děti budou mít problém s rozdělením celku na dvanáctiny, protože budou mít tendenci brát jednotlivé tečky jako dále nedělitelné, a s rozdělením na devítiny, kde už nemusí být tak snadné rozčlenit celek vizuálně v představách na devět části. Snazší je to u třetin a šestin.

5.1.2 úloha 2

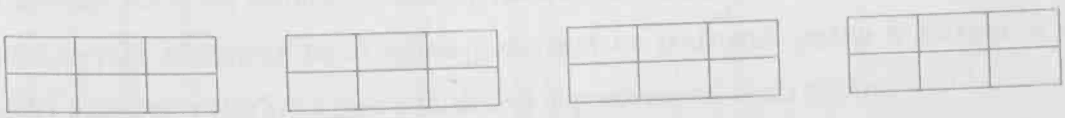
Dotvoř následující skupinu čtverečků tak, aby bylo zřejmé, že vyjadřuje 16/4 (volně podle úloh od Lamon (1999, s. 70-73)).

Úlohu 2 jsem zadala proto, abych se mohla s dětmi bavit o jejich chápání vztahu mezi celkem a částí. Jak si děti s úlohou poradí? Jestliže celek budou čtyři čtverečky, co bude ¼? Jestliže ¼ budou čtyři čtverečky, co bude jeden celek? Jestliže zkrátím 16/4 na 4/1, co vlastně vidím? Atp.

5.2 Kvocient a rozdělování

úloha 3

Šest dětí má tyto čtyři čokolády k rozdělení. Každé dítě má dostat stejně. Jakým způsobem se mohou rozdělit? (podle Lamon, 1999, s.75)



Třetí úloha patří do skupiny interpretací zlomku jako kvocientu a při řešení se využívá proces rozdělování („partitioning“, viz výše).

V této úloze mě zajímalo, jakým způsobem proběhne rozdělovací proces. Jakým způsobem budou jednotlivé děti poděleny? Využijí děti nákres? Vyjádří nalezené množství pro jedno dítě zlomkem, i když se jich na to v otázce přímo neptám?

5.3 Operátor

Zlomek v roli operátora vystupuje ve čtvrté a páté úloze.

5.3.1 úloha 4

Katka se účastnila patnácti závodů v plavání a 2/3 z nich vyhrála. Kolik jich prohrála?

Čtvrtou úlohu jsem zadala především proto, abych zjistila, kterým dětem dělá problémy vyjádřit část z celku při explicitně zadaném celku a pracovat se vztahy ve slovní úloze. Předpokládám, že většina dětí nebude mít problémy úlohu vyřešit. Chtěla bych ale pracovat i se způsobem, jakým část z celku počítají. Uvědomují si, co znamenají jednotlivé kroky, které dělají?

5.3.2 úloha 5

Kromě úlohy 4 jsem zadala ještě jednu úlohu, ve které vystupuje zlomek jako operátor. Použila jsem úlohu Tiché (1998) uvedenou v příkladu 10 (viz výše), pouze jsem pozměnila celkové množství kuliček (znění úlohy, kterou jsem zadala, viz níže, příklad 12).

Chtěla jsem pochopit, v čem je pro děti problematická. Je opravdu klíčová neschopnosti určit, co je celek a co část, a neschopnosti brát 1/b jako nový objekt, jako pojmenované číslo, jak uvádí Tichá? Mají všechny děti, které řeší úlohu stejně jako Karel, omezené vnímání situace? Tedy, že automaticky vezmou jediné množství, které je zadáno, a z něho vypočítají zadaný zlomek?

Určitá slovní spojení jsou v naší společnosti vnímána ustáleným způsobem, jednotně. Dítě se musí učit v procesu socializace, co který výrok znamená. Ve velké míře se to děje právě v matematice, kde navíc všeobecně uznávaný význam pojmu užívaného v běžném životě, dostává význam jiný (viz kapitola 2.1 o pojmu zlomek v nematematických situacích). I Tichá zmiňuje jazykové souvislosti nesprávného řešení úlohy (viz výše), když upozorňuje, že děti jsou zvyklé z běžných textů upírat pozornost na podstatná jména a slovesa, a ne na předložky a částice, nebo když píše o možnosti neporozumění textu zadání.

Já si ale navíc myslím, že výrok z příkladu 10 „o 1/3 víc než Martin" neříká nic o tom, co má být bráno jako celek. Výrok říká, že mezi Jirkovým a Martinovým množstvím bude rozdíl 1/3, a že Jirka bude mít o tu 1/3 víc. Není ale řečeno (ani implicitně), co je základem pro výpočet „1/3 z". Karlovo řešení by tedy mohlo být považováno za správné. Sémantický výklad, který je v matematickém ohledu považován za správný, tedy že celkem má být Martinův počet kuliček, se musí dítě naučit. Jde o jazykový úzus. Dítě se musí naučit, že „takto" formulované zadání má vnímat „tímto" způsobem. Má „cítit" příslušný význam.

To jim ztěžuje neběžnost výskytu takových příkladů v učebnicích. Děti se sice setkávají s úlohami tytu „dělení na nestejné části" (viz výše), kde je požadované sémantické „cítění" trénováno, ale úloha typu „dělení na nestejné části" obsahující zlomek jako operátor se vyskytuje v učebnicích až v osmé třídě, kdy jsou probírány lineární rovnice.

Navíc úloha kombinuje aditivní a multiplikativní vztah. Do aditivní struktury vyjádřené výrokem „o x víc než" je vnořen multiplikativní vztah „ xkrát méně" (=1/x). Celý výrok tedy můžeme zapsat: „o (x krát méně) více".

Je možné, že většina dětí, jak uvádí Tichá (1998), řeší úlohu 5 stejně jako Karel, protože ještě nemá dostatečně zafixován onen kulturně obecně zažitý význam?

Podívejme se, jak by řešení úlohy mohla vypadat, kdybychom připustili, že výrok „o 1/3 kuliček víc než“ implicitně neurčuje celek. Jako celek budu postupně brát celkové množství kuliček, Martinův počet kuliček a Jirkův počet kuliček (viz příklad 12.1-12.3). Vezmeme-li samotný výraz „o 1/3 víc než“ může také znamenat „o 1/3 kuličky víc než“. V takovém případě je celek jedna kulička. Řešení takové úlohy ukazuje příklad 12.4.

Příklad 12

Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. Jirka jich má o 1/3 více než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

12.1: celek je Martino množství kuliček:

Martin má 3/3 a Jirka o 1/3 víc. Jirka má tedy 4/3. 4/3 + 3/3 = 7/3. 35÷7 = 5. 5=1/3. Martin má 3×5= 15 a Jirka 4×5= 20.

nebo

J=M+1/3M, 42=J+M, 42=M+M+1/3M, 42=7/3M, M=18, 1/3M=6, J=18+6, J=24.

12.2: celek je celkové množství kuliček:

Celkové množství jsou 3/3. Aby měl Jirka o 1/3 víc, musí mít Martin 1/3 a Jirka 2/3. 42÷3=14, M= 14, J = 28.

nebo

J=M+1/3(M+J), 42=J+M, 42=(M+1/3(M+J))+M, 42=M+1/3(42)+M, 42=2M+ 1/3(42), 42-1/3(42)=2M, 42-14=2M, 28÷2=M, M=14, J=28.

12.3: celek je Jirkovo množství kuliček:

Jirka má 3/3. Protože Jirka má o 1/3 víc než Martin, Martin má 2/3. 3/3 a 2/3 je 5/3. 42÷5=8,4; 1/3=8,4; 3×8,4=25,2; 2×8,4=16,8; J=25,2; M=16,8;

nebo

J=M+1/3J, M=J-1/3J, 42=J+M, 42=J+J-1/3J, 42=5/3J, J=25,2; 1/3J=8,4; M=25,2-8,4; M=16,8.

12.4: celek je jedna kulička:

42-1=41, 41÷2=20,5; 20,5+1/3=M; M=20 a 5/6; 20,5+2/3=J; J=20 a 7/6[8].

nebo

J=M+1/3, 42=J+M, 42=M+1/3+M, 42=2M+1/3, M=21-1/6, M=20 a 5/6, J=20 a 7/6.

Dětem jsem zadala úlohu z příkladu 12. Zajímalo mne, jakým způsobem budou nad úlohou uvažovat, jakým způsobem ji uchopí, jestli se jim bude zdát komplikovaná a proč.

---

[8] Výpočet neodpovídá algoritmu dělení na nestejná části, který jsem uvedla v příkladu 8. Podle tohoto algoritmu by výpočet vypadal takto: 42-1/3=126/3-1/3=125/3; 125/3÷2=125/3×1/2=125/6; J=125/6+1/3; J=127/6; J=21 celých a 1/6; M=125/6; M = 20 celých a 5/6. Výpočet který jsem uvedla v textu se mi zdá pochopitelnější, protože zdůrazňuje rozčlenění jedné kuličky na třetiny (Martin bude mít 1/3 kuličky a Jirka 2/3 kuličky a Jirka tedy o 1/3 kuličky víc než Martin).

Sáhnou automaticky po celkovém množství jako po celku? Budou tomuto kroku předcházet jiné úvahy? Jak se vyrovnají s aditivním a multiplikativním vztahem v úloze?

Dětem byly dále po výpočtu úlohy 5 předkládány čtyři pozměněné verze původní úlohy. Znění jednotlivých verzí se lišila vyjádřeným celkem (Martinův počet kuliček, Jirkův počet kuliček, celkové množství kuliček a jedna kulička). Byla to vlastně zadání pro různé způsoby výpočtů uvedených v příkladu 12. Každou verzi jsem se snažila vytvořit tak, aby jasně vyjadřovala, co má být základem pro výpočet 1/3, aby bylo uvedeno „z čeho" se má 1/3 vypočítat.

Kladla jsem si otázky: Když dětem napovím, co mají brát jako celek, budou schopny příklad vyřešit? Budou vyznění pozměněných verzí děti pokládat za stejná nebo jiná vzhledem k původnímu zadání úlohy? Bude se jim zdát, že původní úloha říká to samé jako některá z pozměněných verzí? Který způsob „čtení" zadání bude převažovat? Jsou děti schopny vidět změnu řešení v závislosti na změně souvislostí?

Jednotlivé verze jsou uvedeny v příkladu 13. Předpokládala jsem, že dětem může verze zadání, kde bude jasně určen jako celek Martin (verze 5A), pomoci podívat se na úlohu jiným způsobem. A pak případně i „správně" vypočítat původní úlohu.

Příklad 13
(Pozměněné verze původního zadání nebyly na pracovním listě. Předkládala jsem je postupně až po dokončení výpočtu původní úlohy. Ptala jsem se: Vyjadřuje toto zadání to samé, jako původní úloha? Nebo říká něco jiného? Co říká? Atp.).

***5A:** Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. Jirka má o 1/3 kuliček (z počtu kuliček, které má Martin) víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?*

***5B:** Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. Jirka má o 1/3 kuliček z celkového množství víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?*

***5C:** Jirka a Martin mají dohromady 45 kuliček. Jirka má o 1/3 kuliček (ze svého množství kuliček) víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?*

***5D:** Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. Jirka má o 1/3 kuličky víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?*

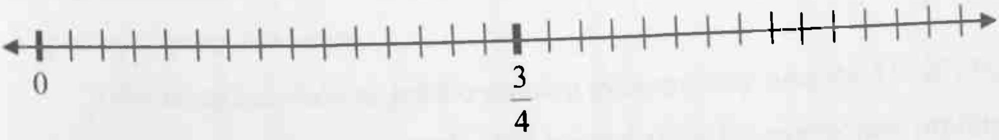
Zadání úlohy 5C se může zdát nesmyslné. Ale s podobnou strukturou příkladu se děti v učebnicích matematiky mohou setkat. Například: „Výška Jirky je 76 cm a polovina jeho výšky. Jak vysoký je Jirka?" (Molnár, 2000).

5.4 Míra

Interpretaci zlomku jako míry reprezentuje šestá a sedmá úloha.

5.4.1 úloha 6

Jestliže víš, kde na ose leží $\frac{3}{4}$, vyznač na ní $\frac{2}{5}$.



(podle úloh od Lamon (1999, s. 120-121))

Šestá úloha se zaměřuje na jeden aspekt zlomku jako míry, kdy zlomek vyjadřuje vzdálenost od nuly na číselné ose. Předpokládala jsem, že úloha bude obtížnější, a že se budou ukazovat dětské představy a vnímání nejen o zlomcích, ale také o číselné ose samotné. Čekala jsem obtíže, které děti mají při práci s číselnou osou.

5.4.2 úloha 7

Napiš dva zlomky, jejichž velikost je mezi $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{9}$.

(Lamon, 2003, s. 111)

V sedmé úloze dostaly děti za úkol pojmenovat dva zlomky mezi dvěma danými zlomky. Zadáním sedmé úlohy jsem chtěla postihnout „hustotovou“ vlastnost zlomků.[9] Tato vlastnost podle Lamon (1999, s.119) vyjadřuje, že mezi dvěma zlomky je nekonečně mnoho zlomkových čísel, a že se prostřednictvím zlomku můžeme dostat k jakémukoliv bodu na číselné ose tak blízko, jak chceme.[10]

Otázky které jsem si kladla: Vidí děti tuto vlastnost zlomků? Jakou použijí představu pro řešení ty děti, které najdou dva zlomky mezi dvěma zadanými? Znamená to, že si „hustotovou“ vlastnost zlomků uvědomují?

---

[9] S termínem „the density of rational numbers“ jsem se setkala u Lamon (1999), Merenluoto (2004) a Hieberta (1991, podle: Ni, 2000).

[10] Vzhledem k tomu, že Lamon ukazuje „hustotu“ racionálních čísel postupným, stále podrobnějším rozčleňováním číselné osy, myslí touto větou pravděpodobně možnost vyjádřit zlomkem jakýkoliv bod na číselné ose. I ten, které vyžaduje velkou přesnost měření, tedy velmi podrobné rozčlenění číselne osy.

5.5 Poměr

Osmá úloha používá zlomky v poměrovém smyslu. Není to typická úloha na poměr. Zjišťuje spíše proporcionální uvažování. Porovnává dva poměrové vztahy mezi sebou. Mela by ukázat, zda děti přemýšlejí v daném kontextu absolutně nebo relativně. Jestliže dítě vytvoří příhodný multiplikativní vztah, může mít ještě problém s jeho správnou interpretací, problém se správným porovnáváním.

Děti ze sedmé třídy se ještě o poměru systematicky neučily. U nich budou pozorované úvahy prekonceptními představami. Děti z osmé třídy již sice poměr probíraly, ale ke konci sedmého ročníku. Od probrání učiva tedy uplynulo asi 8 měsíců. U dětí z osmé třídy jsem předpokládala, že budou schopny alespoň utvořit multiplikativní vztah, i když by mohly mít problém s jeho interpretací nebo s porovnáním vzniklých poměrů.

úloha 8

Ve špatném baru míchají pomerančový a banánový džus s vodou. V pomerančovém džusu je 12 odměrek šťávy a 30 odměrek vody. V banánovém džusu je 16 odměrek šťávy a 36 odměrek vody. Který druh džusu je míň šizen?

6 Typ výzkumu

Jedná se o kvalitativní výzkum, který staví především na rozhovorech s dětmi. Rozhovor jako prostředek pro poznání dětských interpretací matematického světa zdůrazňuje řada autorů. Rozhovor nabízí velkou volnost při zjišťování žákových subjektivních názorů, dovoluje jít do hloubky, pružně reagovat na nečekané žákovské odpovědi nebo mlčení (Čáp, Mareš, 2001). Písemné informace nejsou dostačující, je nezbytné je specifikovat na základě rozhovoru se studenty (Tichá, 2003).

Autoři také upozorňují na rizika rozhovoru. Rozhovor s dětmi o jejich představách je obtížný. Mnohé děti své subjektivní představy o učivu jen obtížně verbalizují, nedostává se jim slov, aby vyjádřili to, co si o učivu myslí (Hejný, 1989; Čáp, Mareš, 2001; Tichá, 2003).

S vědomím všech obtíží se mi zdál rozhovor jako nejlepší a nezbytný při snaze pochopit strategie žáků a jejich představy a zlomcích. Proto jsem cesty myšlení dětí, jejich představy o předloženém problému či jejich interpretace předložené situace zkoumala na základě rozhovoru o tom, jak předloženou úlohu řešily.

7 Zkoumané děti

Pracovala jsem se dvěma skupinami dětí. První se skládala z jedenácti dětí ze sedmé třídy a druhá ze šesti dětí z osmé třídy. Původně jsem zahrnula do výzkumného vzorku pouze děti ze sedmé třídy. Po dokončení práce s nimi jsem však cítila potřebu rozšířit vzorek o děti z osmé třídy zvláště proto, abych mohla pozorovat jejich strategie při práci s pátou a osmou úlohou.

Systematicky se děti učí o zlomcích ve čtvrté třídě a poté v prvním pololetí sedmé třídy. V té době se ale neseznámí s poměrem. Ten se učí zvlášť až na konci sedmé třídy spolu s „měřítky" a procenty. Na konci ledna a začátku února 2006, kdy děti z výzkumného vzorku počítaly zadané úlohy a kdy jsem s nimi probírala jejich strategie, měly již problematiku zlomků probranou. Dětem ze sedmé třídy uběhly asi dva měsíce od ukončení výkladu o zlomcích a ve školním výkladu ještě nebyly seznámeny s poměrem a procenty. Děti z osmé třídy obě problematiky již probíraly v sedmé třídě (od výkladu tedy uběhla poměrně dlouhá doba) a byly těsně před probíráním látky o lineárních rovnicích.

Děti ze sedmé i osmé třídy jsou ze stejné školy a obě třídy učí matematiku stejná učitelka. Jedná se o běžnou základní školu v centru Prahy bez demografických zvláštností. O sedmé třídě musím podotknout, že je „plavecká". Děti z této třídy navštěvují plavecké tréninky a škola jim vychází vstříc v úpravě rozvrhu. Jejich učební osnovy v matematice však nebyly nijak upraveny. Učily se všechno, co jejich vrstevníci.

Sedmou třídu charakterizovala učitelka matematiky jako třídu s neběžným rozložením matematických schopností. Vyskytuje se v ní hodně „jedničkářů" a podprůměrných dětí a do středního pásma schopností patří méně dětí, než je běžné. Vzhledem k účelu mé práce to však není podstatné, protože vzorek dětí i tak obsahoval děti ze všech pásem matematických schopností, a proto by variabilita strategií a myšlenkových postupů neměla trpět.

Osmou třídu viděla učitelka matematiky jako běžnou s normálním rozložením matematických schopností. Šest dětí z osmé třídy mi do vzorku vybírala podle mnou zadaného klíče: jedničkář, jedničkář až dvojkař, dvojkař, dvojkař až trojkař, trojkař, trojkař až čtyřkař.

8 Sběr a zpracování dat

Jak už jsem uvedla, sběr dat probíhal na konci ledna a na začátku února 2006. S každým dítětem jsem pracovala individuálně. Kromě mě a dítěte nebyl nikdo přítomen. Měla jsem k dispozici prázdnou třídu, kde jsme nebyli nikým rušeni.

Dětem jsem zadávala úlohy již výše popsané. Úlohy byly předtištěny na třech stranách a děti si do nich mohly psát výpočty. Podobu, ve které byly úlohy předkládány dětem, si lze prohlédnout v příloze. V příloze uvedené varianty páté úlohy byly rozstříhány a předkládány dětem postupně po výpočtu původní páté úlohy na proužku papíru. Listy s řešeními jednotlivých dětí k diplomové práci nepřikládám. Ukázky z pracovních listů jsou průběžně uváděny v textu práce.

Pro práci s úlohami jsem nestanovila žádný časový limit. Nechala jsem děti samostatně řešit úlohu. Jestliže dítě dlouho mlčelo a já jsem rozpoznala, že neví jak dál, začala jsem se s ním o úloze bavit. Zjišťovala jsem, o čem dítě přemýšlí, kde vidí problém, nebo v čem si myslí, že je úloha obtížná.

Většina dětí vždy zkusila nějaké řešení, i když si řešením nebyly jisté. Poskytnutá řešení mi dávala prostor pro rozhovor s dítětem o jeho způsobu přemýšlení nad úlohou. Zjišťovala jsem, proč dítě řeší příklad tímto způsobem a jaké představy za řešením stojí. Často jsem dávala i doplňující otázky a upozorňovala děti na nesrovnalosti v úvahách. Chtěla jsem například poznat, zda dítě vidí i jiná řešení nebo souvislosti, než jen ty, které se ukázaly při prvním řešení úlohy. Tím byl u dětí často nastartován správný způsob řešení, i když prvotní výsledek nebyl správný. O to, aby dítě správně vyřešilo úlohu, jsem se ale přímo nesnažila.

Předtím, než se mi dítě pokusilo vysvětlit důvody svého řešení, jsem se snažila nedat na sobě znát, zda výpočet považuji za správný či nikoliv. Kdy se dítě dozvědělo, zda řešilo úlohu správně nebo ne, záleželo na situaci, ale snažila jsem se, aby to vědělo vždy předtím, než jsme přešli k další úloze.

Po ukončení rozhovoru nad jednou úlohou jsme přešli k další. Práce s jedním dítětem trvala asi 45 – 70 minut. Děti se tedy musely soustředit poměrně dlouhou dobu, ale snášely to dobře. Neviděla jsem u nich žádné velké problémy pracovat soustředěně po celou dobu.

Všechny děti se snažily pracovat. U žádného dítěte jsem neměla pocit, že by se nesnažilo přemýšlet a vyřešit úlohu, jak nejlépe umí. Počítat nechodily z donucení. Byly rády, že se mohou „ulít" z vyučování.

Před začátkem práce s testovým materiálem jsem děti ujišťovala, že nejde o žádný test nebo zkoušku, která se bude známkovat. Dítě se dozvědělo, že posbíraný materiál bude jen pro mne a nebudu s ním seznamovat učitelku. Protože jsem pořizovala kamerový záznam sezení, ujistila jsem dítě, že budu natáčet pouze způsob práce a postava a obličej tak budou vidět minimálně. S odbouráváním nervozity mi pomáhala i učitelka. Jak jsem se později dozvěděla, uklidňovala děti, že „o nic nejde" a bude jedno, když něco nebudou vědět. Většina dětí nebyla při práci se mnou viditelně nervózní. Pouze u jednoho dítěte jsem cítila nervozitu po celou dobu práce s ním.

Jak už jsem předeslala, ze sezení byl pořizován kamerový záznam, který umožňuje detailnější rozbor představ dětí. Kamera byla umístěna na stativu, takže jsem byla po celou dobu v kontaktu s dítětem. Pouze občas jsem šla zkontrolovat, zda je kamera dobře nastavena. V případě, že se z nějakého důvodu nedařil kamerový záznam a já jsem nemohla v dané chvíli problém odstranit (jednalo se například o hlášení ze školního rozhlasu, které přehlušovalo řeč dítěte nebo se vybila baterie a já jsem kvůli snaze nepřerušit tok myšlenek dítěte nešla hned situaci řešit, atp.), dělala jsem si o probíhaném rozhovoru písemný záznam. Tyto okolnosti jsou však v přepisu rozhovorů zaznamenány a při analýze dětských řešení na ně byl brán zřetel.

Kamerový záznam jsem přepisovala do elektronické textové podoby, která umožňovala lepší zpracovávání získaných dat. Takto vznikl rozsáhlý materiál, který není možné dát z kapacitních důvodů celý do přílohy. Pro představu, jak rozhovory probíhaly, je v příloze uveden celý záznam práce s jedním dítětem. V textu práce také uvádím řadu příkladů vybraných z přepisů. V případě zájmu jsou všechny přepisy k dispozici u mě nebo u vedoucího diplomové práce v elektronické podobě.

Materiál vzniklý z přepisu kamerového záznamu a pracovní listy dětí byly následně kvalitativně analyzovány a tříděny podle použitých strategií a úvah. Výsledek analýzy je obsahem následující části práce.

9 Dětské postupy a představy v první úloze

U všech dětí jsem prošla jejich způsoby řešení první úlohy. Z analýzy postupů a představ, které děti používaly, vyplynulo několik typů uvažování, které jsem kategorizovala podle způsobu rozčleňování celku, podle způsobu hledání n-tiny (jak a zda n-tinu vůbec hledaly) a podle způsobu určení počtu teček v části[11] dané zadaným zlomkem.

Děti mají vlastně za úkol nejprve rozdělit 18 teček na n-tiny a poté teprve určit počet teček v části, kterou určuje zadaný zlomek. Ukázalo se, že rozdělování celku na n-tiny a určení počtu teček v zadané části jsou pro děti dva samostatné problémy k řešení.

9.1 Tvarová strukturace

Děti, jejichž postupy patří do této skupiny, vnímají zadané uspořádání teček jako tvar, který se jim dále rozpadá na podtvary, jejichž počet je určen zadaným počtem n-tin. Strukturují celek, aniž by si pomáhaly nějakými výpočty. Dítě ví, že má rozdělit celek na určitý počet stejných částí, a tak provede strukturaci počátečního tvaru na podtvary. Počet teček v jedné části ani celkový počet teček není důležitý. Děti počty často vůbec nezjišťují a rovnou zkouší celek strukturovat na určený počet částí. Tyto děti například vůbec nemusí po správném znázornění n-tin vědět, kolik je na papíře předtištěno teček ani kolik teček obsahuje jedna n-tina. U dětí jsem pozorovala tři odlišné způsoby tvarové strukturace.

9.1.1 Strukturace naráz

Někdy se dítěti hned vyjeví strukturace daných teček na požadovaný počet dílů. Podívá se na seskupení teček a obraz se mu vizuálně rozpadne, rozestoupí na potřebné díly. V případě, že potřebuje jiný počet dílů, obraz se mu rozloží jinak. Tento způsob tvarové strukturace celku jsem nazvala „Strukturace naráz".

Zajímavý byl případ, kdy dítě intuitivně prostřednictvím strukturace naráz rozdělilo celek na tři části a vytvořilo třetiny, ale nevědělo, že rozdělit celek na třetiny znamená rozdělit

[11] Pojmosloví je zde dost nejasné. Z kontextu by mělo být vždy patrné, zda se jedná o části, na které je celek rozdělen (třetiny – tři části) nebo o část celku, která je dána určitým zlomkem (část z celku označená 2/3). Slovo „n-tina" používám pro označení jedné z n částí, na které je celek rozdělen. Souhrnný název pro třetiny, čtvrtiny, pětiny, atd. je slovo n-tiny.

ho na tři části. Zadané uspořádání teček se mu rozpadlo na tři podtvary, které jsou v naší kultuře běžné, na tři šestky na hrací kostce.

Strukturaci naráz používala většina dětí u třetin a šestin, kdy se tvar ještě dobře rozestupuje do potřebné struktury, díky dobré předstrukturovanosti celku. Celek je totiž tvořen třemi sloupci a šesti řádky. Následující příklad ukazuje, jak se dítěti obraz u třetin snadno rozpadne na tři skupiny po šesti.

Příklad 14
(7.třída, Kryštof, 1b, 1a)

D: No. Kuliček je tam 18. Děleno 6 je po třech.
J: jo, takže jsi to rozdělil po třech a pak jsi vzal těch 5. Jo. A tady (úloha 1a) jsi taky spočítal kolik je tam kuliček, nebo ses na to jen podíval a rozdělil?
*D: No. Tady je to vlastně (ukazuje na řešení 1a), **jak na kostce, hrací, po šesti**.*
J: Ehm, tak to je jak na kostce, tak sis to nepočítal?
D: Jen těch prvních šest a pak jsem to rozdělil.

V tuto chvíli si především všimněme, že se Kryštofovi celek snadno rozpadl na strukturaci po šesti „jako na hrací kostce". Nejedná se však pravděpodobně o „čistý" styl strukturace naráz a příklad rozeberu ještě později.

Příklad 15
(8.třída, Anna, 1b)

*D: Tak na třetiny to rozdělím takhle (ve vzduchu ukazuje čáru pod druhým a čtvrtým řádkem) **po těch dvou řadách** a nebo že jo takhle (ukazuje ve vzduchu čáry za prvním a druhým sloupcem) **po sloupcích**. No a teď vyznačím ty dva, že jo (ukazuje dva sloupce).*

U Anny z předchozího příkladu dobře vidíme, že používá styl strukturace naráz. Dokonce flexibilně přejde i na jinou strukturaci. Anna v tuto chvíli, jak vyplynulo z dalšího rozhovoru, neví kolik je zadaných teček dohromady, a když má určit, kolik teček obsahuje požadovaná část z celku (2/3), musí si tečky v části přepočítat.

9.1.2 Odhad velikosti n-tiny

Další způsob tvarové strukturace nazývám „Odhad velikosti n-tiny". Patří sem případy, kdy se dítěti nevyjeví strukturace celku na potřebné díly naráz a situaci řeší odhadem velikosti n-tiny. Nepřekvapí, že se tento způsob řešení vyskytoval především u rozdělování na devítiny a dvanáctiny.

Dítě nějakým způsobem nejprve odhadne, jak bude část velká. Na rozdíl od předchozího stylu řešení tu neplatí, že dítě „jen koukne a vidí". Rozdělení předchází tip, který je nutno ověřit. Děti zkouší, zda jim odhadnutá velikost n-tiny umožní strukturaci na potřebný počet částí. (Například tím, že naznačují rozdělování nejprve ve vzduchu). Důležité je právě to, že jde o odhad. Dítě tedy nezjišťuje velikost části přesným výpočtem a nepotřebuje vědět, kolik teček rozděluje.

K odhadu může sloužit nějaká aritmetická znalost, jak ukazuje následující příklad Michala.

Příklad 16
(8. třída, Michal, 1d)

D: Jo.....devítiny, to bylo po dvou, takže zkusíme dva a půl.....ne musím zkusit míň, že jo, když....(zkouší jeden a půl, viz papírek). Jo, jo.

Michal využil aritmetické znalosti: 1/12 je menší část než 1/9. Nepoužívá přesný výpočet velikosti n-tiny, nepotřebuje vědět, kolik teček má celkem. I když z rozhovoru vyplynulo, že od počátku věděl, kolik je v zadání celkem teček, této znalosti nevyužíval. Třetiny viděl strukturované po sloupcích a šestiny po řádcích. U devítin už strukturaci neviděl naráz a proto použil odhad.

Jak dítě přijde na svůj tip, nám může zůstat skryto. Ukažme si to na následujícím příkladě.

Příklad 17
(8. třída, Anna, 1c)

*D: devítiny. to si dělají srandu...... em..... **(ukazuje si na tečky v prvním sloupci od spodu)** .... **jo takže po dvou budou**.*
J: Ehm.
D: Aby to byly devítiny. Takhle třeba po dvou (kroužkuje ve vzduchu poslední dvě kuličky v prvním sloupci, druhém, třetím, potom prostřední dvě kuličky v prvním, druhé, třetím sloupci, a nakonec první dvě kuličky v prvním, druhém a třetím sloupci.).
J: Jo, takže co bude 1/9?
D: Tady ty dvě kuličky.
J: Ehm.
D: A dvě budou čtyři.
J: Jo. A jak jsi na to přišla?
D: No rozpočítala jsem si to po těch dvou. Tohle bude 1/9, tohle druhá, třetí, čtvrtá,......, devátá, a když mi vyšlo, že je jich devět, tak to pude na ty devítiny, tak už ty dvě, že jo?
J: Jo, takže tys nejdřív zkoušela, jestli ti to vyjde po dvou?
D: Jo.
J: A předtím jsi zkoušela jestli ti to vyjde po třech, nebo jak?
*D: **Já nevím. Když se na to kouknu, tak to tak vidím po těch dvojicích**.*
J: Takže jsi zkusila, jestli to vyjde.
D: No. Teď ty dvanáctiny. To bude...
*J: **A víš kolik jich je tam celkem?***
D: Tři krát šest, osmnáct.
*J: **A počítala sis to už předtím**, nebo až teďka, jak jsem se tě ptala.*
D: Teďka. Tím způsobem, že to takhle znásobím.
J: Tak jo, zkus ty dvanáctiny.

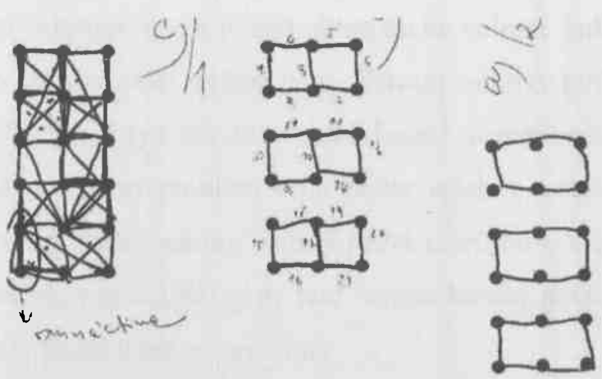
Anna o svém způsobu nalezení devítin mluví, jako by stále používala styl „strukturace naráz“. Nejedná se ale pravděpodobně o „čistou“ strukturaci naráz, jak napovídá první řádek z příkladu. Anna sice může vidět strukturaci celku po dvou kuličkách, ale asi hned nevidí, že jde o devět částí. Počet vzniklých částí si musí ověřit.

9.1.3 Zkoušení

Třetí způsob tvarové strukturace nazývám „Zkoušení“. Dítě zkouší rozdělit celek na n částí, ale nevidí potřebnou strukturaci počátečního tvaru, jak je tomu v případě „strukturace naráz“, ani nedokáže najít vhodný tip pro velikost jedné n-tiny, kterého využívají děti ve způsobu „odhadne velikosti části“. Děti zkoušejí strukturaci ve vzduchu nebo přímo na papíře, dokud jim nevyjde příslušný počet částí. Musí tedy zkoušet. Nejsou schopny v duchu provést příslušné řezy celku na požadovaný počet částí.

I když si lze představit, že by děti mohly zkoušet strukturace i jiným způsobem, objevil se pouze jeden typ zkoušení (viz následující obrázek).

obr. 4
(7. třída, Magda, zleva: 1c,1b,1a)



Magda vidí v tečkách body, ne prvky. Vidí body, které mají být nějakým způsobem spojeny, aby vytvořily požadovaný počet stejných tvarů. Magda místo množin s určitým počtem prvků vytváří **geometrické tvary**. Při členění počátečního tvaru na geometrické tvary zachovává dvě pravidla. Všechny body musí být s něčím spojeny (tím zachovává pravidlo, že všechny prvky musí někam patřit) a vzniklé geometrické tvary musí být stejné (počtem bodů a tvarem), což pro ni znamená zachovávat pravidlo o stejné velikosti n-tin.

Magdino zkoušení mělo tři vyústění. U prvního vyústění Magda pokusným vytvářením geometrických tvarů dostala potřebný počet n-tin a když měla určit počet teček v části dané zadaným zlomkem, odpověděla správně (viz obr. 4, 1a - třetiny).

Ve druhém případě Magda sice rozdělila celek správně na n-tiny, ale rozdělení bylo tak nenázorné, že špatně určila počet teček v části (viz obr. 4, 1b – šestiny). Šest čtverců představuje šestiny. Dvě tečky z každého obdélníku však patří do obou sousedních čtverců. Jak tuto situaci vyřešit? Jak určit počet teček v jedné n-tině? Magda nakonec započítá tečky celé a určí velikost 5/6 jako 16 teček.

Třetí vyústění při postupu „zkoušení geometrických tvarů" nevedlo ani k rozdělení tvaru na n-tiny a ani k určení počtu teček v části. Magda zkoušela různé geometrické strukturace počátečního tvaru, ale nepovedlo se jí v tomto případě potřebnou strukturaci nalézt (viz obr. 4, 1c – od devítin k osmnáctinám).

Postup „Zkoušení" může vést ke správným řešením, ale je neefektivní. Děti ho nepoužívají. Používala ho pouze Magda, která jakoby v jeho „zajetí" nedokázala přejít na jiný způsob řešení. I když Magda například rychle spočítala, že 2/9 z 18 jsou 4, nebrala tento výsledek na zřetel a dál zkoušela různé rozdělování celku na devět stejných geometrických tvarů.

Ukázala jsem tři typy rozdělování celku na n-tiny, tři způsoby strukturního rozkladu původního tvaru: „strukturace naráz", „odhad velikosti n-tiny" a „zkoušení". Viděli jsme, že pro tuto skupinu řešení je charakteristické vnímat zadané tečky jako tvar, který je dále podle potřeby strukturován na jiné tvary. Přitom celkový počet teček a často ani počet teček v n-tině není důležitý. Když má dítě celek vhodně názorně rozčleněn na správný počet stejných dílů, není už pro něho problém určit počet teček v n-tině nebo v části dané zlomkem. Vytvoří množinu, do které zahrne takový počet tvarů-dílů, který je dán čitatelem zadaného zlomku a počet teček v množině zjistí buď vynásobením počtu teček v jednom tvaru čitatelem nebo přepočítá počet teček v množině.

9.2 Početní strukturace

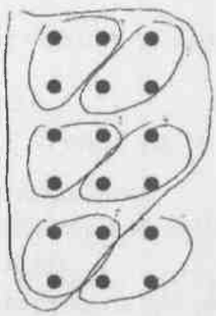
Další skupinu postupů nazývám „Početní strukturace". Děti využívající tento postup strukturují zadané uskupení teček podle velikosti n-tiny. Nejprve vydělí celkový počet prvků počtem částí, na které má být celek rozdělen. Tím si pomocí výpočtu zjistí, kolik teček obsahuje jedna n-tina a podle toho strukturují zadané uskupení teček.

9.2.1 Vytvoření adekvátní strukturace

Do této skupiny patří postupy, kdy děti na základě zjištěné velikosti n-tiny strukturují zadané uskupení teček adekvátním způsobem. Vydělí celkový počet teček počtem částí, které budou tvořit strukturaci celku, a výsledek použijí jako velikost n-tiny, podle které rozčlení zadané tečky na n částí.

Některé děti využívají tohoto postupu již od počátku. Pro tyto děti je charakteristické zvláštní rozdělení teček, kdy například šestiny nevytvářejí oddělováním řádků, ale jiným seskupováním (viz obr. 5). Ostatní děti začnou používat „početní strukturaci" až později, nejčastěji od rozdělování na devítiny.

obr. 5
(7. třída, Kryštof, 1b)



Jestliže děti rozčlenily celek na příslušný počet částí, druhou část úlohy (nalezení počtu prvků v části určené zlomkem) řešily dvěma způsoby.

Při prvním způsobu vynásobí děti získaný počet teček v jedné n-tině počtem n-tin, tvořícím hledanou část z celku (n-tina×čitatel = část z celku).

Příklad 18
(7.třída, Kristýna, 1b)

*D: **Na šestiny**. .... (ukazuje si na vyřešenou úlohu 1a) .... To je jako že to vydělím šesti. 18 děleno šesti.*
J: Ehm. Dobře a co ti vyjde?
*D: **Tři**.*
J: A co jsou ty tři.
*D: To je **1/6**.*
J: Ehm. Tak mi tam zkus vyznačit ty šestiny, do toho obrazce.
D: Takhle jako? (zakroužkuje první řadu)
J: No. Všechny šestiny mně tam udělej. Vyznač mi tam všechny šestiny, jo?
*D: Takhle? **(zakroužkuje po jednom všechny řádky)**.*
J: Ehm. Dobrý. A kolik teček má 5/6? Tak kolik to je?
D: 18?
J: 5/6 je 18, jo?
D: Ne. 5/6 je 15?
J: A jaks na to přišla, 15?
*D: Protože **1/6 jsou 3 krát 5**.*
J: Dobře. Tak jo. A teďka zkus to céčko, jo?

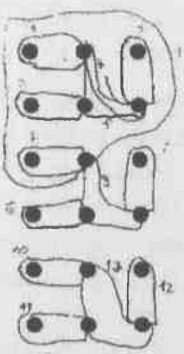
Opomeňme, že počítám s Kristýnou, že jí držím postup, aby se neztratila. Kristýna primárne zjišťuje velikost n-tiny a po vyznačení šestinové strukturace zjišťuje 5/6 výpočtem 3krát 5. Část celku danou jako 5/6 vidí primárně jako počet, jako 15 teček („**část z celku jako počet**").

Při druhém způsobu nalezení počtu prvků v části určené zadaným zlomkem, když už je vytvořená strukturace na n-tiny, dítě ohraničí příslušný počet n-tin do množiny a množství teček v množině zjistí přepočítáním jejích prvků. Dítě vlastně rovnou ukáže hledanou část z celku. „Tohle je 5/6", řekne dítě a ukáže zakroužkovaných pět řádků. Počet teček v části zjišťuje, až když se ho na něj zeptám. Přitom tečky v zakroužkovaných pěti řádcích přepočítá, přestože ví, kolik teček obsahuje 1/6.

Příklad 19
(7. třída, Kryštof, 1d)

J: Tak dvanáctiny.
D: Dvanáctiny. (přemýšlí). Můžu ty kuličky rozdělovat na půlky?
J: Jo. Můžeš.
D: (kroužkuje, viz obr. 6, čáry 1-13 – přepočítá vzniklé části). No (ukazuje mi řešení)

obr. 6



J: Tak kolik jich máš.
*D: **No. dvanáct, protože jeden a půl.***
J: Takže tohle znamená, že to jsou tři půlky, jo?
D: Ehm.
*J: **Takže pět dvanáctin bude kolik?***
*D: **To bude tohle** (kroužkuje pět částí do množiny, viz obr. 6, čára 14). To bude takhle.*
J: Dobře. A kolik jich tam je?
D: Pět.
J: Já myslím kolik je tam kuliček.
D: (přepočítává). No, sedm a půl.
J: Tak jo, dobře.

Kryštof si nejprve vypočítal 18 děleno12, protože tak řešil i předchozí příklady a vypovídá o tom také výrok: „*dvanáct, protože jeden a půl*". Na základě zjištěné velikosti n-tiny strukturuje celek na dvanáctiny. 5/12 poté, na rozdíl od Kristýny, vnímá jako oblast. Část z celku ukazuje jako oblast (prostor) z celku ne jako počet z celku („**část z celku jako oblast**“).

9.2.2 Neadekvátní strukturace

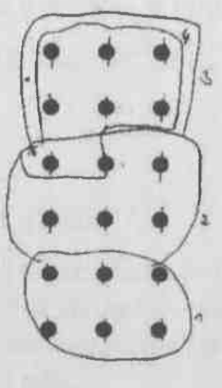
V předchozím textu kapitoly „Početní strukturace“ jsme si ukázali postupy dětí, které vedly přes výpočet velikosti n-tiny k očekávané strukturaci celku. Teď se podívejme na řešení, ve kterých děti také začnou hledat velikost n-tiny vydělením celkového počtu teček počtem n-tin, ale celek strukturují jinak, než se považuje za správné.

Správné vyřešení způsobem „početní strukturace“ předpokládá pochopení vztahu mezi n-tinou a počtem částí a udržení tohoto poznatku v průběhu řešení. Jedná se o poznatek, že n-tiny určují, na kolik stejných částí bude celek rozdělen, a že vydělením celkového počtu teček počtem částí získám počet teček v n-tině. Při nedodržení těchto předpokladů může docházet ke strukturacím, ze kterých je patrné, že dítě **interpretuje výsledek dělení jako počet částí** a ne jako počet teček v části. Například dítě má celek rozdělit na devítiny. Vypočítá si 18 děleno 9 je 2 a rozdělí celek na dvě části. Nebo, jak ukazuje následující příklad, dítě si vypočítá 36 děleno 12 je 3 a rozdělí celek na tři části.

Příklad 20
(7. třída, Robert, 1d).

J: Můžeš .... třeba jednu tečku jakkoli rozdělit.
D: Jako jednu tečku můžu rozdělit na dva.
J: No, třeba
D: Aha (chvíli přemýšlí). Když budu mít 36 (říká si pro sebe) – (rozděluje všechny tečky na poloviny – ***pak kroužkuje skupiny po šesti celých kuličkách*** *(viz obr. 7) – přemýšlí – napočítává tak, že dvakrát ťukne u jedné tečky - zakroužkuje 7,5 kuličky, vlastně 15 půlek).*

obr. 7



...
J: (ukazuji na obrázek). A co tady?
D: No tak tohle je 15/36 (ukazuje na zakroužkovaných 7,5 tečky – viz obr. 7, čára 4).

Jak jsme viděli v kapitole Dělení „na“ a dělení „po“ (kapitola 2.5.3), existují dva základní druhy dělení. Při jednom dělíme „na určitý počet částí“ a při druhém „po určitém počtu (prvků) v části“. Děti, které dělají chybu jako Robert, které interpretují výsledek dělení počtem n-tin jako počet částí v celku místo jako počet prvků v části, vlastně místo „dělení na“ dělají „dělení po“. Místo na devět částí rozdělují celek po devíti tečkách.

Příčina zaměňování „dělení na“ a „dělení po“ může být sémantická. Například Robert z předchozího příkladu, jestliže dělí třicet šest dvanácti, musí diferencovat mezi významem výsledku tři: tři části, tři tečky a tři půlky.

Neočekávanou strukturaci může způsobit i jiný druh chyby, než jen interpretace výsledku dělení jako počtu částí. Může se jednat o **„šiftové“ záměny**, o kterých mluví Rendl (2006, konzultace). „Šiftová“ záměna nastává často v případě počítání jednoduchých příkladů, kde se operuje s jedničkou nebo nulou. U úloh jako jsou: $5 \div 5 = 1$, $5 \div 1 = 5$, $5 \times 1 = 5$, $5 \times 0 = 0$, dochází u dětí k záměnám. Dítě vnímá tyto příklady jako jednoduché příklady, které se nepočítají a může se stát, že $5 \div 5$ vypočítá dítě jako 5 nebo $5 \div 1$ jako 1 (atp.).

V průběhu zjišťování velikosti osmnáctiny tedy mohlo dojít k šiftové záměně $18 \div 18 = 18$. Kromě interpretace výsledku dělení jako počtu částí tak mohla být šiftová záměna dalším důvodem, proč děti jako 1/18 určovaly všech 18 teček.

Řešení druhé části úlohy, když vytvořená strukturace není v pořádku, můžeme rozdělit na dva typy.

Při prvním způsobu řešení dítě **vychází z vytvořené strukturace** a požadovanou část z celku určí tím, že do množiny, která bude reprezentovat část z celku, zahrne vytvořené díly, jejichž počet je dán čitatelem. A protože vytvořená strukturace je chybná, je chybný i výsledek. Například dítě má rozdělit celek na devítiny. Vypočítá si 18 děleno 9 je 2. Rozdělí celek na dvě části, a ty zakroužkuje jako 2/9. 2/9 jsou potom všechny kuličky. Nebo nejprve určí 1/18 jako 18 teček a pro určení 4/18 násobí osmnáct čtyřmi, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 21
(8. třída, Tomáš, 1e)

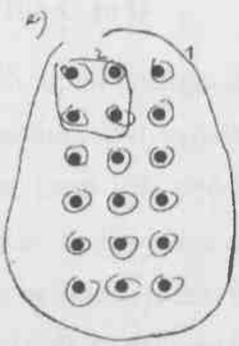
D: Kolik teček obsahují 4/18. No ***čtyřikrát víc než je tady****. Nebo ne?*
J: Čtyřikrát víc než je kde? Těch kuliček?
D: Tady těch (ukazuje na všechny kuličky). ***Protože 1/18 je vlastně celý tohle to, ne?***
J: Tak to není.

Tomáš nejprve v duchu počítá $18 \div 18$, protože už od prvního příkladu tak počítal. Dělení $18 \div 18$ používá ke zjištění velikosti n-tiny a při dělení dochází buď k šiftové záměně ($18 \div 18 = 18$, takže tohle celý) nebo k interpretaci výsledku dělení jako počtu částí ($18 \div 18 = 1$, to je jedna část, takže tohle celý). Protože si myslí, že 1/18 je všech 18 teček, určí počet teček ve 4/18 jako 72.

Při druhém typu řešení druhé části úlohy, kdy je vytvořena špatná strukturace na n-tiny, dítě **vytvořené strukturace nevyužívá**. Nepotřebuje ji k určení velikosti části z celku. Poradí si jinak. S předchozí částí řešení nepracuje. Většinou se vrátí k výsledku dělení a vynásobí ho čitatelem, aby získalo požadovanou část z celku. Například když dítě rozděluje celek na devítiny, vydělí osmnáct devíti, vyjde mu dvojka a rozdělí celek na dvě části. Pak se vrátí k výsledku dělení, dvojku vynásobí dvěma a tak dostane správný výsledek (2/9 obsahují 4 tečky).

Příklad 22
(7.třída, Kryštof, 1e)

obr. 8



J: A tohle bys dělal jak?
D: No, takhle celý.
J: Tak počkej, já ti dám další papír.
*D: **Tohle to je osmnáctina**, celá (**zakroužkuje všech 18 teček** do jedné množiny, viz obr. 8), takže tady by byly ty **4/18** (udělá menší **množinu se čtyřmi tečkami**).*

Kryštof nejprve určí jednu osmnáctinu jako všech 18 teček a pak zakroužkuje 4/18 jako 4 tečky. Při určování 4/18 tedy nevychází z vytvořené strukturace. O Kryštofovi dále můžeme říct, že při ztotožnění 1/18 jako 18 teček se u něho pravděpodobně nejedná o šiftovou záměnu 18÷18=18. Kryštof totiž pak pracuje s osmnáctinou jako s „jedna“ (4/18 jsou 4 tečky). Kryštof tedy mohl interpretovat výsledek dělení (18÷18=1) jako počet částí a ne jako počet teček v části.

U Kryštofa ale také mohlo dojít k nějakému **sémantickému skluzu** na ose „osmnáctina - osmnáctiny“. Jak naznačuje druhá část výpočtu (4/18 jsou 4 tečky), Kryštof nějakým způsobem v hlavě drží, že osmnáctina má být jedna tečka. A místo aby zdlouhavě kroužkoval po jedné všechny tečky (jako to nakonec udělal, viz obr. 8), mohl zahrnout všechny tečky do jedné množiny a dostat tak jeden celek (osmnáctiny). Mohlo tedy dojít k sémantickému skluzu „osmnáctina je jedna tečka – všechny tečky jsou osmnáctiny – osmnáctiny jsou tohle všechno, tohle celý“ (a to „celé“ zakroužkoval).

S předchozí strukturací nepracuje také Robert, jehož postup řešení jsme již viděli (viz příklad 20). Robert k určení části z celku (5/12) nevyužívá předchozího rozčlenění, ale část z celku zjistí prostřednictvím úpravy zlomku 5/12 na 15/36.

9.2.3 Pokračování jiným postupem

V případě rozdělování celku na dvanáctiny „početní strukturace“ často nevedla k přesnému určení velikosti n-tiny, protože děti měly problém s vydělením beze zbytku. Osmnáct děleno dvanácti vyjde „jedna a něco“, jak uvádí většina dětí. Děti tedy začnou „početní strukturací“, ale po nezdaru volí jiné způsoby řešení, které budou popsány níže.

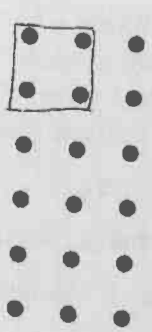
9.3 A/B z C je D

Při tomto postupu dítě pomocí známého algoritmu A/B z C je D rovnou určuje, kolik teček obsahuje část vyjádřená předloženým zlomkem. Dítě využívá zadaného zlomku jako operátora, který určí počet teček z celkového počtu teček. Na rozdíl od postupů „početní strukturace“ se zde jedná o mechanický výpočet vedoucí přímo k výsledku D bez mezikroku určování velikosti jedné n-tiny. Dítě vůbec nemusí vědět, že mezivýsledek, který vyjde z výpočtu C/B, je velikost jedné n-tiny a i kdyby vědělo, kolik je jedna n-tina, i kdyby vědělo, že C/B dá velikost jedné n-tiny, dělení celku na n-tiny neprovede. Primární je pro něj určit a vyznačit D. V předtištěném uskupení teček tedy pouze znázorní výsledek D.

Při postupu „A/B z C je D“ hrozí nebezpečí, že dítě bude mít problém s určením n-tiny (n-tin), což chci ukázat prostřednictvím následujícího příkladu.

Příklad 23
(7. třída, Matěj, 1c)

obr. 9



D: (Zarámuje 4 čtverečky, viz obr. 9).

J: Už to máš? A co jsi mi teď označil?
D: ***Tu ¼, teda 2/9.***
J: Dobře, a kdybys to měl zase rozdělit na devítiny, jak jsem to chtěla předtím?
D: ***Tak to by bylo tady těch 9*** *(ukazuje tři řádky),* ***a pak zase těchhle devět*** *(ukazuje další tři řádky).*
J: Co bys pak dostal?
D: Tady by byla jedna devítina a tady druhá.
...
J: A když jsme tady měli to céčko, a měls dělat ty devítiny, tak jak jsi zjistil, že to jsou ty čtyři?
D: No, protože ***18 děleno 9 jsou 2 a krát 2 jsou 4***
J: Ehm. Dobře. Tak jo.

Na příkladu vidíme, že Matěj bez problémů určí, kolik teček obsahují 2/9, ale má problém z rozčleněním celku na devítiny. Matěj rychle vypočítá 2/9 z 18. Když se ho zeptám, co vyznačil, podívá se na zarámované 4 čtverečky a řekne: „tu 1/4". Rychle se opraví, ale zřejmě u něj došlo ke spojení „n teček = n-tina" (viz níže). Když má rozčlenit celek na devítiny, možná u něj dochází ke stejné chybě (devítina = devět teček). Dalšími důvody problému s rozčleněním může být návrat k mezivýsledku C/B (dva) a jeho špatná interpretace jako počet částí nebo interpretace: „2/9, takže 2 části".

Následující příklad ukazuje dítě, které už od úlohy s třetinami počítá způsobem „A/B z C je D".

Příklad 24
(8. třída, Tomáš, 1a)
D: (pohybuje tužkou ve vzduchu po jednotlivých sloupcích po dvou tečkách). No 12. Tak já to napíšu sem, ***rovná se 12****. Můžu?*
J: No, a teďka mi řekni, jak jsi na to přišel, že 12.
D: No ***sečetl jsem ty tečky všechny*** *a vyšlo mi 18 a* ***jedna třetina z 18 je 6*** *a tady chtějí 2, takže* ***2krát 6 je 12****.*

(8. třída, Tomáš, 1c)
D: ***Takže na devítiny jsou dvě, teda krát dvě jsou čtyři*** *(píše =4). Takhle. Teda jo nebo ne. (znejistí). Devítiny, dvě devítiny, dvakrát, jo ctyri.*
J: No a kdybys mi to měl ukázat tady (rozdelit tecky).
D: No tak to bych udělal takhle (dělá čáru v pulce, tj. mezi třetím a čtvrtým řádkem).
J: Jak?
D: ***Na půlku.***
J: Jako že bys to udělal takhle? (dělám pomyslnou čáru v půlce). To by byly 2/9?
D: Ne to je blbost. To by byla půlka. Jedna devítina to je takhle (opět dělá pomyslnou čáru mezi třetím a čtvrtým řádkem). No tak teďka nevim vubec.

Tomáš nemá problém určit 2/3 z 18 teček. Vypočítá si 1/3 z 18 teček a výsledek násobí dvěma. V případě devítin už zaváhá. Operátorový mechanismus je ale natolik silný, že nakonec dojde k výsledu 2/9 jsou 4 tečky. Nejistota se ale projeví při zpětném rozčleňování na devítiny. Tomáš rozdělí 18 teček na dvě části. „Takže na devítiny jsou dvě", říká Tomáš.

Právě proto si myslím, že mohl interpretoval výsledek dělení (18÷9=2) jako dvě části místo jako dva prvky n-tiny.

9.4 Úprava zlomku a prvků

Děti problémové situace řešily také pomocí úpravy zlomků a prvků. Tyto úpravy se vyskytly především při řešení rozdělování celku na dvanáctiny. U jiných příkladů si totiž děti vystačily s jednoduššími řešeními.

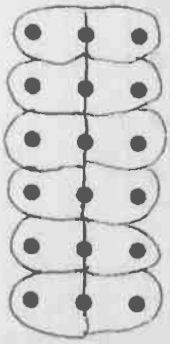
9.4.1 Úprava prvků

Úprava prvků byla přípravou pro další postup a vyskytla se ve dvou variantách. Při první bylo všech osmnáct teček rozděleno na poloviny. Vzniklo tak třicet šest prvků (půlek), které byly lépe dělitelné jmenovatelem. Tímto způsobem řešil rozdělení na dvanáctiny Robert (viz výše, příklad 20).

Ve druhé variantě bylo rozpůleno 6 kuliček. Vzniklo tak 12 prvků, které mohly být přičleněny k 12 celým kuličkám, aby vzniklo 12 dílů.

Příklad 25
(7. třída, Kristýna, 1d)

obr. 10



9.4.2 Úprava zlomků kvůli shodě se strukturací

Úprava zlomku rozšířením nebo zkrácením vždy pomáhala při určení počtu teček v části z celku dané předtištěným zlomkem. Dítě vycházelo z nějaké strukturace zadaného počtu teček (nějak známé, uchopené) a zlomek si upravilo tak, aby ve jmenovateli upraveného zlomku získalo stejné číslo, jaké má známá strukturace počet prvků (ať už je prvek jedna tečka, půlka tečky nebo nějaká množina). N-tina se pak rovnala jednomu prvku. Číslo v čitateli upraveného zlomku pak přímo ukazovalo, kolik prvků je třeba zakroužkovat.

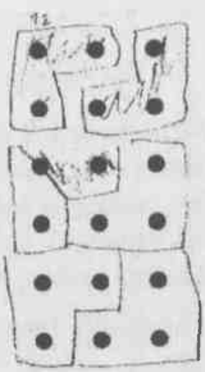
Úprava zlomku sloužila k nalezení části z celku určené daným zlomkem. I když děti správně označily požadovanou část z celku, všechny měly poté problém zpětně rozdělit celek na n-tiny. Nejednoduchost zpětné strukturace celku na n-tiny ukazuje, že dítě musí použít jiný myšlenkový postup k nalezení vhodné strukturace než použilo při hledání velikosti části z celku.

V následujícím příkladě chci ukázat zajímavé využití úpravy zlomku. Dítě využívá strukturace celku, kterou už umí z předchozího příkladu (strukturaci na šestiny). Proto si zlomek 5/12 upraví na 2,5/6. Rozdělí celek na šestiny tak jako v předchozí úloze. Dostane tak šest prvků a číslo v čitateli zlomku 2,5/6 ukazuje přímo, kolik prvků se má označit (dva a půl prvku).

Příklad 26
(7. třída, Lukáš, 1b)

D: (Dlouho přemýšlí).
J: Co je tam za problém?
D: No s těma dvanáctinama. Jedině, že bych si to rozdělil na šestiny, ale to zase nejde, kvůli té pětce. (Přemýšlí, pak začíná rozdělovat stejným způsobem jako v případě šestin, viz obr. 11, – pak zase přemýšlí). A musí to zůstat v celku?

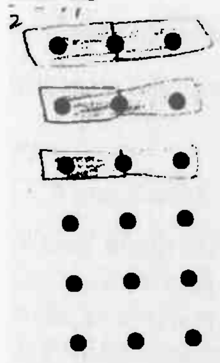
obr. 11



J: Nemusí.
D: (Píše: 5/12= 6, škrtá 6, píše 7,5 tečky - viz papírek.) No, takhle (vybarví první dva oddílky a třetí přepůlí a vybarví část s jednou a půl tečky)
J: Dobře. A ta jedna dvanáctina, když to máš rozdělit na dvanáctiny, je kolik?
D: Jedna dvanáctina? ***No, já jsem si to rozdělil na 2,5/6****. A vyznačil jsem si tady ty šestiny.* ***A vyznačil těch 2 a půl šestin. A to je sedm a půl teček.***
J: Dobře. A kdybych chtěla ale, abys mně tam vyznačil dvanáctiny? Těch 5/12 je dobře. ***Ale teď ještě ty dvanáctiny. Kde je 1/12?***
D: Počkat. Takže tady bude...(přepisuje 5 na 2.5 , přemýšlí). ***No to nevím teda***
J: Když říkáš, že 5/12 je 7.5....D: Ne.....J: kolik je 1/12?
D: Nějakých 3 a půl, ne, 2 a půl, ne, ***Tak 18 děleno 12 je 1 a něco...1,3...teda 1 a půl.***
J: Ehm. Jo.
D: ***Takže jedna a půl?***
J: Jo, jedna a půl.
D: Tak tedy (ukazuje na papírek, viz obr. 11) 1 a půl, kdybych to rozdělil na ty dvanáctiny
J: Dobře, je to jedna a půl.

D: (Sám si bere další papírek). Já to radši udělám na novej papír. (Viz obr. 12)

obr. 12



Kromě chytré úpravy zlomku 5/12 si u Lukáše všimněme ještě něčeho. Pro Lukáše je vzniklá strukturace (viz obr. 11) opět rozčleněním na šestiny. Dvanáctiny v ní nevidí. Pro nalezení velikosti dvanáctiny využije operátorový postup „1/12 z 18“. Když zjistí, kolik je 1/12, obrazec strukturovaný na šestiny se mu na dvanáctiny nerozestoupí. Musí si vzít jiný papírek a strukturaci na dvanáctiny provést jinak (viz obr. 12).

V následujícím příkladě dítě upravuje zlomek a verbalizuje výhodnost takové úpravy.

Příklad 27
(7. třída, Kamil, 1c)

(2/9 rozšířil dvěma. Vznikly 4/18. Tím pádem ví, že 2/9 jsou čtyři tečky)
D: No já jsem si to ***vynásobil dvěma tu devítku*** *a byly to ty* ***osmnáctiny****. Tím pádem jsem měl, že to* ***jedno je jedna,*** *jedna tečka. Jsem si to vynásobil dvěma, že jo, tu devítku, tak to mám osmnáctiny, tu dvojku jsem taky vynásobil dvěma, tak to jsou čtyři osmnáctiny. A* ***osmnáct je teček, tím pádem každá tečka je jeden****.*

Kamil vyjadřuje to, co jsem uváděla na počátku této kapitolky. Dítě si zlomek upraví tak, aby vyhovoval strukturaci, kterou dítě zná a může ji dobře nahlédnout. Kamil v čitateli upraveného zlomku dostane počet prvků, které patří do části z celku určené upraveným zlomkem. N-tina se tak rovná jednomu prvku.

Příklad 20 (viz výše) ukazuje využití úpravy prvků i zlomku. Robert vytvoří 36 prvků tím, že tečky rozpůlí. Zlomek 5/12 rozšíří na 15/36 a jako 15/36 označí 15 půlek (viz obr. 7).

9.5 Odhady a úvahy

V kapitole „Odhad velikosti n-tiny“ jsem ukázala, jak děti využívají odhadů ke tvarové strukturaci celku. Děti při tomto postupu odhadly nebo si tiply velikost n-tiny. Na základě tipu nebo odhadu vytvořily strukturaci, jejíž tvar poté nějak ověřily, nejčastěji přepočítáním vzniklých částí.

Tipů a úvah vedoucích k odhadům se využívá i při jiných druzích postupů. Různé úvahy a odhady pomáhající řešit úlohy probíhají v dětské hlavě, aniž bych je byla schopna postřehnout nebo aniž by je bylo dítě schopno zpětně rekonstruovat. Uveďme si některé příklady, kdy dítě své úvahy verbalizovalo.

Příklad 28
(7. třída, Kamil, 1d)
(Kamil hledá 5/12)
*D: ... **Je to míň než polovina**, to vím. Tak to musí bejt někde před tímhle (ukazuje pod třetí tečku ve druhém sloupci). Tak by to mělo být asi přibližně tady (ukazuje na sedmou tečku).*
J: Přibližně sedm teček, jo? A jak si to teď ověřit, aby to bylo přesné?
D: No určitě jich tam je míň jak šest, teda, kolik tam je těch teček...
J: Osmnáct
D: Tak míň jak devět. Tím pádem osm nebo sedm. ...
(7. třída, Kamil, 1b)
J: No, počkej, tak ještě jednou. Takže já nejdřív chci, abys mi tam udělal šestiny. Takže mi ukaž ty šestiny
*D: Jedna šestina je tohle (kroužkuje první tři tečky v první sloupci), protože je to **polovina tý třetiny**.*

Kamil využívá úvah, ve kterých se uplatňují jeho aritmetické znalosti. Nejprve jsme viděli, jak odhaduje velikost části z celku označenou jako 5/12, kde využívá znalosti, že 6/12 je ½. Ve druhém případě určuje velikost 1/6 jako poloviny z 1/3.

9.6 Část teček jako celek

Při tomto postupu dítě využívá pro řešení úlohy pouze část ze zadaného uskupení teček. Jako celek vnímá nějakou část daných teček. Přitom pracuje s celkem a ví, že jestliže rozčleňuje celek na n-tiny, musí vzniknout strukturace s n částmi, které jsou stejně velké.

Následující příklad ukazuje, že celek může být v případě třetin třeba šest teček ve dvou řádcích nebo devět teček ve třech řádcích.

Příklad 29
(8. třída, Pavel, 1a)
(Pavel si nejprve určí jako celek dva řádky a tipuje, že 2/3 jsou asi jako tři čtvrtě a kroužkuje 5 teček. Nesouhlasím s řešením a Pavel pokračuje...)
*D: Jó, už vím, já jsem to udělal špatně. To bude jako ten celej. Takže tohle budou **2/3 (kroužkuje dva řádky**, viz obr. 13).*
J: Tohle jsou dvě třetiny?
*D: **Ne. Když to vemu takhle** (ukazuje na papírek a/1 – kde evidentně viděl jako celek dva řádky), tak to bude takhle (**zakroužkuje čtyři tečky** v zakroužkovaných 2 řádcích, viz obr. 13).*
J: No a jak jsi na to přišel teď?
*D: No protože ten celek je **rozdělenej na tři části**. A zakroužkoval jsem 2/3 tady (ukazuje na a/1)*

J: No a kde jsou ty tři části?
D: Tady je jedna, druhá, třetí (postupně ukazuje vždy první dvě kuličky v prvním, druhém a třetím sloupci).
J: No a když mi ukazuješ, že tohle je jedna část, tohle druhá a tady treti
D: Tak 2/3 jsou tohle (ukazuje 4 tečky)
J: Počkej. To jo, dvě části jsou zakroužkovaný. Když bereš tohle (ukazuji zakroužkované dva řádky), tak máš pravdu, ale já chci, abys bral jako celek tohle celý (ukazuji všechny kuličky). Ne jen tuhle jednu část.
D: Jó úplně tohle celý.
J: Jo úplně. Tak to zkus znovu (dávám mu další papír).

obr. 13

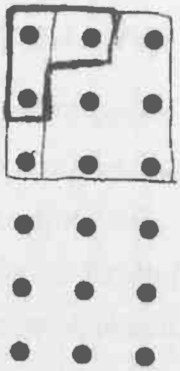
Pavel ze zadání nezachytí, že má brát jako celek všechny předtištěné tečky. Nejprve jako celek vidí první dva řádky a neví ještě, jak přesně určit 2/3. Říká, že je to asi jako „třičtvrtě“. Když nesouhlasím, změní náhled na zadaný tvar teček a jako celek uchopí tři řádky. Proto označuje 2/3 jako dva řádky. Když i poté nesouhlasím, vrátí se k předchozímu vnímání celku (dva řádky) a jako 2/3 označí dvě dvojice. Mezitím totiž přišel na to, že 2/3 přesně určí jako dvě části z celku rozděleného na tři části.

Další z představ, která pracuje s jiným celkem, než jsou všechny zadané tečky, vidí celek, který má být rozdělen na n-tiny, složený z n teček. Jedna tečka potom reprezentuje jakoukoliv n-tinu. Jestliže mám znázornit n-tiny ukážu n teček (čtvrtiny 4 tečky, třetiny 3 tečky, šestiny 6 teček atd.). Velikost n-tiny zůstává stálá, konstantní a podle různé podoby zlomku se přizpůsobuje celek.

Následující příklad (viz obr. 14) ukazuje, jak jednou tečka znázorňuje třetinu, jindy šestinu. Silně ohraničená část se třemi tečkami označuje 3/3. Dvě oddělené tečky v ní znázorňují 2/3. Zbylých šest ohraničených teček reprezentuje 6/6 a pět teček oddělených od jedné osamocené znázorňuje 5/6.

Příklad 30
(7. třída, Matěj, 1a,1b)

obr. 14



Matěj věděl, že celek znázorňující n-tiny má obsahovat n stejných částí. Jako celek však vzal nejmenší možný počet kuliček tak, aby ještě mohl vyjádřit n-tiny (n-tina=tečka). Myslel totiž, že má na znázornění všech úkolů první úlohy jen 18 teček.

9.7 N-tina = jedna tečka

Při této představě reprezentuje n-tinu z části vyjádřené zadaným zlomkem jedna tečka. Například, když dítě má vyznačit 2/3 z osmnácti předtištěných teček, vyznačí dvě tečky, protože chci třetiny dvě. Kdybych chtěla 2/8, také vyznačí dvě tečky.

Příklad 31
(7. třída, Jan, 1a)

D: (Zarámuje dvě tečky)
J: Co to teď děláš?
*D: Jakože **dvě třetiny**. Jako si z toho **udělám dvě**.*

U Jana se může jednat o stejný myšlenkový postup jako u Matěje (viz obr. 14) z kapitoly „Část teček jako celek", nebo naopak u Matěje se může jedna o stejný myšlenkový postup jako u Jana. Matěj totiž také v konečném důsledku označil n-tinu jako jednu tečku. Novou kategorii jsem zavedla proto, abych odlišila myšlenkový postup, kdy se nepracuje s celkem. Zdá se mi, že Jan spíše akcentuje počet n-tin daný zlomkem (2/3, takže dvě), kdežto Matěj vychází spíše z celku (šestiny, takže šest teček). Matěj tedy vyjde z celku a na základě něho určí velikost zadaného zlomku. Oproti tomu Jan spíše sleduje počet n-tin v čitateli zlomku. Dvě třetiny jsou především dvě. U Jana a Matěje ovšem může jít jen o jinou posloupnost v rámci téže struktury, jestliže Jan pracoval s celkem. To ale nelze s určitostí rozpoznat. Ale vzhledem k tomu, že Jan při dalším pokusu o rozdělení na třetiny rozděluje zadané tečky „po řádcích" (viz níže, příklad 33), myslím si spíše, že s celkem nepracoval.

Zaměřuje se na čísla ve zlomku. Nejprve vezme číslo v čitateli a označí dvě tečky. Při druhém pokusu se zaměří na jmenovatele a ztotožní číslo ve jmenovateli s počtem prvků ve třetme („n-tina = n prvků").

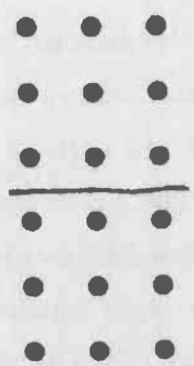
9.8 Čitatel určuje počet částí

Dítě se podívá na zadaný zlomek a rozdělí předtištěných 18 teček na tolik částí, kolik je uvedeno v čitateli. Císlo v čitateli určuje počet částí. Přitom dítě rozčleňuje celkový počet teček na stejné části.

David, Kryštof i Kristýna v následujícím příkladě rozdělují celek na dvě části, protože zadaný zlomek obsahuje dvě n-tiny.

Příklad 32
(7. třída, ***David****, 1a)*

obr. 15



J: Tak zkus to rozdělit na třetiny.
D: (kreslí čáru pod třetím řádkem). Asi takhle.
J: Jo? A jak jsi na to přišel.
D: No ***dvě třetiny****, jakože se to rozděluje na....na....ne. udělal jsem to špatně. Určitě.*
J: Jo udělal. Proč myslíš, žes to udělal spatně?
D: Protože jsem udělal 2/2.

(7.třída, ***Kryštof****, 1c)*

D: No, devítiny, takže ***18 dvouma****, a 2/9, takže to je jedna, vlastně.*
J: Já to tam nevidím. Co jsou ty devítiny?
D: No, ***když to jsou devítiny, tak to je devět dílů****...*
J: No. A kde máš těch devět dílů?
D: ***18 děleno 2****. No. Takže* ***tady jsou ty devítiny*** *(ukazuje na dvě části, které vznikly rozpulení 18 teček mezi 3. a 4. řádkem).*

(7. třída, ***Kristýna****, 1a)*

D: Takže označit 2/3.
J: No nejdřív mně řekni ty třetiny. Nejdřív mně tam vyznač třetiny a pak teprve, kolik obsahují teček 2/3.

D: Ehm. Třetiny, to mám jako vyznačit jak?
J: Jak chceš. Nějak to vyznač, aby to bylo vidět.
D: 2/3 to jsou tady tak (krouží tužkou nad prvními dvěma radami).
J: Dvě třetiny je teda kolik těch kuliček?
D: 6.
J: A jak jsi na to přišla?
*D: Protože ....em....ne **2/3 je 9**.*
J: Ehm. A jak jsi na to přišla?
D: Protože tady máme 18 kuliček.
J: Aha, a cos dělala dál s 18ti kuličkami?
*D: To jsem **rozdělila na dvě**? **18 kuliček děleno dvouma**.*

I když David ví, že má celek rozdělovat na třetiny, nejprve sklouzne k interpretaci, že 2/3 znamenají dvě části. Když strukturaci vytvoří, sám si uvědomí, že ukázal 2/2. Dojde mu, že číslo ve jmenovateli ukazuje počet částí a v následujícím pokusu celek správně strukturuje na třetiny.

U Kryštofa pravděpodobně dochází k sémantickému skluzu devítiny (jako devět částí z celku) a devítiny (jako ty dvě devítiny ze zadaného zlomku). Ví, že rozdělit celek na devítiny znamená vytvořit devět částí, ale do úvah se mu plete zadaný zlomek 2/9, a proto dělí 18 dvěma a celek rozděluje na dvě části.

Kristýna také ví, že má dělit celek na třetiny. Neví ale, jak je vyznačit, a proto upře pozornost na 2/3. Nejprve určí velikost 2/3 jako 6 teček. Pravděpodobně ztotožní 1/3 se třemi tečkami (viz následující kapitola), takže 2/3 jsou dva řádky. Když se jí moje reakce nezdá jako souhlas, vyjde z počtu n-tin v čitateli zlomku a rozděluje celek „na dvě" části po 9 tečkách (18 vydělí dvěma a vyjde jí devět). Postup ale neudrží a ztotožní výsledek devět jako 2/3.

Mohlo by se namítnout, že Kristýna nerozdělovala tečky na dvě části, ale pouze udělala chybu při operátorovém výpočtu 2/3 z 18 (18÷2=9 a tudíž 2/3 obsahují 9 teček). Nemyslím si však, že myšlenková úvaha šla takto přímočaře. Při takové jednoznačné úvaze by Kristýna chybu neudělala. Z dalšího řešení vím, že nemá problém vypočítat 2/3 z 18.

9.9 N-tina obsahuje n teček

Další skupina postupů pracuje s představou, že n-tina obsahuje n prvků. Jestliže znázorňuji třetiny, znamená to, že každá část bude mít tři tečky. Třetinu znázorním třemi prvky. Podobně šestina obsahuje šest teček. Číslo ve jmenovateli pak vlastně udává počet teček v části. V tomto případě nemusí dítě vůbec pracovat s celkem, nebo s celkovým počtem teček.

Se znázorněním n-tin jako n teček jsme se již setkali v předcházejícím textu například u Matěje (viz příklad 23) nebo Kristýny (viz příklad 32). Podívejme se na další příklad způsobu uvažování n-tina obsahuje n prvků.

Příklad 33
(7. třída, Jan, 1a)
D: (Začne naznačovat rozdělení po řádcích – viz listy). Takže na třetiny.
J: Dám ti novej papír.
D: (rozdělí celek po řádcích)
J: A teď jsi to rozdělil na kolik?
*D: **(Spočítá řádky). No na šest třetin**. (Vybarví dva řádky). A to jako dvě třetiny takhle vybarvím?*
J: No třeba, když budeš chtít.

(7. třída, Jan, 1b)
*D: (Udělá čáry ob řádek – **tři skupiny po šesti tečkách**.)*
J: A jak jsi to rozdělil teď?
*D: **Na šestiny**.*

Jan nepracuje s celkem. Rozdělit na n-tiny pro něj znamená rozdělit na části po n tečkách. V první ukázce Jan rozdělí 18 teček na třetiny po třech tečkách a následně spočítá, že vytvořil šest takových třetiny. Ve druhé ukázce vytvoří Jan tři skupiny po šesti tečkách, které znázorňují 3/6.

9.10 Nesprávné výpočty

Některé děti při snaze určit počet teček v části z celku dané zlomkem nebo při určení velikosti jedné n-tiny používaly různé chybné výpočty, které neintegrovaly jevy zlomkové problematiky (například jev, že velikost části daná zlomkem závisí na velikosti celku a může tedy ve vztahu k různým celkům ukazovat na různá množství), nebo různé manipulace se zadanými čísly, bez použití přiměřených aritmetických pravidel pro práci se zlomky.

Děti například uváděly: 2/3 je 6 (protože 2krát 3 je 6), 4/18 rovná se 4,5 (protože 18 děleno 4 je 4,5), 2/3 z 9 je 18/27 (protože 2krát 9 je 18 a 3krát 9 je 27), atp.

9.11 Zbytek kuliček interpretován jiným zlomkem

Tento způsob řešení byl používán jen v případě rozdělování osmnácti kuliček na dvanáctiny. Jde o případ, kdy děti začnou vydělením 18 teček 12. Jako podíl vyjde jedna a zbytek šest. Zbylých šest kuliček pak vyjadřují jiným zlomkem.

Příklad 34
(8. třída, Tomáš, 1d)

D: Takže na dvanáctiny, jo. Kolik teček obsahuje 5/12. To by bylo vlastně 18 děleno 12. To je jedna a 6 zbyde. Takže to by bylo ***jedna a 5/6****? ... No, dvanáctiny. ....No jedna a 5/6.*

9.12 Překrývání stylů řešení

V předchozích kapitolách jsem popsala řadu postupů při řešení první úlohy. Nesnáze při zařazování dětí k jednotlivým druhům postupů a již naznačené otazníky a více možností vysvětlení dětských řešení z výše uvedených příkladů svědčí o kombinování postupů dětmi. Jednotlivé styly se u dětí překrývají a mísí. Děti často využívají několika stylů a přechody mezi nimi mohou být pro pozorovatele nezachytitelné. I děti, u kterých se na první pohled zdá, že používají čistě jen jeden druh postupu, mohou v duchu provádět další úvahy, které jsem nezachytila. Skryté myšlenkové postupy mohou například kontrolovat primárně použitý postup.

V kapitole „Strukturace naráz“ (kapitola 9.1.1) jsem uvedla příklad Kryštofa (viz příklad 14). Podívejme se na něho ještě jednou a podrobněji.

Příklad 35
(7.třída, Kryštof, 1b, 1a).

D: No. ***Kuliček je tam 18. Děleno 6 je po třech.***
J: Jo, takže jsi to rozdělil po třech a pak jsi vzal těch 5. Jo. A tady (úloha 1a) jsi taky spočítal kolik je tam kuliček, nebo ses na to jen podíval a rozdělil?
D: No. Tady je to vlastně (ukazuje na řešení 1a), ***jak na kostce, hrací, po šesti.***
J: Ehm, tak to je jak na kostce, tak sis to nepočítal?
D: ***Jen těch prvních šest a pak jsem to rozdělil.***

Kryštof využívá obou typů strukturace, jak tvarové, tak i početní. Výrok: „Jen těch prvních šest a pak jsem to rozdělil“, svědčí o tom, že nejprve určil velikost n-tiny (využívá početní strukturace) a poté nahlédl tvar „jak na hrací kostce“ a celek rozčlenil.

10 K jednotlivým příkladů první úlohy

Výše byly popsány různé způsoby řešení první úlohy a představy a úvahy s řešením spojené. Popsané typy shrnuje následující tabulka 2.

V tabulce jsou uvedeny i kvantifikace k jednotlivým postupům. Součty nesouhlasí s počty dětí, protože v průběhu řešení jedné podúlohy mohly děti použít několik různých druhů řešení. V tabulce také nejsou zahrnuty postupy dětí, u kterých jsem přesně nevěděla, který druh postupu použily. Kvantifikace je nutno brát jako orientační, i když jsou vytvořeny na základě důkladného rozboru rozhovoru s dítětem nad použitým postupem řešení, protože se samozřejmě mohlo stát, že jsem dětský postup interpretovala nepřesně.

tabulka 2

Druhy postupů			7.třída					8.třída					Σ
			a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
Tvarová strukturace	Strukturace naráz		4	4				4	4	1		1	18
	Odhad velikosti n-tiny				1	2				1	2		6
	Zkoušení	Zdařilá strukturace na n-tiny i určení velikosti části dané zlomkem	1										1
		Zdařilá strukturace na n-tiny ale nesprávné určení velikosti části		1									1
		Strukturace se nezdaří	1		1	1	1						4
Početní strukturace	Vytvoření adekvátní strukturace		3	4	6	4	5	1	1	2	1	1	28
	Vytvoření neadekvátní strukturace	Část z celku - vychází ze strukturace			1							1	2
		Část z celku - nevyužívá strukturace				1	2			1	1		5
	Pokračování jiným postupem					5					2		7
A/B z C je D	Nemá problém zpětně určit 1 n-tinu		1	2				1	1			2	7
	Má problém zpětně určit 1 n-tinu				1		2			1			4
Uprava zlomku	Problémy s 1 n-tinou				1	2							3
	Ví co je 1 n-tina												0
Úprava prvků	Rozpůlení na 36 prvků					1					1		2
	Rozpůlení 6 teček na 12 prvků					1							1
Odhady a úvahy				1		1					1		3
Část teček jako celek			1	1				1					3
Tečka = n-tina			1										1
Čitatel určuje počet částí			3		1								4
N-tina obsahuje n teček			2	2	1		1	1					7
Nesprávné výpočty			1	1	1	2	1						6
Zbytek kuliček interpretuje jiným zlomkem											2		2

Podívejme se nyní blíže na jednotlivé úkoly první úlohy. Jaké postupy byly nejčastěji voleny a co ztěžovalo nebo ulehčovalo dětská řešení?

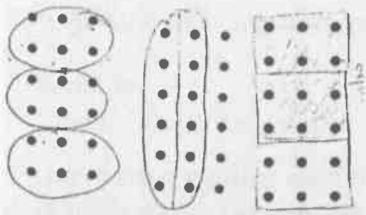
10.1 Třetiny a šestiny

Při úkolu se třetinami byl nejčastějším postupem styl „Strukturace naráz“. Důvodem je možnost snadného vizuálního rozestoupení obrazce, jehož tečky jsou uspořádány do tří sloupců a šesti řádků, na tři části (viz obr. 16). Častější než rozdělení na tři sloupce bylo rozdělení na tři části po dvou řádcích („jak na hrací kostce“).

Druhým nejčastějším způsobem byla „Početní strukturace“ se správnou interpretací podílu jako počet teček v jedné části.

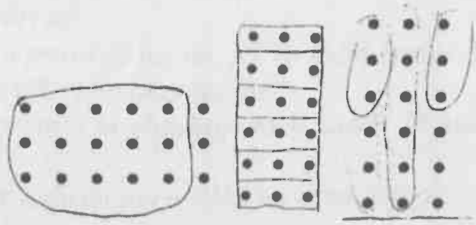
Nejčastější chybou bylo rozdělování kuliček na dvě části („chápání čitatele jako určujícího počet částí“, na které má být celek rozdělen) a rozdělení celku po řádcích („n-tina = n teček).

obr. 16



Ze stejného důvodu snadného vizuálního rozestoupení tvaru jako v úkolu se třetinami, i v úkolu se šestinami byl nejčastěji používán způsob „Strukturace naráz“.

obr. 17



Chyb ubylo, protože řada dětí z rozhovoru se mnou v průběhu prvního příkladu mohla pochopit princip řešení. Nejčastější chybou bylo rozdělení celku na tři části. Nabízejí se dva důvody. Prvním je vydělení 18 teček šesti a výsledek tři interpretovaný jako tři části. Druhým je uchopení velikosti n-tiny jako n prvků („n-tiny = n teček“).

Při rozdělování na třetiny a šestiny děti z osmé třídy na rozdíl od „sedmáků“, soudě podle malého zastoupení řešení „Početní strukturace“, více využívají „Strukturace naráz“ a dělají méně chyb. Jsou si ve vytváření strukturací jistější.

10.2 Devítiny

Zadané seskupení teček nešlo už tak dobře vizuálně rozčlenit na devět částí, jak tomu bylo v případě třetin a šestin. Většina dětí proto použila postup „početní strukturace“. I když děti řešily tento příklad s většími obtížemi a počet špatných postupů řešení se zvýšil, celkově převažovala správná řešení.

Nejčastější chybou bylo rozdělení osmnácti teček na dvě části po devíti tečkách. Z analýzy postupů a způsobů řešení u jednotlivých dětí vyplynulo, že tato chyba mohla vzniknout na základě tří druhů postupů nebo jejich kombinací, tří různých myšlenkových postupů již výše popsaných v kapitole o jednotlivých typech postupů. Někdy bylo dost obtížné až nemožné určit, který z postupů dítě zvolilo.

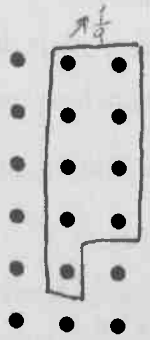
10.2.1 Devítiny obsahují devět teček

Zaprvé může být použita představa „n-tina obsahuje n prvků“. V tomto případě zakroužkuje dítě dvě části, protože devítina obsahuje devět teček.

Příklad 36
(7. třída, David, 1d a 1e)

*D: (**dělá čáru v půlce** mezi třetím a čtvrtým řádkem). No.*
J: A co je tady? (ukazuji na řesení, kde David vyznačil 2/2 také čárou mezi třetím a čtvrtým řádkem) Vždyť to máš stejný.
D: To jsou 2/2 a 2/9. To tak vůbec nemůže bejt. (říká si pro sebe)
*J: Tak mi nejdřív nedělej ty 2/9. **Nejdřív mi to rozděl na devítiny**. Chceš novej papír nebo ne?*
D: Ne, to je dobrý. (Kreslí čáry pod jednotlivými řádky – přepočítá si je – odděluje čarami sloupce – má mřížku složenou z osmnácti čtverců).
J: Vychází to?
D: No to právě že asi ne. :-) To mám špatne určite.
J: A jak víš, že to máš špatně?
*D: No protože **to obsahuje těch....těch 18 kuliček** to obsahuje a **já jsem to udělal na 1/18***
...
J: Takže tady jsi to rozdělil na osmnáctiny.
D: No.
J: To říkáš správně. A to je tady za é. Takže tos řekl dobře. A kdybych se tě zeptala, kolik jsou 4/18? Tak kolik by to bylo z toho?
D: ....
J: Tys říkal, že tohle jsou osmnáctiny.
D: No, osmnáctiny.
*J: Tak kolik teček obsahují **4/18**?*
*D: **72***
...
J: Ehm. Zkus teda udělat ty devítiny, a pak se vrátíme k těm osmnáctinám.
D: Už to možná.....(kreslí viz obr. 18 – přepočítá tečky v obrazci). No, takhle.

obr. 18



J: A tos teďka vyznačil co?
*D: No, Tady je **devět teček, a tady taky devět. Takže dvě devítiny**.*

David rozděluje 18 teček na dvě poloviny. Z tohoto zobrazení ještě není zřejmé zda se jedná o úvahu „n-tina obsahuje n teček“. Z dalšího řešení a rozhovoru s Davidem se mi zdá, že takto uvažuje.

David rozčlení 18 teček mřížkou na 18 oddílů a v tomto zobrazení vidí 1/18, protože *„to obsahuje těch ... těch 18 kuliček“*. Proto také určuje obsah 4/18 jako 72 teček. Když se podruhé pokouší o rozdělení na devítiny, napočítá devět teček, které označí jako 1/9, a zbytek je pro něj druhá devítina. Jak vidíme, zvolí jinou strukturaci než při prvním pokusu. Myslí si totiž, že tak obešel mou připomínku, že se v prvním případě jednalo o rozdělení na dvě poloviny. Myslí si, že v tomto případě díky změněné strukturaci už nedělí kuličky na 2/2 ale 2/9.

10.2.2 Osmnáct děleno devíti jsou dvě části

Druhý postup vedoucí k rozdělení celku na dvě části nastane, když dítě interpretuje podíl daný dělením celkového množství teček počtem částí, na které má být celek rozdělen, jako počet částí a ne počet prvků v části. Jde tedy o již zmíněnou záměnu významů „dělení na“ a „dělení po“. Ilustruje to následující příklad.

Příklad 37
(7. třída, Jan, 1c)
D: (po jedné ***přepočítává počet teček*** *– rozdělí tečky* ***na dvě části po třech řádcích****, v polovině, ..., pak rozděluje různě, asi zkouší – viz listy – nakonec má* ***oddílky po dvou*** *tečkách – vybarví dva oddílky)*
J: Jo, takže to máš rozdělený jakože....
D: No, jakože ***devítiny****.*
J: Jo, dobře. A proč jsi to rozděloval na půlku?
D: No, já jsem to potom to....no......
J: A proč jsi to počítal po jedné, nebo cos tam vlastně dělal?
D: No, to jako, že jich je osmnáct, těch...A jako ***děleno devíti jsou po dvou****.*
J: Jo, tak dobře.

Jan nejprve rozdělí kuličky na poloviny, protože osmnáct děleno devíti jsou dvě části. Pak si ale uvědomí, že to není správně a zkouší takové rozdělení, které mu umožní mít devět částí po dvou tečkách.

10.2.3 Dvě devítiny, dvě části

Třetí představa, která může způsobit rozdělení na dvě části po devíti tečkách, je „čitatel určuje počet částí“. Na rozdíl od předchozího myšlenkového postupu není přítomno předchozí vydělení osmnácti devíti. Dítě vychází z poznatku, že devítiny jsou dvě. Ukázku takového postupu jsem již uvedla u Kryštofa (viz příklad 32).

10.2.4 Nesnáz zadané úlohy

Rozdělení osmnácti teček na dvě stejné části při znázorňování devítin se vyskytovalo často i u dětí, které předtím rozdělily celek správně na třetiny a šestiny. Čím je tato úloha obtížná a proč často nelze určit, jaký druh úvahy ze tří výše uvedených děti používají? Jedním z důvodů je samotný zlomek 2/9. Je specifický tím, že osmnáct děleno devíti vyjde dvě a dvojka je přímo v čitateli a osmnáct děleno dvěma je devět a devítka je ve jmenovateli. Dítěti se pak může zdát, že mu vše do sebe dobře zapadá (dvě části po devíti, dvě devítiny po devíti, devět teček v devítině) nebo nesnadno nalézá, co nesedí, když se mu vyřešení nezdá správné. Úloha by byla možná snazší, kdyby se měl určovat počet kuliček například ve 3/9.

Nesnadnost udržení dříve používaných myšlenkových postupů zapříčiněnou zlomkem 2/9 ilustruje následující příklad. Ukázku už jste viděly v příkladu 24, podívejme se na ni ale z pohledu této kapitoly.

Příklad 38
(8. třída, Tomáš, 1c)

D: Takže na devítiny jsou dvě, teda krát dvě jsou čtyři (píše =4). Takhle. Teda jo nebo ne (znejistí). Devítiny, dvě devítiny, dvakrát, jo čtyři.
J: No a kdybys mi to měl ukázat tady (rozdělit tečky)
D: No tak to bych udělal takhle (dělá čáru v půlce, tj. mezi třetím a čtvrtým řádkem).
J: Jak?
D: Na půlku.
J: Jako že bys to udělal takhle? (dělám pomyslnou čáru v půlce). To by byly 2/9?
D: Ne to je blbost. To by byla půlka. Jedna devítina to je takhle (opět dělá pomyslnou čáru mezi třetím a čtvrtým řádkem). No tak teďka nevím vůbec.

Tomáš prostřednictvím postupu „A/B z C je D“ správně řeší úkoly se třetinami a šestinami a nemá žádný problém se zpětným určováním velikosti n-tiny. Bezpečně ví, že mezivýsledek C/B určuje velikost n-tiny. Když má ale rozdělovat 18 teček na devítiny, jistotu ztrácí a pletou se mu dvě devítiny a dvě části.

Děti z osmé třídy na rozdíl od dětí ze sedmé třídy jsou si při řešení této úlohy jistější. Tvarová strukturace je vyspělejší, protože si dokáží představit více různých náhledů na strukturu (viz Anna, příklad 17) a záludnost zlomku 2/9 na ně nemá tak velký vliv. Ale i u dětí z osmé třídy se vyskytlo rozdělení 18 teček na dvě části, a to u tří ze šesti dětí. Jiné chyby se ale u dětí z osmé třídy nevyskytovaly. U dětí ze sedmé třídy chybovala více než polovina dětí (7 z 11) a typy chybných řešení byly pestřejší (4 z 11 – dělení na 2 části, 3 z 11 – jiný druh chyby).

10.3 Dvanáctiny

Rozčleňování na dvanáctiny bylo pro děti nejobtížnější a vyžádalo si nové postupy. „Úprava prvků“, „Zbytek kuliček interpretován jiným zlomkem“ nebo „Pokračování jiným postupem“ se uplatňovaly pouze u této úlohy.

Nejčastěji děti začaly vydělením osmnácti teček dvanácti. Protože ale nedošly k celému číslu, hledaly jiná řešení. Některé se samy zeptaly, jestli mohou kuličky dělit. Většině jsem ale musela poradit, že kuličky nemusí zůstat celé. Dělitelnost kuliček byla pro děti zarážející. Je možné, že kdyby se nedělily puntíky, ale něco, co je na první pohled „půlitelné“ (například neplné čtverečky nebo kruhy), bylo by správné samostatné řešení častější.

Jaké volily děti navazující postupy? Řada odhadla, že by mohly zkusit jeden a půl kuličky. Poté ověřily, zda jim vyšlo dvanáct částí. Některé volily úpravu teček. Tečky rozpůlily, aby dostaly počet částí dělitelných dvanácti beze zbytku (třicet šest děleno dvanácti je tři). Správně interpretovat výsledek tři, jako počet půlek v jedné části, ale nebylo snadné. Děti se opět dopouštěly chyby již výše uvedené. Nesprávně interpretovaly výsledek jako počet částí, na které má být celek rozdělen. Překvapivě se nestalo, že by někdo do jedné dvanáctiny zahrnul tři tečky.

Jako navazující postup se také objevila úprava zlomku, interpretace zbytku jiným zlomkem a různé odhady a úvahy.

Nenašla jsem překvapivý rozdíl mezi dětmi ze sedmé a osmé třídy. Oproti dětem ze sedmé třídy byly děti z osmé třídy opět vyspělejší v úvahách a častěji samy přišly na to, že by se tečky mohly rozpůlit. Zajímavý je výskyt postupu „Zbytek teček interpretován jiným zlomkem“ pouze u dětí z osmé třídy.

10.4 Osmnáctiny

Pro děti ze sedmé třídy nebyl příklad tak lehký, jak by se mohlo zdát. Převažovaly u nich nesprávné odpovědi (6:5). Nejčastější chybou (4 ze 6) bylo zahrnutí všech 18 teček do 1/18. Děti z osmé třídy už tento příklad lehce zvládaly. Vyskytla se u nich pouze jedna chyba.

Jak jsme viděli z výše uvedených popisů jednotlivých způsobů řešení, určení 1/18 jako osmnácti teček mohlo nastat ze tří druhů úvah. První myšlenka vede dítě k úvaze, že osmnáctina znamená osmnáct teček („n-tina obsahuje n prvků“), a proto jako jednu osmnáctinu označí všechny tečky (viz David, příklad 36). Při druhé úvaze si dítě řekne přibližně toto: „Osmnáct děleno osmnácti je jedna, takže tahle celá jedna část“. Výsledek je tedy interpretován jako počet částí (viz Kryštof, příklad 22). Třetí úvaha může být důsledkem „šiftové záměny“: osmnáct děleno osmnácti je osmnáct (viz kapitola „Početní strukturace“).

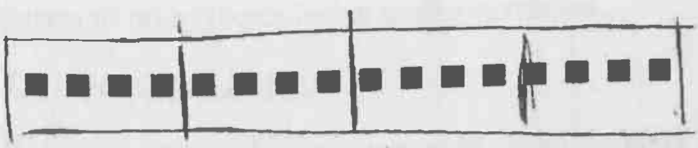
11 Znázorňování 16/4

Dostáváme se k druhé úloze, kde úkol zněl: „dotvoř skupinu čtverečků, aby vyjadřovala 16/4“. Výstupem řešení byl tedy útvar vyjadřující 16/4, který jsem zvolila jako třídící kritérium při analýze jednotlivých postupů řešení. Z analýzy vyplynulo devět způsobů zobrazení 16/4. Následně je popsáno, jaké úvahy a představy vedly děti k jednotlivým stylům řešení.

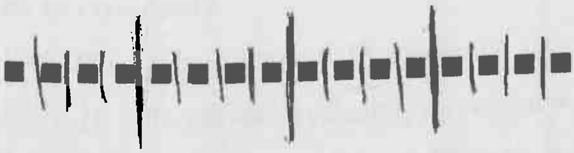
11.1 Rozdělení na čtyři části

Při tomto druhu postupu vyřešily děti úkol rozdělením šestnácti čtverečků na čtyři stejné části (viz obr. 19 a obr. 20).

obr. 19



obr. 20



11.1.1 Zobrazení čtyř celků se čtverečkem jako 1/4

Aby úvaha mohla být považována za správnou, musí dítě ve strukturaci vidět čtyři celky. Každou ze vzniklých částí tedy musí vnímat jako jeden celek (jako 4/4), a proto má tedy dohromady 16/4. Zároveň musí vidět, že každý celek se skládá ze čtyř čtvrtin, a že tedy jeden čtvereček je ¼.

Takto uvažovalo nejvíc dětí. K zobrazení dospěly přes **znázornění čtyř celků**, které v sobě 16/4 obsahuje. Na čtyři celky přišly aritmetickou úpravou (zkrácením zlomku 16/4 na 4/1) nebo výpočtem (16 děleno 4) a nebo rovnou rozpoznaly, že 16/4 obsahuje 4 celky. Po znázornění čtyř celků dokázaly správně vidět **¼ v jednom čtverečku.**

Příklad 39
(8. třída, Pavel, 2)
D: (pocítá si počet čtverečku)......... Mám to jako zakroužkovat?....Jo, to je 16/4
J: Můžeš kroužkovat, klidně, jestli chceš. Ja potřebuju nějak popsat a vysvětlit, že to znázorňuje 16/4. Aby to sedělo. A můžeš s tím dělat cokoliv. A nemusíš s tím dělat nic. Mne je to jedno, ale potřebuju, abys mi ukázal, že to vyjadřuje 16/4.
D: No takže ta jedna kostička je ¼ a tady jsou ty 4 celky (ukazuje od prvního k poslednímu čtverečku).
J: Ehm. Jo dobře. Souhlasím. Jo ještě mi řekni, kde jsi vzal ty 4 celky. Já souhlasím, že tam jsou. Jak jsi na to přišel?
D: No 4 celky protože jsem si spočítal, že těch čtverečků je 16, takže když tam má být 16/4, tak ten jeden čtvereček je vlastně ta čtvrtina.
J: Ehm. A co dál? Jak jsi tam dostal ten celek? Ty 4 celky?
D: No protože 4krát 4 je 16.
J: Jo, dobře. Jasný. Souhlasím s tímto vysvětlením. No tak trojka.

Pavel vidí v zadání čtyři celky a jako ¼ označuje jeden čtvereček. Protože je 16 čtverečků, ukazuje zobrazení 16/4.

Děti, které rozdělily 16 čtverečků na čtyři části, toto rozdělení interpretovaly i jinak než jako čtyři celky se čtverečkem jako ¼. Za rozdělením na čtyři části stály i jiné úvahy. Objevila jsem tři druhy těchto jiných úvah a vysvětlení.

11.1.2 Čtyři části a každá je 1/4

V prvním případě dítě strukturuje 16 prvků na **čtyři části**, ale potom označí **jednu část jako 1/4**. Dítě totiž ve vytvořené strukturaci nevidí čtyři celky. Proč tedy člení 16 čtverečků na čtyři části?

Dvě děti vzaly evidentně 16 čtverečků jako celek a rozdělily ho na čtvrtiny. Jedno počítalo ¼ z 16 a na základě výsledku, že ¼ jsou 4 tečky, rozdělilo celkový počet čtverečků po čtyřech čtverečcích. Druhé dítě rozdělovalo celek na čtvrtiny, takže získalo také čtyři stejné části po čtyřech čtverečcích. Tyto dvě děti poté logicky označily jednu z částí jako ¼.

Příklad 40
(8. třída, Tomáš, 2)
D: ... A tohle (ukazuje na 4 čtverečky) to je vlastně ta ¼ z těch 16. Protože jsou 4/4, to je ten celek, těch 16. Em 4/4 to je vlastně celý tohleto (ukazuje všech 16 čtverečků). Protože jsou tady čtyři, by měly být, že jo. První, druhá a .... čtvrtá. (kroužkuje postupně ve vzduchu po 4 čtverečcích). To jsou 4/4 a jedna čtvrtina jsou ty čtyři.
J: Jo, když to takhle uděláš, (kroužkuju po 4 čtverečcích), tak já souhlasím, že tady máš 4. A co čtyři?
D: čtvrtiny.
J: Aha. Takže 1, 2, 3, čtvrtá čtvrtina. Takže tohle jsou 4/4.
D: To je celek.

Tomáš vidí 16 čtverečků jako jeden celek a rozděluje ho na čtyři čtvrtiny. Když ho ale upozorním, že mi sice správně ukázal 4/4, ale já bych chtěla vidět 16/4, nedokáže vytvořenou strukturaci změnit nebo dotvořit (například přidáním dvanácti stejně velkých čtvrtin) na 16/4.

Další dvě děti, které strukturovaly čtverečky na čtyři části a označily jednu vzniklou část jako ¼. rozdělovaly množství „po čtyřech" nebo „na čtyři". Jak mají rozdělovat zjistily vydělením šestnácti čtyřmi nebo zkrácením zlomku 16/4 na 4/1. Narozdíl od předchozích dvou dětí si nemusely uvědomovat, že berou 16 čtverečků jako celek (že rozdělují na čtvrtiny nebo zjišťují velikost 1/4). To mohly vyvodit až zpětně, podle vzniklé strukturace. Proč dělily šestnáct čtyřmi není jasné. Pravděpodobně si zlomek 16/4 převedly na dělení 16÷4. Pak by vlastně znázorňovaly výsledek dělení.

Příklad 41
(7. třída, David, 2)

D: (Kreslí zarážku za 4. čtverečkem – pak ji zaškrtává). To je blbě.
J: Co jsi tam chtěl dělat?
*D: No chtěl jsem, že si **16 vydělím 4. To je 4**.*
J: A vyšlo ti 4. A co pak jsi s tím chtěl dělat?
*D: No, že by to šlo **po čtyřech**.*
J: Hm. A proč jsi to teďka zavrhl?
*D: Nevím. (dodělal další tři zarážky, ob čtyři čtverečky). Takhle **čtyři šestnáctiny**. Ehm, takhle.*
J: Ehm. No a já jsem teď úplně blbá a vůbec nechápu, proč jsi to tak udělat, a tak mi to zkus vysvětlit?
D: No, že jsem si spočítal tady, že jich je šestnáct, dohromady, těch čtverečků.
J: Ehm. Jo.
*D: No a 16 děleno 4 je 4, tak jsem to rozdělil **na čtyři** ty jakoby kolečka po čtyřech, a to je 16.*
*J: Ehm. Takže tys vlastně udělal 16 děleno 4 vyšlo ti 4, takže jsi to rozdělil na 4. Takže já tady vidím nějaký **čtyři části**, jo? A co je ta jedna část?*
*D: **Jedna část je ta ¼**.*
J: Co je jedna čtvrtina?
D: Ty 4 čtverečky.
J: Tohle (kroužkuji skupinu 4 čtverečků) celý je jedna čtvrtina?
D: No.
J: A když tohle celý je ¼, tak tohle je tím pádem druhá čtvrtina, tohle třetí a tohle čtvrtá (kroužkuji postupně části se čtyřmi čtverečky). Takže tady mám jakoby 4/4, podle toho co ty říkáš.
D: No.

David šestnáct vydělí čtyřmi a výsledek interpretuje jako „po čtyřech" čtverečcích. Výsledek se mu sice nezdá, neví asi přesně proč (nebo mi to nechce říct), ale strukturaci na čtyři části po čtyřech dodělá. Ve čtyřech částech nejprve vidí 4/16. Tuto úvahu rozeberu níže.

Po mé pobídce k vysvětlení David interpretuje strukturaci jako „na čtyři" kolečka „po čtyřech". Přičemž jedno kolečko vidí jako ¼. Popisuje vlastně vzniklou strukturaci a v hlavě už nedrží, že měl zobrazovat 16/4. Aniž by to vyslovil nebo věděl, bere David vlastně 16 čtverečků jako celek. Místo aby čtyři stejné části viděl jako 4 celky, vidí rozdělení na čtvrtiny („čtyři části takže čtvrtiny").

Všimněme si ještě jedné zajímavosti. V popisu svých úvah David klouže mezi označením strukturace „po čtyřech" na „na čtyři". Dítě totiž v této úloze nemusí řešit, zda rozdělovat celek „po čtyřech" prvcích nebo „na čtyři" části, jak tomu bylo u první úlohy. Ať už dítě zvolí úvahu „po čtyřech" nebo „na čtyři" v obou případech vzniknou čtyři části po čtyřech tečkách. To je jedno z usnadnění, ale zároveň úskalí druhé úlohy.

Proč úskalí? I Když dítě vyjde z úvahy, že hledá celky, může po vzniklé strukturaci dojít k úvahovému skluzu. Dítě vidí rozdělení na čtyři části a zároveň má ukázat určitý počet čtvrtin. Snadno pak dochází ke skluzu „čtyři části takže čtvrtiny".

Vezměme si případ, kdy je předtištěno 12 teček a úkolem je znázornit 12/4. Výsledkem krácení nebo dělení jsou 3/1 nebo 3. Jestliže bude výsledek interpretován jako „po 3 prvcích" (dítě provede „dělení na čtyři části") výsledné rozdělení bude vypadat takto: /---/---/---/---/. V případě pochopení výsledku jako „na 3 části" (dítě provede „dělení po čtyřech prvcích") bude řešení toto: /----/----/----/. Aby dvanáct prvků mohlo být označeno za 12/4, muselo by dítě zvolit variantu „dělení po čtyřech prvcích na tři části" a interpretovat části jako tři celky se čtyřmi čtvrtinami.

Z výše uvedených důvodů si myslím, že by bývalo bylo lepší zadat dětem jiný zlomek ke znázornění než 16/4. Kvůli lepší diferenciaci mezi jednotlivými způsoby myšlení a úvah u dětí by zlomek 12/4 byl vhodnější.

11.1.3 Čtyři části jsou 4/16

Druhý druh úvahy popisující rozdělení 16 čtverečků na 4 části jsme viděli u Davida (viz příklad 41). David strukturaci na čtyři části po čtyřech čtverečcích interpretuje nejprve jako 4/16. Může se jednat o přeřeknutí (slovní přesmyčku). Místo 16/4 řekl 4/16. Může se však jednat o uchopení vytvořeného zobrazení jako „čitatel určuje počet částí" (viz výše), protože stejnou úvahu David použil i při řešení první úlohy.

11.1.4 Čtyři části a každá je 16/1

Při třetím druhu úvahy, která vysvětluje rozdělení 16 čtverečků na 4 části, je jedna část vnímána jako 16/1.

Příklad 42
(8. třída, Bára, 2)
D: Ehm. ....A tady je 16, a kdybysme to všechno rozdělili ***na čtyři***

J: Tak co bysme dostali?
D: To bysme dostali těch 16/4?
J: No a teď mi to ukaž jak.
*D: No, tak tady to je celek (ukazuje všech 16 čtverečků) a to bysme rozdělili **po čtyřech**.*
J: A co by byla tady ta jedna část (ukazuji na oddělené 4 čtverečky)?
*D: To bude **16/1**. ...no to bude 16/1.....*

Bára se snaží znázornit výsledek dělení 16÷4. Stejně jako David osciluje mezi rozdělováním na čtyři části a rozdělováním po čtyřech prvcích. Rozdělí celek na čtyři části po čtyřech čtverečcích a snaží se v tomto zobrazení najít 16/4. Když se Báry ptám, proč jednu část označuje jako 16/1, nedokáže už svou interpretaci verbalizovat. Myslím si, že jednu část označí za 16/1 proto, že druhá část bude 16/2, třetí 16/3 a čtvrtá 16/4 (16/1×4=16/4).

11.2 16/4 jako 8/2

Narozdíl od řešení z předchozí kapitoly dítě nerozdělí čtverečky na čtyři části, ale na osm částí. Zkrátí totiž zlomek 16/4 na 8/2.

Příklad 43
(7. třída, Lukáš, 2)

obr. 21

D: Jo, jo. tady to si rozdělím na 8/2. Takže by to šlo udělat... Že bych udělal...To vygumuju (gumuje to, co předtím nakreslil). Tak si 16/4 rozdělím na 8/2 (rozděluje na 8 částí po 2 čtverečkách – viz obr. 21)
J: Takže by to bylo...
D: Já to tady napíšu. 16/4 (píše: 16/4:2=8/2, a 8/2 se šipkou).

Lukáš v tomto případě vnímá všech šestnáct čtverečků jako 16/4, protože říká *„16/4 rozdělím na 8/2"*. Při zobrazování 8/2 správně vytvoří osm částí po dvou čtverečcích. Zkrácením zlomku na 8/2 se vyhne nejasné strukturaci 4 části po 4 čtverečcích, která působí řadu významových skluzů, jak jsme viděli výše.

11.3 Šestnáct částí po čtyřech čtverečcích

Při tomto postupu je předtištěných 16 čtverečků rozděleno na čtyři části. Dítě vidí čtvrtinu jako čtyři čtverečky. Čtyři části tedy chápe jako 4/4 a 16/4 znázorní přidáním dalších částí po čtyřech čtverečcích. Vytvoří 16 částí po čtyřech čtverečcích a jako ¼ správně určí jednu část.

Příklad 44
(7. třída, Lukáš, 2)

D: a chci 16/4....(přemyšlí)...no to já budu muset asi dodělat ještě čtverecky, nebo..
J: No a proč bys musel dodělávat čtverečky,
D: Protože tady mám jen čtyři čtvrtiny...
J: Říkáš, že tady máš čtyři čtvrtiny?
D: No, takže tady musím ještě 12 dodělat. No to je blbost. (přemýšlí) . No, tak bych jich tam dodělal ještě 12.
J: Dvanáct čeho přesně. Udělej mi alespoň jednu, abych viděla, jak by to vypadalo.
D: (kreslí další část se 4 čtverečky)
J: Jo, a takhle ještě 12krát, bys pokračoval..
D: ..bych pokračoval, až bych jich měl 16.

Lukáš vidí řadu čtverečků jako 4/4 a přemyšlí, jak znázornit ctvrtin šestnáct. Správně úlohu řeší přidáním dvanácti stejně velkých části.

11.4 Čtyři části a 12 čtverečků

Do skupiny strategii „přidávání" patří také postup, kdy dítě opět rozdělí šestnáct prvků na 4/4 a správně tuší, že by mělo ještě něco přidat, aby dostalo 16/4. Místo dvanácti částí po čtyřech však přidalo jen dvanáct čtverečků.

Příklad 45
(8. třída, Tomáš, 2)

J: Aha. A když tohle je ¼, tohle druhá, třetí, čtvrtá, tak jsou to 4/4 a já chci 16/4, tak co bys musel udělat?
D: No musel bych ještě 12 těch čtverecku.
J: Ehm. Dodělat. A 12 čeho?
D: 12 čtverečků.
J: 12 tady těch čtverečků? (ukazuji na jednotlivé čtverečky)
D: Jo.
J: Ale já si spíš myslím, že bys měl dodělat 12 tady těch množin, ne?
D: nebo tak.
J: Když ¼ je tady ta množina 4 čtverečků, tak bys měl dodělat 12 tady těch množin, jo?
D: Hm.
J: Vidíš to tam?
D: Ne. Já si myslím, že bych tady k tomu celýmu (16ti čtverečkům) přidělal 12 ctverecku zase zespoda.

Tomáš ve své úvaze kombinuje dva druhy znázornění čtvrtin. První čtyři čtvrtiny znázorní pomocí množin, které obsahují čtyři prvky a zbylých dvanáct čtvrtin znázorní pomocí dvanácti čtverečků. Nepotřebuje „držet" velikost jedné čtvrtiny, vždyť mi řekne, že jeden čtvereček je jedna čtvrtina.

11.5 64 čtverečků

Třetím výsledným zobrazením ve skupině „Přidávání" je „64 čtverečků". Dítě vnímá jeden čtvereček jako 1/1. Šestnáct předtištěných čtverečků tedy vidí jako 16/1 a hledá, jak znázornit 16/4. Řešením je pro něho vzít čtyřikrát víc 16/1. Ve výsledku tedy dítě dostává 64 čtverečků.

Podle mne se jedná o stejný druh myšlenkové představy jako v případě Báry (viz příklad 42), která také 16/4 dostala vynásobením 16/1 čtyřmi. Jedná se o představu, kdy místo vztahu „16/4 je 4krát menší než 16/1" vnímají vztah mezi těmito zlomky jako **„16/4 je 4krát větší než 16/1."**

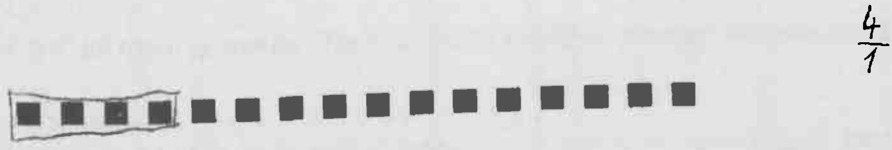
11.6 16/4 jako 4 čtverečky

Při této strategii dítě nejprve upraví zlomek 16/4 na 4/1 a poté znázorní výsledek čtyři zahrnutím čtyř čtverečků do množiny.

Příklad 46
(7. třída, Matěj, 2)

J: No a teď to zkus nějak vyjádřit.
D: No já jsem si vlastně ty dvě čísla vydělil 4. A vyšlo mi, protože teda obě jdou vydělit, a vyšlo mi tohle číslo (zapsal 4/1).
J: Dobře, a teď zkusit tady vyjádřit (pohybuji tužkou kolem všech předtištěných čtverečků), tady to (ukazuji tužkou na zapsané 4/1), co ti vyšlo.
D: Tak to bych si tady zakroužkoval ty první 4?
J: Aha. protože ti vyšlo 4 tak bys zakroužkoval první 4?

obr. 22



D: Jo. Asi jo. (Zarámuje první 4 čtverečky, viz obr. 22)
J: Teď ale vlastně pracuješ jenom s těma čtyřma čtverečkama a já bych potřebovala, abys pracoval s celým tímhle celkem, s těma všema čtverečkama.
D: Jo. (Přemýšlí.)

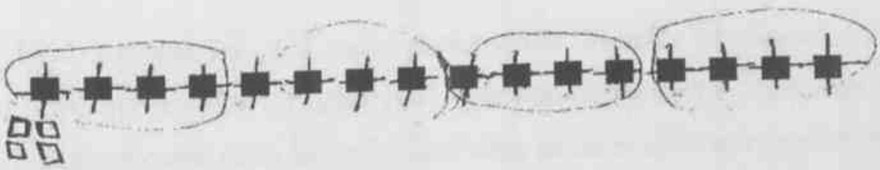
Matěj neznázorňuje 16/4 ani vztah mezi 16/4 a 4/1. Zakreslí pouze výsledek, který vypočítal, čtyři. Nejedná se o žádnou strukturaci, ale pouze o objektové vyjádření číslice čtyři pomocí čtyř prvků.

11.7 Zobrazení čtvrtin jako rozdělení čtverce na čtyři části

Při tomto způsobu znázorňování 16/4 dítě rozdělilo jednotlivé předtištěné čtverečky na čtyři díly. Každý čtvereček dítě rozčlenilo na čtyři části s tím, že tak ukazuje 16/4.

Příklad 47
(Martina, 8. třída, 2).
D: (Dvakrát počítá počet čtverečků). .... em .... Rozdělila bych tu jednu kostičku na čtyři. Tak bych rozdělila všechny. (Viz obr. 23, jednotlivé čtverečky rozdělené na čtyři části; nevšímejte si množin po čtyřech prvcích.)

obr. 23



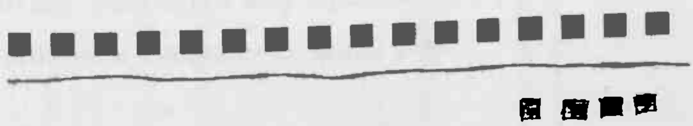
J: Ehm. Tak mi zkus popsat, že to co jsi vytvořila, je 16/4.
D: No protože 16 těch kostiček a když je rozdělím na 4 díly, tak ***v jedný kostičce jsou čtyři díly a je to 16/4.***
J: takže když tys tu jednu kostičku rozdělila na čtyři
D: stejný díly.
...
J: ... zkus to vysvětlit tak, abych v tom viděla 16/4. Zkus mě nějak přesvědčit. Protože v tom cos mi tady vyznačila, já vidím 16/1.
...
D: No, takže by ke každé by čtyři malý kostičky. U tý jedný. Takhle, že by to dávalo jeden celek. (Namalovala čtyři kostičky, viz obr. 23.)
J: Jo. A jakej vztah by měla k těmhle 4 kostičkám, tady ta kostka? (ukazuji na původní předtištěnou kostku).
D. No, ***bylo by to vlastně to stejný****. Byly by to vlastně jako 4/4. Nebo 1/4 by vlastně byla jedna ta kostička.*
J: Jo, tak teď už tomu rozumím. Tady ta jedna kostička (ukazuji na původní černý čtvereček) by byla
D: Jedna čtvrtina
J: Jedna čtvrtina a ty teď tady máš 4 kostičky. To jediný mi tam nesedí. Proč je tam zrovna počet 4, když už tady máš jednu kostičku (tu původní předtištěnou).
D: Takže by to byla jen ***jedna čtvrtina z tý kostičky*** *(ukazuje na původní černou kostku), z tohoto celku, z těch čtyř čtvrtin (ukazuje stále na původní černý čtverec) ta jedna čtvrtina..*

Martina nejprve znázorňuje čtvrtinu jako čtyři díly. Rozdělením čtverečku na čtyři části vyjádří, že jeden čtvereček reprezentuje ¼. Když chci přesnější znázornění opět rozděluje čtvereček na čtyři části (pouze zvětšeně), kterými vyjadřuje ¼ (16/4 je pro ni „16 zobrazení čtvrtin“, 16 rozčtvrcených čtverečků). Nakonec však u ní vidím správný postřeh, že když vezme z každé kostičky ¼, bude mít dohromady 16/4.

11.8 Obrazové ztvárnění zlomku

K tomto ztvárnění 16/4 netřeba většího komentáre. Jde o převedení čísel do obrazového ztvárnění počtu.

obr. 24



11.9 Je to na mně

I když u některých dětí jsem zaznamenala náznaky pochopení možnosti výběru zobrazení 16/4, pouze jedno dítě plně vidělo podstatu druhé úlohy. Postřehlo, že jestliže není určeno, co má byt celek nebo jak velká je n-tina, může si určit n-tinu nebo celek, jak velke chce. Pouze musí dodržet vztahy mezi 16/4, celky a ¼, ale velikost čtvrtiny nebo celku je v tomto případě na jeho volbě.

Příklad 48
(Anna, 8. třída, 2)

D: Tak můžu udělat ty skupiny po větších. Jako po více těch čtverečků.
J: A jaký skupiny?
D: No skupina, no jednu čtvrtinu.
J: ¼ to je jako skupina?
D: No.
J: Jo. A kdybys to dělala po větších, tak jak by ti to vyšlo? Co bys tam udělala?
D: Přidala bych tam tolik těch skupin, kterejch...kdybych si řekla, že to třeba udělám po třech, tak bych musela mít těch trojic 16.
J: Takže by sis zase určila, co je ¼. Jo. Dobře. Souhlasím, ale.....no...dobrá...a napadá tě k tomu ještě něco?
D: Nevím. Mě napadá, že můžu dělat, jak velký skupiny chci.
J: Jo, že si jako určíš, kolik bude ta ¼.
D: A taky to můžu mít určený, ale to tady není, že jo?
J: Není to tam určený. To je pravda. A co kdybych ti řekla, že bych chtěla vědět, z jakého celku jsi to brala. Kdyby ten jeden čtvereček byla ¼, co by tam byl celek?
D: Celek?
J: Ehm.
D: Tak to by byly ty čtyři. Jedna čtvrtina, druhá, třetí, čtvrtá (ukazuje postupně na čtverečky) a mám jeden celek
J: Máš jeden celek. Jo.
D: A když to vezmu zase po čtyřech, tak mám další celek, že jo. Jsou tam 4 celky. Protože ten zlomek není ve tvaru, to, může se dát do celýho čísla.

Anna ví, že velikost všech n-tin musí být stejná, ať už si velikost určíme jakoukoliv, a že celek se skládá z n stejnych n-tin. Anna se dobře orientuje a flexibilně pohybuje ve vztazích mezi celkem, čtvrtinou, a 16/4.

11.10 Shrnující tabulka

Následující tabulka shrnuje výše popsané postupy řešení druhé úlohy. Vychází z výsledného zobrazení, ukazuje varianty úvah stojících za těmito znázorněními a počty výskytu jednotlivých úvah. Počty stejně jako v první tabulce vyjadřují množství výskytu určité úvahy. Nesouhlasí tedy s počtem dětí, protože se u některých dětí v průběhu řešení a rozhovoru s nimi vyskytlo více druhů úvah.

tabulka 3

výsledné zobrazení	varianty úvah		7.třída	8.třída	Σ
Rozdělení na čtyři části /----/----/----/----/	Zobrazení 4 celků se čtverečkem jako 1/4		7	2	9
	4 části a každá je 1/4	"Po čtyřech" a "na čtyři"	1	1	2
		Zobrazení čtvrtin	1	1	2
	4 části = 4/16		1	0	1
	4 části a každá je 16/1		0	1	1
/--/--/--/--/--/--/--/--/	16/4 jako 8/2		1	0	1
/----/----/----/----/ x4	Šestnáct částí po čtyřech čtverečcích		3	0	3
/----/----/----/----/ + 12 čtverečků	Čtyři části a 12 čtverečků		0	1	1
---------------- x 4	64 čtverečků		0	1	1
/----/ ------------	16/4 jako 4 čtverečky		1	0	1
+++++++++++++++++	Zobrazení čtvrtin jako rozdělení čtverce na ctyri části		0	1	1
----------------/----	Obrazové ztvárnění číslic		1	1	2
různé	Je to na mně		0	1	1

U dětí ze sedmé třídy byl nejčastější typ úvahy „Zobrazení čtyř celků se čtverečkem jako ¼“. Děti tedy nejčastěji vnímaly 16/4 jako čtyři celky. U dětí z osmé třídy se nedá říci, že by nějaký druh postupu převažoval. Zajímavé je, že se u dětí z osmé třídy nevyskytla úvaha „Šestnáct částí po čtyřech čtverečcích“.

V řešeních v obou skupinách převažuje setrvávání u původních předtištěných čtverečků, jejich nedoplňování, nepřidávání a hledání jen jednoho správného řešení.

Když sečteme správná a chybná řešení v jednotlivých třídách, překvapivě zjistíme, že u dětí ze sedmé třídy výrazně převažují správná řešení (11:3) a v osmé třídě převažují chybné představy (6:4). Není to způsobeno jistější orientací dětí ze sedmé třídy ve vztazích daných druhou úlohou, ale spíše mým vlivem na průběh řešení (mými otázkami, zdůrazňováním některých skutečností, atp.). Děti ze sedmé třídy jsem více „držela“ v jejich myšlenkových postupech. V tabulce proto není podstatné všímat si množství správných a chybných postupů, ale druhů úvah nebo obtíží, které se u dětí vyskytly.

12 Znázornění tvaru oproti znázornění výsledku

V první i druhé úloze měly děti výchozí zadaný tvar strukturovat na jiný tvar podle zadaného požadavku. V první úloze měly strukturovat původní tvar na tvary jednotlivých n-tin a v druhé úloze měly strukturovat řadu čtverečků na 16/4.

Většina dětí se snažila nějakým způsobem strukturovat původní tvar na tvar žádaný v úloze. Některé děti strukturovaly tvar přímo bez jakéhokoliv výpočtu, jak tomu bylo například v případě způsobu řešení „Tvarová strukturace“ z první úlohy nebo způsobu „Zobrazení čtvrtin jako rozdělení čtverce na čtyři části“ v druhé úloze. Jiné si před vytvořením struktury pomáhaly výpočtem, aby lépe viděly požadovaný vztah. Jedná se například o způsob řešení „Početní strukturace“ z první úlohy nebo postup „Zobrazení 4 celků se čtverečkem jako ¼“ z druhé úlohy.

Vyskytly se děti, které zadání úlohy neviděly jako strukturaci zadaného tvaru, ale pouze znázorňovaly výsledek výpočtu. V první úloze to byl případ postupu „A/B z C je D“, kde dítě nestrukturovalo zadaný tvar na n-tiny, ale přímo si vypočítalo velikost části z celku, která byla dána zlomkem A/B. Výsledek operátorového výpočtu A/B z C poté znázornilo příslušným počtem prvků (2/9 z 18 jsou 4, proto zakroužkuji 4 tečky).

V druhé úloze to byl způsob „16/4 jako 4 čtverečky“, ve kterém Matěj znázorňoval pouze výsledek aritmetické úpravy (16/4=4/1).

Matěj byl typickým reprezentantem, který netvořil strukturaci, ale znázorňoval výsledek aritmetického výpočtu. V první úloze používal postup „A/B z C je D“ u všech podúloh první úlohy a v druhé úloze využíval postupu „16/4 jako 4 čtverečky“.

13 Úloha s čokoládami

Ve třetí úloze děti rovným dílem rozdělovaly čtyři čokolády mezi šest dětí, přičemž jim pomáhaly předtištěné čtyři obdélníky rozdělené mřížkou na šest stejných částí.

13.1 Rozdělování

Všechny děti určily správně, že každé dítě dostane čtyři obdélníčky a všechny děti využily předtištěné rozčleněné čokolády, a to dvěma způsoby. Při prvním způsobu si spočítaly počet dílů (sloupce nebo jednotlivé obdélníčky), ty následně vydělily šesti (dětmi) a vyšlo jim, kolik dílů dostane jedno dítě. Některé děti použily výsledek ke strukturaci zadaného tvaru (podobně „Početní strukturace“ z první úlohy). Jiné výsledek znázornily vybarvením čtyř obdélníčků nebo řekly, že každé dítě dostane čtyři čtverečky. Tvar tedy nestrukturovaly, pouze znázornily nebo řekly výsledek aritmetického výpočtu (podobně „16/4 jako 4 čtverečky“ ve druhé úloze) .

Druhým způsobem využití zadaného tvaru bylo jeho rozdělování na šest stejných částí, aniž by děti něco počítaly (podobně „Tvarová strukturace“ z první úlohy). Děti buď odhadly, jak velká bude část, a pak ověřily, zda vyšlo šest stejných částí nebo zkoušely tak dlouho velikost části, až jim vyšlo šest stejných částí zahrnujících všechny díly. Tyto děti tak strukturovaly tvar na šest částí.

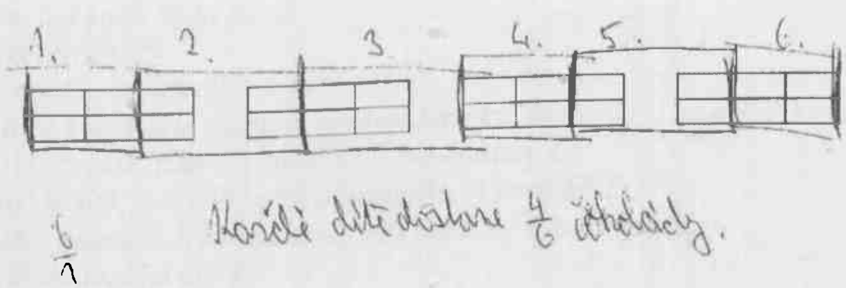
Příklad 49
(7. třída, Jakub, 3)

D: No. Protože 6 dětí má tyhle čokolády k rozdělení a každý dítě má dostat stejně. Jakým způsobem to mohou rozdělit. To vlastně je po 4 malých čtverečkách. Takže jedno dítě, dvě děti, tři děti, čtyři děti, pět dětí, šest dětí (ukazuje postupně po čtyřech kouskách).
J: To jo. S tím souhlasím. A jak jsi to spočítal. Tys to jenom odhadl, kolik čtverečků by to mohlo být, a vyzkoušels to?
D: Ne. Já jsem to nejdřív vyzkoušel na dvou. To se mi tam nevešlo. Tak jsem to vyzkoušel na třech a taky ne, tak jsem ....
J: Tak jsi to zkusil na čtyřech, že?
D: No.

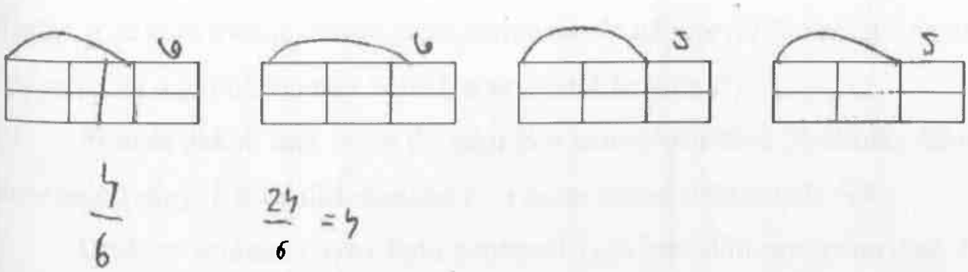
Jakub vytvoří strukturaci pomocí zkoušení. Nezjišťuje velikost dílu, který připadne jednomu dítěti pomocí výpočtu, ale zkouší tak dlouho, dokud nedostane šest stejných částí, do kterých budou zahrnuty všechny prvky.

Strategie řešení ve třetí úloze tedy můžeme rozdělit na strukturace a znázorňování výsledku aritmetického výpočtu a ve shodě s první úlohou můžeme vyčlenit dva typy strukturace: tvarovou a početní. Následující obrázky ukazují dva způsoby strukturace, které se při řešení úlohy objevily (viz obr. 25 a obr. 26) a znázornění výsledku po vydělení (obr. 27). Znázornění na obrázku 25 vytvořilo dítě pomocí tvarové strukturace (jiné děti ale vytvořily stejnou strukturaci na základě početní strukturace). Znázornění na obrázku 26 bylo vytvořeno na základě početní strukturace, ale čára uprostřed první čokolády ukazuje, že dítě nejprve zkoušelo strukturaci jinou, možná tvarovou.

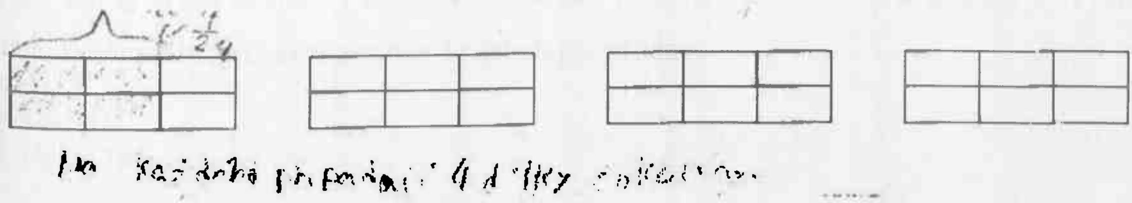
obr. 25



obr. 26



obr. 27



13.2 Vyjádření dílu zlomkem

Jestliže to dítě samo neřeklo, tázala jsem se ho na zlomkové vyjádření dílu, které dostane jedno dítě. Dítě tedy mělo vyjádřit určitou část z celku zlomkem. Oproti tomu v první úloze se jednalo o obrácený proces, kdy dítě vyznačovalo část, kterou reprezentuje daný zlomek.

Jen čtyři děti samy vyjádřily množství, které dostane jedno dítě, zlomkem (dvě ze sedmé a dvě z osmé třídy), aniž bych se jich tázala. Většina ostatních neměla problém po dotázání zlomek určit. Ve stejném množství děti uváděly zlomek 4/6 a 4/24 (v osmé třídě převažoval zlomek 4/24). Když jsem se zeptala, zda by výsledek šel vyjádřit i jinak, pouze jedno dítě dokázalo samo říct i druhou variantu. Ostatní jsem přímo upozornila, že chci zlomek z jiného celku. Poté ve většině případů neměly problémy odpovědět.

Zaznamenala jsem tři druhy chyby či problémů při vyjadřování dílu zlomkem. První chybné vyjádření nastalo, když dítě označilo **díl** pro jedno dítě **jako** ¼.

Příklad 50
(7. třída, Jakub, 3)

J: Dobře. A když říkáš, že to dítě dostane tady ty 4 čtverečky. Tak kdybys to měl vyjádřit zlomkem, tak kolik by to bylo?
D: Jednu čtvrtinu?
J: Proč myslíš, že je to ¼?
D: Protože každý dítě dostane ty ***čtyři kousky, takže*** *¼. .....mám to rozdělit na* ***čtvrtiny*** *nebo šestiny, čtyři, šest (říká si pro sebe)....***6/4** *myslím, že.*
J: Myslíš, že 6/4, jo? Tak já to tady napíšu. A proč 6/4?
D: Protože máme 6 dětí a každý to dítě dostane 4 malý kousky.
J: Tak jo. Můžem na čtyřku.

Jakub určí díl pro jedno dítě jako ¼, protože díl obsahuje čtyři obdélníčky. Jedná se vlastně o stejnou úvahu, kterou jsem zaznamenala už u první úlohy „n-tina obsahuje n prvků". Zde se jedná o její obrácenou verzi („n prvků takže n-tina").

Protože Jakub určí jeden díl jako ¼ a bere předtištěné obdélníky jako celek, rozděluje útvar na čtvrtiny. Každé dítě dostane ¼, a proto máme dohromady 6/4.

Druhým druhem chyby bylo nepřesné vyjádření dílu pro jedno dítě. Jsou to *„tři čtvrtě tý čokolády, 4 tyhle čtverečky ... opticky to tak vypadá"* je výrok Pavla, který ukazuje používání určitých zlomků v běžném životě pro vyjádření množství (viz příklad 1). Problém s vyjádřením dílu zlomkem ukazuje i následující příklad.

Příklad 51
(8. třída, Tomáš,3)

J: No tys říkal, že tyhle čtyři čtverečky dostane jedno dítě. Tak mi tohle množství (vyčmárávám 4 čtverečky) vyjádři zlomkem. Máš vybarvený tohle množství a tohle ne. A to vybarvený máš vyjádřit zlomkem.
D: To je ¼ ***ze šesti čtvrtin*** *... Jó.* ***1/6.***
J: 1/6 to za určitých okolností být může a ještě jinak?
D: No 1/6 furt.
J: A kdybys to měl vyjádřit tady z tohohle (ukazuji 1 čokoládu). Představ si, že máš šest čtverečků a z toho 4 vybarvený. A učitelka se tě zeptá kolik je vybarvených čtverečků z jedné čokolády?
D: ***polovina a ještě ten jeden čtvereček.***
J: No a kolik to teda je?
D: Takže to je ***tři čtvrtě?*** *.....en......*
J: A když jste dělali to, že jste měli koláče a část koláče byla vybarvená, třeba tahle, a měl si určit, jaká část koláče je vybarvená (maluji kruh rozdělený na čtvrtiny a s vyznačenou ¼).
D: No to je ¼.
J: Jo.
D: tohle celý jsou 4/4 a to vybarvený je ¼.
J: No na koláču to umíš, a tak mi to udělej na té čokoládě.
D: Jo aha, tak to jsou 4/6.

Tomáš nejprve dělá chybu, kterou jsme viděli už u Jakuba. Díl vidí jako ¼, a protože je dílů šest, označuje rozdělení tvaru jako na 6/4. Poté opraví interpretaci strukturace celku. Správně určí, že celek má rozdělený na 6/6 a ne na 6/4, a proto jeden díl je 1/6.

Když se ptám po jiném vyjádření na základě změny celku, vyjadřuje množství nepřesně pomocí poloviny a jednoho čtverečku nebo pomocí „třičtvrtě" stejně jako Pavel. Až na základě mnou prezentované analogie s koláčem dokáže najít požadovaný výsledek. Z toho vidíme, že v případě označení dílu jako 1/6 Tomáš pravděpodobně nevyjadřoval vztah části k celku (4 čtverečky ke 24 čtverečkům), ale pojmenovával vzniklou šestidílnou strukturaci (dostal 6/4 nebo 6/6).

Třetí druh chyby souvisí s otázkou po vyjádření dílu zlomkem ve vztahu ke všem čtyřem čokoládám (celek jsou všechny čtyři čokolády). Dvě děti pochopily otázku tak, že mají vyjádřit zlomkem, kolik budou mít všechny děti dohromady. Děti se tedy snažily sečíst díly všech dětí, a proto 4/6 násobily šesti. Jednomu dítěti vyšlo 24/6, protože násobilo správně. Druhému vyšlo 12/18, protože místo násobení dítě zlomek 2/3 rozšířilo šesti.

Příklad 52
(7. třída, Kamil, 3)

J: A kdybys měl vyjádřit zlomkem, kolik dostane ze všech čokolád? Kolik by to bylo?
D: Jako každej, nebo kolik jich je tam?
J: Každej. Když tys řekl, že každé dítě dostane 4/6 a řekl jsi, že je to z té čokolády...
D: A kdyby to bylo ze všech?
J: Jo. A kdyby to bylo ze všech, tak kolik by dostal?
D: Tak to by bylo dvacet čtyři...šestin. Protože každej dostane ty čtyři a je jich šest. Tím pádem 24.

Z rozhovoru je patrné, jak jsem myslela, že Kamil ví, co po něm chci, ale on si moje otázky vysvětlil jako součet dílů jednotlivých dětí.

13.3 Shrnutí úlohy s čokoládami

Třetí úloha byla pro děti velmi jednoduchá. Všechny děti správně určily množství obdélníčků náležící jednomu dítěti. Shrňme si výše popsané postupy řešení.

tabulka 4

strategie			7. třída	8. třída	Σ
strukturuje na 6 částí	strukturace tvarem	odhad nebo vidí velikost dílu	2	1	3
		zkoušení	1	0	1
	strukturace výpočtem		3	1	4
znázorňuje výsledek			3	0	3
řekne výsledek výpočtu			2	4	6

V osmé třídě převládá aritmetické řešení úlohy s jednoduchým vyslovením počtu obdélníčků, které dostane jedno dítě. V sedmé třídě také převažuje aritmetické řešení úlohy, ale děti se pokoušejí o nějaké znázornění, ať už se jedná o čisté znázornění výsledku nebo o strukturaci výpočtem.

Proč byla úloha jednoduchá? Pro děti byla velkou pomocí šestidílná mřížka v každém obdélníku, který znázorňoval čokoládu. Děti snadno spočítaly množství dílků (prvků) a rozdělily je mezi šest dětí. Předpokládám, že by bylo složitější, kdyby se úloha zadala bez pomocného obrázku nebo jen se čtyřmi obdélníky značícími čokolády, ale bez rozdělení na šest částí. I když by dítě možná snadno rozdělilo čtyři čokolády na šest stejných částí, přinejmenším by mohlo být obtížnější vyjádřit díl pro jedno dítě zlomkem.

14 Úloha se závody: jednoduchý operátor

Čtvrtá úloha byla velmi jednoduchá. Až na jeden případ ji všechny děti vypočítaly správně. Navíc nešlo o bezmyšlenkovitý operátorový výpočet, naučený ve škole pro určitý typ úlohy. Až na ojedinělé výjimky neměly problémy s popisem toho, co dělají. Správně vystihovaly vztah mezi postupem a zjištěními. Mám dojem, že zlomek jako operátor jim nedělá problémy. Možná proto, že se ve škole nejvíc procvičuje.

Většina dětí (všechny kromě jednoho dítěte ze sedmé a jednoho dítěte z osmé třídy) nejprve zjistila velikost 2/3, zjistila počet vyhraných závodů, a na základě něho určovala počet prohraných závodů. Nejčastěji odečtením vyhraných závodů od celkového počtu závodů, ale i vydělením vyhraných závodů dvěma (10÷2) nebo doplněním vyhraných závodů do celkového počtu závodů (10 a kolik je 15).

Dvě děti hledaly rovnou 1/3 z 15 závodů, protože využily dichotomického vztahu mezi prohranými a vyhranými závody. Jestliže 2/3 vyhrála, musela prohrát 1/3, aby počet závodů, kterých se účastnila by 3/3.

Příklad 53
(7. třída, Kristýna, 4)

D: (Čte nahlas zadání). Takže jich prohrála pět?
J: Ehm. A jak jsi na to přišla?
D: Protože se jich zúčastnila 15ti a patnáct, to jsou ty 3/3, protože to je jeden celek. Mínus, protože vlastně jedna 1/3 je 5, takže .....
J: Jo dobře. Jasně. Tak jo.

Kristýna ví, že 15 závodů je celek, že jsou to 3/3. Jestliže 2/3 vyhrála, tak 3/3 mínus 2/3 prohrála a 1/3 z 15 je 5. Je zajímavé, že „jednodušším" (co do počtu kroků) způsobem řešilo příklad tak málo dětí.

Děti z osmé třídy se od dětí ze sedmé třídy lišily větší automatičností výpočtu. Většina uváděla rovnou velikost 2/3 bez mezivýsledku. Věděli ale, že udává velikost 1/3. Oproti tomu děti ze sedmé třídy ve větší míře řešily úlohu postupně. Tedy nejprve hledaly velikost jedné části, kterou poté vynásobily dvěma.

Příklad 54
(7. třída, Lukáš, 4)

D: (chvíli se dívá na zadání a hned začne psát postup: 15:3=5, 5.2=10, 15-10=5, viz papír), Když se Katka zúčastnila 15 závodů a 2/3 jich vyhrála, takže 15 děleno 3, to jsou ty třetiny, to je pět, 5 krát 2 je 10, protože jsou dvě, takže 10 jich vyhrála, a když jich bylo 15, takže 15 mínus 10 je 5.
J: Jo, dobře.

Příklad 55
(8. třída, Pavel, 4)

D: No vyhrála 10 závodů.
J: Vyhrála nebo prohrála, já jsem to dobře neslyšela.
D: No vyhrála.
J: Vyhrála 10 závodů. Jo dobře. A jak jsi to počítal?
D: 15 a má to bejt 2/3 vyhrála, takže 15 :3 .2 = 10.

Počítání Lukáše ze sedmé třídy je příkladem postupnějšího a podrobnějšího výpočtu, kdežto Pavel z osmé třídy reprezentuje rychlejší postup.

Kromě chyb z nepozornosti, kdy děti zaměňovaly vyhrané závody za prohrané, se objevily pouze tři chyby. V případě první chyby dítě vyřešilo úlohu dobře a použilo správný myšlenkový postup, ale provedlo **špatný zápis řešení**. Dítě počítalo 2/3 z 15 a jeho myšlenkový postup byl správný: 15÷3=5 a 5×2=10. Zapsalo však 15:2/3=10. Neuvědomilo si, že při takovém zápisu dělí číslo 15 jednou třetinou a ne třemi.

Ve druhém případě dítě správně vypočítalo počet prohraných závodů, ale situaci vidělo jako **rozdělení 15 závodů na tři celky**, přičemž dva celky značí vyhrané závody a jeden celek prohrané závody. Zde dítě zaměnilo pojem celek a část. Zda jde o pouhé přeřeknutí, nepřesné sémantické vyjádření nebo o koncepční špatnou interpretaci situace v tomto případě nelze určit. Dítě výrazem celek mohlo myslet n-tinu nebo část. Jak už jsme viděli, názvosloví v oblasti zlomků není jednoznačně určeno. Například slovo část může mít několik významů a záleží na kontextu. I ve zde popisované chybě může dítě koncepčně správně uvažovat a pouze zvolit nevhodný výraz. Zvláště když je výsledek správný.

Třetí chyba pramenila ze špatného postupu při výpočtu části dané 2/3. Dítě zjistilo velikost **2/3 vynásobením čitatele a jmenovatele** mezi sebou. Výsledek šest, pak už správně zasadilo do vztahu k celkovému počtu závodů, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 56
(7. třída, Jakub, 4)

D: (Čte si pro sebe zadání.). Takže dvě třetiny, to je šest závodů vyhrála a devět jich prohrála.
J: Jak jsi to říkal?
D: No, že Katka se zúčastnila 15 závodů v plavání a z nich dvě třetiny vyhrála, takže si to musíme převést nějak na celý čísla, takže dvakrát tři je šest, šest závodů vyhrála.
J: Tak to tam napiš, jo?
D: Takže šest (píše, viz papír první řádek) rovná se závodů vyhrála. A 15 závodů měla jako celejch (píše, viz papír druhý řádek) a těch 15 mínus šest to se rovná, takže vlastně 9 závodů prohrála. A tady se ptají kolik prohrála. Takže Katka jich prohrála 9 těch závodů. Mám tam napsat odpověď?

Jakub nemá problémy rozpoznat vztahy dané ve slovní úloze. Ví, že 2/3 značí vyhrané závody, a že prohrané závody zjistí odečtením vyhraných závodů od celkového počtu závodů.

Jeho problém je ve vnímání vztahu mezi zlomkem a celkem. Nevidí, že velikost zlomku se mění ve vztahu k zadanému celku. Jakub vlastně zlomek vnímá jako absolutní neměnné číslo. 2/3 budou vždy stejně velké. Stejný způsob zjištění velikosti části z celku určené zlomkem používal Jakub i v první úloze.

15 Úloha s kuličkami: aditivní a multiplikativní vztah

V této úloze mají děti za úkol rozdělit 42 kuliček mezi Jirku a Martina tak, aby Jirka měl o 1/3 kuliček víc než Martin. Z důvodů, které byly popsány již výše (kapitola 5.3.2), byly po výpočtu úlohy dětem předkládány čtyři pozměněné verze původní úlohy.

V této kapitole se nejprve podíváme na strategie řešení původní úlohy, které jsou roztříděné na základě analýzy řešení jednotlivých dětí do několika skupin. Poté ukážu, jakým způsobem byly řešeny pozměněné verze v závislosti na řešení původní úlohy.

15.1 Postupy a úvahy při řešení původní úlohy

Postupy, kterými byla řešena úloha s kuličkami, jsem rozdělila do tří hlavních skupin.

15.1.1 Celkové množství na třetiny

První skupinu jsem nazvala „Celkové množství na třetiny“. Byl to nejčastější způsob řešení. Děti celkové množství rozdělily na třetiny. Jirkovi daly 2/3 a Martinovi 1/3. Jirka měl tedy o 1/3 víc. Celkové množství kuliček, bylo vyděleno třemi a množství kuliček v 1/3 tak vyšlo 14. Zajímavé bylo, že děti si nejčastěji nejprve vypočítaly 1/3 a poté ji odčítaly od celkového množství kuliček (42–14=28). Takže Jirka dostal 28 kuliček. Proč si rovnou nevypočítaly 2/3 ze 42?

Do této skupiny jsem zařadila i postup, při kterém dítě také vychází z rozdělení celkového počtu kuliček na třetiny, ale 1/3 ke 42 přičte, místo aby ji odečetlo. Vyjde mu tedy, že Jirka má 56 kuliček (42+14=56). Přitom dítě ví, že Martinovi chce dát 1/3 a Jirkovi 2/3. Tato chyba byla poměrně častá (4 výskyty). Proč děti 14 kuliček přičtou? Možná proto, že slovní spojení „o něco víc“ většinou znamená ve slovních úlohách přičtení. Jirka má mít „o 1/3 víc“, a proto 1/3 přičtu.

Příklad 57
(8. třída, Pavel, 5)

D: ....Takže těch 42 musíme rozdělit na tři části a vo jednu část má víc ten Martin. Takže 42 děleno 3. To nejde. Ne, de vlastně. Takže 14. ....Takže Jirka má....56 kuliček....A přišel jsem na to tak, že 42 jsem vydělil 3. To je 14 a Jirka má mít o 1/3 víc takže. 42 plus 14 je 56.

Pavel rozděluje 42 na tři části a Jirkovi přisuzuje o jednu část víc (Říká „Martin“, protože se pouze přeřekl. Dál už mluví o Jirkovi.) V průběhu výpočtu ale neudrží myšlenku, že chtěl rozdělovat tři části, a vypočítanou část přičítá k celkovému počtu kuliček, protože „o 1/3 víc“, „o jednu část víc“, a to znamená přičítání.

15.1.2 Na počátku má každý 21

Druhou skupinu jsem nazvala „Na počátku má každý 21“. Při tomto postupu děti nejprve rozdělí celkové množství kuliček na dvě poloviny. Jednu polovinu dostane Jirka a druhou Martin. Oba tedy mají na počátku stejně. Výchozí počet každého z nich se pak upravuje tak, aby Jirka měl o 1/3 víc.

Objevily se čtyři typy úprav rozdělení na polovinu v závislosti na tom, z čeho se počítala 1/3. V prvním případě dítě vypočítalo **1/3 z celkového množství kuliček**. 1/3 ze 42 obsahuje 14 kuliček, a protože Jirka má o 1/3 víc, dítě přičetlo 14 kuliček k Jirkovým počátečním 21 kuličkám. Jirka tedy dostal 35 kuliček. Zároveň dítě buď ještě odečetlo 1/3 od Martinových 21 kuliček (21-14=7) a nebo určilo počet Martinových kuliček odečtením Jirkova počtu kuliček od celkového množství (42-35=7).

Proč dělají děti tuto chybu? Balancují mezi aditivním a multiplikativním vztahem v zadání úlohy. Mezi typem příkladu „dělení na nestejné části“ s aditivním vztahem (viz výše, kapitola 4) a operátorovým výpočtem A/B z C.

Příklad 58
(7. třída, Matěj, 5)

D: (píše 42:3=14 - přemýšlí)
J: Tak co?
D: No tady jsem si vydělil, že jich mají dohromady 42 a Jirka jich má o 1/3 více, tak jsem si to vydělil třemi, to je 14, a pak když jsou dva, tak jsem si tohle (ukazuje propiskou na 42) vydělil jako dvouma, a vydělil jsem si to na ty dvě poloviny, takže mi vyšlo 21.
J: Tak si to tam napiš
D: (píše 21) a tady je ještě napsáno, že Jirka jich má o 1/3 více, tak to 21 plus 14, což je 35 a ten zbytek má Martin.

Matěj se nejprve v zadání zaměří na multiplikativní vztah (na 1/3 z) a vypočítá velikost 1/3 ze 42 kuliček. Pak si uvědomí, že se jedná o dvě množství, které je potřeba rozdělit tak, aby v jednom množství bylo o 1/3 víc. Pravděpodobně ho ovlivní způsob řešení úloh „dělení na nestejné části“, kde algoritmus výpočtu říká: „Extra část, o kterou má být v jednom množství víc, odečti od celkového množství, výsledek rozděl na dvě poloviny a k jedné přičti extra část“. Matěj postup dříve učeného algoritmu otočí nebo se jím vůbec neřídí. Balancování mezi dvěma množstvími, mezi kterými je vztah „o něco víc“, řeší rozdělením původního množství na polovinu a přidání „o vypočítanou třetinu víc“ k jednomu množství. Ve druhém množství je pak zbytek kuliček.

Příklad 59
(8. třída, Tomáš, 5)

D: Takže dohromady mají 42 kuliček a jsou dva, takže aby to bylo půl, tak to rozdělím napůl, což je 21, takže ½ z těch 42 (píše ½ z 42) je vlastně 21 (píše = 21) a teď Jirka má o 1/3 víc než Martin, o 1/3 z toho, takže ten Jirka jich má vlastně o 14 víc než ten Martin.
J: A proč o 14?
D: No myslím si, že 1/3 z těch 42 (píše si to) mi připadá 14. Takže ten Jirka vlastně má 35 kuliček.
J: Aha. A kolik má Martin?
D: Ten má sedm...To je trochu nefér...to je blbost......nebo leda, že by to bylo tak, že by to byla 1/3, ale z tý poloviny.

Tomáš používá stejný typ myšlenkového postupu jako Matěj, pouze na rozdíl od Matěje začíná rozdělováním kuliček na polovinu, a pak teprve hledá z čeho by vypočítal 1/3. Stejně jako Matěj vychází ze dvou stejných množství, které se snaží přeskupit tak, aby Jirka měl o 1/3 víc. Jednu třetinu, o kterou má mít Jirka víc, počítá nejprve ze 42 kuliček. Výsledek se mu ale nezdá. Ví, že by se obě množství i po přeskupení, měla pohybovat někde kolem původních velikostí. Proto hledá jiné množství, ze kterého by 1/3 vypočítal.

Narozdíl od strategie řešení „Celkové množství na třetiny“ Tomáš a Matěj nerozdělují celek na třetiny tak, aby Jirka měl 2/3 a Martin 1/3, ale počítají třetinu pomocí operátorového výpočtu 1/3 ze 42. Hledají množství, ze kterého by vypočítaly 1/3. Hledají velikost 1/3, kterou by dosadili do vztahu „o 1/3 víc“.

Závěr ukázky Tomášových úvah naznačuje druhý typ hledání velikosti 1/3. Jde o případ, kdy dítě **1/3 zjišťuje z 21**, z poloviny, kterou má Martin.

Příklad 60
(7. třída, Cyril, 5)

D: Protože mají dohromady 24 kuliček, teda 42. A kdybych jako nevěděl tohle to, tak to rozdělím na půlky a každej má 21, ale pak se dozvím, že Jirka má o 1/3 více, tak si z těch 21/1, teda z těch 21 udělám kolik je 1/3, a to pak přičtu k těm 21.

Může se jednat o výpočet 1/3 z množství, které je po ruce, jak jsme viděli v předchozím příkladu u Tomáše, a následné dosazení vypočítaného množství do vztahu „o 1/3 víc než“. Cyrilův postup může ale také ukazovat uchopení klíčového vztahu obsaženého v úloze s kuličkami. Uchopení danosti, že pro zjištění velikosti 1/3, o kterou má Jirka víc, je určující Martinovo množství kuliček. Dítě by si při úvahách mohlo říct: „Jirka má o 1/3 víc než Martin. Martin tedy bude mít nějaké množství, z toho množství, když udělám 1/3, tak o ten počet bude mít Jirka víc...“ Protože dítě nevidí jiné množství Martinových kuliček než polovinu z 42, počítá 1/3 z 21. Nenašla jsem však žádný důkaz, že by si Cyril klíčovou roli Martina uvědomoval.

Při třetím způsobu řešení ze skupiny „Na počátku má každý 21" přičte dítě k Jirkovým 21 kuličkám samotnou 1/3. Počítá tedy: polovina ze 42 plus 1/3.

Příklad 61
(8. třída, Martina, 5)

D: A šlo by to udělat, že bych si těch 42 rozdělila na polovinu? To by mi vyšlo 21 kuliček. A z tý jedny 21, to by měl jako Jirka a Martin, z tý jedny bych jako udělala 21 jednin mínus jedna třetina. A Jirka jich má víc, takže bych od Martina odečetla tu 1/3 a přičetla bych ji tomu Jirkovi.
J: A jak bys zjistila, co je ta 1/3. Jak bys zjistila, kolik máš odečítat, jak říkáš?
D: .....
J: Nebo tys chtěla počítat 21 mínus 1/3 rovná se?
D: Jo.
J: Tak zkus jestli by ti to vyšlo. Jak bys to počítala.
D: No musela bych si to převést taky na třetiny. Takže 21krát 3. (počítá viz papír: 21/1-1/3=62/3). Takže by to bylo 62/3.

Martina opět vychází ze dvou stejných množství, které „přelévá" tak, aby Jirka měl o 1/3 víc. Tentokrát nehledá počet kuliček v jedné třetině, nevnímá 1/3 jako určující vztah k nějakému celku, ale bere **1/3 jako číslo**. Vidí tedy ve výroku „o 1/3 víc než" pouze aditivní vztah „o nějaké číslo víc než".

Při čtvrtém způsobu hledání 1/3 narazíme na Jakubovo vnímání **zlomku jako absolutního celého čísla**, které jsem popsala u úlohy se závody. Jakub najde velikost 1/3 vynásobením čitatele a jmenovatele mezi sebou. 1/3 jsou pro něho 3 kuličky, které přičte k Jirkovým 21 kuličkám a od Martinových je odečte. Jakubovi tak vyšel správný výsledek 24 kuliček pro Jirku a 18 pro Martina.

15.1.3 Ověřování tipnutého rozdělení

Pouze jedno dítě dokázalo správnou představou vypočítat požadovaný výsledek 24 kuliček pro Jirku a 18 pro Martina, a to ještě s mou pomocí. Musela jsem dítěti pomáhat ujasňovat jeho představy a držet je správným směrem. Jedná se o zajímavý postup řešení, a proto si ho uveďme celý.

Příklad 62
(7. třída, Kamil, 5)

J: No a teď mi zkus číst to zadání a říct mi, co ta úloha říká.
D: No, že Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. A Jirka jich má o 1/3 víc než Martin.
J: Ehm. Takže to znamená, že se tam říká, že Jirka má těch kuliček o 1/3 víc než Martin.
D: No o 1/3?
J: O jednu třetinu čeho?

*D: No **toho co má Jirka**.*
J: Než Jirka?
*D: **Než Martin vlastně**.*
J: Než Martin. No. Dobře. Takže vlastně Jirka má o 1/3 víc než má Martin.
D: No.
J: Takže co teď budeš počítat?
*D: No musím **zjistit, kolik má Martin** a potom to **vydělit třema** a potom to **odečíst** tu jednu třetinu a potom to jakoby **přičíst** k Jirkovi.*
J: A proč vydělit třema, to co má Martin?
D: Protože to je potom ta třetina.
*J: Ehm. A jak to rozpočítáš, **kolik má Martin**.*
*D: No **21 a 21**.*
J: Jak 21, jako že to rozpůlíš?
*D: **Ne, to by asi nešlo**. Nebo šlo? Ne. Dohromady jich mají 42......em......Ne. Jo. Že by 17 a 24?... tři....to zase nevyjde....nemá to desetinný číslo?*
J: Ne. Vyjde to.
*D:. **24 to by pak bylo vo 8**..... To teď ani nevím, jak to bude....*
J: Zkoušíš čísla, jo?
D: Ne, já vůbec nevím, já jsem teď úplně zmatenej z toho. To mě dostalo.
J: :-) Z čeho přesně seš zmatenej?
D: Nevím z čeho to mám vypočítat.
J: Jako tu jednu třetinu?
D: Ne, já nevím, kolik má ani jeden, to mě prostě nenapadne.
J: Jo. Aha.
*D: Em...Každopádně to **musí být dělitelný třema**, že jo. Já jsem myslel, že by to mohlo být **24** jenže....24 a 18?*
J: No, tak to zkus.
*D: No protože **24 děleno třema je osm** a osm, to je zase šest. To je divný. A když dám 17, tak to je o 7, jo. Tím pádem 16. Ne. Tak to nevím teda.*
J: No a tys nejdřív používal 24 a pak 17 nebo 18?
D: No 18 třeba ....
J: A proč 24 a 18, proč jsi nezkoušel nějaký jiný číslo.
D: Protože to musí být dohromady těch 42.
J: Jo.
*D: Protože pak by to muselo být 25 a to už není dělitelný třema. nebo 27, to je možný, ale to by pak muselo být 15. No to by nevyšlo. Tím pádem **jediný co by šlo je 24**, ale to je ...*
J: Hm. Takže ty zkoušíš dvě čísla, aby dávaly dohromady 42 a aby to jedno číslo bylo dělitelný třema?
D: No musí být dělitelný třema.
J: Takže když zkusíme, to jak jsi říkal 24 a 18, co na tom nevychází, proč jsi to zavrhl?
*D: No to **24 vydělím třema, to je 8, a to musí být k tomu 18, ne? Jako těch 8**.*
J: Osm? A to musí být kam?
D: No k tomu 18, ne?
J: No.
D: No a to není. To by muselo být 26 a to by taky nevyšlo.
J: A kdyby sis to zkusil napsat, těch 24 a 18?
D: (píše)
J: A který číslo bys přiřadil Jirkovi a který Martinovi?
D: Jirka (ukazuje na 24) a Martin (ukazuje na 18)
J: Tak tam napiš J a M.

D: (píše)
J: No. A teďka dělals co?
D: 24 děleno 3.
J: A vyšlo ti ..?
D: 8.
J: No, a když se podíváš na to zadání, tak tady je napsaný, že Jirka má o jednu třetinu víc než Martin a tys říkal, že je to z počtu kuliček, které má Martin....
D: No, z těch 18.
J: A proč teď děláš tu 1/3 z těch 24?
D: A jo. ***Tím pádem má o šest víc. Tím pádem má....dvacet čtyři. Tak mi to vyšlo dobře.***
J: Tak ti to vyšlo, že jo?
D: No.
J: Protože tys hledal tu 1/3 z Jirky, ne? A máš hledat 1/3 z Martina.
D: No jasně. Takže je to 24 na 18.
J: A teď to vychází?
D: Jo.
J: Tak mi řekni, jak to vychází.
D: ***Že 18 děleno třema je 6. To je ta jedna třetina. A..No prostě je to rozdíl 6 mezi těma 24 a 18.***

S Kamilem si nejprve společně ujasňujeme, co úloha říká. Kamil zpočátku interpretuje úlohu jako „o 1/3 víc z toho, co má Jirka“, ale ujasníme si, že jde o 1/3 z Martinova počtu kuliček. Kamil chce vypočítanou 1/3 z Martinova množství Martinovi vzít a Jirkovi přidat. Tento postup však zavrhuje spolu se zavrhnutím počítání 1/3 z 21 kuliček (z poloviny ze 42).

Kamil ale z rozdělení množství kuliček na dvě půlky vychází. Vezme si nejbližší větší číslo dělitelné třemi (číslo 24) a zkouší, zda velikost vypočítané třetiny z toho čísla je shodná s rozdílem mezi tipnutým číslem a číslem, se kterým dává tipnuté číslo celkové množství kuliček.

Kamil při tipování výchozího čísla (čísla 24) neudrží poznatek, že má 1/3 hledat z Martinova množství, nebo spíše nepracuje s poznatkem, že má hledat 1/3 z menšího čísla. Proto vlastně v konečném důsledku počítá 1/3 z Jirkova množství, aniž by si toho byl vědom. Po upozornění však rychle chápe, v čem byl problém, a dokáže řešení dotáhnout ke správnému výsledku.

Výše popsaný postup, který vychází z tipnutí velikosti dvou množství a při kterém se pak ověřuje, zda mezi množstvími je požadovaný vztah, jsem nazvala „Ověřování tipnutého rozdělení“.

15.1.4 Shrnující tabulka pro původní úlohu s kuličkami

Shrňme si výše popsané postupy a jejich četnost v tabulce.

tabulka 5

strategie		7. třída	8. třída	∑
Celkové množství na třetiny	42:3=14, 42-14 = 28	8	4	12
	42:3=14, 42+14=56	3	1	4
Na počátku má každý 21	1/3 z celkového množství	2	2	4
	1/3 z poloviny počátečního množství	3	2	5
	1/3 jako číslo	0	1	1
	1/3 = 3	1	0	1
Ověřování tipnutého rozdělení		1	0	1

Z tabulky vidíme jak v sedmé třídě výrazně převažuje postup „Celkové množství na třetiny". V osmé třídě už volí děti postup „Celkové množství na třetiny" a „Na počátku má každý 21" ve stejné míře. Překvapující je, že jediný správný řešitel je ze sedmé třídy.

Viděli jsme, že úloha s kuličkami je pro děti obtížná. Nelze se tomu divit, když se s podobným typem úlohy ve škole setkávají až při probírání lineárních rovnic v osmé třídě (tyto děti z osmé třídy ještě lineární rovnice neprobíraly). Popsaná řešení můžeme shrnout prohlášením, že ve výroku „o 1/3 víc než", kromě jednoho případu, děti nevidí požadovanou strukturu vztahů. I když jsem se setkala s případy, kdy děti věděly, že na jejich vnímání úlohy něco nesedí, nevěděly, jak jinak příklad vyřešit.

Když popsaná řešení velmi zobecníme, můžeme říct, že si se smícháním aditivní struktury příkladu typu „dělení na nestejné části" a multiplikativní struktury (1/3 z něčeho) děti poradily dvojím způsobem. Buď rozdělily celkové množství kuliček na třetiny, Jirka dostal 2/3 a Martin 1/3, nebo řešily úlohu s kuličkami jako úlohu na „dělení na nestejné části" a do struktury „o x víc než" dosazovaly různá čísla podle způsobu výpočtu 1/3.

15.2 Řešení variant úlohy s kuličkami

15.2.1 Z Martinova množství (varianta 5A)

Pro všechny děti bylo ze zadání úlohy 5A[12] zřejmé, že 1/3 se má počítat z Martinova množství kuliček. Způsoby výpočtů se pak lišily podle toho, co děti jako Martinův počet kuliček vzaly.

Řada dětí vzala takové množství, které jim vyšlo jako Martinův počet kuliček při řešení původní úlohy a z tohoto množství chtěly počítat 1/3. Byly to ty děti, které při počítání původní úlohy dělily celek 42 na třetiny (42÷3=14, 14÷3). Vzhledem k tomu, že strategii

[12] Používám stejné označení variant úlohy s kuličkami, které jsem uvedla v kapitole 5.3.2 („Které příklady jsem zadala, proč..."). Ve variantě 5A je celkem, vůči němuž se určuje 1/3, Martinův počet kuliček, ve variantě 5B je tímto celkem celkové množství kuliček, ve variantě 5C Jirkovo množství kuliček a ve variantě 5D má Jirka víc o 1/3 kuličky.

„celkové množství na třetiny“ používaly v původní úloze nejvíce děti ze sedmé třídy, byly to ony, které při řešení úlohy 5A nejčastěji sahaly po 14 jako základu pro výpočet 1/3.

Nejčastějším řešením úlohy 5A v osmé třídě a druhým nejčastějším řešením v sedmé třídě bylo využití již výše popsaného způsobu „1/3 z poloviny počátečního množství“. Jako Martinovo množství při něm děti vzaly polovinu ze 42 kuliček, z ní počítaly 1/3 a tu přičetly k Martinovu množství. Jirka tak dostal 28 kuliček (21÷3=7, 21+7= 28). Ty, co používaly tuto strategii už v předchozí úloze, ji použily znovu. Pro ně mělo zadání původního příkladu a příkladu 5A stejný význam. Tento postup ale použily i ty děti, které původní příklad řešily způsobem „celkové množství na třetiny“.

Některé děti řešily příklad 5A znovu rozdělováním celkového počtu kuliček na třetiny. Rozpoznaly, že zadání zní jinak, ale nevěděly, jak jinak by se příklad dal počítat. Z čeho jiného než ze 42 počítat 1/3?

Podívejme se na kvantifikace[13] výskytů třech typů řešení úlohy 5A. Jejich vztahy k původní úloze jsem již ukázala v předchozím textu.

tabulka 6

5A	7. třída	8. třída	Σ
z M, ze 14, 14:3	5	1	6
z M, ze 21, 21:3	4	3	7
z 42, z čeho jiného 1/3?	2	1	3

15.2.2 Varianta 5B a 5C

Kromě dvou výjimek počítaly všechny děti úlohu **5B** rozdělením 42 kuliček na třetiny. 2/3 dostal Jirka a 1/3 Martin. Děti, které nepočítaly úlohu 5B tímto způsobem, zůstaly u svého dřívějšího postupu. Vypočítaly sice 1/3 ze 42 kuliček, ale výsledek přičetly k polovině z celkového počtu kuliček (jedno dítě bylo ze sedmé, jedno z osmé, třídy).

Úloha **5C** byla řešena stejnými způsoby, jako příklad 5A. Děti svoje strategie nezměnily. Pouze jako základ pro výpočet 1/3 braly Jirkovo množství (ať už to bylo 28 nebo 21) nebo celkové množství kuliček.

[13] V počtech uvedených v tabulce jsou zahrnuta pouze ta řešení dětí, u kterých můžu říct, že uvedeným způsobem počítaly. Některé děti pouze uvedly, že by 1/3 hledaly z Martinova množství, ale už nemám zachyceno, jakým způsobem by výpočet provedly (dítě buď nevědělo, nebo už jsem ho nechtěla „trápit“). V tabulce také není uvedeno řešení Kamila, pro kterého byl příklad stejný jako původní úloha (viz příklad 62). Počty v tabulce tedy opět nejsou počty dětí, ale počty vyskytlých se řešení.

15.2.3 Jak rozdělit kuličku? (Varianta 5D)

Jak rozdělit množství, aby měl Jirka o 1/3 kuličky víc? Nejvíce dětí nejprve rozdělilo kuličky na polovinu, a pak odečetlo 1/3 kuličky Martinovi a Jirkovi ji přičetlo. Jirka tedy měl 21 a 1/3 kuličky a Martin 20 a 2/3 kuličky. Děti vědí, že Jirka má mít pouze o jednu třetinu více než Martin, ale spokojí se s výsledkem, kde je rozdíl 2/3. Stejný princip byl velmi často používán i v předchozích řešeních páté úlohy. Jestliže se vyšlo z rozdělení kuliček na polovinu, zjištěná 1/3 se často jednomu chlapci přičetla a druhému odečetla. Tím vlastně dítě dosáhlo toho, že výsledný součet počtu kuliček obou chlapců zůstal 42, ale rozdíl už nebyl jen o 1/3.

Příklad 63
(7. třída, Cyril, 5)

D: No. Takže má o 1/3 víc té kuličky, jako že bych si ji rozdělil?
J: No, kdybys tu kuličku třeba rozdělil, tak jak by to potom bylo?
D: Že ten Jirka má prostě o kousek víc, než Martin.
J: No, a o kolik?
D: Ježišmarjá....
J: Jak by to vypadalo, kolik by měl teda kuliček?
D: No, von by měl kuliček....21 kuliček...plus tu jednu třetinu z tý kuličky a ten Martin by teda přišel o tu jednu třetinu.

Cyril rozděluje celkové množství kuliček na polovinu. K Jirkové půlce jednu třetinu kuličky přičte a od Martinové odečte. Popisuje však jen postup, jakým by úlohu řešil. Není vůbec jasné, zda by dokázal vyjádřit množství, které přidělil oběma chlapcům zlomkem.

Objevila se řešení, kdy děti Jirkovi přisoudily 21 kuliček a ještě 2/3 kuličky a Martinovi také 21 kuliček a 1/3 kuličky. Rozdělily 42 kuliček rovným dílem mezi chlapce, a pak na třetiny rozdělovaly ještě jednu kuličku navíc. Když zjistily, že po součtu dostanou o jednu kuličku víc, odebraly kuličku Martinovi. Jirkovi tak zůstalo 21 kuliček a 2/3 kuličky a Martin dostal 20 kuliček a 1/3 kuličky.

Dvě děti, přestože dobře věděly, že v zadání se mluví o jedné kuličce, počítaly úlohu 5D jako úlohu původní. Dělily celkový počet kuliček na třetiny.

Dalším řešením úlohy 5D bylo rozdělení jedné kuličky na tři části. Jirka dostal 2/3 kuličky a Martin 1/3 kuličky a všechny ostatní. Jirka tak vlastně dostal o 1/3 více z rozdělené kuličky. Není ale jasné, proč ostatní kuličky dostal Martina a ne Jirka.

Zvláštní bylo řešení, kdy Jirka dostal 21 kuliček a ½ kuličky a Martin 20 kuliček a ½ kuličky. Možná proto, že dítě chtělo naznačit, že každý dostane kousek z té rozdělené kuličky.

Pouze jedno dítě přišlo na správný výsledek samo a jedno s menší nápovědou. Každému chlapci přidělily 20,5 kuličky, a pak ještě přidaly 2/3 kuličky Jirkovi a 1/3 kuličky Martinovi.

tabulka 7

5C	7. třída	8. třída	Σ
J: 21 1/3 – M: 20 2/3	2	4	6
J: 21 2/3 – M: 21 1/3	2	2	4
Celkový počet kuliček na třetiny	1	1	2
J: 2/3 kuličky - M: 1/3kuličky a zbytek kuliček	0	1	1
J: 21 ½ – M: 20 ½	0	1	1
J: 20,5 2/3 - M: 20,5 1/3	1	1	2

15.2.4 Neúspěch s variantami úlohy s kuličkami

Varianty původní úlohy byly dětem předkládány také proto, aby se ukázalo, jestli přesnější zadání pomůže dětem ke správnému výpočtu úlohy. Předpokládala jsem totiž, že hlavní problém neúspěchu dětí při počítání této úlohy je nerozlišení, co je v úloze celkem. Chtěla jsem pozorovat, zda upozorňování na důležitost a relativnost celku a návodné otázky zdůrazňující Martina jako celek budou apelovat na pásmo nejbližšího vývoje dětí a posunou jejich uvažování směrem k požadovanému řešení úlohy s kuličkami. Nestalo se tak.

Rozhovory s dětmi sice ukázaly, že problémem původní úlohy opravdu je nepřesné určení celku. Děti se musí naučit cítit, že slovní spojení „o 1/3 víc než Martin“ znamená brát jako celek Martina. Nebo spíše brát jako základ pro operátorový výpočet „1/3 z“ Martinovo množství kuliček, a to především u dětí, které počítaly úlohu pomocí rozdělování celku na třetiny.

Ale nejasné určení celku v úloze nebyl jediný důvod, proč děti nedokázaly vypočítat úlohu požadovaným způsobem, jak jsme viděli u dětí, které počítaly 1/3 z 21 (poloviny z 42 kuliček) nebo 1/3 ze 14 (Martinův počet kuliček po rozdělení celkového množství na třetiny). U těchto dětí může být problém s představou počítání 1/3 z něčeho, co vlastně ještě není. Tyto děti asi potřebují konkrétní existující základ, ze kterého by 1/3 vypočítaly. Slovo „vypočítat“ používám záměrně. Děti asi potřebují nejprve „vypočítat 1/3“ a poté ji dosadit do struktury „o x více než“. Tím, že se tyto děti nejprve snaží vypočítat 1/3 a poté spolu s ní vytvářejí konečné Martinovo množství kuliček, popírají vlastně relativnost velikosti 1/3. Velikost prvně vypočítané 1/3 totiž není závislá na Martinově konečném množství kuliček. Kamil (viz příklad 62) se dokázal přenést za bariéru prvotní „neexistence“ základu pro výpočet 1/3 na počátku a pracovat s relativností velikosti 1/3. Dokázal vzít nějaké množství a teprve z něho zkoušet požadovaný vztah mezi Jirkovým a Martinovým množstvím.

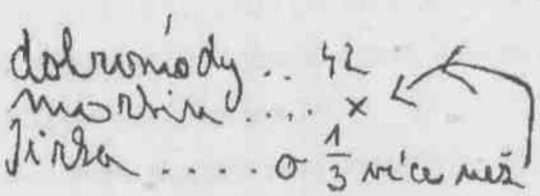
Dalším důvodem těžkostí v úloze s kličkami je, že některé děti mají problém vnímat jako 3/3 něco jiného než celkový počet kuliček. Dětem jsem se snažila pomoci upozorněním, že v úloze je celkem Martinovo množství kuliček. Ptala jsem se jich, kolik kuliček bude mít Jirka, když Martin má 3/3 kuliček. Odpovědí mi bylo zděšení, že Jirka by pak neměl nic. Taková odpověď nebyla překvapením u dětí, které celek 42 rozdělovaly na třetiny. Ty vnímají celkový počet kuliček jako celek. Takto ale reagovalo i dítě, které počítalo 1/3 z 21 kuliček a výsledek přičetlo k 21. Pravděpodobně se tady ukazuje, že počítat 1/3 z „něčeho" a vnímat to „něco" jako celek, jako 3/3, nejsou vždy propojené procesy a potvrzuje to teorii o snaze vypočítat 1/3 a dosadit ji do struktury „o x víc než".

Častost, se kterou děti rozdělují celkový počet kuliček na třetiny, může být dána tím, že děti vnímají zadané množství automaticky jako celek, jak tvrdí Tichá (viz výše, kapitola 4). Já si ale nemyslím, že u všech dětí jde o čisté automatické sáhnutí po nejbližším čísle pro operátorový výpočet. Setkala jsem se u dětí s pocitem, že výpočet není úplně v pořádku, že na něm něco nesedí, ale nevěděly, jak jinak 1/3 vypočítat. Děti u výpočtů přemýšlejí. Není to jen automatický operátorový výpočet. Navíc u dětí z osmé třídy už styl počítání „Celkové množství na třetiny" nepřevažuje.

Jak už jsem podotkla, předkládání variant úlohy s kuličkami nemělo předpokládaný efekt. Kamil úlohu správně spočítal ještě před prezentováním variant. Pouze u jednoho dítěte z osmé třídy můžeme mluvit o malém posunu po předložení variant úlohy s kuličkami.

Příklad 64
(8. třída, Anna, 5)

obr. 28



J: Tady když jsi mi počítala tohle (ukazuji na zápis), vy jste se učili počítat nějaké rovnice?
D: Tohle jsme dělali ještě na prvním stupni. Tohle je špatně. Já bych tam měla mít, než ten Martin. Tohle má být výš (dohromady) a tady má být Martin (dopisuje: Martin...x) a tady ta šipka má jít k Martinovi (opravuje směr šipky, která původně mířila k „dohromady...42", aby směřovala k „Martin...x"). Protože to je o 1/3 víc než Martin. To by bylo všude jinde skoro (myslí další verze příkladů).
J: Jako jak všude jinde?

D: Protože by to bylo jinak, že by ta šipka nebyla k tomu Martinovi, ale třeba ze svého množství, tak by to tam nebylo.
J: Jo, a když vidíš tohle, „o 1/3 víc než Martin", tak to je šipka k Martinovi?
D: No.
J: A tady (5A) je šipka?
D: To je zase k Martinovi
J: A tady (5B) je šipka?
D: K tomu dohromady.
J: Jo.
D: No a tady (5C) by nebyla šipka, protože by to bylo jako do sebe.

Anna původní úlohu počítala stylem „Celkové množství na třetiny". Zápis vypadal tak, že šipka od „o 1/3 víc než" směřovala k „dohromady ... 42". Po předložení a řešení variant úlohy s kuličkami, jsem se jí na zápis zeptala. Z rozhovoru vidíme, že Anna mění zápis pro původní úlohu. Šipku vede od „o 1/3 víc než" k zápisu „Martin ... x", který doplnila. Uvědomila si tedy, že původní úlohu vnímala chybně, a že 1/3 má být z Martinova množství kuliček stejně jako v případě varianty 5A. Že šipka ukazuje na základ pro výpočet 1/3, potvrzuje i popis směřování šipky u variant 5B a 5C. Anna tedy dokáže propojit znění zadání úlohy a jeho schématický zápis a také už dokáže rozeznat, že znění původní úlohy znamená brát 1/3 z Martinova množství. Možná jí to pomůže, až budou pomocí takových zápisů sestavovat lineární rovnice. Zatím ale nedokáže původní úlohu správně spočítat. Vzít 1/3 z Martinova nebo Jirkova množství pro ni znamená vypočítat 1/3 z poloviny celkového množství kuliček.

16 Úloha s číselnou osou

Postupy a úvahy, které děti používaly pro řešení úlohy s číselnou osou, jsem rozdělila na tři skupiny. Do první patří postupy, úvahy a řešení pracující s celkem. Ať už děti v těchto postupech zvolí jakýkoliv celek a záměrně s ním pracují nebo ho využívají při svých výpočtech nevědomky, hraje při nich celek klíčovou roli. Strategie z této skupiny se blíží jednomu ze správných způsobů řešení, kdy se pomocí vyznačených 3/4 určí celek a na základě něho se zjistí, kde leží 2/5.

Do druhé skupiny jsem zařadila ty postupy a úvahy, které umisťují zlomky na číselnou osu jako posloupnost jdoucí za sebou po jedné čárce.

Strategie ze třetí skupiny využívají druhý možný způsob výpočtu. Převádí nebo se snaží převést oba zlomky na tvar, ve kterém budou mít stejného jmenovatele. Dětem takový postup umožní vyřešit úlohu, aniž by potřebovaly vědět, kam dosahuje celek. Ukáže se jim totiž jiný vztah mezi zlomky než ten, který vede přes společný celek. Do této skupiny jsem zařadila i postupy, které převádějí zlomky na desetinná čísla, protože se jedná o stejný princip, jako v případě převádění na společného jmenovatele[14].

16.1 S celkem

Žádné dítě samo nevyřešilo úlohu postupem, při kterém by si nejprve s pomocí vyznačených 3/4 zjistilo, kolik čárek obsahuje nebo kde leží celek, a pak by pokračovalo nalezením 2/5 na základě zjištěného celku. Tento způsob řešení je vůbec nenapadal. Žádné dítě také bez pomoci nebo upozornění správně celek neurčilo.

Děti pracující s celkem ho neurčovaly na základě správného vztahu ke 3/4, ale spíše hledaly explicitně daný konkrétní základ pro výpočet 2/5 nebo explicitně daný konkrétní celek, který by mohly rozdělit na pětiny. Co děti braly jako celek pro určení 2/5?

16.1.1 Celek jsou vyznačené 3/4

Nejčastějším řešením vůbec bylo určování 2/5 z 15 čárek. Jako celek se tedy vzala vzdálenost od nuly k vyznačeným 3/4. Dítě vydělilo patnáct pěti a výsledek vynásobilo dvěma, aby získalo 2/5.

Děti v tomto řešení neztotožňovaly 3/4 a 4/4. Věděly, že to není stejný zlomek. 3/4 pro ně neznamenaly 4/4, ale základ pro výpočet 2/5 nebo celek pro rozdělování na pětiny.

Vidím v této strategii potřebu vycházet z konkrétního celku. Jak může být celek něco, co vlastně ještě není? Implicitně zadaný celek totiž dítě musí samo vytvořit na základě zadaného vztahu. Stejnou potřebu konkrétního celku jsme viděli v úloze s kuličkami.

Příklad 65
(8. třída, Bára, 6)

J: A na kolikátce to je?
*D: **Na šestce**.*
J: No a jak jsi na to došla?
*D: No že tady mezi tím je to patnáct (mezi nulou a vyznačenými 3/4) a 2/5 jsou míň než 3/4 a **15 děleno 5 jsou 3 a 3krát 2 je šest**.*
*J: Hm. No tak mně se to nezdá kvůli tomu, že tys vlastně dělala 15 děleno 5, tím dostalas 1/5, a krát dva, takže dostalas šest, no, a když to děláš z těch 15, tak to znamená, žes vzala 15 jako celek. Ale já **nesouhlasím s tím, že 15 je celek,** protože **15 jsou 3/4**.*
*D: A tady **není jako celej celek**?*

U Báry vidíme uvedenou potřebu daného konkrétního celku. I kdyby si už na začátku všimla, že 3/4 nejsou celek, nemohla by tento fakt přijmout, protože „*to by tam nebyl celej celek*".

[14] Jestliže si převedu 2/5 a 3/4 na společného jmenovatele, dostanu 8/20 a 15/20. Pak už jen stačí zjistit, jak velká je 1/20. Podobně s desetinným číslem. 3/4 a 2/5 převedu na desetinná čísla. Pak když vím, kde leží 0,75, stačí zjistit, jak velký je jeden dílek a vím, kde bude ležet 0,4.

16.1.2 Celek jsou všechny čárky

Druhým nejčastějším řešením bylo vypočítání 2/5 ze všech čárek. Děti, které zvolily tuto strategii, s určenými 3/4 vůbec nepracovaly a celek ztotožnily s celou vyznačenou osou: „celek jako to celé". Pracovaly se zadanou osou, jakoby na ní nebylo žádné vymezení, 3/4 nevztahovaly ke 2/5.

Bez počáteční čárky značící nulu je na ose čárek pouze dvacet devět. Děti ale z pochopitelných důvodů pracují se třiceti čárkami.

Děti dobře vědí, že dělají 2/5 ze 30, a že tak berou 30 jako celek. Je samozřejmě možný případ, kdy dítě udělá 2/5 ze 30, aniž by si uvědomilo, že pracuje s celkem. V takovém případě by pouze vzalo množství, které se nabízí a provedlo by automatický operátorový výpočet. Takové zjednodušené řešení jsem však nepozorovala.

Následující příklad ukazuje hledání celku a jeho ztotožnění se všemi čárkami.

Příklad 66
(7. třída, Jan, 6)

D: (Počítá kolik je čárek do 3/4 - 15, pak udělá 2/5 na 18. místě.)
J: Jak jsi na to přišel?
D: No, tady jsou 3/4 (15. čárka), tak tady jsou 4/4 (ukazuje na 16. čárku ... pak se odmlčí), no jo vlastně (začne znovu napočítávat čárky - pauza). Já fakt nevím.
J: No, tys říkal, že tady jsou 3/4. A jak jsi přišel na ty 2/5.
D: No, to já už nevím
J: A mně se navíc nezdá, že tady jsou 4/4 (ukazuji na 16. čárku, jak předtím ukazoval). Je dobré, že hledáš 4/4, ale nezdá se mi, že leží tady.
D: (Přepočítá si počet všech čárek na ose – udělá 2/5 na 12. místě.)
J: A proč na dvanácté?
D: Protože je 30 čárek a dvě pětiny z 30 je 12.

Jan nejprve pro určení 2/5 používá strategii, kterou popíši později, a umístí 2/5 na osmnácté čárce. Když ho upozorním na důležitost hledání 4/4, nevyužije pro nalezení 4/4 vyznačené 3/4, ale ztotožní je s celou osou.

16.1.3 Jednička na ose

Dalším chybným určením celku bylo umístění 1/1 do poloviny vzdálenosti od nuly k vyznačeným 3/4.

Příklad 67
(7. třída, Jakub, 6)

D: .... Protože tady někde bude jedna.
J: Kde bude jedna?
D: Tady (kreslí mezi 6. a 7. čárkou), asi tady někde.
J: Proč si myslíš, že tam bude jedna?
D: Protože jedna bude někde na půlce přesně.

J: Proč na půlce?
D: Protože tady je 15 dílečků a 15 děleno dvěma to jsou ....em....
...
D: Tady je jedna jednina (ukazuje na tu čárku v půlce) a z tý jedný jedniny můžeme určit, kde budou ty dvě pětiny.
J: To jo. To třeba jo. Ale proč říkáš, že ta jedna bude v té půlce. To nechápu.
...
D: Ne. To mě jen tak napadlo.

U Jakuba vidím snahu někam umístit jedničku. Na každé číselné ose přece bývá vyznačená jednička, tak musí být i tady. Jedničku Jakub umístí na místo, které může nějakým způsobem definovat, aby jednička neležela jen tak někde: „*někde na půlce přesně*" a správně ji ztotožní s 1/1. Tuší, že s její pomocí lze zjistit umístění 2/5, ale v dalším rozhovoru se ukáže, že i kdyby věděl, kde leží 1/1, nedokázal by této znalosti využít pro nalezení správného místa na ose pro 2/5.

16.1.4 ¼ přidaná ke 3/4 jsou 4/4 a n-tina je n prvků

Dalším způsobem nalezení celku je přidání čtyř čárek ke 3/4. Dítě ví, že celek se skládá ze 4/4 a jelikož má zatím jen 3/4, musí ještě ¼ přidat. To je velký posun oproti třem výše popsaným způsobům uchopení celku, protože dítě využívá k nalezení celku vztahu mezi 3/4 a 4/4. Dítě ale ztotožní ¼ se čtyřmi čárkami. Udělá totiž chybu, která byla popsána už v první úloze: „n-tina = n prvků".

Příklad 68
(8. třída, Martina, 6)

J: Dobře. A šlo by to nějak spočítat bez toho, abys sis to převedla na společnýho jmenovatele? Že by sis nejdřív zjistila, kde je celek, a z toho celku potom udělala 2/5? Šlo by nějak z toho zadání, kde jsou jen 3/4 naznačený, zjistit, kde je ten celek?
D: Když tady jsou 3/4, tak tady jsou i 4/4, takže bych si tady ***ještě připočetla 4****, takže to by byly ty 4/4.*
J: 4/4 by vznikly tak, že bys tam připočítala 4. A proč zrovna 4?
D: ....
J: Proč zrovna 4?
D: Em..... ***Protože to mám na ty čtvrtiny?***

Martině zdůrazním, že by mohla úlohu vyřešit i jiným způsobem, než je převod na společného jmenovatele. A ptám se, jak by z určených 3/4 zjistila, kde leží 4/4. Martina ke 3/4 přidává ještě ¼, která obsahuje čtyři prvky: „čtvrtina takže čtyři prvky".

16.1.5 Reakce na otázku po 4/4

U Martiny (viz předchozí příklad) a Jana (viz příklad 66) narážíme na reakci na moje zdůraznění významu 4/4. Obě děti předtím počítaly jiným způsobem a vyrovnávání se s celkem je až reakcí na můj dotaz. I jiných dětí jsem se ptala, kde leží 4/4, když máme vyznačené 3/4. Řada jich dokázala správně odpovědět. Ukažme si dvě správná určení 4/4, jestliže víme, kde leží 3/4.

Příklad 69
*(7. třída, **Kryštof**, 6)*

J: Když víš, kde jsou 3/4, tak zkus vyznačit, kde jsou 4/4.
D: (Napočítává ve vzduchu po 5 čárkách od počátku – přejde ke 3/4 - odpočítá 5 čárek za nimi). Tady by to bylo.
J: Ehm. A na kolikátce to je?
D: No 15... (počítá čárky za patnáctkou). Na dvacátý.
J: Jo. No. Dobře. A jak to? Vyznač mi to tam ještě.
D: (Zvýrazňuje 20. čárku.)
J: A jak jsi na to přišel teda.
D: No, protože to je vlastně ...(přemýšlí).. kdyby to bylo po pěti čárkách, tak z toho nemám vybarvený ten jeden „pětčárek".

*(8. třída, **Bára**, 6)*

J: Celek tam někde je, ale ty víš jen to, že tady jsou 3/4.
D: Takže bysme měly získat tu ¼.
.....
D: Takže já teďkom ..... (počítá od počátku 20 a zvýrazní 20. čárku). Takže tady je ten celek, těch 20.
J: Ehm. A proč 20?
D: Protože to vlastně vypočítám jako 4/4, že ta ¼ je 5 a 4/4 je 20.
J: Ehm. A jak jsi přišla na to že ¼ je 5?
D: No, když tady jsou ty 3/4, tak tady to mezi tím, to je 15, a 15krát 3.
J: 15 děleno 3. Jo jasný. Dobrý. No. Tak jo. Souhlasím s tím, že tady to je celek, a že tam jsou ty 4/4. No a teďka, jak poznáš, kde jsou 2/5?
D: Ten celek, těch 20, děleno 5, to jsou 4, a 4krát 2 je 8.
J: Ehm.
D: Takže (zakresluje 2/5 na osmé čárce).

Kryštof si při řešení příkladu pomáhá představou tvaru rozděleného na čtyři části, ve kterém tři vybarvené části znázorňují 3/4 a jedna nevybarvená ¼. Tak si přiblíží, že 15 čárek má rozdělit na tři části. Části vyjdou po pěti, takže i čtvrtá část je „*pětčárek*".

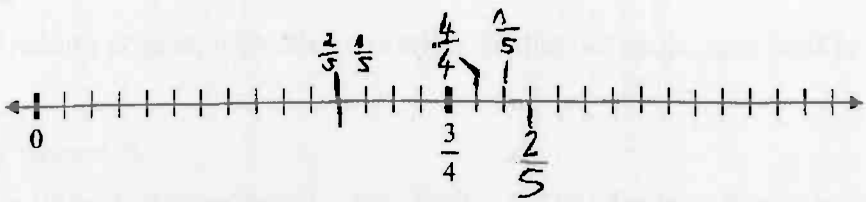
Báru jsme opustili v příkladu 65 v momentě, kdy se divila „*a tady není jako celej celek?*" Když Báře naznačím, že celek najde prostřednictvím určených 3/4, dokáže už ho správně určit. Bára také dokázala přejít ze 4/4 na 5/5 a využít je při nalezení 2/5.

Báře došel vztah: „4/4 = celek = 5/5". To ale není samozřejmostí. Ne všechny děti, které s mou pomocí správně určily, kde leží 4/4, si dokázaly tento vztah uvědomit. Například Kryštof si ho neuvědomil. Ze sedmi dětí (2 ze sedmé třídy, 5 z osmé třídy), které se mnou našly správnou polohu 4/4, dokázaly tři (z osmé třídy) přejít ze 4/4 na 5/5 a najít tak 2/5.

16.2 Zlomky jako číselná posloupnost jdoucí po jedné za sebou

Na tuto strategii jsme už narazili u Jana, který přisoudil 2/5 osmnáctou čárku (viz příklad 66). Jiné děti umístí 2/5 například na jedenácté čárce. Z jakého důvodu? Podívejme se na následující obrázek (obr. 29).

obr. 29



3/4 jsou na patnácté čárce, proto 4/4 budou za nimi na šestnácté čárce, 2/4 na čtrnácté a ¼ na třinácté čárce před 3/4. Takto se děti vyrovnají se čtvrtinami. Některé děti pak umisťují pětiny za 4/4 (1/5 pak leží na sedmnácté, 2/5 na osmnácté, 3/5 na devatenácté čárce atd.). Jiné pracují s faktem, že 2/5 jsou menší než 3/4, a proto umisťují pětiny před čtvrtiny. 1/5 pak leží na dvanácté a 2/5 na jedenácté čárce nebo jsou 2/5 umístěny někam před třináctou čárkou, na které leží ¼. Dítě, jehož řešení znázorňuje obrázek (obr. 29), nejprve umisťovalo pětiny za čtvrtiny a po mém upozornění na velikostní nesrovnalost pětiny přemístilo před čtvrtiny.

Popsaná strategie je jeden ze způsobů vřazování zlomků do číselného kontinua. Děti při této strategii řadí zlomky na číselnou osu kontinuálně za sebou po jedné čárce. Přitom umisťují zlomky se stejným jmenovatelem vedle sebe. Vytvářejí tak na číselné ose skupinky stejných n-tin. Správné vztahy „větší – menší“ jsou pak dodržovány jen mezi zlomky se stejným jmenovatelem a „obsažný“ vztah (kolik čárek má obsahovat určitý zlomek) daný umístěním 3/4 není nahlédnut.

16.3 Stejný jmenovatel

Děti, které zvolí postup spadající do této skupiny, řeší úlohu převodem zlomků na stejného jmenovatele nebo převodem zlomků na desetinná čísla. Využívají tak jiného vztahu dvou zlomků mezi sebou, než je společný celek. S celkem vůbec není třeba pracovat.

Některé děti převod na stejného jmenovatele samotné napadne, jiné ho použijí až při návodné otázce na porovnání obou zlomků.

Ne všechny děti, které převádějí zlomky na stejného jmenovatele, chápou, proč lze tímto způsobem úlohu vyřešit, proč tento způsob funguje a proč jim vyšel správný výsledek. Dětské strategie se pohybují od pouhého zkusmého převedení zlomků na stejného jmenovatele, které „nějak vyšlo“, k pochopení, že převedením se ukázal proporcionální vztah mezi dvěma zlomky. K pochopení také může dojít až po zkusmém vyřešení.

Proč je v zadané úloze možné „zkusmé“ vyřešení“? Po převedení zlomku 2/5 a 3/4 na stejné jmenovatele dostaneme 8/20 a 15/20. Přitom 15/20 leží na patnácté čárce a 1/20 je tudíž jedna čárka. Dítě tak může umístit 8/20 na osmé čárce, aniž by přesně chápalo vztah mezi 15/20 a 8/20. Kdyby například 15/20 leželo na třicáté čárce, nemusela by správná vyřešení být tak častá.

Uvádím příklad, u kterého si myslím, že dítě uchopuje, proč zvolilo správný postup.

Příklad 70
(7. třída, Robert, 6)

D: No, jo. (Chvíli ještě přemýšlí – píše 8/20 a 15/20.) Tohle je 8/20 a tohle je 15/20. Jako že jsem si to převed.
J: Hm. A jak jsi uvažoval, zkus to popsat.
D: Tak jsem počítal nejbližšího násobka a to je 20, a aby to sedělo na tuhle číselnou osu, tak jsem si spočítal, jestli jich je tam 15, a bylo jich tam, tak to bylo lehký a potom bylo jasný, že tohle bude na osmičce.
J: Mně to ještě tak jasný není. Tys říkal, žes nejdřív něco udělal a pak sis teprve ověřil, jestli je tam 15 dílků, a pak to bylo podle tebe v pohodě. A proč to bylo v pohodě?
D: No protože jeden dílek je 1/20. Takže když jich má být 8/20, tak odpočítám 8 těch.
J: A proč to bylo tak v pohodě, když jsi spočítal těch 15?
D: No já jsem to ani nemusel, ono bylo jedno, kdyby jich tam bylo třeba 30, tak by to bylo nadvakrát.....

Robert hledal, jak velká je 1/20, aby podle její velikosti mohl určit velikost 8/20. Pochopil, jaký vztah se mu ukázal, když převedl 2/5 a 3/4 na stejného jmenovatele.

Dvě děti, které se snažily získat stejného jmenovatele u zlomků, nebo spíše stejné n-tiny, volily nesprávné způsoby převedení. Jedno dítě (sedmá třída) nevědělo, jak převést oba zlomky na čtvrtiny, a tak je mezi sebou sečetlo. Druhé dítě při úpravě 3/4 přičetlo ke trojce i čtyřce jedničku, aby dostalo pětiny (osmá třída).

U dětí, které řeší úlohu převáděním na stejného jmenovatele, jsem také sledovala, zda vidí i druhý možný postup využívající společného celku. Samy druhý způsob nevidí. Musela jsem je upozornit, aby zkusily řešení pomocí určení celku.

U tří dětí (dvě ze sedmé, jedno z osmé třídy) jsem zaznamenala převádění zlomků na desetinná čísla. Jen to zkusily a nevěděly pak, co s nimi. Uvedu příklad dítěte, které pracuje s desetinnými čísly s mou pomocí.

Příklad 71
(8. třída, Michal, 6)

J: Jo. Dobře. Tak jo. S tím souhlasím, to je správně (řešení pomocí převodu na společného jmenovatele). Ale já se tě zase budu kulišácky ptát, jo? Šlo by to vyřešit nějak jinak, aniž bys to převáděl na společného jmenovatele?
D: Šlo by to ještě do ***desetinného čísla****. 0,75 a 2/5 to je kolik, to je .....no prostě bysme to převedli na desetinná čísla.*
J: Tak já ti tady půjčím kalkulačku a ty mně to můžeš ukázat. Já ti to spočítám, jo?
D: To by se tam musel najít.....
J: Tak 2 děleno 5 je ***0,4****. A tohle je* ***0,75. A teď co bys tím získal****?*
D: Tím bych nezískal asi nic. Protože to je ***od sebe strašně daleko****...*
J: Kdybys věděl, že tohle je 0,75 a tohle 0,4, kam bys to 0,4 nakreslil?
D: Tak můžu to převést....0,4 to je jako 0,40, že jo? Kdyby tady bylo teda 0,75 (píše 0,75 nad 3/4), teďka by se musel ***najít ten správný vztah mezi těma místama****, kolik by to mělo, a potom by to tam šlo zakreslit.*
J: Ehm. A jak bys našel ten správnej vztah?
D: No to bych vám tady ukázal, kdybych to věděl.
J: A co tím myslíš, ten správnej vztah?
D: Jako aby ***na té ose byla všude stejná vzdálenost****. Že prostě nemůže tady být jeden centimetr, tady čtyři, atd., potom by se s tím nedalo počítat.*
J: A když víš, že tady je 0,75, šlo by vypočítat, ***kolik má tady ten jeden dílek****? Ty víš, že tady ten dílek má 0,75 můžeme vzít milimetry, centimetry, metry, to je jedno, takže nějaké jednotky. Vypočítal bys potom, kolik je ten jeden?*
D: ***To jako myslíte, že 0,75 bude jako tady ta část*** *(ukazuje prsty vzdálenost od nuly k 3/4)?*
J: No to určitě je. To tady máš určený.
D: Jo. ***Tak to by bylo děleno tady tím počtem****. Děleno 15.*
J: Tak já ti to spočítám. To je 0,05. (píšu k první čárce 0,05)
D: .....To je nějaký divný
J: Co je na tom divný?
D: No to nevím ještě, počítám. Vychází to, ne?
J: A co teď vychází?
D: Jako že ten jeden čtvereček je 0,05 tý daný jednotky,
J: A jaký to má potom vztah k těm 2/5?
D: No pak si můžeme vypočítat 2/5 z 0,05.
J: Proč 2/5 z 0,05?
D: No protože chceme ty dvě pětiny.
J: A z čeho chceme ty dvě pětiny?
D: No z 0,75. Jo takhle 2/5 z 0,75.
J: Já nechci ale vědět 2/5 z 0,75.
D: Z 3/4
J: Já nechci vědět 2/5 z 3/4.
D: Tak z čeho?
J: Když tady máš napsaný 8/20, že jsou ty 2/5, z čeho bylo těch 8/20?
D: Z 2/5
J: To jo, tos rozšířil. Ale z čeho bylo těch 8 dílků?
D: No z těch 15/20.

Michal nejprve správně spočítal úlohu pomocí převodu na stejného jmenovatele. Na tento způsob přišel sám. Ptám se ho na jiný způsob řešení a Michala napadá převod na desetinná čísla. Jak zjistit kde bude ležet 0,4, když víme, kde leží 0,75? Michal hledá vztah mezi těmi dvěma čísly, ale neví, jaký. Ví, že to má něco společného s rovnoměrným rozčleněním osy, s jednotkami, ale 0,75 k celku (jednotce, jedničce) ani ke vzdálenosti jednotlivých čárek od sebe nevztáhne.

Všimněme si Michalova výroku: *„To jako myslíte, že 0,75 bude jako tady ta část?"*. Michal je udiven, že 0,75 sahá od nuly až k vyznačeným 3/4, a přitom dobře ví, kde 0,75 leží. Sám si číslo 0,75 nad 3/4 napsal. Michal pravděpodobně nevnímal číslo 0,75 jako vzdálenost od nuly. I jeho výrok *„najít ten správný vztah mezi těma místama"* ukazuje na možnost, že Michal nevnímal čísla 0,4 a 0,75 jako vzdálenosti od nuly, ale jako místa (umístění) na číselné ose. Přitom ale hledá správný vztah *„mezi těma místama"*, a tudíž hledá nějakou vzdálenost. Tuto vzdálenost si ale nespojí se vzdáleností od nuly. Neví, jak hledanou vzdálenost najít.

Když Michal pochopí, že 0,75 určuje vzdálenost od nuly, nemá už problém vypočítat velikost jednoho dílku. Předpokládám, že by i správně určil, kde leží 0,4. Já se ale vracím ke 2/5, a tím ho zmatu. Na konci rozhovoru si všimněme ztotožnění základu se 3/4 (0,75, 15/20). Z toho je vidět, jak strategie „Převod na stejného jmenovatele" nevyžaduje práci s celkem.

16.4 Shrnutí strategií při řešení úlohy s číselnou osou

Viděli jsme tři obecné strategie při hledání umístění 2/5. Ukažme si počty výskytů jednotlivých způsobů řešení. Souhrnný počet výskytů jednotlivých řešení se opět nebude rovnat počtu dětí, protože některé děti použily více druhů strategií.

Schéma 1

- S celkem (5:6) [15]
    - Celek jsou vyznačené 3/4 (3:2)
    - Celek jsou všechny čárky (1:3)
    - Jednička na ose (1:0)
    - 1/4 přidaná ke 3/4 jsou 4/4 a n-tina je n prvků (0:1)
- Zlomky jako číselná kontinuita jdoucí po jedné za sebou (3:3)
- Stejný jmenovatel a desetinná čísla (7: 6)
    - nejbližší společný násobek (správné převedení)
        - řešení samo napadne (2:2)
        - po návodné otázce (2:2)
    - n-tiny (nesprávné převedení)
        - sečtení zlomků pro získání čtvrtin (1:0)
        - přičtení „1" pro získání pětin (0:1)
    - převod na desetinná čísla (2:1)

[15] (X:Y) = počet výskytů druhu řešení (sedmá třída : osmá třída)

Jak už jsem uvedla výše, žádné dítě samo nevyřešilo úlohu za pomoci společného celku pro čtvrtiny a pětiny. Ze shrnutí vidíme, že bez pomoci vyřešily úlohu na základě převodu na stejného jmenovatele čtyři děti. Pouze čtyři děti tedy samy vyřešily úlohu správně.

Nepozorovala jsem také žádný významný rozdíl mezi dětmi ze sedmé a osmé třídy. Pro obě skupiny byla úloha obtížná. Pravděpodobně kvůli smíchání problematiky zlomků s problematikou číselné osy. Nebo lépe řečeno smíchání problematiky implicitně zadaného celku a problematiky vřazování zlomků do posloupnosti celých čísel.

17 Dvě čísla mezi dvěma zlomky

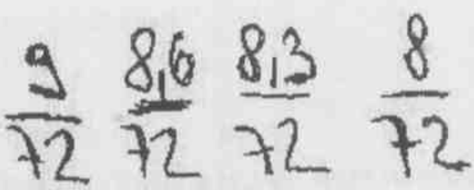
V sedmé úloze měly děti najít dva zlomky, jejichž velikost je mezi 1/8 a 1/9. Nejčastěji děti převedly oba zlomky na **nejbližšího společného jmenovatele.** Dostaly tak zlomky (9/72 a 8/72), které jim sice pomohly určit velikostní vztah 1/8 a 1/9, ale neusnadnily jim nalezení požadovaných dvou zlomků. Mezi 9 a 8 totiž děti neviděly žádné celé číslo. Proto dále zlomky nerozšiřovaly, kromě jednoho případu, a hledaly jiné způsoby řešení. Pouze jedno dítě využilo **rozšiřování zlomků se stejným jmenovatelem**, a tak se dobralo ke správnému výsledku (1/9=24/216; 1/8=27/216; mezi nimi: 25/216 a 26/216).

Dalších pět dětí také dospělo ke správnému výsledku, ale jinou strategií. Využily **desetinných čísel**.

Jedno dítě „z hlavy“ převedlo 1/8 a 1/9 na desetinná čísla a poté nalezlo desetinná čísla, které leží mezi nimi. Objevená desetinná čísla ležící mezi 0,111 a 0,125 už nedokázalo převést na zlomky.

Zbylé čtyři děti využily jinou metodou založenou na desetinných číslech. Využily představy, že mezi celými čísly 8 a 9 leží desetinná čísla a ta napsaly přímo do zlomku. Desetinná čísla ležící mezi čísly 8 a 9 děti umístily buď ve jmenovateli (vznikly například 1/8,6; 1/8,1) nebo v čitateli, když předtím převedly zadané zlomky na tvar se společným jmenovatelem (vznikly například 8,5/72; 8,9/72; viz obr. 30). Žádné dítě nedokázalo převést zlomek s desetinným číslem na „čistý“ zlomek bez desetinného čísla.

obr. 30



I když dítě ví, že mezi osmičkou a devítkou leží desetinná čísla, nemusí automaticky vidět, že jich je tam „spoustu“ (řečeno slovy jednoho dítěte). Vyskytl se případ, kdy dítě mezi nimi vidělo pouze devět čísel (8,1-8,9).

Ostatních jedenáct dětí nevědělo, jak příklad vyřešit. Některé se zarazily po převedení zlomků na nejbližšího společného jmenovatele (viz výše). Jiné navrhovaly různé zlomky. Většina z nich spíš myslela, že mezi 1/8 a 1/9 žádné zlomky nejsou. Nejčastější chybné návrhy zlomků byly 1/7, 2/8 a 2/9.

Navrhované zlomky 2/8 a 2/9 jsou zajímavé. Jedná se zde pravděpodobně o stejný způsob zařazování zlomků do číselného kontinua, který jsem již pozorovala v úloze s číselnou osou (kapitola: „**Zlomková číselná posloupnost jdoucí po n-tinách po jedné za sebou**“). Při tomto způsobu zařazování zlomků do číselného kontinua jsou jednotlivé n-tiny zařazovány v samostatných skupinkách a velikostní vztahy jsou správné pouze mezi zlomky uvnitř jedné n-tinové skupiny. Číselná řada pak vypadá buď takto: 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, 8/8, 1/9, 2/9 ... nebo takto: 1/9, 2/9, 3/9, 4/9, 5/9, 6/9, 7/9, 8/9, 9/9, 1/8, 2/8 ...

1/8 byla v zadání úlohy uvedena jako první číslo a 1/9 jako druhé. Děti, které si nevšimly, že 1/8 je větší než 1/9, si jako první číslo v řadě představily 1/8, a proto uváděly 2/8 jako číslo mezi 1/8 a 1/9. Naopak děti, které pracovaly se správným velikostním vztahem mezi 1/8 a 1/9, viděly 1/9 na prvním místě v číselné řadě, a proto uvedly 2/9 jako zlomek ležící mezi 1/9 a 1/8.

Obecně neměla většina dětí problémy správně určit velikostní vztah mezi 1/8 a 1/9, i když si ho na počátku nemusely uvědomit. Pouze tři děti ze sedmé třídy označily 1/9 jako větší. Zajímavý byl případ dítěte, které na otázku po větším čísle odpovědělo „jak kdy, podle toho, kolik udělám dílků“.

K porovnávání zlomků některé děti používaly představy rozčleněného koláče a využívaly jednoho aspektu relativního myšlen, který uvádí Lamon (1999, viz výše). Jde o vidění vztahu mezi velikostí kusů a počtem kusů, na které je rozdělen celek. Čím je částí míň, tím jsou větší. Na otázku, který zlomek je větší, odpovídaly v tomto duchu: „1/8 je větší, protože když koláč rozdělíme na osm částí, tak jedna část zabere víc místa, než když ho rozdělíme na devět částí.“

Příklad 72
(8. třída, Martina, 7)

J: Kdybys měla porovnat a napsat co je větší a co menší (píšu porovnávací znaky).
D: Ta 1/8.
J: Je co?
D: Je větší.

J: Ehm. Dobře a jak sis to odůvodnila?
*D: Tak jsem si představila jako **nějakej kruh**. A rozdělila jsem si ho na osm dílů, a kdybych si to rozdělila na devět dílů, že jo, to vlastně **dělím na menší části**. Takže by to bylo větší.*

Od porovnávání velikostí 1/8 a 1/9 se vraťme k řešením sedmé úlohy. Při strategiích „desetinná čísla" a „zlomky jako číselná kontinuita..." děti využívají své představy o číselné řadě (kontinuitě čísel) a zařazení zlomků do ní. Oproti tomu strategie „převod na stejného jmenovatele" takové představy přímo nevyžaduje.

Příklad 73
(7. třída, Robert, 7)

*D: (po chvíli přemýšlení píše: **9/72 a 8/72** – pak chvíli zase přemýšlí a píše **27/216 a 24/216**). 25 a 26 dvěstěšestnáctin je mezi tím.*
J: Hm. A cos dělal?
*D: **Násobil to, dokud mi mezi tím nevyšly dvě čísla**.*
J: Hm, jo, a násobil jsi to čím?
D: Násobil jsem to ...no prostě... děvět krát osm je 72 a to jsem vynásobil třema, aby tam byly ty dva zlomky, jako, aby tam bylo ty dva zlomky, že jo.
J: Hm. A proč jsi hledal toho společnýho jmenovatele?
D: Aby bylo lehčí najít ty dva zlomky.
J: A když se podíváš na 1/8 a 1/9, tak který ten zlomek je větší a který menší?
D: (váhá)
J: Kdybys měl číselnou osu a měl jsi to tam zakreslit, 1/8 a 1/9 a ty dvě čísla mezi, který ti vyšly, jak bys to nakreslil?
*D: No já nevím. Bylo byly by tam **2/8** a třeba **3/9**, nebo já nevím.*
J: Použij ten výsledek, co ti vyšel, s tím já souhlasím, a zkus mi to zakreslit na číselné ose.
D: Jako že bych tam musel napsat tyhle čísla?
J: Podívej se, v zadání bylo, že máš napsat dva zlomky, jejichž velikost je tady mezi těma dvouma, tady ti něco vyšlo, a teď mi o zkus znázornit na číselné ose.
*D: **No to teda nevim**.*

Na příkladu Roberta chci ukázat, že ve strategii „rozšiřování zlomků se stejným jmenovatelem" nemusí být přítomna představa zařazování zlomků do číselného kontinua. Robert nejprve správně vypočítá úlohu pomocí rozšiřování zlomků. Když má však použít představu o zařazování zlomků na číselnou osu, mezi 1/8 a 1/9 zařadí 2/8 nebo 3/9.

Výše popsané strategie pozorované při řešení sedmé úlohy spolu s kvantifikacemi jejich výskytu souhrnně zobrazuje následující schéma.

schéma 2

- převod na stejného jmenovatele (4:2)
  - rozšiřuje převedené zlomky (1:0)
  - nerozšiřuje převedené zlomky (3:2)
- desetinná čísla (2:4)
  - převod zadaných zlomků na desetinná čísla a nalezení desetinných čísel mezi nimi (1:0)
  - použití desetinných čísel mezi 8 a 9 v čitateli nebo jmenovateli (1:4)
- zlomková číselná posloupnost jdoucí po n-tinách po jedné za sebou (2:2)

- 1/8, 2/8 ...8/8, 1/9 (1:1)
- 1/9, 2/9 ... 9/9, 1/8 (1:1)

o ostatní (1/7; manipulace s čísly bez vztahu k zadání) (2:2)

Zajímavá je převaha využívání desetinných čísle u dětí z osmé třídy. Je tomu tak pravděpodobně proto, že jsou s nimi děti z osmé třídy více obeznámeny a jsou pro ně běžnější než pro děti ze sedmé třídy.

18 Úloha s džusy

V osmé úloze se zlomek vyskytuje v roli poměru. Jak už jsem uvedla výše, nejedná se o typickou úlohu na poměr. Úloha spíše zjišťuje proporcionální uvažování. Zjišťuje, zda děti dokáží přemýšlet nad úlohou v relativních souvislostech, o kterých jsme mluvil v úloze s hady (viz kapitola „Relativní a absolutní myšlení").

Existují dva nápoje, pomerančový a banánový. V každém je určité množství vody a ovocné šťávy a děti mají za úkol zjistit, který nápoj je míň šizen vodou. V pomerančovém nápoji je 30 odměrek vody a 12 odměrek šťávy a v banánovém nápoji je 36 odměrek vody a 16 odměrek šťávy.

Zopakujme, že děti ze sedmé třídy poměr ve škole ještě neprobíraly. Děti z osmé třídy už se s tématem poměru ve škole setkaly, ale už asi před půl rokem.

Nejprve ukážeme, jakými způsoby lze úlohu s džusy řešit, a poté se podíváme, jaké strategie volily děti.

18.1 Možné způsoby řešení

Možné způsoby řešení úlohy lze rozdělit do tří skupin podle utvořeného poměrového vztahu. Do první skupiny patří ty postupy, které srovnávají poměr vody a šťávy jednoho druhu nápoje s druhým a přitom nepracují s celkovým množstvím odměrek u jednotlivých nápojů. Poměrový vztah je tedy vyjádřen mezi počtem odměrek vody a počtem odměrek šťávy u každého druhu džusu. Poměry nápojů se pak porovnávají mezi sebou (12:30 a 16:36).

Druhou skupinu tvoří postupy, při kterých se srovnávají nápoje mezi sebou a využívá se srovnání s celkovým počtem odměrek. Poměr se vyjadřuje mezi množstvím odměrek šťávy a celkovým počtem odměrek nebo mezi množstvím vody a celkovým počtem odměrek (12:42 a 16:52; 30:42 a 36:52).

Postupy, kdy při porovnávání stojí na jedné straně voda a na druhé šťáva, tvoří řešení třetí oblasti. Jeden poměr je vytvořen mezi počtem odměrek vody u pomerančového a banánového džusu a druhý poměr je vytvořen mezi množstvím odměrek šťávy obou džusů (30:36 a 12:16).

Po vytvoření poměrového vztahu lze využít tří způsobů porovnání poměrů mezi sebou: porovnání speciálně upravených zlomků, porovnání zlomků převedených na společného jmenovatele a porovnání nalezených koeficientů.

„Úprava zlomku“ zahrnuje postupy, které upravují poměry ve zlomkovém tvaru na tvar umožňující porovnání zlomků. Zlomky jsou převáděny pomocí rozšiřování a krácení na takový tvar, kdy v čitateli či jmenovateli je v obou zlomcích stejné číslo.

Při postupu „Převedení na společného jmenovatele“ jde o stejný princip jako v případě „Úpravy zlomků“, využívá se však převodu zlomků na tvar s nejbližším stejným jmenovatelem.

Koeficient získáme vydělením čísel, které jsme dali do poměru. Koeficienty z obou poměrů pak musí být ještě správně interpretovány a porovnány podle druhu vytvořeného poměrového vztahu a podle způsobu dělení (co dělíme čím).[16]

18.1.1 Poměr mezi šťávou a vodou

Tento druh poměru vznikne mezi množstvím vody a šťávy u pomerančového džusu a množství vody a šťávy u banánového džusu. Vzniklé dva poměry se porovnají mezi sebou.

Jestliže pro porovnání dvou poměrů využijeme „Úpravu zlomku“, snažíme se zlomky převést na takový tvar, kdy v čitateli či jmenovateli obou zlomků bude stejné číslo. Ukažme si jeden z možných postupů. Do zlomku dáme množství šťávy a vody u každého nápoje. Dostaneme 12/30 a 16/36. Zlomky upravíme tak, aby v čitatelích byla stejná čísla na 4/10 a 4/9. Výsledek ještě musíme správně interpretovat. Při stejném množství šťávy je do pomerančového nápoje přidáno víc vody. Proto je banánový džus míň šizen.

Když zlomky 12/30 a 16/36 převedeme na společného jmenovatele, porovnáváme 72/180 s 80/180. Správný popis srovnání zde zní: „Při stejném množství vody je v pomerančovém nápoji méně šťávy, a proto banánový džus je méně šizen.“

Třetí způsob přípravy poměrů na porovnávání je postup „Nalezení koeficientu“. Množství vody u nápoje se vydělí množstvím jeho šťávy nebo naopak. U každého nápoje tak zjistíme množství vody patřící k jedné odměrce šťávy nebo při opačném dělení množství šťávy míchané s jednou odměrkou vody. Dělíme-li „šťáva÷voda“, znamená vyšší koeficient méně šizený džus a naopak.

[16] Jestliže například budeme dělit „šťáva ÷ voda“, znamená vyšší koeficient méně šizený nápoj. V případě dělení „voda÷šťáva“ tomu bude naopak (vyšší koeficient znamená více šizený nápoj).

schéma 3

- o poměr mezi šťávou a vodou (12/30 a 16/36 nebo 30/12 a 36/16)
  - porovnání upravených zlomků (např. 4/10 a 4/9)
  - převod na společného jmenovatele (72/180 a 80/180)
  - porovnání koeficientů (12÷30 a 16÷36 nebo 30÷12 a 36÷16)

18.1.2 Poměr mezi šťávou a celkovým množstvím nebo mezi vodou a celkovým množstvím

Zjistíme celkový počet odměrek u každého druhu džusu, a pak vytvoříme poměr mezi celkovým počtem odměrek a šťávou nebo mezi celkovým počtem odměrek a vodou. Poměry obou druhů nápojů se poté porovnají mezi sebou. K přípravě na porovnání opět můžeme použít úpravu zlomků, převod na společného jmenovatele nebo nalezení koeficientů.

Jak by mohlo vypadat řešení využívající postupu „Úprava zlomků“? Například v případě poměru mezi počtem odměrek šťávy a celkovým počtem odměrek by postup mohl vypadat takto: 12/42 = 2/7 = 4/14. 16/52 = 4/13. Jestliže v každém nápoji budou čtyři odměrky šťávy, u pomerančového nápoje bude více celkových odměrek a tedy i víc vody. Banánový džus je proto méně šizený.

Podobně by se mohl řešit příklad pomocí „Převodu na společného jmenovatele“. Tentokrát vezměme poměr mezi celkovým počtem odměrek a vodou: 30/42 = 15/21 = 5/7 = 65/91. 36/52 = 18/26 = 9/13 = 63/91. Jestliže v obou nápojích je stejný počet odměrek, v pomerančovém nápoji je víc odměrek vody. Proto je banánový džus méně šizen.

Můžeme také využít přímé vydělení čísel mezi sebou a poté porovnávat nalezené koeficienty. Podívejme se na dva příklady. Jestliže počítáme: 52÷36 = 1,44 a 42÷30 = 1,4; odpověď zní: Banánový džus je méně šizen, protože na jednu odměrku vody připadá v banánovém nápoji větší množství celkových odměrek. Musí tam tedy být více šťávy.

Když budeme dělit: 30÷42 = 0,71 a 36÷52 = 0,69, výsledek interpretujeme: Protože jsme si vypočítali, kolik vody obsahuje jedna odměrka, zbytek do jedné odměrky tvoří šťáva. Vidíme, že v pomerančovém džusu je víc vody, a tedy banánový je méně šizen.

Porovnávání koeficientů vzniklých s použitím celkového počtu odměrek vyžaduje složitější úvahy. Samotné vydělení a úvahy o vzniklém podílu nejsou efektivní. Nejsou na první pohled patrné. Tyto výpočty jsou však součástí jiných komplexnějších postupů. Například podíly 30÷42 a 36÷52 jsou jedním z kroků počítání procentuálního zastoupení vody v nápoji. Úlohu tedy lze řešit i pomocí určení procent šťávy nebo vody v nápojích.

schéma 4

- o poměr mezi šťávou (vodou) a celkovým množstvím (30/42 a 36/52; 12/42 a 16/52 nebo opačné zlomky)

        - úprava zlomku (např. 4/14 a 4/13)
        - převod na společného jmenovatele (např. 65/91 a 63/91)
        - nalezení koeficientu (30÷42 a 36÷52 nebo 42÷30 a 52÷36)
    - procenta šťávy nebo vody v nápoji

18.1.3 Poměr vody k vodě a šťávy ke šťávě

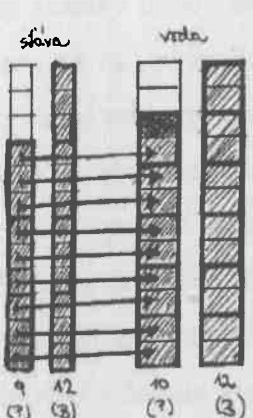
Do této skupiny patří postupy, které vytvářejí poměr mezi počty odměrek vody u nápojů a poměr mezi počty odměrek šťávy u nápojů. Do poměru dáváme vodu z jednoho džusu s vodou ze druhého a šťávu z jednoho džusu se šťávou z druhého.

K nalezení správného řešení mohou být použity všechny způsoby výpočtu uvedené už u předchozích skupin: porovnání upravených zlomků, porovnání zlomků převedených na společného jmenovatele a porovnání nalezených koeficientů.

Lze vůbec příklad vytvořením poměru mezi vodami a vytvořením poměru mezi šťávami vypočítat? Úpravou zlomků (např. 30/36 = 5/6 a 12/16 = 3/4) nebo převodem na společného jmenovatele se sice mění poměr mezi šťávou a vodou v jednotlivých nápojích, mění se tedy procentuální zastoupení šťávy a vody v nápoji, zachovává se ale poměr mezi vodami obou džusů a poměr mezi šťávami. A protože otázka nezní, kolik procent šťávy obsahují jednotlivé nápoje, lze tímto způsobem dospět ke správnému výsledku. Musíme ale zvolit porovnávání daného množství s „ideálním“ stavem, kdy oba nápoje budou mít stejnou koncentraci.

Vezmeme si například 12/16 (pomerančová šťáva/ banánová šťáva) a 30/36 (voda v pomerančovém nápoji/ voda v banánovém nápoji) a upravíme zlomky na 9/12 a 10/12. Aby poměr s vodami a poměr se šťávami byl stejný, musí se doplnit 1/12 pomerančové šťávy. 1/12 pomerančové šťávy chybí do „ideálního“ stavu, a nebo 1/12 banánové šťávy je nad „ideálním stavem“, a proto banánový džus je méně šizen.

obr. 31



Předchozí obrázek (obr. 31) pomocí šipek ukazuje nestejnost koncentrací. V případě, že by poměr šťáv byl 9:12 a poměr vod také 9:12, byly by koncentrace vody a šťávy v obou nápojích stejné (1:1). Protože ale vody v pomerančovém džusu je o dílek více, je pomerančový džus více šizen vodou. Přitom je jedno, jaký bude velikostní rozdíl mezi dílkem vody a dílkem šťávy. Pouze dílky šťávy u obou džusů a dílky vody u obou džusů musí zůstat stejné.

Jestliže chceme dojít k výsledku přes porovnávání koeficientů vzniklých vydělením vytvořených poměrů (30:36 = 0,83:1 a 12:16 = 0,75:1), správná interpretace jejich vztahu by mohla znít takto: Jestliže se banánový nápoj bude skládat z jedné odměrky vody a jedné odměrky šťávy, pak pomerančový džus se bude skládat z 0,83 odměrky vody a 0,75 odměrky šťávy. Pomerančový džus je tedy víc ředěn vodou.

schéma 5

- poměr vody k vodě a šťávy ke šťávě (30/36 a 12/16 nebo 36/30 a 16/12)
  - úprava zlomku (např. 30/36 = 10/12 a 12/16 = 9/12)
  - převod na společného jmenovatele
  - koeficient (např. 30:36 = 0,83:1 a 12:16 = 0,75:1)

18.2 Dětské strategie v úloze s džusy

V předešlé kapitole jsem popsala a zdůvodnila možné typy správných řešení. V této kapitole ukážu strategie, které pro řešení úlohy použily děti. Rozdělila jsem je do dvou skupin podle požitého druhu vztahu mezi zadanými kvantitami. Děti vytvářely buď multiplikativní nebo aditivní strukturu řešení.

18.2.1 Multiplikativní poměrový vztah

Nejtěžší z celého příkladu bylo uchopit vztahy v úloze multiplikativně. Vytvořit poměry prostřednictvím zlomků (naznačeného dělení) nebo dělení samotného. Když děti vytvořily zlomky nebo čísla mezi sebou vydělily, neměly už potom problémy s interpretací výsledku. (Až na jedno dítě, které začalo dobrou úvahou a uchopením situace, ale výpočet nedokončilo). Problémy nenastaly ani u případů přímého vydělení, kdy vyjde koeficient, který už není tak snadné správně interpretovat. Z vytvořeného multiplikativního vztahu tedy děti vždy vyvodily správné interpretace.

Správná řešení a úvahy byly v menšině. Z jedenácti dětí ze sedmé třídy pouze čtyři příklad vyřešily správně. U dětí z osmé třídy se vyskytly tři špatné, dvě správné odpovědi a jedna odpověď s dobrou úvahou, ale nedotažená do úplného řešení.

Ze sedmi správných postupů tři děti použily **„Převod na společného jmenovatele“** z vytvořených zlomků 12/30 a 16/36. I když děti nepopsaly výsledek přesně, situace jim byla jasná a neměly problémy s interpretací vytvořeného vztahu.

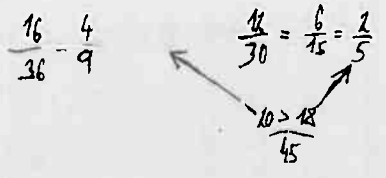
Příklad 74
(7. třída, Robert, 8)

D: (píše: 150, pak přepisuje na 180, vedle si taky píše 180, nad prvních 180 píše 72, nad druhých 80). Takže ten banánovej. Protože 5x 36 je 180 a 6x 30 je 180..
J: Ehm
D: Takže když to násobím 5 teda 6 tak to vyjde 72, a když to násobím 16 pěti, tak mám 80.
J: Ehm, takže máš zase společnej jmenovatel. No a co teď. Tohle je teda pomeranč? (ukazuji na 72/180) a tohle banán (ukazuji na 80/180)
D: Jo, Takže banánovej je míň šizenej. Protože je tam víc banánu.
J: Tak dobře, jo, správně.....

Robert používá úspěšně styl „převod na nejbližšího společného jmenovatele“ už od úlohy s číselnou osou. Na tento způsob sám přišel a uváděla jsem jeho interpretaci výpočtu jako příklad porozumění „proč to vyšlo“ (viz příklad 70). V sedmé úloze (úloha hledající dva zlomky mezi zadanými zlomky) dokáže jako jediný využít převodu na společného jmenovatele k nalezení požadovaných zlomků. „Svůj“ styl použije úspěšně i v úloze s džusy a nemám důvod se domnívat, že jeho interpretace vedoucí k odpovědi je náhodná. Vztah mezi poměry, který se mu ukázal po převodu zlomků na společného jmenovatele, interpretuje správně a s pochopením.

I další dvě děti využívaly převodu na společného jmenovatele už v předchozích dvou úlohách. Následující obrázek ukazuje zápis jednoho z úspěšných řešitelů. Dítě využívá úpravy zlomků na jednodušší tvary a ty převede na společného jmenovatele. Poté správně vystihuje vztah mezi šťávami při stejném množství vody u obou nápojů.

obr. 32



Dvě děti použily další z možných multiplikativních struktur. Vydělily mezi sebou množství vody a šťávy u každého nápoje. Používaly tedy vlastně způsob **„Porovnávání nalezených koeficientů“** popsaný výše. Obě děti také správně interpretovaly, co jim vyšlo.

Příklad 75
(7. třída, Kryštof, 8)

D: No, že bych asi vydělil těch 30 těmi 12...
J: 30 bys vydělil 12. Ehm.

D: To samý bych udělal u toho druhýho....
J: Udělal bys 36 děleno 16, jo? Tak mi to napiš, jak bys to dělal, jo? A kdybys to dělil, tak co by ti vyšlo?
D: No, vyšlo by mi těch 12/30 nebo tři...dvě...zbytek 6 by to vyšlo.
J: Co by ti vyšlo?
D: Dvě zbytek šest.
J: Jo, jako 30 děleno 12, jo?
D: No.
J: Tak mi to tady napiš.
D: (píše 30:12=2,6)
J: A co bys dělal dál.
D: No, potom to samý u toho druhýho.
J: no.
D: (píše 36:16=2,4)
J: No?
*D: No, to mi vyšlo to, že.....možná bych si s tím nepomoh ..... no, že.....**do jedný tý odměrky džusu bych dal 2,6 té odměrky vody.***
J: Ehm. A tady 2,4 odměrky vody, jo?
D: No.
J: No a tím pádem to vyšlo jak?
*D: No, že by **míň šidili u toho banánovýho**.*
J: Ehm. Tak jo. Dobrý.
Vypnula jsem kameru. Když jsem si skládala věci, ještě jsme se o tom příkladu bavili:
J: Když jste ještě nebrali poměr. Jak to, že jsi to tak dobře spočítal?
*D: No **to je jako na kanystru benzínu**. Jedna ku něčemu.*

Kryštof je ze sedmé třídy a poměr se ještě počítat neučili. V běžném životě se už ale s pojmem poměr setkal. Někdo mu správně vysvětlil, co znamená poměr 1:X, který viděl na kanystru benzínu. Kryštof rozpoznal analogii mezi situací s kanystrem benzínu a situací s nápojovými koncentráty a dokázal správně interpretovat výsledky po vydělení. To, že čísla mezi sebou vydělil špatně, není podstatné, důležité je správné zacházení s výsledkem.

Následující příklad ukazuje další správné nalezení výsledku. Dítě vytváří poměry mezi vodou v pomerančovém a vodou v banánovém nápoji a šťávou v pomerančovém a šťávou v banánovém nápoji (**poměry 30/36 a 12/30**). Nejsem si však jistá, zda dítě dobře vidí vzniklou situaci.

Příklad 76
(7. třída, Kamil, 8)

*D: 30 děleno 6 je 5, 36 děleno 6 je 6. 12 děleno 4 je 3, 16 děleno 4 je 4. A ¼ **je větší než 1/6, takže v banánovým je víc šťávy**.*
J: Jak jsi na to přišel? Proč děleno 6 a děleno 4?
*D: **30 ku 36 je rozdíl 6 a 16 ku 12 je rozdíl 4**. .... Víc odměrek šťávy..... Mezi 30 a 36 je **rozdíl 1/6** a mezi 12 a 16 je **rozdíl ¼**. Proto je tam víc šťávy.*

Kamil si nejprve upravuje zlomek 30/36 na 5/6 a zlomek 12/16 na 3/4. Výše jsem uvedla, že takovou úpravou zlomků se sice mění poměr mezi šťávou a vodou v jednotlivých nápojích, ale zachovává se poměr mezi vodami a poměr mezi šťávami. Úlohu lze tímto způsobem vyřešit představou doplňování do „ideálního" tvaru (viz kapitola „Poměr vody k vodě a šťávy ke šťávě" a obr. 31). Úvaha při správném řešení by měla znít asi takto: Aby poměr u obou nápojů byl stejný, musí se doplnit ¼ šťávy u pomerančového nápoje a 1/6 vody u pomerančového nápoje. ¼ je větší než 1/6. Musí se doplnit více šťávy než vody, abychom dostaly stejnou koncentraci jako v banánovém džusu, a proto je banánový džus méně šizen.

Kamil před sebou viděl zlomky 30/36=5/6 a 12/16=3/4. V čitatelích zlomků měl množství vod a ve jmenovatelích množství šťáv. Podle mě se snažil přidat 1/6 ke 5/6 aby dostal 6/6 a 1/4 ke 3/4, aby dostal 4/4. A protože do pomerančového džusu je potřeba přidat více šťávy než vody („*1/4 je větší než 1/6*"), je pomerančový džus ve stavu, kdy je v něm méně šťávy než v banánovém („*takže v banánovém je víc šťávy*").

V případě, že Kamil použil takovou představu považovala bych výsledek za správný. I když možná neviděl situaci komplexně. I když možná přesně nevěděl, proč lze takovým způsobem úlohu řešit.

Jak už jsme viděli, při tomto způsobu porovnávání poměrů, není důležité, jak jsou dílky v 1/4 a 1/6 velké. Proto do správné úvahy nepatří představa, že mezi 30 a 36 je rozdíl 6 a mezi 16 a 12 je rozdíl 4, kterou Kamil použil. Kamil tak ve svých úvahách mohl použít pouze aditivní vztah. Ke 30 přidat 6, k 12 přidat 4, a protože k pomerančovému nápoji přidáváme víc vody než šťávy, je více ředěn vodou, než banánový džus. Této aditivní úvaze však neodpovídají výroky: *„víc odměrek šťávy" (hodilo by se spíše: „víc odměrek vody"), „mezi 30 a 36 je rozdíl 1/6 a mezi 12 a 16 je rozdíl ¼" a „¼ je větší než 1/6, takže v banánovým je víc šťávy".*

Zmínila jsem se o dítěti, které sice použilo multiplikativní strukturu při hledání odpovědi na úlohu, ale nedokázalo úvahy dovést do správného konce. Dítě hledalo zlomek, kterým by se dalo vyjádřit, jakou část z celkových 42 odměrek zabírá 12 odměrek. Protože ale 42 nebylo dělitelné 12, nenašlo přesný výsledek. Napsalo, že 12 je 1/3 ze 42. Kdyby dítě našlo správné „**zlomkové vyjádření vztahu mezi počtem odměrek šťávy (vody) a celkovým počtem odměrek**" (2/7), byl by výsledek správný.

Následuje přehled dětských strategií, které využívají multiplikativní vztahovou strukturu.

schéma 6

- převod na společného jmenovatele zlomků v poměrovém vztahu „voda ku šťávě" (2:1)
- koeficient z vydělení zlomků v poměrovém vztahu „voda ku šťávě" (1:1)

- doplňování do ideální koncentrace: poměrový vztah „voda ku vodě a šťáva ku šťávě“ (1:0)
- zlomkové vyjádření vztahu mezi počtem odměrek šťávy (vody) a celkovým počtem odměrek (0:1)

Ve výše uvedených dětských strategiích jsou zastoupeny všechny tři poměrové vztahy, které jsem uvedla v kapitole „Možné způsoby řešení“. Nejhojněji je však využíváno vytváření poměru mezi vodou P a šťávou P a mezi vodou B a šťávou B. Je to logické vzhledem k zadání úlohy, které akcentuje představu dvou nápojů složených z určitého množství vody a šťávy.

Ze tří možných způsobů porovnání poměrů mezi sebou (porovnání speciálně upravených zlomků, porovnání zlomků převedených na společného jmenovatele a porovnání nalezených koeficientů) se nevyskytlo porovnávání upravených zlomků.

18.2.2 Aditivní struktury

Pozorovala jsem pět aditivně vytvořených struktur řešení. Jedna z nejčastějších byla odečtení počtu odměrek šťávy od počtu odměrek vody stejného džusu (**voda –šťáva: 36-16, 30-12**). Dítě tak zjistilo, o kolik odměrek je v každém nápoji více vody než šťávy. Protože v banánovém nápoji je rozdíl větší, dítě usoudilo, že více je šizen banánový džus. Typický výpočet ukazuje následující příklad.

Příklad 77
(7. třída, Cyril, 8)

D: Ten....ach jo....ten banánovej víc šiděj.
J: A jak jsi na to přišel?
D: Já jsem si dal 30 – 12 to je 8. Jó, že tady je větší těch odměrek vody než tý šťávy (ukazuje na 12 a na 30), teda menší, tady je větší (ukazuje na 16 a 36), tady je víc odměrek vody, než tý šťávy (ukazuje na 12 a 30), a tady je to taky, ale tady je to víc.
J: Co je víc?
*D: Tady je mezi něma **rozdíl 8** a tady je **rozdíl 20** ...prostě voni to šiděj, ale ne tolik jako tady u toho banánovýho.*

Cyril porovnává zadané kvantifikace aditivně. Oba nápoje obsahují víc odměrek vody než šťávy, ale v banánovém nápoji „je to o víc“, a proto je víc šizený vodou. Na výsledné interpretaci nic nemění ani to, že se spletl ve výpočtu rozdílu 30-12.

Druhým typem řešení, také velice populárním, bylo zjišťování rozdílů mezi počtem odměrek vod a počtem odměrek šťáv („**voda - voda, šťáva - šťáva**“). Když je voda z pomerančového nápoje odečtena od vody z banánového nápoje, zjistí se, o kolik je v banánovém nápoji víc odměrek vody než v pomerančovém (stejně u šťáv). Rozdíl mezi vodami je větší, než rozdíl mezi šťávami. V banánové nápoji je víc odměrek vody i šťávy, ale vody je víc „o víc“, proto je podle dětí banánový džus víc ředěn vodou.

Příklad 78
(7. třída, Jan, 8)

J: Co se říká v té úloze?
D: No jako vodou šiděj ten džus. (chvíli přemýšlí). Ten banánovej víc šidí.
J: Proč myslíš?
D: 16-12= 4 (zároveň i píše). No tak o 4 tam dají těch odměrek víc a 36-30=6, no a vo 6 odměrek vody víc. No a 6-4. Takže tam dávají o 2 odměrky víc vody.

Na příkladě Jana ukazuji typické řešení a typické vysvětlení výpočtu „voda - voda, šťáva – šťáva". Do banánového nápoje je přidáno *„o 4 víc"* odměrek šťávy a *„vo 6 odměrek vody víc"*, takže *„tam dávají o 2 odměrky víc vody"*, a tak *„ten banánovej víc šidí"*.

Třetím typem řešení je úvaha plynoucí z aditivního porovnání množství vody v banánovém nápoji s množstvím vody v pomerančovém nápoji a z porovnání množství šťávy v banánovém nápoji s množstvím šťávy v nápoji pomerančovém. Děti si všimnou, že v banánovém džusu je víc vody, ale také víc šťávy. V důsledku toho jim připadá, že **„to vyjde nastejno"**.

Další strategie obsahuje stejnou myšlenku jako typ řešení „Úprava zlomků" popsaný v kapitole „Možné způsoby řešení". Dítě ale místo multiplikativní struktury vztahů pracuje se strukturou aditivní.

Příklad 79
(8. třída, Tomáš, 8)

D: No když si vezmu 16, že jo. Nebo takhle. Nejdřív jsem se podíval na ta čísla. Že 12 je menší než 16 a 36 než to. A vlastně oddělal jsem, aby tady taky bylo 12 a vzal jsem vlastně 4 mi zbyly a dal jsem je sem, a bylo to 12 a 34. A tady to je vlastně 12 a 36.
J: Jó takhle.
D: Takže víc šizenej je tady ten (ukazuje banánovej).

Tomáš se snaží dostat stejný počet odměrek u šťáv, aby mohl porovnat počet odměrek vody. Správná myšlenka je ale špatně realizovaná. Tomáš nevytváří zlomky a jejich prostřednictvím multiplikativní srovnání. Ukazuje si na množství v zadání úlohy. Vzal 4 odměrky banánové šťávy a dal je k pomerančové vodě. Z „pomerančové skupiny" bere a do „banánové skupiny" přidává pravděpodobně proto, aby to bylo spravedlivější. Možná se snaží sblížit, vyrovnat celková množství obou nápojů. Dostal tak množství 12 a 34 v pomerančovém nápoji a 12 a 36 v banánovém nápoji.

Pátý druh řešení z této kapitoly ukazuje nepřesnost v zadání. Dítě použilo úvahu: *„12+30=42, 16+36=50, 50 je víc, banánový šťávy je víc"*. Opomeňme chybu ve sčítání a zaměřme se na otázku, proč je *„banánový šťávy víc"*, když *„50 je víc"*. Jedná se o sémantický skluz. V zadání jsou totiž naneštěstí dva významy pojmu džus. V první větě je slovo džus používáno ve smyslu čistá šťáva, ale dále je slovo džus užíváno ve smyslu nápoje složeného z nějakých odměrek vody a nějakých odměrek šťávy. Dítě proto nemyslí, že banánový nápoj je méně šizen, protože je v něm více šťávy, ale že banánového nápoje je víc, že se skládá z více odměrek. Dítě si tedy zjistilo **celkový počet odměrek, ale dál nepokračovalo** v tomto způsobu řešení.

schéma 7

- voda – šťáva: 36-16, 30-12 (3:2)
- voda – voda, šťáva – šťáva: 16-12, 36-30 (5:1)
- to je nastejno (1:1)
- snaha dostat stejná čísla u vody nebo šťávy, ale aditivně (0:1)
- celkový počet odměrek v nápojích, ale nepokračování v řešení tímto směrem (1:0)

Při řešení úlohy s džusy děti ze sedmé třídy nejčastěji vytvářely aditivní strukturu řešení. V osmé třídě dvě děti použily multiplikativní, tři aditivní a jedno dítě nejprve aditivní a pak multiplikativní způsob řešení.

V řešeních se objevují náznaky všech tří možných typů poměrů. Postupy „Voda mínus šťáva“ a „Snaha dostat stejná čísla u vody nebo šťávy, ale aditivně“ připomínají poměr „Voda ku šťávě“. Postup „Voda mínus voda a šťáva mínus šťáva“ a „To je nastejno“ připomínají poměr „Voda ku vodě a šťáva ku šťávě“. A strategie zjišťování celkového počtu odměrek je součástí vytváření poměru mezi šťávou (vodou) a celkovým počtem odměrek.

19 Souvislosti číselné osy, modelu část-eelek, srovnání velikosti zlomků a zlomku jako míry

Jak jsme viděli v kapitole „Číselná osa a míra“ (kap. 2.7.2), Ni (2000) upozorňuje na obtíže dětí s reprezentací racionálních čísel na číselné ose. Viděli jsme tři důvody problematičnosti znázorňování zlomků na číselné ose. Behr (1993, podle: Ni, 2000) vidí problém v neschopnosti dětí pracovat se zlomkem jako se samostatnou entitou, jako s číslem. Hiebert (1991, podle: Ni, 2000) vidí hlavní problém v neuchopení „hustoty“ [17] racionálních čísel. Ni (2000) zdůvodňuje obtíže při používání číselné osy při práci se zlomky velkou abstraktností číselné osy pro děti. Kvůli abstraktnosti osy mají děti tendenci vnímat model číselné osy jako jinou reprezentaci, která je jim srozumitelnější (například jako model část-celek).

Také moje pozorování ukázalo problém dětí s modelem číselné osy a umisťováním zlomků na ni (úloha 6, kapitola 16). Vysvětlení ale nelze shrnout tak jednoznačně a jednoduše, jak by se mohlo podle zmíněných autorů zdát. Podívejme se na vysvětlení Behra. Jak jsme viděli v kapitole „Zlomky jako číselná posloupnost jdoucí po jedné za sebou“ (kapitola 16.2), děti při této strategii pracovaly se zlomky jako se samostatnou entitou. Braly zlomek jako číslo a zařadily ho podle své představy vřazení zlomků do číselné řady. Jejich problém byl ve svébytné představě číselného kontinua obsahujícího zlomky a ne v neschopnosti pracovat se zlomkem jako samostatnou entitou.

Děti řadící zlomky jako „posloupnost jdoucí po jedné za sebou“ by potřebovaly vřadit zlomky do posloupnosti přirozených čísel, ukázat korespondenci a vztahy mezi jednotlivými zlomky a přirozenými čísly (např. 2/4=1/2, 1/4 leží v polovině mezi 0 a 1/2, atd.). Uchopení těchto korespondencí je pravděpodobně součástí představ, které autoři jako například Hiebert označují termínem hustota racionálních čísel. Nicméně vidíme, že kdybych pro popis situace dětí použila pouze termín „hustota racionálních čísel“, neudělali bychom si představu, v čem přesně mají děti v dané situaci problém. „Hustota racionálních čísel“ je velmi obecný termín. Navíc například děti řadící zlomky jako „posloupnost jdoucí po jedné za sebou“ by neměly

[17] Definici hustoty racionálních čísel, kterou uvádí Lamon (1999), jsem už zmínila výše (kapitola 5.4.2.). Jedná se o uchopení dvou skutečností: a) interval mezi dvěma přirozenými čísly obsahuje nekonečně mnoho čísel, b) zlomek je jedním ze způsobů vyjádření jakéhokoliv bodu, který leží mezi dvěma přirozenými čísly.

svým způsobem problém vyjádřit zlomkem jakýkoliv bod na číselné ose, pouze by ho označily podle své logiky řazení zlomků.

Také vysvětlení, které podává Ni, není úplně vystihující. Často jsem se v úloze s číselnou osou (kapitola 16) setkala se strategiemi, při kterých děti pracovaly s jiným celkem, než který byl zadán. Ať už se jednalo o celou číselnou osu (kterou zmiňuje Ni) nebo o jiný úsek číselné osy (například vzdálenost od nuly ke 3/4). Mohla bych tedy spolu s Ni tvrdit, že kvůli přílišné abstraktnosti číselné osy přešly děti od tohoto modelu k modelu „část-celek", který lépe ovládají. Z takového vysvětlení lze ale nabýt dojmu, že adekvátní je používat správně uchopený model číselné osy a model „část-celek" je v dané situaci nepatřičný a pouze způsobuje chybná řešení. Jako by si tyto dva modely nějak konkurovaly. Tak tomu ale podle mě není. Orientace na číselné ose vyžaduje také manipulaci s modelem část-celek. I kdyby děti z mého výzkumu správně uchopily model číselné osy se všemi souvislostmi, mohly by klidně pro určení místa pro zlomek na číselné ose použít úvahu opírající se o srovnání část-celek. Mohly by správně určený celek rozdělit na n-tiny a určit část celku danou zadaným zlomkem.

Ni (2000) také ukázal, že schopnost správně používat model „část z oblasti", spolu s se schopností počítat se zlomky, řešit slovní úlohy se zlomky a porozuměním jevům zlomkové problematiky, neznamená automaticky také schopnost využít model číselné osy. Ni vysvětluje toto zjištění zkreslením na základě předchozích zkušeností. Rozsáhlé jednostranné zkušenosti s manipulací s modelem „část z oblasti" brzdí představy dětí a všímání si typických znaků spojených s číselnou osou.

Souhlasím s Ni, že děti mají rozsáhlé zkušenosti s modelem „část z oblasti". Řada dětí tento model proto používá jako univerzální model[18] zlomkových vztahů. Například v sedmé úloze, kde měly děti srovnávat velikost dvou zlomků, použila řada dětí jako model pro zlomek část z koláče a porovnávala velikost těchto částí. Nebo například v úloze s čokoládami jsem zachytila případ, kdy pro vyjádření určité části čokolády zlomkem si dítě muselo představit analogický případ na modelu koláče, aby mohlo označit část správným zlomkem.

Ni podle mě míří správným směrem, když upozorňuje na vliv jednostranných zkušeností na uchopení situace na číselné ose, ale příliš zdůrazňuje již zmíněnou konkurenčnost dvou konceptů.

Souhlasím s Rendlem (2006, konzultace), který upozorňuje na nepřesnost v popisu situace, který Ni uvádí. Vyjádření, že číselná osa je pro děti příliš abstraktní, a proto ji

---

[18] Termín používám ve stejném významu jako Hejný a Kuřina (2001)

nahrazují jim bližším modelem část z celku či oblasti, a představa, že jejich jednostranné zkušenosti brání porozumění alternativnímu konceptu (nějak s ním interferují), jsou obě nepřesné. Rendl (2006, konzultace) podotýká, že pro dítě tu žádné alternativní koncepty, které by si pletlo či jednomu dávalo přednost před druhým, původně nejsou, nijak je jeden od druhého nerozlišuje. Ani tu možná není nic, čemu by nerozumělo – rozumí tomu po svém. Dítě vychází z představ, které má k dispozici, kterým rozumí. (I když zároveň má obecné povědomí o tom, že za hranicí jeho zkušenosti a rozumění leží ještě mnoho věcí, kterým nerozumí, které „ještě nebrali", a ví, že každé další učivo s něčím takovým přijde.) Podle Rendla neporozumění vlastně nastoluje až dospělý, když řekne, že takhle to není. To on může pomoci vymezit nový koncept vůči těm, s nimiž dítě pracuje dosud (a proto by o nich měl vědět). Jinak musí dítě postupně artikulovat rozdíly samo, svými omezenými prostředky. A je to nutně dlouhá, klopotná práce, kterou některé děti nedokončí – jedny proto, že v dané pasáži učiva na to neměly dost času, jiné proto, že na tu námahu s nejistým výsledkem rezignují.

Další výsledky prezentuje Ni (2000) jako pozitivní korelační souvislosti mezi znalostí srovnání „část-celek", znalostí srovnávat dva zlomky, schopností aritmetických výpočtů se zlomky, aplikací a explanací, a naopak absenci korelací mezi těmito znalostmi a schopností reprezentovat zlomek na číselné ose. Schopnost reprezentace zlomků pomocí číselné osy podle něj neukazuje znalost zlomku jako míry. Jestliže chce někdo zkoumat znalost zlomku jako míry pomocí testů, má spíše sledovat schopnost porovnávat velikost dvou zlomků (Ni, 2000).

Zdá se mi, že pozitivní vztah mezi znalostí srovnání „část-celek" a mezi schopností porovnávat velikost dvou zlomků není překvapující. Jak už jsem uvedla výše, řada dětí používala pro porovnávání velikosti dvou zlomků univerzální model „část z oblasti". Navíc rozpoznat správné srovnání „část-celek" zobrazené na modelu „část z oblasti" nebylo pro děti obtížné stejně jako srovnání velikosti dvou zlomků (mluvím o dětech, se kterými jsem pracovala). Když model „část z oblasti" nebyl pro porovnání zlomků vhodný, dítě použilo pro srovnání velikostí postup „převod na společného jmenovatele", takže opět nemělo problém porovnat velikost dvou zlomků.

Tím se dostávám k dalšímu závěru, který Ni učinil. Myslím si, že používat srovnávání dvou zlomků jako ukazatel porozumění zlomku v oblasti míry není možné, jestliže zároveň nezkoumáme, jakým způsobem dítě zlomky porovnává. Jaký volí postup a jaké představy za srovnáním stojí. Mohou přece automaticky použít postup „převod na společného jmenovatele", který se ve škole pro porovnávání velikosti dvou zlomků učí.

Vezměme si například schopnost nalézt dva zlomky mezi dvěmi zadanými zlomky. Tato schopnost by měla být jednou ze známek uchopení zlomku jako míry (Lamon, 1999, viz výše), která přímo nevyžaduje manipulaci s číselnou osou. Tím vezmeme v potaz námitku Ni, že práce s číselnou osou zkresluje poznání toho, zda dítě rozumí aspektu míry zlomku. Moje pozorování řešení úlohy s číselnou osou a sedmé úlohy (kde děti hledaly dvě čísla mezi dvěmi zadanými zlomky) ukázala, že i když děti správně porovnají dva zlomky mezi sebou (například pomocí převodu na společného jmenovatele) a na základě porovnání umístí zlomek na číselnou osu, nemusí být schopny nalézt zlomky mezi dvěma zadanými zlomky. Například Michal (příklad 71) převedl zlomky na společného jmenovatele, umístil správně zlomek na číselné ose a tedy věděl, které číslo je větší a které menší, a přesto neměl představu čísla jako vzdálenosti od počátku, nedokázal by tedy vzít daný jednotkový interval jako míru jakékoliv vzdálenosti od počátku (podle Lamon (1999) další indikátor pochopení zlomku jako míry) a nedokázal najít další zlomková čísla mezi danými zlomky.

Zajímavý byl příklad Roberta (příklad 70 a 73), který sice použil strategii „převod na společného jmenovatele", ale chápal jeden zlomek jako určující interval pro umístění druhého zlomku a dokázal pomocí převodu na společného jmenovatele najít další zlomky mezi dvěma zadanými zlomky. Když jsem ale zjišťovala jeho představu o tom, jak by situace vypadala na číselné ose, nepopsal ji správně. Robert tedy může rozumět zlomku jako míře a mít pouze problém s modelem číselné osy, jak tvrdí Ni, ale takový popis je dost nepřesný. Nic nám neříká o představách dítěte ani o tom, v čem má problém. Proč v jedné situaci pracuje se vztahy na ose správně a jindy používá chybných představ. Souhlasím s Ni, že sledovat uchopení zlomku jako míry na číselné ose prostřednictvím pouhého „správně umístil"/„nesprávně umístil" nelze (práce s číselnou osou ukazuje totiž řadu jiných představ než jen uchopení zlomku jako míry, například uchopení zlomku jako čísla), ale závěry Ni o tom, jak zkoumat znalost míry porovnáváním velikosti zlomků, je dost zkratkovitý.

Vraťme se ještě ke korelacím, které Ni uvádí. Schopnost umístit zlomek na číselné ose nekorelovala s žádnou ze sledovaných oblastí dovedností. To se mi zdá dost překvapivé. Cožpak schopnost umístění zlomku na ose je nějaká izolovaná schopnost? Například bych očekávala, že položka v oblasti výkladu „Kolik zlomků je mezi 0 a 1" nebo položka v oblasti aplikace „Najít zlomek mezi dvěma danými zlomky" by měly s umisťováním zlomků na číselné ose korelovat. Ale už jen to, že každou z těchto dvou položek zařadil Ni do jiné oblasti kompetence, svědčí o tom, že jím vytvořené oblasti jsou heterogenní a výsledky nemusí postihovat to, co se Ni domnívá (alespoň při sledování aspektu míry).

20 Je relativní multiplikativní?

Jak jsme viděli v kapitole „Relativní a absolutní myšlení“ (kapitola 3.1), Lamon (1999) uvádí, že někdy se místo pojmu absolutní myšlení používá pojem aditivní myšlení a místo pojmu relativní myšlení pojem multiplikativní myšlení. Z analýzy dětských strategií mně ale vyplynula nutnost tyto pojmy mezi sebou rozlišovat.

Děti totiž mohou vytvořit multiplikativní strukturu a přitom nepřemýšlet o situaci v relativních souvislostech. Například v úloze s džusy řada dětí vyřešila úlohu pomocí převodu na společného jmenovatele. Vytvořily tak multiplikativní vztah mezi danými kvantitami, když je „daly do zlomku“. Tento vztah ale nemusely použít proto, že si uvědomovaly nutnost relativního srovnání, ale pouze z důvodu zaměření předchozích úloh na zlomkovou problematiky. Jak jedno dítě přiznalo: „*když jsou to příklady na zlomky, měl bych to asi dát do zlomků*“.

Dítě také může vytvořit multiplikativní strukturu, ale počítat ji aditivně. Například dítě ví, že úloha vyžaduje zapsat výpočet multiplikativně („třikrát čtyři“ zapíšu jako 3×4), ale počítá aditivně (3+3+3+3).

Někdy pro výpočet nestačí pouze vytvoření multiplikativní struktury, ale je potřeba si ještě všimnout relativních vztahů v této struktuře. Například v úloze s kuličkami používaly některé děti strategii „Na počátku má každý 21; 1/3 z 21 kuliček“ (kapitola 15.1.2). Tyto děti nejprve vypočítaly 1/3 a poté ji přičetly k Jirkové polovině (Jirka měl tudíž 28 kuliček). Pak ale musely upravit Martinův počet kuliček, aby součet kuliček obou hochů byl 42 (Martin má 14). Velikost prvně vypočítané 1/3 pak nebyla totožná s velikostí 1/3 z Martinova konečného množství kuliček, ale pro děti měl Jirka „o 1/3 (z Martinova počtu kuliček) víc než Martin“. Tyto děti nepracovaly s relativní vlastností zlomku, že stejný zlomek může vyjadřovat jinou velikost, jestliže je ve vztahu k jinému celku. To ale neznamená, že o této vlastnosti zlomku nevědí.

Vidíme, že relativní myšlení není nic stálého, co by dítě jednou „nabylo“, a pak už stále používalo. Nelze říct „dítě má relativní myšlení“. Záleží na kontextu, stejně jako i u jiných dovedností. V některých kontextech dokáže dítě přemýšlet relativně a v jiných stejný relativní vztah nemusí vidět.

U Rendla (2006, konzultace) v popisu vývoje chápání vztahů dvou kvantit (kapitola 3.2) vidíme další důvod, proč odlišovat uvedené pojmy. Rendl mluví o třetí etapě vývoje chápání vztahů dvou kvantit jako o chápání „relativnosti hledisek“, kdy dítě pozná, že absolutní nebo relativní hledisko je odlišné, a že záleží na tom, „jak se to vezme“. Dítě si tedy může vybrat aditivní strukturu a přitom myslet relativně, protože ví, jak se situace změní, když použije hledisko relativní.

V situacích, kdy mluvíme o relativním/multiplikativním a absolutním/aditivním myšlení, je tedy kvůli přesnějšímu odlišení jednotlivých dění lepší uvedené pojmy rozlišovat. Jak jsme však viděli, je také nutné rozlišovat mezi vnějším projevem dítěte (jak se nám z vnějšku jeví) a jeho myšlením (jak dítě ve skutečnosti uvažuje).

21 Jazykové osvojení

Celou mojí prací se prolíná střet mezi matematickými významy pojmů a významy těchto pojmů v běžném životě nebo střet mezi užíváním určitých slovních spojení v matematickém kontextu a v kontextu běžného života.

Už jen pojem zlomek má v běžném životě řadu různých významů, které mohou interferovat s významy matematickými, jak jsme viděli v kapitole „Zlomek v každodenním životě“ (kapitola 2.1).

Úlohu s kuličkami a její varianty jsem zadávala také kvůli sledování střetávání sémantického významu úlohy v běžném jazyce a významu, který je vyžadován v matematické perspektivě. Jak jsem podrobně rozepisovala výše (kapitola 5.3.2), v úloze s kuličkami je celek nepřesně vyjádřen a dítě se musí naučit vnímat zadání úlohy tak, jak požaduje matematická perspektiva. Výraz „o 1/3 víc než“ říká jazykem běžného života, že mezi jednou a druhou kvantitou je rozdíl 1/3, ale neříká nic o tom, co se má vzít jako základ pro výpočet velikosti 1/3. Dítě se musí naučit vidět ve výroku „o 1/3 víc než Martin“ základ v Martinově množství.

Problematiku osvojování si matematických významů výrazů ukazuje i třetí úloha, kterou jsem zadávala (úloha s čokoládami). Jedná se zde o spravedlivé rozdělování čtyř čokolád mezi šest dětí. Tato úloha vůbec nemusí být řešena pomocí zlomků. Dítě může nějakým způsobem rozdělit čokolády na kousky a spravedlivě děti kousky podělit. Například dát každému čtyři kousky, když si předtím dítě rozdělilo čokolády na 24 stejných kousků (6×4) nebo dát každému dva sloupečky po rozdělení každé čokolády na tři stejné sloupce (atp.). Do zlomkového kontextu se úloha dostane v momentě, když dítě začne samo zlomky používat („dám každém půlku čokolády a pak ještě 1/6“) nebo až v momentě, kdy se zeptáme „jak velkou část z čokolády/čokolád dítě dostane?“ Odpověď na tuto otázku už nemá být absolutní číslo (to by otázka zněla „kolik dílků každé dítě dostane), ale zlomek nebo procenta. Dítě si musí osvojit, že odpovědi na otázky „kolik“ a „jaká část z“ se liší.

Ukázkový požadavek „přiléhavosti“ odpovědí na položené otázky vidíme například u Lamon (1999), která vyžaduje rozdílné odpovědi na stejnou situaci v závislosti na typu otázky (kapitola 2.5.2). V situaci rozdělování 3 pizz mezi 6 dětí můžeme díl, který dostane jedno dítě, vyjádřit dvěma zlomky. Lamon požaduje na kvocientovou otázku odpověď 1/2 a na otázku akcentující srovnání „část-celek“ odpověď 1/6. Předpokládám, že pro americké děti nebude toto, z mého pohledu nesmyslně detailní rozlišování významu otázek jednoduché a budou si ho muset také osvojovat. Ale možná, že americké děti cítí sémantický rozdíl mezi otázkami bez problémů. Mně se zdá lpění na „přiléhavé“ odpovědi pro každou z těchto dvou otázek zbytečné. Obě odpovědi bych považovala za správné, jestliže dítě bude vědět jak zlomek vznikl (z jakým celkem pracovalo).

Uveďme si ještě jeden příklad jazykových obtíží. V případě, že multiplikátor, který uvádí do vztahu dvě kvantity, je menší než jedna, dostáváme se do situace, kdy sémantický význam zadání úlohy říká něco jiného, než nakonec vyjde. V zadání úlohy se dítě dozví, že nějaká kvantita má být 0,25krát (1/4krát) větší a ona je nakonec menší nebo 0,25krát (1/4krát) menší a ona vyjde větší.

Ze všech výše uvedených příkladů vidíme, že běžný jazyk a matematické výrazy vždy nekorespondují. Nejen že se výrazy z matematických kontextů často používají v běžném životě jinak a že si děti musí osvojit řadu pojmů a výrazů, které z běžného života neznají, ale musí navíc ovládnou odlišné významy pro výrazy, které na první pohled vypadají jako ekvivalentní. Běžný jazyk je v matematických souvislostech nepřesný a nejednoznačný, protože řada souvislostí, vztahů a srovnání, které matematický kontext nastiňuje, nejsou v běžném životě potřeba. Běžný jazyk tedy takové rozlišování nepotřebuje.

22 Nutnost přesného zkoumání, jak děti o dané situaci přemýšlí

Moje práce je postavená na zkoumání, jaké úvahy a myšlenky se ukrývají za dětskými řešeními úloh. Mnohokrát jsem se přesvědčila, jak je důležité přesně zkoumat, jak děti pracují se zadáním úlohy a jak dospěly k výsledku, který nám předkládají[19]. Zní to jako banalita, ale z tvrzení některých autorů mám pocit, že ne vždy takto k výsledkům přistupují.

Vezměme si opět situaci rozdělování 3 pizz mezi 6 dětí. Otázka „How much pizza does one person receive?“ patřící k této rozdělovací úloze znamená podle Lamon (1999) kvocientovou interpretaci zlomku, který vznikne partitivním rozdělováním. Jako celek se má brát jedna pizza. Správný výsledek je tedy v tomto případě 3/6 (1/2). Oproti tomu otázka

[19] Například kvůli odlišení „tvarové“ strukturace od „početní“, kde mohou být výsledky řešení stejné, ale představy za řešeními jiné.

„How much of the pizza does one person receive?“ vyžaduje srovnání část-celek (tedy jeden díl k celku) a znamená brát jako celek tři pizzy. Správná odpověď na tuto otázku je tedy 1/6 (3/18). Pomiňme v této souvislosti nutnost naučit se rozlišovat význam těchto dvou otázek, o které jsem již mluvila. A zaměřme se na skutečnost, že výsledek 3/6 podle Lamon znamená známku kvocientového srovnání a výsledek 1/6 znamená, že jsme použili srovnání část-celek. Jenže bez znalosti dětského postupu řešení a uvažování není vůbec jasné, co která odpověď znamená. Obě odpovědi mohou znamenat stejný způsob řešení. Dítě může například rozčlenit každou pizzu na šestiny a postupně (partitivně) podělit 6 dětí. Výsledek pak označí podle toho, co následně vezme jako celek. Celek tedy neurčuje předem, ale až pro potřeby vyjádření zlomku. Podobně v dalším postupu, kdy dítě použije „jednotkování“ (unitizing) a vezme tři pizzy dohromady a rozdělí si je rovnou na šest částí. Pro vyjádření dílu pro jedno dítě, pak může použít kvocientovou interpretaci zlomku i interpretaci část-celek[20]. Z „kvocientového“ řešení tedy můžeme dostat „část-celek“ odpověď a podobně u „část-celek“ řešení můžeme dostat „kvocientový“ výsledek. Navíc odpověď 3/6 můžeme dostat pouhým aritmetickým vydělením a jeho zapsáním ve zlomkové formě. Vidíme, že stejná odpověď může znamenat zcela odlišnou práci se zadáním. Jestliže však Lamon nejde o postihnutí řešení, ale pouze o určení, o jaký typ odpovědi jde, co dítě vezme následně jako celek, jedná se o zjednodušení situace nebo o „etický“ (ve smyslu rozlišení „etický“ vs. „emický“) pohled na situaci, který nebere v potaz dětské vnímání úlohy.

Také u Tiché (2003) nacházím situaci, ze které nemusí být jasné, jak přesně dítě úlohu vnímá. V komentářích kolem příkladu 11 (viz kapitola 4) jsem popisovala, jak Tichá vnímá dětmi vytvořené úlohy, ve kterých se jedná o výrok „o 1/5 víc než“. Všimněme si vytvořené úlohy 11.3 („Jirka má 2/5 a Tomáš o 1/5 víc“) a 11.4 („Tomáš má o 1/5 víc než Jirka“). Úlohu 11.3 Tichá považuje za správně vytvořenou, kdežto úlohu 11.4 chápe jako vytvořenou nesprávně. Podle mě ale dítě, které vytvořilo úlohu 11.4, mohlo uvažovat stejně jako dítě, které vytvořilo úlohu 11.3. Mohlo vyjadřovat stejnou myšlenku, pouze ji nepopsalo celou. V představě mohlo vidět, že Jirka má 2/5, pouze to do zadání nenapsalo. A kdyby to byl důkaz neuvědomování si nejednoznačnosti situace, neuvědomování si, že svým zněním úlohy vlastně vyjadřuje úplně jinou situaci, stejně tak si tuto nejednoznačnost nemuselo uvědomovat dítě, které vytvořilo úlohu 11.3.

---

[20] To, že dítě může použít určitý typ řešení a jeho odpověď může vyznít jako jiný typ řešení, ukazují výsledky analýzy úlohy s čokoládami. Například na obrázku 25 (kapitola 13.1) vidíme řešení dítěte, které rozdělilo celek (4 čokolády) na 6 částí. Dokonce chtělo nějak vyjádřit, že má něco rozděleno na 6 částí (Místo 6/6 nebo 1/6 napsalo 6/1). Při zlomkovém vyjádření dílu (4/6), který dostane jedno dítě, však bere za celek 1 čokoládu.

23 Různé interpretace zlomku a dětské představy o situaci

V kapitole, kde mluvím o zlomku jako míře, vidíme, že Lamon (1999) charakterizuje proces postupného rozčleňování číselné osy (postupného zhušťování) jako dynamické „postupné rozdělování“ (successive partitioning). Já bych však tento proces chápala spíše jako podobu „jednotkování“ (unitizing), který je popsán v kapitole pojednávající o zlomku jako o srovnání část-celek. Připadá mi, že jde přesně o to, jak jsem „jednotkování“ pochopila. Rozčleňováním číselné osy se připravuje konstrukce pro operování na celku. Celek (jednotku) si strukturuji tak, jak potřebuji v dané situaci, například kvůli přesnosti měření.

Proces stále podrobnějšího rozčleňování určuje Lamon jako postupné rozdělování pravděpodobně proto, že akcentuje postupné zhušťování původního intervalu, které ukazuje na příkladu 1/24 = ¼ z (1/3 z (1/2 z 1)). Tedy 1/2 z nějakého celku, 1/3 z nového celku, atd. Operátorové přirovnání ukazuje dělení už zavedené jednotky (1/2 z 1 = 1÷2). Dělení je operace, kterou Lamon akcentuje u zlomku jako kvocientu (viz např. tabulka 1 v kapitole 2.9), a proto tedy možná mluví o procesu rozdělování (partitioning), který je se zlomkem jako kvocientem spojený. Ale stejného rozčlenění osy dosáhneme i ekvivalencí 1/1 = 6/6 = 24/24, která je charakteristická pro „jednotkování“ unitizing (viz např. tabulka 1 v kapitole 2.9). Proto si myslím, že tento proces mohu vnímat jako „jednotkování“, jako strukturování daného celku podle potřeby, i když s poznámkou, že moje představa se může od pojetí Lamon lišit.

Pojem unitizing vnímám jako ekvivalentní k procesu, který jsem při popisování strategií řešení u dětí nazývala strukturací celku. V první úloze to bylo strukturování (unitizing) zadaného tvaru teček, kde jsme viděli různé druhy strukturací (sloupcovou, řádkovou (viz obr. 16 a 17), množinovou (viz obr. 5); tvarovou, početní, atd.). Podobně tomu bylo v úloze při znázorňování 16/4.

Unitizing jsem ale pozorovala také ve třetí úloze, když děti vnímaly 4 čokolády jako celek, který strukturovaly na šest částí. Zde by Lamon asi použila pojem partitioning, protože se jedná o situaci zlomku v roli kvocientu a dětem se postupně rozdá po jednom dílu (který obsahuje čtyři dílky). Vidíme, že se dostáváme do situace, kdy se významy těchto pojmů mísí, A kdy záleží na úhlu pohledu na danou situaci. Proto si myslím, že by bylo dobré pojem partitioning používat jen pro typické „rozpočítávání“ kousků, typické „přidělování“ kousků, kdy rozpočítáváme kousky mezi jednotlivé objekty (subjekty) (jeden dostane jeden kousek, druhý dostane druhý kousek, jeden dostane třetí kousek, druhý čtvrtý kousek...; viz partitivní dělení). Mluvilo by se o partitivním rozdělování. Český pojem rozdělování se totiž může používat v různých situacích. Například strukturace je vlastně taky rozdělování celku nebo zadaného tvaru na nějaké části.

Zajímavé je, že všechny děti v podstatě použily ve třetí úloze strukturaci a ne partitivní rozdělování. Zřejmě proto, že úloha je pro děti ze sedmé a osmé třídy jednoduchá, nepotřebují si pomáhat rozpočítáváním. Zvláště když už jsou čokolády předem rozčleněné.

Strukturování jsem také pozorovala v úloze s číselnou osou. K této skutečnosti jsem se již dostala, když jsem diskutovala s Lamon o používání pojmu postupné rozdělování (successive partitioning) a když jsem v reakci na zjištění Ni poukazovala na používání část-celek modelů při umisťování zlomku na číselné ose. Děti v úloze s číselnou osou často celek (ať už správný nebo domnělý) strukturovaly na pětiny, aby našly 2/5 (viz např. Kryštof z příkladu 69).

Tím se dostávám k otázce, zda je vůbec nutné vyčleňovat aspekt zlomku jako míry. Lamon ve svém výkladu upozorňuje, že někteří autoři tento kontext nevyčleňují (kapitola 2.7.1) a já se k nim přidávám. Lamon zdůvodňuje vyčlenění aspektu míry zlomku osvětlením dalších souvislostí, jako je dynamický pohyb mezi nekonečnými čísly, hustota racionálních čísel, smysl posloupnosti, řád racionálních čísel nebo stupeň přesnosti při měření. Myslím, že tyto vlastnosti racionálních čísel může postihnout aspekt zlomku jako čísla. V souvislostech, které zde popisuje Lamon, se vyskytuje zlomek jako číslo nebo je jako číslo zařazován do číselného kontinua, nebo na číselnou osu. I práce s číselnou osou je práce s čísly (v pojmu číslo je zahrnut jak aspekt čísla jako bodu, tak aspekt čísla jako vzdálenosti od počátku). Další jevy, jako je postupné rozčleňování číselné osy a zlomkem vyjádřená část z celku (0,5=1/2=1/2 z 1), zase můžeme vyjádřit aspektem zlomku jako srovnání část-celek nebo operátor.

Nejen z etického hlediska, které jsem ukázala v předešlém odstavci, ale ani z hlediska emického není aspekt míry podle mě potřeba rozlišovat. Když se podíváme na jednotlivé skupiny stylů řešení v úloze s číselnou osou, vidíme buď manipulaci se zlomkem jako číslem, vyznačením části z celku nebo operátorový výpočet 2/5 ze základu. Nepozorovala jsem žádný zvláštní význam zlomku, kromě problematičnosti plynoucí z nutnosti použít propojeně více z uvedených aspektů zlomku.

Ostatní aspekty zlomku, které vyčleňuje Lamon, mají podle mě své opodstatnění. Zdá se mi však, že hranice mezi nimi není tak ostrá, jak ji Lamon prezentuje. Hranice nejde ostře mezi situacemi spojenými s určitou interpretací. Určitá situace se vždy nerovná pouze jedné určité interpretaci zlomku.

Podívejme se například na prolínání interpretace zlomku srovnání část-celek a operátor. Zlomek jako srovnání část-celek sice vyjadřuje určitou část z celku (zlomkovou část) stejně jako operátor, ale srovnání jedné nebo více stejných částí celku s celkovým počtem stejných částí, na které je celek rozdělen, je něco jiného než operátor jako nositel operace „vyděl jmenovatelem a násob čitatelem". Mechanický operátorový výpočet totiž vůbec nemusí pracovat s představu celku rozděleného na nějaké stejné části (n-tiny). Operátorový výpočet akcentuje jiné rozdělení. Rozdělení na dvě části: na hledanou zlomkovou část a zbytek. Viděli jsme v analýze dětských strategií, že některé děti v první úloze určovaly rovnou zlomkovou část, a když jsem po nich chtěla zpětně rozdělení tvaru na n-tiny, měla s tím část dětí problémy (viz Matěj v příkladu 23 nebo Tomáš v příkladu 24). Navíc srovnání část-celek se nejčastěji používá, když máme označit nějakou vyznačenou část z celku zlomkem. V tomto případě je zlomek až výsledkem, až pojmenováním, ne operátorem udávajícím, jaké operace mají proběhnout.

Jsou ale situace, kdy můžeme roli zlomku nazvat jak srovnání část-celek tak i operátor. V případě, že máme zadaný zlomek a kontinuální neprestrukturovaný celek, a máme ukázat na tomto celku danou zlomkovou část, říká nám čitatel, kolik máme vybarvit částí, jejichž počet udává jmenovatel. Zde používáme srovnání část-celek. Ale v případě kontinuálních prestrukturovaných a diskrétních celků mohu už zadaný zlomek vnímat jako pokyn k vydělení částí (prvků) celku jmenovatelem a vynásobení výsledku čitatelem. Mohu tedy použít čistý operátorový výpočet, ale i srovnání část-celek. Záleží na tom, jaký postup a představu zvolím, jak jsme viděli například u strategií dětí v první úloze (styl „Strukturace" versus styl „A/B z C je D").

Významové nejasnosti vidím i při rozlišování zlomku jako kvocientu a zlomku jako srovnání část-celek. Kvocient definuje Lamon (viz např. tabulka 1 v kapitole 2.9 nebo kapitola 2.5.1) jako výsledek dělení, podělování. Je to díl, který každá osoba dostane, když jim rozdělujeme celek složený z více podcelků (viz úloha s čokoládami). Pomiňme rozdíl mezi výsledkem vyjádřeným zlomkem ve vztahu k celku zahrnujícímu všechny čokolády (1/6) a výsledkem vyjádřeným zlomkem ve vztahu k jedné čokoládě (4/6). Zaměřme se pouze na výsledek 4/6, který Lamon považuje za kvocient. Jestliže ale dítě nejprve přidělí každému ze šesti dětí spravedlivý díl a poté bude zjišťovat, jak se má díl vzhledem k celku (kolik dílků má vybarvených vzhledem k celkovému počtu dílků v čokoládě), provádí srovnání část-celek a zlomek je tu tedy v tomto významu.

Na základě výše popsaného si kladu otázku, jestli má smysl vyčleňovat interpretaci zlomek jako kvocient. Jestliže Lamon rozlišuje kvocient a srovnání část-celek proto, aby odlišila situaci, kdy se berou jako celek všechny čokolády a kdy jen jedna, neměl by pro mne zlomek jako kvocient význam. Myslím si totiž, že je jedno, jestli děti vezmou jako celek čokoládu nebo všechny čokolády, podstatné je, zda správně určí danou část vzhledem k danému celku. Tak ale provádí srovnání část-celek a nemusíme mluvit o kvocientu.

Jak jsme viděli, Lamon také definuje zlomek jako kvocient jako podíl (výsledek dělení 4÷6). Jestliže dítě však pouze aritmeticky vydělí počet čokolád počtem dětí (například proto, že zadání úlohy na rozdělování bude bez znázorněných podcelků, čokolád), bude zlomek 4/6 podle mne spíše v roli čísla.

A jestliže vyčleněním kvocientu chce Lamon postihnout proces, jakým děti rozdělí mezi šest lidí čtyři čokolády, můžeme to vnímat jako otázku strukturace, kterou při daném zadání děti provádí, a ne otázku, v jaké roli zde vystupuje zlomek. Už jen proto, že úloha není primárně na zlomkovou problematiku, jak jsme viděli výše.

Zlomek jako kvocient ale opodstatnění má, jestliže ho vnímáme jako označení dílu, jehož název jsme dostali z jiného celku, než vůči kterému díl poté porovnáváme. Například v úloze „Každý chlapec potřebuje 5/8 metrového lana. Máme 6 metrů lana. Kolik chlapců bude moci dostat svůj díl?“ (Lamon, 1999, viz kapitola 2.5.3). Zde vystupuje zlomek v roli dílu (kvocientu) pro jednoho chlapce, který můžeme přikládat k šestimetrovému lanu a tak ho rozřezat na 9 dílů a zbytkový kousek. Když budeme k úloze přistupovat takto, můžeme mluvit o zlomku jako kvocientu. Nicméně, když budeme brát výsledek čistě aritmeticky (6÷5/8=9 a 3/5), vystupuje zlomek v roli čísla. Záleží tedy opět na úhlu pohledu a na způsobu řešení.

Zbývá nám podívat se ještě na rozdíl mezi operátorem a kvocientem, kde se ukazuje opodstatněnost vyčlenění kvocientové interpretace. V úloze s čokoládami jsou 4/6 vyjádřením výsledku a ne operátorem, který by říkal, jaké operace provádět. V úloze s lanem je 5/8 v roli velikosti dílu, který se do šestimetrového lana vejde devětkrát, něco jiného než 5/8 z šestimetrového lana.

Zlomek jako poměr je samostatná oblast zlomkové problematiky. Vyčleňovat interpretaci zlomku jako poměru má opodstatnění kvůli významně odlišným vztahům k celku a představám, které zlomek jako poměr ukazuje. Otázka spíše je, jestli má být poměr vyčleněn jako jedna z interpretací zlomku, nebo jde, kvůli velmi odlišným vztahům, spíše o další oblast matematiky, ve které se může používat zlomkový zápis a manipulace zlomkového stylu s tímto zápisem.

Z výše uvedeného vidíme, že jedna situace, ve které se vyskytuje zlomek, může znamenat různé jeho interpretace, a to nejen z etického pohledu. U dětí jsem pozorovala, že nepoužívají zlomek v různých jeho interpretacích podle typu úlohy na danou interpretaci (viz rozdělení úloh podle typu zlomkové interpretace v kapitole „Které úlohy jsem zadala a proč“). Manipulace se zlomky a používání různých modelů dětmi sice můžeme označit prostřednictvím jednotlivých interpretací zlomku, ale druhy zlomkových interpretací se nemění v závislosti na typech příkladů, jdou „napříč“ přes příklady. Děti používají určitou zlomkovou reprezentaci z jiných důvodů, než je ten, že úloha je na danou zlomkovou interpretaci. Jak jsme viděli v kapitole „Znázornění tvaru oproti znázornění výsledku“ (kapitola 12), dítě může používat zlomek jako operátor od prvního do šestého příkladu, nebo naopak používat strukturace. Jinde vidíme využívání vztahu mezi částí a celkem v případech, kde jiné děti používají početní srovnání (např. srovnávání velikosti pomocí modelu srovnání část-celek versus pomocí převodu na společného jmenovatele).

Mohlo by se zdát, že dítě tedy při řešení příkladu používá nějaký druh interpretace zlomku. Takto jednoduše to ale nelze říct. Používání zlomku v určité interpretaci není zdaleka vždy „čisté“. Jak jsme viděli v kapitole „Překrývání stylů řešení“ (kapitola 9.12), děti mohou navenek používat model srovnání část-celek, ale zároveň si skrytě ověřovat postup například pomocí operátorových výpočtů.

Vidíme tedy, že typy interpretací zlomku jsou pro popis dětských pohledů na situaci zlomků nepřesné, a že jsou nepřesné také pro popis, o jaký typ úlohy jde. Myslím, že některé interpretace uváděné Lamon směšují více aspektů dohromady (viz výše jednotlivá srovnání: část-celek versus operátor, operátor versus kvocient a kvocient versus část-celek a můj názor na interpretaci zlomek jako míra).

Stejně jako v situacích, kde si děti mohou pohled na zlomek vybrat, vybírají si i tam, kde si vybrat nemohou. Příkladem může být Martina, která v úloze s kuličkami bere zlomek jako samostatnou entitu, jako číslo (viz příklad 61). U Martiny bychom mohli čekat, že v úloze s číselnou osou bude brát zlomek také jako číslo, protože to kontext číselné osy asociuje. Martina zde ale využívá srovnání část-celek a jako celek vezme celou osu.

Vidíme, že jednou chceme po dětech, aby zlomek vnímaly tak, podruhé onak. Zlomky jsou pro děti těžká učební látka, protože zlomek může znamenat řadu různých věcí a vztahů. „Uchopit zlomek“ znamená uchopit a propojit mnoho kontextů, flexibilně se pohybovat v širokém a složitém kontextovém poli a děti mají potíže orientovat se ve zlomkové mnohoznačnosti. Dětem se zlomek jeví jednou jako to jindy ono. Mám už počítat něco z něčeho teď, nebo mám nejprve udělat něco jiného, mám zlomek zkrátit, nebo čísla vydělit mezi sebou?

Z tabulky (tabulka 1 v kapitole 2.9) vidíme, že Lamon chce dětem pomoci tím, že bude každou zlomkovou interpretaci procvičovat, a proto na každou interpretaci zlomku vymyslela sadu aktivit. Podle této představy, když procvičíme všechny dané interpretace zlomku speciálními úlohami, dostane dítě ucelenou představu o tom, co to zlomek je.

Souhlasím s Lamon, že je nutné, aby se děti setkávaly se zlomky v širokém kontextovém poli. Myslím si, že koncept zlomku se nedá osvojit jinak než manipulací s ním. Jak říká Rendl (2006, konzultace), vytvoření mnohovýznamového obecného konceptu, kterým je zlomek, není možné jinak než induktivně, činností, zacházením se zlomky v různých kontextech a přecházením mezi nimi. Zlomek neexistuje jako jedna klíčová idea, představa, reprezentace, význam, kterou si dítě musí pořádně osvojit a pak už mu to půjde. Obecný koncept zlomku nelze předat a převzít, ten musí být dítětem zkonstruován v činnosti.

I když jsem zpochybnila rozdělení mnohovýznamového konceptu zlomek na pět jasně oddělených interpretací a ukázala jejich prolínání jak na rovině etické, tak rovině emické, i když se mi nelíbí, že se prostřednictvím ohraničených interpretací může dětem diktovat, kterou interpretaci mají pro danou situaci použít, tím, že Lamon používá řadu různých úloh a situací, ve kterých se zlomkem s dětmi pracuje, propojuje různé kontexty mezi sebou, dává dětem příležitost „ohmatat“ si zlomek v činnosti, a dětem tak pomáhá uchopovat koncept zlomek.

Závěr

První část práce zasazuje koncept zlomek do teoretických souvislostí. Ukazuje, jakými tématy se zabývají autoři prací o problematice zlomků a podrobněji rozebírá, o jakých faktorech, mechanismech a strukturách autoři hovoří v souvislosti s procesem konceptuální změny a s procesem vytváření nových konceptů a pojmů v kontextu zlomkové problematiky.

Zabývá se dále samotným pojmem zlomek. Ukazuje používání pojmu v každodenním životě a v matematických kontextech. Zlomek je mnohovýznamový koncept a autoři se snaží nějak jeho významy definovat a popsat. Tato práce vychází z rozdělení, které provedla Lamon (1999), která vyčlenila pět interpretací zlomku: srovnání část-celek, kvocient, operátor, míra a poměr. Vedle pojetí Lamon jsou uvedeny i názory dalších autorů na definování uvedených významových interpretací.

Kromě vymezení typů významových interpretací zlomku uvádí tato část práce také některé další problémy, které s problematikou zlomků a výkladem pozorovaných dětských strategií souvisí. Patří k nim významové uchopení rozdílu mezi podílem vzniklým prostřednictvím „dělením na stejné části" a „dělením po částech", které se ukázalo být jedním z faktorů ovlivňující početní strukturace celku. Patří k nim také vztah mezi znalostí práce na číselné ose a uchopením zlomku jako míry (podle Ni, 2000), rozdíl mezi relativním a absolutním myšlením, které uvádí Lamon (1999) a vývoj chápání vztahu dvou kvantit podle Rendla (2006, konzultace), které s tématem absolutního a relativního myšlení souvisí. V závěru první části práce je také rozebrán typ úloh „dělení množství na nestejné části", který významně souvisí s jednou ze zadaných úloh, ve které se ukázalo vyrovnávání se dětí s prolínáním aditivní a multiplikativní struktury v zadání.

Práce se snažila ukázat dětské manipulace se zlomky v různých jejich významových modalitách a představy, které za těmito manipulacemi stojí. Dětem byla proto zadána sada úloh, která obsahovala všech pět uvedených interpretací zlomku. Tím bylo dosaženo pokrytí více kontextů, ve kterých mnohovýznamový koncept zlomek vystupuje. Druhá část práce tedy prezentuje úlohy, které byly dětem zadány, a zdůvodňuje jejich výběr. V této části byla dále popsána metodologická východiska a charakteristiky výzkumného procesu, postaveného především na rozhovoru s dětmi nad jejich postupy řešení.

Třetí část obsahuje analýzu dětských řešení a možných představ, které za těmito řešeními stojí. Strategie řešení u jednotlivých úloh byly kategorizovány podle způsobu řešení a uvažování. Rozdělení do typů řešení je argumentováno na příkladech postupů a úvah dětí. Poukazuje se také na souvislosti mezi strategiemi v jednotlivých zadaných úlohách.

Ve čtvrté části jsou porovnána moje zjištění a názory s názory autorů uvedených v první části práce. Diskusi lze stručně shrnout takto:

1. Analýza dat potvrdila, že děti mají problémy s vyjádřením zlomků pomocí modelu číselné osy. Zároveň se však ukázalo, že vysvětlení nemohou být tak jednoduchá, jak uvádějí jednotliví autoři.

2 Polemizuji s představou, kterou prezentuje Ni (2000), o konkurenci modelů „část-celek“ a „číselná osa“ a s jeho úmyslem měřit znalost zlomku jako míry prostřednictvím srovnání velikosti dvou zlomků.

3. Poukazuji na nutnost rozlišovat mezi pojmy relativní/absolutní a multiplikativní/ aditivní spolu s nutností vidět rozdíl mezi vnějším projevem dítěte a jeho skutečným uvažováním.

4. Práce prokázala nutnost přesného popisu podmínek zadání úloh a detailního zkoumání, jak děti v dané úloze postupují a jak o ní v průběhu řešení přemýšlejí. Po zkušenostech z vlastní analýzy se zpětně domnívám, že tento požadavek není ve vztahu k literatuře zdaleka banální a samozřejmý. Domnívám se, že v literatuře, kterou jsem měla k dispozici, zůstávají tato detailní, avšak podstatná rozlišení často pod „prahem vnímání“ autorů. Přitom zdánlivě drobné odlišnosti uspořádání, postupu či vyjádření dětí mohou výrazně měnit kontext úvah, které stojí za formálně stejnými řešeními.

5. Práce dále ukázala problematičnost jazykového osvojení matematických výrazů. Ukázala, jak se dítě musí naučit vnímat zadání úlohy podle požadavků matematického kontextu a že tato dovednost není nic samozřejmého.

6. Diskutuji s pojetím pěti interpretací zlomku podle Lamon (1999). Docházím mj. k závěru, že vyčleňovat interpretaci zlomku jako míry jako svébytnou není potřeba. Na základě analýzy dětských řešení navrhuji také poněkud odlišné chápání pojmu „jednotkování“.

7. Ukazuji dále prolínání jednotlivých interpretací či významových modalit zlomku a docházím k závěru, že hranice mezi jednotlivými interpretacemi zlomku není tak ostrá, jak ji Lamon prezentuje.

Prolínání jednotlivých interpretací zlomku se ukázalo v dětských řešeních. Jednotlivé interpretace zlomku jsou v dětských řešeních přítomny, ale jejich výskyt není závislý na typu příkladu. Typ úlohy nijak jednoznačně nevyvolával u dětí určitou významovou interpretaci zlomku, ačkoli úlohy byly voleny ve shodě s vymezením Lamon a právě s tímto předpokladem. Docházím tak k závěru, že vymezení pěti typů interpretací zlomku je pro popis dětských pohledů na významy zlomků a pro popis druhu úlohy nepřesné.

8. Práce také ukázala, jakým problémem je pro děti orientovat se v různých kontextech mnohovýznamového konceptu, jakým je zlomek. Uchopení zlomkového konceptu vyžaduje propojení mnoha kontextů a flexibilní pohyb mezi nimi, který není zřejmě možné osvojit si jinak než prostřednictvím různorodého používání zlomku v činnosti dítěte.

Literatura

ČÁP, J., MAREŠ, J. *Psychologie pro učitele*. Praha : Portál, 2001.

DIVÍŠEK, J., a kol. *Didaktika matematiky pro učitelství 1.stupně ZŠ*. Praha : SPN, 1989.

EMPSON, S. B. Equal sharing and shared meaning : The development of fraction concepts in a first – grade classroom. *Cognition and Instruction*, 1999, 17 (3), p. 283 – 342.

HEJNÝ, M. Unit fraction is a pivot concept to fraction. In NOVOTNÁ, J., ed. *Proceedings SEMT 03*. Praha : UK-PedF, 2003, s. 83-87.

HEJNÝ, M., a kol. *Teorie vyučovania matematiky 2*. Bratislava : SPN, 1989.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. Praha : Portál, 2001.

LAMON, S.J.: *Teaching Fraction and Ratios for Understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. NJ, Mahwah : LEA, 1999.

LAMON, S.J. *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. NJ, Mahwah : LEA, 2006.

MAREŠ, J., OUHRABKA, M. Dětské interpretace světa a žákovo pojetí učiva. In ČÁP, J., MAREŠ,J. *Psychologie pro učitele*. Praha : Portál, 2001, s. 411-440.

MERENLUOTO, K. The cognitive – motivational profiles of students dealing with decimal numbers and fractions. In GATES, P., ed. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Norway, July, 2004, vol. 3, p. 297 – 304.

MOLNÁR, J., a kol. *Matematika 8*. Praha : Prodos, 2000.

MOLNÁR, J., a kol. *Matematika 7*. Praha : Prodos, 1999.

NI, Y. How valid is it to use number lines to measure children ´s conceptual knowledge about rational number? *Educational Psychology*, 2000, vol. 20, no. 2, p. 139 – 152.

PIAGET, J. *Psychologie inteligence*. Praha : SPN, 1966.

RENDL, M. „Matematické myslení“ v testu Stanford-Binet: od 2. do 5. třídy. In Pražská skupina školní etnografie. *5. třída* [online]. Praha : PedfUk, 2000 [cit. 2006-07-15]. Dostupné na Internetu: <http://web.pedf.cuni.cz/kpsp/etnografie/>.

SAXE, G.B., GEARHART, M., SELTZER, M. Relations between Classroom Practices and Student Learning in the Domain of fractions. *Cognition and Instruction*, 1999, 17 (1), p. 1-24.

STEINBERG, R., et al. Using children's thinking to improve teaching of fraction: Can be 3/12 be the same as ¾? In NOVOTNÁ, J., ed. *Proceedings SEMT 03*. Praha : UK-PedF, 2003, s. 144-147.

STERNBERG, R. J. *Kognitivní psychologie*. Praha : Portál, 2002.

TICHÁ, M. Following the path of discovering fraction. In NOVOTNÁ, J., ed. *Proceedings SEMT 03*. Praha : UK-PedF, 2003, s. 17-26.

TICHÁ, M. Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky. In AUSBERGEROVÁ, M., ed., NOVOTNÁ, J., ed. *6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Mariánské lázně : JČMF, 1998, s. 133-138.

TREJBAL, J., a kol. *Matematika 7 : l.díl*. Praha : SPN, 1997.

TREJBAL, J. *Matematika 8*. Praha : SPN, 1998.

VYGOTSKIJ, L.S. *Vývoj vyšších psychických funkcí*. Praha : SPN, 1976.

WEINBERG, S.L. *Is there a connection between fractions and division? Student´s inconsistent responses*. Presented at the Annual meeting of the American educational research association, Seattle, WA, April, 2001.

Přílohy

1 Tabulka s pěti interpretacemi 3/4

Rational Number Interpretations of 3/4	Meaning	Selected Classroom Activities
Part-Whole Comparisons With Unitizing "3 parts out of 4 equal parts"	3/4 means three parts out of four equal parts of the unit, with equivalent fractions found by thinking of the parts in terms of larger or smaller chunks. 3/4 pies=12/16(1/4 pies)=(1a1/2)/2 (pair of pies)	Unitizing to produce equivalent fractions and to compare fractions
Measure "3(1/4 units)"	3/4 means a distance of 3(1/4 units) from 0 on the number line or 3 (1/4 units) of a given area.	Successive partitioning of a number line; reading meters and gauges
Operator "3/4 of something"	3/4 gives a rule that tells how to operate on a unit (or on the result of previous operation); multiply by 3 and divide your result by 4 or divide by 4 and multiply the result by 3. This results in multiple meanings for 3/4: 3(1/4 units), 1(3/4 unit) and 1/4(3-unit)	Machines, paper folding, xeroxing, discounting, area models for multiplication and division
Quotient "3 divided by 4"	3/4 is the amount each person receives when 4 people share a 3-unit of something	Partitioning
Ratios "3 to 4"	3:4 is a relationship in which there are 3 A´s compared, in a multiplicative rather than an aditive sense, to 4 B´s.	Bi-color chip activities

(Lamon, 2006, s. 220)

2 Ukázka práce s jedním dítětem: transkripce kamerového záznamu

Pavel

úloha 1

1a

J: Rozumíš tomu zadání?
D: No, rozumím. Tady to je celek, takže to mám rozdělit asi na dvě půlky.
J: Máš celek. A nejdřív ho rozděl na to, co je tady napsaný na začátku. Takže například, nejdřív ho rozdělíš na třetiny a pak mi napíšeš, kolik jsou 2/3, jo? Tak zkus nejdřív to áčko. Rozděl ten celek na třetiny.
D: Takže 2/3, to je něco jako tři čtvrtě, to je skoro celý. ......2/3....tak to bude takhle (zakresluje viz a/1[21]).
J: A teď mi řekni, jak jsi na to přišel.
D: No přišel jsem na to, že 2/3 to je skoro jako tři čtvrtě tý ..
J: Aha. Ale já bych teď potřebovala, abys používal ty pojmy přesně. Takže 2/3 nemůžou bít jako ¾, protože to je jiný číslo. A je dobře, že máš takovej odhad, ale já to potřebuju přesně. A tohle je jen takovej odhad.
D: ....
J: A tak mi neříkej, kolik jsou 2/3, ale nejdřív mi ten celek rozděl na třetiny. Já ti dám novej papír, jestli chceš.
D: Jó, už vím, já jsem to udělal špatně. To bude jako ten celej. Takže tohle budou 2/3 (kroužkuje dva řádky, viz papírek a/2).
J: Tohle jsou dvě třetiny?
D: Ne. Když to vemu takhle (ukazuje na a/1), tak to bude takhle (zakroužkuje čtyři tečky v zakroužkovaných 2 řádcích, viz papírek a/2).
J: No a jak jsi na to přišel teď?
D: No protože ten celek je rozdělenej na tři části. A zakroužkoval jsem 2/3 tady (ukazuje na a/1)
J: No a kde jsou ty tři části?
D: Tady je jedna, druhá, třetí (postupně ukazuje vždy dvě kuličky).
J: No a když mi ukazuješ, že tohle je jedna část, tohle druhá a tady třetí
D: tak 2/3 jsou tohle (ukazuje 4 tečky)
J: Počkej. To jo dvě části jsou zakroužkovaný. Když bereš tohle (ukazuji zakroužkované dva řádky, a/2), tak máš pravdu, ale já chci, abys bral jako celek tohle celý (ukazuji všechny kuličky). Ne je tuhle jednu část.
D: Jó úplně tohle celý.
J: Jo úplně. Tak to zkus znovu (dávám mu další papír).
D: (kroužkuje dva sloupce, viz papírek a/3).
J: A teď zakroužkovals co?
D: 2/3.
J: Jo dobře. Tak s tím souhlasím. A kde je 1/3?
D: 1/3 je takhle (udělá čáru mezi zakroužkovanými 2 sloupci).
J: Jo. Dobře. Tak teď už si rozumíme?
D: Jo.
J: Tak jo. Super. Zkus to béčko.

---

[21] Pracovní listy a „papírky“ vyplněné Pavlem jsou uvedeny v samostatné příloze za transkripcí.

1b

D: (kroužkuje šest řádků, viz papírek b). To jsem udělal 5/6, protože těch sloupců, který jsem zakroužkoval je pět (má papírek obrácený na šířku).
J: Jo dobře. Céčko.

1c

D: (otáčí papírek na šířku – počítá sloupce – opět otáčí papírek – pohybuje tužkou různě nad tečkami – ve vzduch dělá kroužky po dvou kuličkách – zakroužkuje 4 tečky).
J: No ukaž. Jak jsi to dělal?
D: ....
J: A teď jsi mi tam zakroužkoval už
D: 2/9.
J: A co je 1/9?
D: Em, to je todle to (rozpůlí 4 tečky).
J: Ehm. Dobře.

1d

D: (pohybuje různě nad tečkami ve vzduchu). Tohle je těžší trošku.
J: Ehm. Je no.
D: (opět pohybuje různě nad tečkami ve vzduchu) ....
J: Tak co tam nevychází? V čem je to těžký?
D: No, že to nejde rozdělit. Když je tam 36, tak to by mělo být na 3/12. 3krát 12, takže bych si to mohl rozdělit na .... no nevychází mi to nějak. Nemůžu přijít, na co to mám rozdělit.
J: A těch 36, ty jsi vzal jak. Teď jsi mluvil o nějakých 36.
D: To je těch 3krát 12.
J: Ehm. 3krát 12 je 36 a dá se s tím něco?
D: ..... ne .....
J: a proč jsi dělal 3krát 12?
D: To bylo špatně.
J: Třeba to nebylo špatně. Já se jen ptám, proč jsi dělal to 3krát 12.
D: No protože to je 36, to obsahuje těch koleček.
J:Ale tam je 18 těch kuliček.
D: 18 kuliček? .... no ....
J: Tys vycházel z toho, že je tam 36 kuliček?
D: no já jsem si to špatně spočítal.
J: A počítal jsi s tím takhle od začátku? Počítal sis to předtím?
D: No počítal, ale vyšlo mi to nějak jinak, já nevím.
J: A tady jsi počítal kuličky, kolik jich tam je, když jsi počítal ty devítiny? Tak sis spočítal kolik je tam kuliček?
D: nespočítal.
J: A jak jsi věděl, že to má být dvě a pak čtyři?
D: protože jsem si to rozdělil podle těch sloupců.
J: Takže sis to zkoušel, a pak sis spočítal jestli jich je tam devět?
D: jo. Jak se to dá rozdělit.
J: Jo. aha. Tak dobře.
D: .... tyhle dva, to je dvanáctina (kroužkuje dva řádky). Přišel jsem na to, protože 6/12 by byla přesně polovina, tak jsem ubral ten jeden sloupeček.
J: Ehm. 6/12 by bylo polovina.
D: No. tady. (ukazuje čáru mezi třetím a čtvrtým řádkem).

J: Souhlasím. Ale těch 5/12 jsi odhadl.
D: No odhadem.
J: Ale to není přesně. Takhle to vyjít nemá. Přibližně se trefuješ, ale není to přesně ono. A kdybys to měl dělat přesně. Jak bys to dělal?
D: Em. když tohle je vlastně těch 12/12 všechny ty kolečka. Tohle je ta ½ z 12 (ukazuje 3 řádky). Takže 5/12 je když oddělám tady ten řádek. Nakonec jsem s toho udělal, aby to nebylo těch 6 ta půlka.
J: Jo. Když máš 6/12 jako půlku, tak tady to je 6/12 a tady taky 6/12 (kreslím do papírku), takže když těch 6/12 rozdělím na půlku, tak jak to bude? A nebo když těch 6/12 budu dělit třema, tak získám 2/12 a to bude tady ten sloupec (tři kuličky – je to našířku). Ty mi vlastně ukazuješ 2/12. To cos tady zakroužkoval jsou 2/12. Teda vlastně 4/12. To cos zakroužkoval jsou 4/12. Ne 5/12. No a když už víš, co jsou 2/12, tak se to dá udělat, ne?
D: To bude tohle. (zakroužkuje 2 tečky).
J: A jak jsi na to přišel?
D: No, že jsem zase rozdělil.:-), ale to je zase odhadem, není to přesně
J: No tak podívej. Přesně víme, že tohle je 6/12. To víme přesně to není odhad. To je jasný. Teď tady máš tři sloupce. Takže 6 děleno třema je dva. Takže tohle budou 2/12 (kroužkuji sloupec a píšu 2/12). Pomůže ti to?
D: No, ale to musím ten puntík rozdělit na půlku.
J: No.
D: To de?
J: Jo to de.
D: No tak to já jsem nevěděl. Tak to teda bude takhle (dá dohromady 1 a půl kuličky). To já nevěděl, že se to může půlit.
J: Jo, může. Dobrý. Tak co je teda 1/12. Ještě mě to tam pořádně zvýrazni, co je 1/12.
D: No to je takhle ten puntík a půl.
J: Ehm. Jo dobře, tak jo. Tys nad tím už uvažoval, že se to může půlit?
D: No uvažoval, ale když jsou tam ty puntíky plný, tak mi to přišlo nějaký divný.
J: Jo. Dobře. A těch 5/12? Kolik by to potom bylo teček?
D: No takhle (dělá množinu viz papírek)
J: Jo dobře. Tak Super. Teď ještě éčko.

1e

D: (zase si to otáčí na šířku – počítá kuličky v prvním řádku a posledním sloupci – kroužkuje 4 tečky).
J: Ehm.
D: je tam 18 puntíků, tak jsem 4 označil.
J: Ehm. 1/18 je teda co?
D: 1 puntík.
J: Jo. ... No. Super. Výborně. Zkus tu dvojku.

úloha 2

D: (počítá si počet čtverečků). .... Mám to jako zakroužkovat?....Jo, to je 16/4.
J: Můžeš kroužkovat, klidně, jestli chceš. Já potřebuju nějak popsat a vysvětlit, že to znázorňuje 16/4. Aby to sedělo. A můžeš s tím dělat cokoliv. A nemusíš s tím dělat nic. Mě je to jedno, ale potřebuju, abys mi ukázal, že to vyjadřuje 16/4.
D: No takže ta jedna kostička je ¼ a tady jsou ty 4 celky (ukazuje od prvního k poslednímu čtverečku).
J: Ehm. Jo dobře. Souhlasím. Jo ještě mi řekni, kde jsi vzal ty 4 celky. Já souhlasím, že tam jsou. Jak jsi na to přišel?

D: No 4 celky protože jsem si spočítal, že těch čtverečků je 16, takže když tam má být 16/4, tak ten jeden čtvereček je vlastně ta čtvrtina.
J: Ehm. A co dál? Jak jsi tam dostal ten celek? Ty 4 celky?
D: No protože 4krát 4 je 16.
J: Jo, dobře. Jasný. Souhlasím s tímto vysvětlením. No tak trojka.

úloha 3

D: .... Došel jsem k tomu tak, že každý dítě musí mít tři čtvrtě tý čokolády, 4 tyhle čtverečky.
J: Ehm.
D: Protože, aby to bylo stejný, protože když rozdělím tady ty 4 čtverečky, tak jsou tam 6krát.
J: Ehm. Takže každej dostane tady ty čtyři čtverečky?
D: Jo.
J: Tak s tím souhlasím. Ale prosím tě, zase jsi tam hodil nějaký ¾ nebo co. Ty to vždycky nějak odhadneš. Je to přesně tři čtvrtiny?
D: ...... No, to je nějaký 4/6.
J: Tak co to teda je?
D: To jsou 2/3.
J: Ehm.
D: 4/6, 2/3.
J: Ehm.
D: Tak na to jsem přišel, že jich tam je šest v tý čokoládě, těch obdélníčků, a když tedy to, tak 4/6, a to když vydělím, tak jsou to 2/3.
J: Tak já souhlasím s tím, že to jsou 2/3, ale neříkej mě, že 2/3 jsou to samý jako ¾.
D: No není.
J: No není. Ty to tam, jen tak flákneš, jak ti to připadá. Alespoň mě se to tak zdá.
D: No připadá. Je to tak.
J: No tak to je potřeba si to ověřit :-) Ale jo správně, jsou to 2/3. To bysme si to museli jinak strukturovat. Rozdělit na čtvrtiny tu čokoládu, aby jsme přesně věděli, jak jsou ¾.
D: Ale opticky to tak vypadá.
J: No jo. Tak perfektní. Když jsi to vyjádřil z toho (čokoláda), tak jsou to 4/6, a kdybys to měl zlomkem vyjádřit ještě jinak? Šlo by to?
D: No šlo by to. Těch 6/4 nebo 12/8.
J: Jo. Ale kdybych to nechtěla vyjádřit z té jedné čokolády, ale chtěla to vyjádřit ze všech těch 4 čokolád? Dalo by se to vyjádřit zlomkem nějak? Že bys ten celek měl ty 4 čokolády, a ne tu jednu.
D: .... 12/18.
J: Proč 12/18?
D: Podle počtu těch čtverečků. 6krát 2 je 12 a 6krát 3 je 18. Tak 12/18.
J: 6krát 2?
D: No protože to jsou 2/3.
J: A tys říkal podle počtu čtverečků.
D: Em. Podle počtu dětí, které si to mají rozdělit.
J: Já ale chci, abys vzal jako celek ty 4 čokolády.
D: To jsou 4 celky.
J: A kdybych nechtěla abys to bral jako 4 celky, ale abys to bral jako 1 celek? Abys ty 4 čokolády bral jako jeden celek.
D: Šlo by to. To by bylo, když má každej 6.
J: Každej má 4.
D: To by bylo 24/24.

J: Jo. 24/24 by byl ten celek. A kolik by mělo to jedno dítě?
D: No ¼.
J: No jak jsi přišel na ¼?
D: To je těch dětí šest. A 24 děleno 6 je 4.
J: To jo to souhlasím. 24 děleno 6 jsou 4, což jsou ty 4 obdélníčky. Ale není to ¼ z těch 24 čtverečků.
D: ....
J: Když máš 24 čtverečků a celek je 24/24, jak jsi správně řekl, tak ten 1 čtvereček je co?
D: ....
J: Já tě tady nechci trápit, ale já vím, že to víš. Když jedna tečka z 18 teček, byla 1/18. Tak když tady máš 24 obdélníčků, tak ten jeden je co?
D: No, 1/24.
J: No. Takže ty 4?
D: 4/24.
J: No takže se to dá brát ze dvou pohledů. Ze 4 čokolád dostane 4/24 a z jedná čokolády dostane 2/3. Tak jo. Já vím, že to víš, takže proto se k tomu vždycky chci dostat. Tak jo. Můžem na tu čtverku. Nebo víš co. Nejdřív mi zkus spočítat tu pětku[22].

úloha 5

D: ....Takže těch 42 musíme rozdělit na tři části a vo jednu část má víc ten Martin. Takže 42 děleno 3. To nejde. Ne de vlastně. Takže 14. ....Takže Jirka má....56 kuliček....A přišel jsem na to tak, že 42 jsem vydělil 3. To je 14 a Jirka má mít o 1/3 víc takže 42 plus 14 je 56.
J: To není dobře, protože oni mají dohromady 42 kuliček. Když mají dohromady 42 kuliček, tak jak může mít najednou Jirka 56. Mají dohromady jen 42 kuliček. Ty nemáš 56 kuliček. Těch 42 se musí nějak rozdělit a nemůže mít někdo víc
D: jo chápu, chápu ...... Tak to musí být mínus 14. ....Tak 28. Tak Jirka má 28.
J: Jo. Dobrý. Jestliže budeš tu 1/3 brát z těch 42, tak ten výsledek je správný, ale kdybys tu 1/3 nebral z těch 42, ale z toho, co má Martin?
D: No Martin má těch 28
J: Ale nepoužívej ty starý výsledky. Kdybys hned ze začátku, než sis spočítal kolik kdo má, to zkus jinak.
D: No tak bych si udělal tři sloupce, rozdělil kuličky do třech sloupců, a pak bych zakroužkoval jednu část. (viz papír)
J: No, ale tím pádem bys to zase dělil třema, zase bys 42 vydělil 3, takže by ti zase třetina vyšla 14. Takže by to byl v podstatě ten stejnej výsledek. Ale jinej postup, tak dobrá. A já ti ještě zkusím dát podobnou úlohu. A ty mě řekneš, jestli je to jiný nebo stejný. ....Co kdybych ti to zadala takhle(úloha A).
D: ..... Mě to přijde jiný.
J: Jo a v čem.
D: Že to má vlastně vo 1/3 z toho, co má Martin. Předtím jsme počítali z toho, co mají dohromady.
J: Ehm. A šlo by to nějak spočítat? Z takovýho zadání?
D: Šlo. To musím odečíst 28 z těch 42. Tak to je 14. A 1/3 z těch 14ti ....
J: Takže bys dělal jako dvakrát 1/3. Jednou bys udělal 1/3 ze 42, a pak děláš ještě další třetinu ze 14, jo?
D: Jo.

[22] Některé děti počítaly úlohu 5 dříve než úlohu 4. Chtěla jsem vyzkoušet, jak bude dítě řešit úlohu 5 předtím, než bude ovlivněno výpočtem úlohy 4. Nebo-li zda počítání úlohy 4 významě ovlivňuje řešení úlohy 5. Zjistila jsem, že nikoliv.

J: A když ti dám to béčko?
D: To bych vlastně přičet k těm 42 tu 1/3.
J: Proč?
D: Protože to je z celkového množství těch 42 a on má o 1/3 víc.
J: A to celkový množství jako teprve zjišťuješ, když tam přičítáš?
D: No z toho bych udělal 1/3 a tu bych tam přičet.
J: Z těch 42 bys udělal 1/3.
D: No a k těm 42 bych to přičetl.
J: Takže to by bylo jako na začátku, jak ti vyšlo 56?
D: Jo. Já nevím jestli je to špatně.
J: No špatně je to v tom, že oni mají dohromady 42, takže víc prostě mít nemůžou.
D: No tak to je tím pádem to samý.
J: Tím pádem to samý, jako co?
D: Em ... jako tadle (původní) úloha.
J: Jo. Dobře, tak zkus to céčko.
D: ....To je taky to samý.
J: Jako co?
D: jako ta pětka.
J: a to déčko?
D: To je jiný v tom, že má o 1/3 kuličky.
J: Ehm. A jak by to bylo? Jak bys to dělal, kdybys mohl tu kuličku rozdělit na třetiny.
D: No na tři kousky.
J: Jo, ale jak by to bylo.
D: Tak to by měl těch 28 kuliček a 1/3 ..... no prostě o 1/3 kuličky by měl víc.
J: No jo, ale kolik by měl Martin a kolik by měl Jirka.
D: No tak musíme odečítat Martinovi o 1/3 tý kuličky.
J: A kolik bude mít Martin, než mu začneš odečítat tu 1/3?
D: Ten by měl 13 a 2/3 kuličky. ... Ne to by neměl .... Ne 12 a 2/3 kuličky.
J: A vide ti to potom 42? A kolik bude mít potom Jirka a kolik Martin?
D: .... Ne takže to musíme rozdělit na 21 takže 20 a 2/3 a Jirka ten by měl 21 a 1/3 kuličky.
J: No tak dobře. Můžeme jít na čtverku.

úloha 4

D: No tak to je lehký.
J: Jo je. Tak jak to je?
D: No vyhrála 10 závodů.
J: Vyhrála nebo prohrála, já jsem to dobře neslyšela.
D: No vyhrála.
J: Vyhrála 10 závodů. Jo dobře. A jak jsi to počítal?
D: 15 a má to bejt 2/3 vyhrála, takže $15 \div 3 \times 2 = 10$.
J: Dobře. Teď zkus 6.

úloha 6

D: Tady to pokračuje dál ta osa?
J: Ehm.
D: ....
J: Tak co?
D: To by mělo bejt tady ty 2/5 (na 13.té čárce, viz pracovní list).
J: Ukaž? A teď jak jsi na to přišel.

D: No přišel jsem na to, ale nevím jestli to jde. O jednu jsem zvětšil tu 4 a 3 a udělal jsem z toho 4/5, ale to je asi špatně, že? A o dva míň by byly 2/5.
J: No, tak to je špatně.
D: No jo, je to špatně.
J: A proč je to špatně?
D: Protože to tak nejde.
J: A proč to tak nejde?
D: V pravidlech to nejde.
J: Jo. Nemůžeš tam jen tak něco přičíst. Kdybys přičítal jedničku, tak by to vyšlo jinak. Kdybys ke ¾ přičítal jedničku, tak by to přece vyšlo úplně jinak.
D: Hm.
J: Ale je dobrý, že sis to chtěl nějak převést na ty pětiny.
D: To musím dostat nějakým způsobem na pětiny, a teď jak.
J: No ¾ půjde na pětiny hodně těžko, ale nějak to převést, abys to mohl porovnat.
D:............ Jo už vím jak. Musíme najít u těch zlomků společný číslo. Tak to bude 20 třeba. Tady to musíme zvýšit 5krát to je 15/20 a tady 4krát, 8/20. .... (Počítá čárky od ¾ dál). ...... Tady (počítá čárky od ¾ k nule – zastaví se na osmé čárce od nuly - píše 2/5 na osmá čárce).
J: No a jak jsi na to přišel?
D: Udělal jsem, aby měli to společný číslo, toho činitele. 4krát 5 je 20, 15 a 20. No a 15, aby jsme došli k tý osmičce, tak to musím mínus 7, takže jsem si odpočítal 7 těch
J: No jasně. Jo dobře. Souhlasím. Takže sis to převedl na společnýho jmenovatele, a tím pádem jsi to mohl dobře porovnat, jaký je mezi tím vztah. Takže jsi vědět, že když tohle je 15/20, tak tady je 8/20. No výborně souhlasím. A šlo by to ještě nějak jinak? .... Přes celky.
D: No to bych musel najít, ty 4/4.
J: Ehm. Tak kde by byly 4/4?
D: Ty by byly tady (ukazuje na jednu čárku za ¾) za tím.
J: Hned za tím? Tak to se mi nezdá. Představ si, že tahle celá vzdálenost jsou ¾, a tady ta malinká část by byla ¼. To je strašný nepoměr. Když víš, že tahle vzdálenost jsou ¾, tak kde jsou 4/4.
D: Takže to zase musím rozdělit na tři kousky tady. (počítá počet čárek ke ¾ - napočítá pět čárek včetně nuly – zvýrazní 4 čárku – napočítá 5 - zvýrazní 9 čárku – napočítá 5 čárek za ¾ - zvýrazní – píše 4/4).
J: Ehm. Takže to máš po pěti. No super. A když teď víš, že tady je celek. Tak jak bys potom zjistil, kde jsou 2/5.
D: .... To bych zase musel rozdělit na 20 těch kusů. Kdybych to chtěl vypočítat.
J: Proč na 20.
D: No aby to mělo toho společnýho jmenovatele.
J: Aha. No tak ty bys to zase řešil přes společnýho jmenovatele, jak už jsi dělal tady. No tak já bych to třeba řešila tak, že bych ty 4/4....(vysvětluji jak pokračovat dál).

úloha 7

D: .... Můžu napsat do těch zlomků desetinný číslo.
J: Jo můžeš.
D: (píše 1/8,2) ....
J: A nad čím teď přemýšlíš?
D: Aby to bylo mezi.
J: Takže hledáš teď to druhý?
D: Teď hledám toho druhýho, no? Vlastně aby to vyšlo ještě k tý osmičce. ....
J: A teďka mi řekni, jak to hledáš.

D: (přepisuje 1/8,2 na 1/8,325). No aby to bylo desetinný číslo, nejdřív v desetinách, ale to mi nějak nešlo, takže v setinách. Tak jsem se snažil 100 děleno 3. To mi taky nešlo. Tak jsem to musel rozdělit ještě na víc. ... Musím najít v setinách, aby se tam vešli ty dvě čísla do těch devítin, ještě stou jednou osminou. Jedna osmina celých a ještě dvě čísla.
J: Takže teď tam máš číslo 8,25?
D: ne 325.
J: Je to 1/325?
D: Jo.
J: A tady to předtím jako nic?
D: 8,25 jsem myslel.
J: A proč jsi zavrhl to 8,25.
D: Protože jsem zapomněl, že tam mají být 2 čísla a ně tři. Já jsem to vlastně rozdělil na 4 kousky. Protože 4krát 25 by bylo 100. Jenže já potřebuju dva kousky a třetí aby byl 1,9, takže tu stovku na tři rozdělit.
J: Aha. Takže rozděluješ stovku. .... Ale já nepotřebuju 100 rozdělit nějak pravidelně. Mě stačí tam najít jakýkoliv dva zlomky mezi těma dvouma zlomkama. To nemusí být nějak pravidelně.
D: Jo takže to může bejt 1/8,1 a 1/8,8.
J: Ehm. Jo.
D: :-) A já to tady tak počítal.
J: No. A když ti teda vezmu, napiš mi tam ty dvě čísla, že to bude 1/8,1 a 1/8,8. Já ti to teda vezmu, i když tam máš desetinný číslo. Ale takhle se to normálně nepíše. Takže bys to musel nějak převést na zlomek, když chci dva zlomky.
D: To bych musel vydělil.
J: Že bys dělil 1 děleno 8,1?
D: No a pak by mi vyšlo nějaký číslo.
J: No to by ti vyšlo nějaký číslo mezi tím. A ještě se tě zeptám, co je větší 1/8 nebo 1/9.
D: 1/8.
J: Jo. Jasně. Tak zkus tu osmičku.

úloha 8

D: .... A zase to mám ve zlomcích vypočítat?
J: Jak chceš to můžeš vypočítat. Klidně ve zlomcích.
D: .... No víc šizenej je ten pomerančovej.
J: A proč?
D: No protože když to máme v tom poměru, sem vypočítal 3krát 12 je 36. Tady je těch odměrek 30 a tady 3krát 16, 48. A když to vezmeme v tom poměru, tak tady je to o 6 míň a tady o 12 míň.
J: No tak to mi zkus napsat. Protože jak jsi to teď říkal, tak já jsem si nestihla ověřit, jestli o tak je nebo ne. Tak mi to zkus napsat a ukázat mi to na tom.
D: Tak třeba (píše viz pracovní list). ... No tak to je obráceně.
J: No počkej, tak jak to je?
D: Tak já jsem to udělal tak, že jsem udělal 2krát 12 a vyšlo mi 24 a 2krát 16, 32. 2krát 12 má dál do těch 30, takže tam má víc odměrek, a když to udělám 2krát 16, tak to je 32 a těch odměrek je jen o 4 víc, takže to bude víc šizený. Je tam víc těch odměrek vody.

Hlášení. Rozluštím jen něco:

D: Tak to tam bude zase desetinný číslo. Tou 12 se do těch 30 nedostanu. Tak tam musím použít to desetinný číslo.

J:Myslíš jako, že bys dělil 30 dvanácti a to ti nevyjde celý číslo, tak pro to se do toho nedostaneš? Nebo co znamená: 12 se do 30 nedostanu?
D: No že bych musel použít 3krát 12, abych zjistil v jakým je to tam poměru. No a tou 12, když udělám 3krát 12, tak je to 36. Do tý 30 se nedostanu.
J: Aha. Jo takhle.
D: Že by to nemohlo být 2krát ani 3krát, ale nějaký desetinný číslo.
J: A kdybys to zjistil, tak co by ti to říkalo o tom druhým číslu, jakým způsobem bys to porovnal?
D: Mě by přišel jako nelepší způsob, že bych to vydělil a čím by mi vyšlo větší číslo, tím je to víc šizený tou vodou.

3 Ukázka pracovního listu

Následuje zkopírovaný Pavlem vyplněný pracovní list a „papírky“, na které znázorňoval řešení podúloh první úlohy. Pavlův pracovní list slouží zároveň jako ukázka materiálu, který měly děti před sebou.

Tuvel

1/3 kaze

1. Rozděl celek tvořený tečkami vpravo:

a) na třetiny. Kolik teček obsahují $\frac{2}{3}$?

b) na šestiny. Kolik teček obsahuje $\frac{5}{6}$?

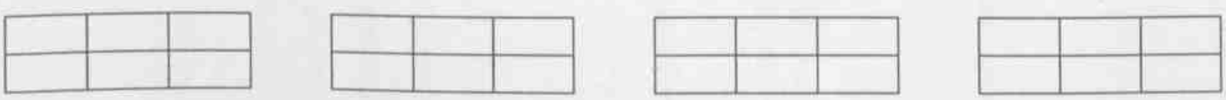
c) na devítiny. Kolik teček obsahují $\frac{2}{9}$?

d) na dvanáctiny. Kolik teček obsahuje $\frac{5}{12}$?

e) na osmnáctiny. Kolik teček obsahují $\frac{4}{18}$?

2. Dotvoř následující skupinu čtverečků tak, aby bylo zřejmé, že vyjadřuje $\frac{16}{4}$.

3. Šest dětí má tyto čtyři čokolády k rozdělení. Každé dítě má dostat stejně. Jakým způsobem se mohou rozdělit?

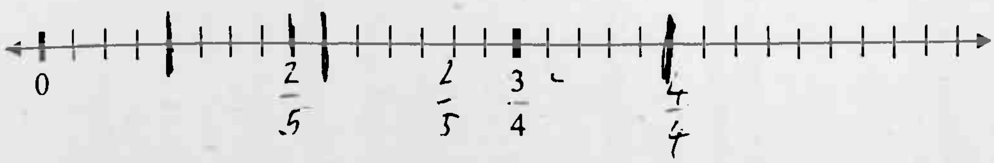


Tomek

4. Katka se zúčastnila patnácti závodů v plavání a $\frac{2}{3}$ z nich vyhrála. Kolik jich prohrála?

5. Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. Jirka jich má o $\frac{1}{3}$ víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

6. Jestliže víš, kde na ose leží $\frac{3}{4}$, vyznač na ní $\frac{2}{5}$.



7. Napiš dva zlomky, jejichž velikost je mezi $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{9}$.

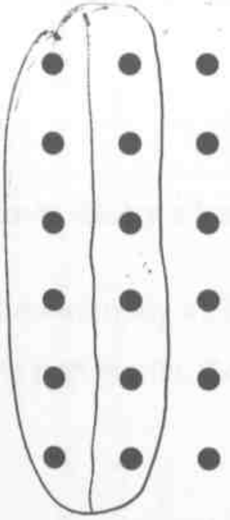
$\frac{1}{8{,}325}$ $\frac{1}{8{,}1}$; $\frac{1}{8{,}8}$

8. Ve špatném baru míchají pomerančový a banánový džus s vodou.
V pomerančovém džusu je 12 odměrek šťávy a 30 odměrek vody. V banánovém džusu je 16 odměrek šťávy a 36 odměrek vody. Který druh džusu je míň šizen?

$2 \cdot 12 = 24$

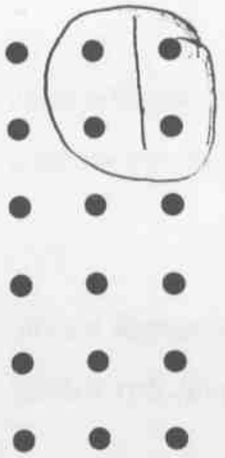
$2 \cdot 16 = 32$

)3

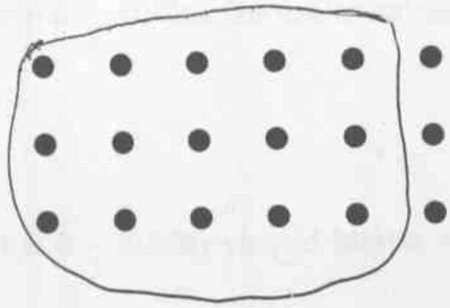


/2

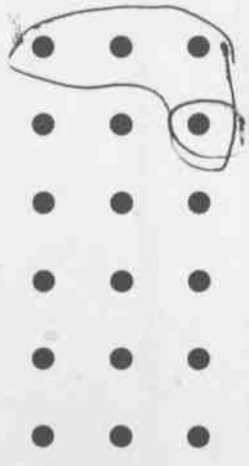
c)



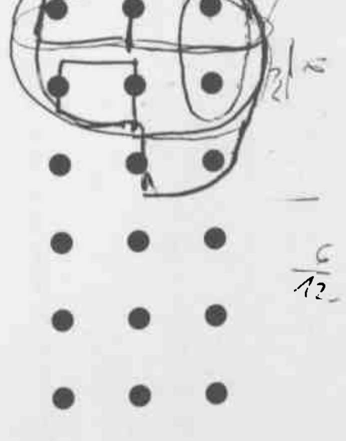
D)



e)



d)



4 Zadané varianty úlohy s kuličkami

Jirka a Martin maji dohromady 42 kuliček. Jirka má o $\frac{1}{3}$ kuliček (z počtu kuliček, které má Martin) víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. Jirka má o $\frac{1}{3}$ kuliček z celkového množství víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

Jirka a Martin mají dohromady 45 kuliček. Jirka má o $\frac{1}{3}$ kuliček (ze svého množství kuliček) víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?

Jirka a Martin mají dohromady 42 kuliček. Jirka má o $\frac{1}{3}$ kuličky víc než Martin. Kolik kuliček má Jirka?