MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁRSKA PRÁCA

Maximilián Palko

Komonotónní rizika ve finančních a pojistných aplikacích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce:	RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Študijný program:	Matematika
Študijný obor:	Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Názov práce: Komonotónní rizika ve finančních a pojistných aplikacích

Autor: Maximilián Palko

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V poistnej matematike sa často zaujímame o rozdelenia náhodných vektorov. Niekedy ale tieto rozdelenia bývajú príliš zložité. V tejto práci sa budeme zaoberať tým, ako nájsť aproximáciu náhodného vektora, ktorej rozdelenie budeme vedieť určiť jednoduchšie. Zmienené aproximácie budeme hľadať pre súčty najmä závislých náhodných veličín. Zistíme, ako nám s týmto problémom pomôže závislostná štruktúra s názvom komonotónia. Za aproximáciu náhodného vektora si vezmeme jeho komonotónnu verziu. To sa ukáže ako „rizikovejšia“ cesta, ale so znalosťou závislostnej štruktúry komonotónneho vektora budeme schopní určiť jeho rozdelenie. V závere práce ilustrujeme využitie nadobudnutých poznatkov o komonotónii na príkladoch.

Kľúčové slová: komonotónia, komonotónny náhodný vektor, súčty náhodných veličín

Title: Comonotonic risks in financial and insurance applications

Author: Maximilián Palko

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In actuarial mathematics we are often interested in distribution of a random vector. Sometimes these distributions might be too complicated. In this thesis we are going to study how to find an approximation of the random vector for which the distribution would be easier to obtain. Especially we will look for approximations of sums of random variables. We will find out how this problem could be solved with knowledge of a dependency structure known as comonotonocity. For approximation of the random vector we will take his comonotonic counterpart. That would be more risky way but with knowledge of the dependency structure of the comonotonic random vector we will be able to obtain its distribution. In the last part of this thesis we will illustrate the use of findings about comonotonocity on examples.

Keywords: comonotonocity, comonotonic random vector, sums of random variables

Rád by som poďakoval RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D. za cenné pripomienky a venovaný čas pri vedení tejto práce.

Obsah

Úvod

Pri práci s náhodnými veličinami a náhodnými vektormi nás zaujímajú ich rozdelenia. Aj keď poznáme jednotlivé jednorozmerné marginálne rozdelenia náhodného vektora, nie je vždy jednoduché určiť jeho združené rozdelenie. Ak však poznáme závislostnú štruktúru daného vektora, môže to hľadanie združeného rozdelenia uľahčiť. Napríklad ak vieme, že náhodný vektor sa skladá z nezávislých náhodných veličín.

Ďalšou závislostnou štruktúrou môže byť práve komonotónia. Na rozdiel od nezávislosti predstavuje komonotónia veľmi silnú závislosť jednotlivých zložiek vektora.

V tejto práci sa zoznámime s komonotóniou a pojmom komonotónny náhodný vektor. Ukážeme si viaceré ekvivalentné definície takého vektora a následne aj niekoľko jeho vlastností. Za predpokladu znalosti distribučných funkcií náhodných veličín, ktoré tvoria náhodný vektor a predpokladu komonotónie daného vektora, budeme vedieť určiť distribučnú funkciu súčtu týchto veličín.

Hneď v prvej kapitole definujeme *konvexné usporiadanie*. V druhej kapitole si ukážeme, ako aproximovať súčet náhodných veličín súčtom komonotónnych veličín. Ten bude pôvodný súčet ohraničovať zhora v zmysle *konvexného usporiadania*.

Nakoniec v tretej kapitole uvidíme aplikáciu nadobudnutých znalostí na troch rôznych príkladoch.

Teoretické poznatky tejto práce sa budú opierať najmä o článok (Dhaene a kol., 2002b), ktorý zhŕňa teóriu komonotónie z viacerých zdrojov.

1. Pomocné pojmy

Následujúce pojmy uvedené v tejto kapitole ako *stop-loss transformácia, stop-loss usporiadanie, konvexné usporiadanie* či *α-zmiešaná inverzná distribučná funkcia* sú prebraté z už spomínaného článku (Dhaene a kol., 2002b).

1.1 Konvexné usporiadanie

Vo finančnom alebo poistnom prostredí sa často stretávame s náhodnými veličinami a ich súčtami, ktoré môžu napríklad vyjadrovať výšku platieb vyplatených poisťovňou klientom pri výskyte poistných udalostí.

Avšak tieto náhodné veličiny môžu mať veľmi zložité rozdelenia. Predstavme si náhodný vektor, ktorého zložky sú náhodné platby. Môže nás zaujímať súčet týchto náhodných platieb, kde poznáme jednotlivé jednorozmerné marginálne rozdelenia. Tieto veličiny budú málokedy nezávislé. Preto nemusí byť jednoduché určiť ich združené rozdelenie. Jednou z možností je nahradiť pôvodný náhodný vektor iným vektorom so známym združeným rozdelením. V takýchto prípadoch sa väčšinou uberáme konzervatívnejšou cestou a nový náhodný vektor volíme tak, aby bol pre nás „rizikovejší“ než ten pôvodný. Jedno z kritérií na voľbu takého náhodného vektora bude *konvexné usporiadanie.* Najskôr sa budeme zaoberať *stop-loss usporiadaním.*

Pre náhodnú veličinu X si zavedieme pojem *stop-loss transformácia*:
$\mathsf{E}\left[(X-d)_+\right]$, kde $-\infty < d < \infty$.

Ak sa na to pozrieme z poistného hľadiska a vezmeme X ako výšku škody zapríčinenú poistnou udalosťou a d ako výšku spoluúčasti, tak *stop-loss transformácia* udáva strednú hodnotu platby, ktorú má vyplatiť poisťovňa.

Ak máme $-\infty < d < \infty$ a náhodnú veličinu X s distribučnou funkciou F_X, potom môžeme písať:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathsf{E}\left[(X-d)_+\right]} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-d)_+ \, dF_X(x) = \int_d^{\infty} (x-d)\, dF_X(x) = \\
&= \int_d^{\infty} \int_0^{x-d} ds\, dF_X(x) = \int_0^{\infty} \int_{s+d}^{\infty} dF_X(x)\, ds = \\
&= \int_0^{\infty} (1-F_X(s+d))\, ds = \underline{\int_d^{\infty} (1-F_X(t))\, dt.}
\end{aligned}$$

Z vyjadrenia vyššie vidíme, že *stop-loss transformácia* vyjadruje plochu meranú od d medzi distribučnou funkciou F_X náhodnej veličiny X a konštatnou jednotkou.

Definícia 1. *Nech pre dve náhodné veličiny X, Y a pre všetky $d \in \mathbb{R}$ platí $\mathsf{E}[(X-d)_+] \leq \mathsf{E}[(Y-d)_+]$. Potom píšeme $X \leq_{sl} Y$ a nazývame to stop-loss usporiadanie.*

V prípade platnosti $X \leq_{sl} Y$ je vidieť, že Y nadobúda vyšších hodnôt s väčšou pravdepodobnosťou než X a teda skutočne vyzerá byť „rizikovejšia“.

Ukážeme si, že $X \leq_{sl} Y$ implikuje $\mathsf{E}[X] \leq \mathsf{E}[Y]$.
Ak máme $x, d \in \mathbb{R}$, potom platí

$$d + (x-d)_+ = d + \max(x-d, 0) = \max(x, d).$$

Z toho vyplýva, že $d + \mathsf{E}[(X-d)_+] = \mathsf{E}[\max(X, d)]$ a taktiež platí

$$\lim_{d \to -\infty} (d + \mathsf{E}[(X-d)_+]) = \mathsf{E}[X].$$

Nakoniec za predpokladu $X \leq_{sl} Y$ dostávame:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[(X-d)_+] &\leq \mathsf{E}[(Y-d)_+], \quad d \in \mathbb{R} \\ d + \mathsf{E}[(X-d)_+] &\leq d + \mathsf{E}[(Y-d)_+], \quad d \in \mathbb{R} \\ \mathsf{E}[\max(X,d)] &\leq \mathsf{E}[\max(Y,d)], \quad d \in \mathbb{R} \\ \lim_{d \to -\infty} \mathsf{E}[\max(X,d)] &\leq \lim_{d \to -\infty} \mathsf{E}[\max(Y,d)] \\ \mathsf{E}[X] &\leq \mathsf{E}[Y]. \end{aligned}$$

Pri nahrádzaní jednej náhodnej veličiny druhou je dobré, aby sa od seba líšili čo najmenej a dostali sme rozumnú aproximáciu. V našom prípade vidíme, že ak $X \leq_{sl} Y$ a my chceme byť s Y čo najbližšie X, je rozumné požadovať rovnosť ich stredných hodnôt. To nás privádza k definícii *konvexného usporiadania.*

Definícia 2. *Majme dve náhodné veličiny X a Y. Povieme, že X je menšia alebo rovná ako Y v zmysle konvexného usporiadania práve vtedy, keď*

$$E[X] = E[Y] \quad \& \quad \forall d \in \mathbb{R}: \; E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+].$$

Píšeme $X \leq_{cx} Y$.

Jedno z už spomínaných kritérií hľadania vhodnej aproximácie pôvodného náhodného vektora iným „rizikovejším“ vektorom bude, aby súčet zložiek nového vektora bol v konvexnom usporiadaní väčší alebo rovný ako súčet zložiek pôvodného vektora.

1.2 Inverzná distribučná funkcia

Ďalší pojem, ktorý budeme v tejto práci používať, je inverzia distribučnej funkcie tiež nazývaná aj kvantilová funkcia.

Majme náhodnú veličinu X s distribučnou funkciou $F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$. Vieme, že distribučná funkcia je neklesajúca a zprava spojitá.

Klasická bežne používaná definícia inverznej distribučnej funkcie je:

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\}, \quad p \in [0,1], \tag{1.1}$$

kde berieme do úvahy $\inf(\emptyset) = \infty$.
V prípade, že F_X je ostro rastúca funkcia, tak potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_X^{-1}(F_X(x)) = x.$$

Ak je ale F_X len neklesajúca, čiže môže mať aj konštatné časti, tak potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x.$$

Vidíme teda, že takto definovaná inverzná distribučná funkcia nám dáva začiatočný bod intervalu, na ktorom je F_X konštantná. Pri definovaní inverzie distribučnej funkcie je možné zvoliť akýkoľvek bod z tohto intervalu. Napríklad, ak chceme inverznú funkciu, ktorá nám vráti koncový bod z tohto intervalu, tak definujeme inverznú distribučnú funkciu ako:

$$F_X^{-1+}(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq p\}, \quad p \in [0,1], \tag{1.2}$$

kde berieme do úvahy $\sup(\emptyset) = -\infty$.
V tomto prípade pre všeobecnú F_X a pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_X^{-1+}(F_X(x)) \geq x.$$

Pre každé $p \in [0,1]$ nám body z intervalu $[F_X^{-1}(p), F_X^{-1+}(p)]$ dávajú možné hodnoty inverznej distribučnej funkcie v p. Body z tohto intervalu vieme získať pomocou konvexnej kombinácie jeho dvoch krajných bodov. To nás privádza k zavedeniu α-zmiešanej inverznej distribučnej funkcie.

Definícia 3. *Nech je X náhodná veličina s distribučnou funkciou F_X, potom pre každé $\alpha \in [0,1]$ definujeme α-zmiešanú inverznú distribučnú funkciu k F_X nasledovne:*

$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha) F_X^{-1+}(p), \quad p \in (0,1), \tag{1.3}$$

kde $F_X^{-1}(p)$ a $F_X^{-1+}(p)$ sú dané v (1.1) a (1.2).

Vezmime si také x, že $F_X(x)$ je z intervalu (0,1). Potom platí $F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x \leq F_X^{-1+}(F_X(x))$ a zároveň je vidieť, že existuje $\alpha_x \in [0,1]$ také, aby platilo $F_X^{-1(\alpha_x)}(F_X(x)) = x$.

Nasledujúca lemma pochádza z (Dhaene a kol., 2002b). Tu je uvedená v skrátenej verzii.

Lemma 1. *Majme reálnu náhodnú veličinu X, neklesajúcu funkciu g, ktorá je definovaná na obore hodnôt X a buď $p \in (0,1)$.*

a) *Ak je g zľava spojitá, potom:*

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)). \tag{1.4}$$

b) *Ak je g zprava spojitá, potom:*

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1+}(p)). \tag{1.5}$$

Dôkaz. a): Z (1.1), vidíme, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_X^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x). \tag{1.6}$$

Ďalej vďaka tomu, že g je neklesajúca a zľava spojitá, pre všetky $x, z \in \mathbb{R}$ platí

$$g(z) \leq x \Leftrightarrow z \leq \sup\{y \mid g(y) \leq x\}. \tag{1.7}$$

Pomocou toho dostaneme:

$$F_{g(X)}(x) = \mathsf{P}(g(X) \leq x) = \mathsf{P}(X \leq \sup\{y \mid g(y) \leq x\}) = F_X(\sup\{y \mid g(y) \leq x\}).$$

Pokiaľ je $|\sup\{y \mid g(y) \leq x\}| < \infty$, potom z (1.6) máme

$$F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y \mid g(y) \leq x\} \Leftrightarrow p \leq F_X(\sup\{y \mid g(y) \leq x\}) = F_{g(X)}(x).$$

Daná ekvivalencia platí aj pre $\sup\{y \mid g(y) \leq x\} = \pm\infty$, čo sa jednoducho overí dosadením a využitím vzťahov $F_X(-\infty) = 0$ a $F_X(\infty) = 1$. Pre $\sup\{y \mid g(y) \leq x\} = \infty$ dostaneme $F_X^{-1}(p) \leq \infty \Leftrightarrow p \leq 1$ a pre $\sup\{y \mid g(y) \leq x\} = -\infty$ dostaneme $F_X^{-1}(p) \leq -\infty \Leftrightarrow p \leq 0$. Obe tieto ekvivalencie platia.

Nakoniec z (1.7) a (1.6) dostávame

$$g(F_X^{-1}(p)) \leq x \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y \mid g(y) \leq x\} \Leftrightarrow p \leq F_{g(X)}(x) \Leftrightarrow F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x,$$

teda máme ekvivalenciu

$$g(F_X^{-1}(p)) \leq x \Leftrightarrow F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x,$$

ktorá platí pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a to znamená, že rovnosť (1.4) platí.

b): Podobným spôsobom sa ukáže platnosť rovnosti (1.5).

$\square$

2. Komonotónia

V tejto kapitole si definujeme a bližšie vysvetlíme pojem komonotónia. Tiež si ukážeme ako nám pomôže pri našom probléme hľadania „rizikovejšej“ náhodnej veličiny. Ak máme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$, vieme nájsť iný náhodný vektor $\boldsymbol{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)^\top$ tak, že $\sum_{i=1}^n X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^n X_i^*$ a dokonca $\boldsymbol{X}^*$ bude mať rovnaké jednorozmerné marginálne rozdelenia ako $\boldsymbol{X}$. Vďaka komonotónii budeme vedieť vyjadriť distribučnú funkciu $\sum_{i=1}^n X_i^*$. Teoretické poznatky o komonotónii v tejto kapitole pochádzajú z (Dhaene a kol., 2002b).

2.1 Komonotónny náhodný vektor

Majme dva vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ z $\mathbb{R}^n$. Pri porovnávaní a zoraďovaní vektorov budeme používať značenie $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, pre prípad, keď $x_i \leq y_i$ platí pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$.

Definícia 4. *Povieme, že množina vektorov $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je komonotónna, ak pre ktorékoľvek $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ z A platí buď $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ alebo $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}$.*

V definícii komonotónneho náhodného vektora bude dôležitú úlohu hrať pojem *nosič* náhodného vektora.

Definícia 5. *Nech $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ je náhodný vektor, tak potom množinu $S_X \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme nosičom $\boldsymbol{X}$, ak $\mathsf{P}(X \in S_X) = 1$.*

Takže nosič je množina všetkých možných výsledkov náhodného vektora $\boldsymbol{X}$.

Definícia 6. *Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ je komonotónny, ak S_X je komonotónna množina.*

V nasledujúcej vete uvidíme ďalšie ekvivalentné definície komonotónneho náhodného vektora.

Veta 2. *Pre náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:*

a) *S_X je komonotónna množina.*

b) *Pre všetky $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)\}. \tag{2.1}$$

c) *Pre $U \sim R(0,1)$ platí*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))^\top. \tag{2.2}$$

d) *Existuje reálna náhodná veličina Z a neklesajúce funkcie f_i, $i = 1, 2, \dots, n$, tak, že*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z), \dots, f_n(Z))^\top. \tag{2.3}$$

Dôkaz. a) $\Rightarrow$ b): Nech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je dané. Ďalej uvažujme podmnožiny S_X tvaru

$$A_i = \{\boldsymbol{y} \in S_X \,|\, y_i \leq x_j\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vďaka komonotónii S_X existuje $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $A_j = \cap_{i=1}^n A_i = \{\boldsymbol{y} \in S \,|\, \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}\}$. Potom píšeme

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \cap_{i=1}^n A_i) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in A_j) = \mathsf{P}(X_j \leq x_j) = F_{X_j}(x_j),$$

a kedže $A_j \subseteq A_i$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tak platí

$$F_{X_j}(x_j) = \mathsf{P}(X_j \leq x_j) \leq \mathsf{P}(X_i \leq x_i) = F_{X_i}(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Teda dohromady dostávame

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{X_j}(x_j) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}.$$

b) $\Rightarrow$ c): Vypočítajme distribučnú funkciu náhodného vektora $(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U))^\top$, kde $U \sim R(0,1)$. Nech $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, F_{X_2}^{-1}(U) \leq x_2, \ldots, F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n) = \\ = \mathsf{P}(U \leq F_{X_1}(x_1), U \leq F_{X_2}(x_2), \ldots, U \leq F_{X_n}(x_n)) = \\ = \mathsf{P}(U \leq \min_{i=1,2,\ldots,n}\{F_{X_i}(x_i)\}) = \min_{i=1,2,\ldots,n}\{F_{X_i}(x_i)\}.\end{aligned}$$

Týmto sme dokázali rovnosť (2.2).

c) $\Rightarrow$ d): Kedže inverzné distribučné funkcie sú neklesajúce funkcie, tak táto implikácia je jasná.

d) $\Rightarrow$ a): Nech platí (2.3) a S_Z je nosič náhodnej veličiny Z. Potom nosič náhodného vektora $\boldsymbol{X}$ má tvar $S_X = \{(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))^\top \,|\, z \in S_Z\}$. S_X je komonotónny vďaka tomu, že f_i sú neklesajúce funkcie.

$\square$

Uvažujme ľubovolnú náhodnú veličinu X, náhodnú veličinu $U \sim R(0,1)$ a $\alpha \in [0,1]$, potom platí

$$F_X^{-1}(U) \overset{d}{=} F_X^{-1(\alpha)}(U).$$

Daná rovnosť vyplýva z toho, že F_X^{-1} a $F_X^{-1(\alpha)}$ sa nerovnajú iba na konštantných úsekoch funkcie F_X, ktorých je len zpočítateľne veľa. Vďaka spojitosti U je pravdepodobnosť, že U sa rovná hodnote funkcie F_X, ktorú nadobúda na konštantných úsekoch, nulová. Takže $\mathsf{P}(F_X^{-1}(U) = F_X^{-1(\alpha)}(U)) = 1$. Vďaka tomu môžeme charakterizáciu (2.2) komonotónneho náhodného vektora $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, prepísať na

$$\boldsymbol{X} \overset{d}{=} (F_{X_1}^{-1(\alpha)}(U), F_{X_2}^{-1(\alpha)}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha)}(U))^\top, \tag{2.4}$$

kde $U \sim R(0,1)$, $\alpha \in [0,1]$.

Značenie. *Pre náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$ označíme jeho komonotónnu verziu $\boldsymbol{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c)^\top$, kde $\boldsymbol{X}^c$ je komonotónny náhodný vektor a má rovnaké jednorozmerné marginálne rozdelenia ako $\boldsymbol{X}$.*

Z charakterizácie komonotónie (2.2) môžeme komonotónnu verziu $\boldsymbol{X}^c$ náhodného vektora $\boldsymbol{X}$ vyjadriť ako

$$\boldsymbol{X}^c = (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))^\top,$$

kde $U \sim R(0,1)$. Takto bude $\boldsymbol{X}^c$ naozaj komonotónny a zároveň bude mať aj rovnaké jednorozmerné marginálne rozdelenia ako $\boldsymbol{X}$. ($\forall x \in \mathbb{R}$ a $i = 1, 2, \dots, n$ platí $F_{X_i^c}(x) = \mathsf{P}(X_i^c \leq x) = \mathsf{P}(F_{X_i}^{-1}(U) \leq x) = \mathsf{P}(U \leq F_{X_i}(x)) = F_{X_i}(x)$).

Odtiaľto dostaneme, že nosič $\boldsymbol{X}^c$ môžeme napísať v tvare

$$S_{X^c} = \{(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), \dots, F_{X_n}^{-1}(p))^\top \,|\, p \in (0,1)\}.$$

2.2 Vlastnosti komonotónneho náhodného vektora

Majme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ a označme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Povieme si niečo viac o vlastnostiach sumy zložiek jeho komonotónnej verzie $\boldsymbol{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)^\top$, ktorú si označíme ako $S^c = X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c$.

Následne si ukážeme, že práve $\boldsymbol{X}^c$ nám môže poslúžiť ako hľadaný „rizikovejší“ náhodný vektor, ktorým chceme nahradiť pôvodný náhodný vektor $\boldsymbol{X}$. Musíme teda ukázať $S \leq_{cx} S^c$.

Nasledujúca veta hovorí, že inverzná distribučná funkcia komonotónnej sumy S^c je suma inverzných distribučných funkcií zložiek náhodného vektora $\boldsymbol{X}$.

Veta 3. *Majme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ a jeho komonotónnu verziu $\boldsymbol{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)^\top$. Ďalej si označme komonotónnu sumu $S^c = X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c$. Potom α-zmiešanú inverznú distribučnú funkciu náhodnej veličiny S^c môžeme vyjadriť predpisom:*

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p), \quad p \in (0,1),\ \alpha \in [0,1]. \tag{2.5}$$

Dôkaz. Definujme funkciu

$$g(u) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(u), \quad u \in (0,1).$$

Komonotónnu sumu S^c možeme vďaka (2.2) vyjadriť pomocou funkcie g, ako

$$g(U) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} S^c, \quad U \sim (0,1).$$

Ďalej vidíme, že funkcia g je súčet neklesajúcich zľava spojitých funkcií, a teda je tiež neklesajúca a zľava spojitá. Použitím vzorca (1.4) z lemmy 1 dostaneme

$$F_{S^c}^{-1}(p) = F_{g(U)}^{-1}(p) = g(F_U^{-1}(p)) = g(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p), \quad p \in (0,1).$$

Podobne definovaním funkcie

$$h(u) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(u), \quad u \in (0,1),$$

vyjadríme S^c vďaka (2.4) a volbe $\alpha = 0$, ako

$$h(U) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(U) \stackrel{d}{=} S^c, \quad U \sim (0,1).$$

Ďalej vidíme, že h je neklesajúca zprava spojitá, čo znamená, že môžeme použiť vzorec (1.5) z lemmy 1 a dostaneme

$$F_{S^c}^{-1+}(p) = F_{g(U)}^{-1+}(p) = g(F_U^{-1+}(p)) = g(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(p), \quad p \in (0,1).$$

Dokazovanú rovnosť (2.5) pre $p \in (0,1)$ a $\alpha \in [0,1]$ dostaneme nasledovne:

$$\begin{aligned}
\underline{F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p)} &= \alpha F_{S^c}^{-1}(p) + (1-\alpha) F_{S^c}^{-1+}(p) = \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(p) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha F_{X_i}^{-1}(p) + (1-\alpha) F_{X_i}^{-1+}(p) = \underline{\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p)}.
\end{aligned}$$

□

Vďaka tejto vete si môžeme vyjadriť distribučnú funkciu komonotónnej sumy S^c pomocou inverzných distribučných funkcií F_{X_i}:

$$F_{S^c}(x) = \sup\{p \in (0,1) \mid F_{S^c}^{-1}(p) \le x\} = \sup\{p \in (0,1) \mid \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) \le x\}. \tag{2.6}$$

V ďalšej vete si ukážeme, ako vyzerá *stop-loss transformácia* komonotónnej sumy S^c.

Veta 4. *Majme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, jeho komonotónnu verziu $\boldsymbol{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c)^\top$ a komonotónnu sumu $S^c = X_1^c + X_2^c + \cdots + X_n^c$. Potom*

$$\mathsf{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}[(X_i - d_i)_+], \quad d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)), \tag{2.7}$$

kde pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $d_i = F_{X_i}^{-(\alpha_d)}(F_{S^c}(d))$
a α_d je dané tak, aby platilo $F_{S^c}^{-(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d$.

Dôkaz. Zvoľme si $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ ľubovoľne, potom platí $F_{S^c}(d) \in (0,1)$. Následne z vety 3 dostaneme $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Najprv ukážeme:

$$\mathsf{E}\,[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i^c - d_i)_+]. \tag{2.8}$$

Z definície d_i je zrejmé, že vektor $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^\top$ sa nachádza v S_{X^c}. Ďalej z komonotónie S_{X^c} plynie, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in S_{X^c}$ platí buď $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}$ alebo $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{d}$. Zvoľme si teda $\boldsymbol{x} \in S_{X^c}$ ľubovoľne.

Ak je $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}$, tak potom $((x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (d_1 + d_2 + \cdots + d_n))_+ = 0$ a taktiež aj $(x_i - d_i)_+ = 0$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$.

V druhom prípade, kde $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{d}$, tak platí $(x_i - d_i)_+ = x_i - d_i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$. To znamená, že

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - d_i)_+ = ((x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (d_1 + d_2 + \cdots + d_n))_+.$$

Vidíme, že (2.8) platí.

Zároveň pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ platí $\mathsf{E}\,[(X_i^c - d_i)_+] = \mathsf{E}\,[(X_i - d_i)_+]$, keďže X_i a X_i^c majú rovnaké rozdelenie. Keď k tomu ešte pridáme (2.8), tak dostaneme dokazovanú rovnosť (2.7).

□

Spolu s touto vetou máme všetko čo potrebujeme, aby sme mohli ukázať $S^c \leq_{cx} S$.

Veta 5. *Pre náhodný vektor* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ *a jeho komonotónnu verziu* $\boldsymbol{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)^\top$ *platí*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + \cdots + X_n^c. \tag{2.9}$$

Dôkaz. Označme $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ a $S^c = X_1^c + X_2^c + \cdots + X_n^c$. Vieme, že X_i majú rovnaké rozdelenie ako X_i^c pre $i = 1, 2, \dots, n$, odtiaľ je zrejmá platnosť $\mathsf{E}\,[S] = \mathsf{E}\,[S^c]$.

Treba ešte ukázať, že $\mathsf{E}\,[(S - d)_+] \leq \mathsf{E}\,[(S^c - d)_+]$ platí pre všetky $d \in \mathbb{R}$.

Najprv zoberme $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ a zvoľme d_i ako vo vete 4, ciže máme $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Pre všetky $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (d_1 + d_2 + \cdots + d_n))_+ &= \\
= ((x_1 - d_1) + (x_2 - d_2) + \cdots + (x_n - d_n))_+ &\leq \\
\leq ((x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+)_+ &= \\
(x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+&.
\end{aligned}$$

Odtiaľto dostávame

$$\mathsf{E}\,[(S - d)_+] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i - d_i)_+],$$

po aplikácii vety 4 máme

$$\mathsf{E}\,[(S - d)_+] \leq \mathsf{E}\,[(S^c - d)_+],$$

pre $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$.

Voľbou $d < F_{S^c}^{-1+}(0)$ dostaneme $\mathsf{P}(S^c > d) = 1$. Zároveň nerovnosť $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0)$ platí s pravdepodobnosťou 1 a vďaka vete 3 je vidieť, že $S \geq F_{S^c}^{-1+}(0) > d$ s pravdepodobnosťou 1. Z toho máme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[S] &= \mathsf{E}[S^c] \\ \mathsf{E}[S-d] &= \mathsf{E}[S^c - d] \\ \mathsf{E}[(S-d)_+] &= \mathsf{E}[(S^c-d)_+]. \end{aligned}$$

Naopak voľbou $d > F_{S^c}^{-1}(1)$ máme $\mathsf{P}(S^c < d) = 1$. Zároveň nerovnosť $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1)$ platí s pravdepodobnosťou 1 a rovnako pomocou vety 3 vidíme, že $S \leq F_{S^c}^{-1}(1) < d$ s pravdepodobnosťou 1. Z toho máme

$$\mathsf{E}[(S-d)_+] = 0 = \mathsf{E}[(S^c-d)_+].$$

Ukázali sme $S \leq_{cx} S^c$.

$\square$

3. Príklady

V tejto kapitole si ukážeme príklady, v ktorých využijeme predchádzajúce poznatky o komonotónii. Výber typov príkladov bol inšpirovaný článkom (Dhaene a kol., 2002a).

3.1 Exponenciálne rozdelenie

Majme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$, kde $X_i \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\lambda_i})$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Potom pre X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ máme:

- Hustota: $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\lambda_i}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda_i}}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.
- Distribučná funkcia: $F_{X_i}(x) = (1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda_i}})\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.
- Inverzná distribučná funkcia: $F_{X_i}^{-1}(x) = -\lambda_i \log(1-p), \quad p \in (0,1)$.
- Stredná hodnota: $\mathsf{E}\,[X_i] = \lambda_i$.
- Rozptyl: $\mathrm{var}[X_i] = \lambda_i^2$.

Nás zaujíma súčet náhodných veličín s exponenciálnym rozdelením, preto označíme $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Nájdeme komonotónnu verziu $\boldsymbol{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)^\top$. Z (2.2) máme $X_i^c = F_{X_i}^{-1}(U) = -\lambda_i \log(1-U)$, kde $U \sim R(0,1)$ a $i = 1, 2, \dots, n$.

Ďalej pre $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$ z (2.5) platí:

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n -\lambda_i \log(1-p) = -\log(1-p)\sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Kedže X_i majú ostro rastúce distribučné funkcie, tak potom $F_{X_i}^{-1}$ sú spojité. To znamená, že $F_{S^c}^{-1}$ je spojitá funkcia. Pre všetky $x > 0$ potom máme:

$$x = F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = -\log(1 - F_{S^c}(x))\sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F_{S^c}(x) = (1 - \exp(-\frac{x}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}))\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Odtiaľto máme hustotu S^c: $f_{S^c}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\exp(-\frac{x}{\sum_{i=1}^n \lambda_i})\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$.

To znamená, že suma komonotónnych exponenciálnych náhodných veličín má tiež exponenciálne rozdelenie, $S^c \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i})$.

Uvažujme, že $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny z $\mathrm{Exp}(\frac{1}{\lambda})$, $\lambda > 0$. Potom $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}(n, \frac{1}{\lambda})$. To znamená, že S má hustotu:

$$f_S(x) = \frac{1}{\lambda^n \Gamma(n)} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Čiže pre strednú hodnotu a rozptyl S platí:

$$\mathsf{E}\,[S] = n\lambda \quad \& \quad \mathrm{var}[S] = n\lambda^2.$$

Vieme, že $S^c \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{n\lambda}) \sim \mathrm{Gamma}(1, \frac{1}{n\lambda})$ a pre jej strednú hodnotu s rozptylom platí:

$$\mathsf{E}\,[S^c] = n\lambda \quad \& \quad \mathrm{var}[S^c] = n^2\lambda^2.$$

Náhodná veličina S^c je rizikovejšia v zmysle *konvexného usporiadania.* S^c má väčší rozptyl ako S a ten sa tiež zvykne považovať za mieru rizika.

Je potrebné si uvedomiť, že tento príklad porovnáva dva extrémy. Súčet nezávislých náhodných veličín a súčet silne závislých náhodných veličín.

3.2 Logaritmicko-normálne rozdelenie

Logaritmicko normálne rozdelenie sa môže použiť ako rozdelenie náhodných veličín popisujúcich výšku škody vzťahujúcej sa na danú poistnú udalosť. Opäť nás bude zaujímať ich súčet, ktorý bude vyjadrovať súhrnnú výšku škôd v danej skupine poistných zmlúv pri výskyte poistnej udalosti.

Nech $X_i \sim \log N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, potom platí:

- $X_i \stackrel{d}{=} \mathrm{e}^{Y_i}$, kde $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, alebo
- $X_i \stackrel{d}{=} \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i Z_i}$, kde $Z_i \sim N(0, 1)$.
- Distribučná funkcia:

$$F_{X_i}(x) = \mathsf{P}(X_i \leq x) = \mathsf{P}(\mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i Z_i} \leq x) = \\ = \mathsf{P}\left(Z_i \leq \frac{\log(x) - \mu_i}{\sigma_i}\right) = \Phi\Big(\frac{\log(x) - \mu_i}{\sigma_i}\Big),$$

  kde $x > 0$ a Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.
- Pre $k \in \mathbb{N}$: $\mathsf{E}\,[X^k] = \mathrm{e}^{k\mu_i + \frac{1}{2}k^2\sigma_i^2}$.
- Rozptyl: $\mathrm{var}[X_i] = \mathrm{e}^{2\mu_i + \sigma_i^2}(\mathrm{e}^{\sigma_i^2} - 1)$.

Všimneme si, že X_i sú neklesajúce spojité funkcie náhodných veličín Z_i. Z (1.4) dostaneme

$$F_{X_i}^{-1}(p) = \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p)}, \quad p \in (0, 1).$$

Potom máme komonotónnu sumu

$$S^c = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U), \quad U \sim R(0, 1).$$

Následne si vieme vyjadriť inverznú distribučnú funkciu zo vzorca (2.5):

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p)}.$$

X_i majú ostro rastúce distribučné funkcie, z čoho vyplýva, že $F_{S^c}^{-1}$ je spojitá funkcia, a teda sme schopní dostať distribučnú funkciu S^c zo vzťahu:

$$x = F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(F_{S^c}(x))}, \quad x > 0.$$

Užitočné však môže byť, že pomocou charakterizácie komonotónie (2.3) sa komonotónne zložky X_i^c dajú zapísať ako neklesajúce funkcie náhodnej veličiny $Z \sim N(0,1)$:

$$X_i^c = \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i Z}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pre $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$ je potom jednoduché vypočítať druhý moment S^c a s tým aj jeho rozptyl.
Jednoducho vieme dokázať platnosť následúcej rovnosti:

$$\mathsf{E}\,[(S^c)^2] = \mathsf{E}\,\left[\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i^c\Big)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i^c)^2] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathsf{E}\,[X_i^c X_j^c]. \tag{3.1}$$

Súčin $X_i^c X_j^c = \mathrm{e}^{\mu_i + \mu_j + (\sigma_i + \sigma_j)Z}$ je náhodná veličina s rozdelením $\log N(\mu_i + \mu_j, (\sigma_i + \sigma_j)^2)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí

$$\mathsf{E}\,[(X_i^c)^2] = \mathrm{e}^{2\mu_i + 2\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\mathsf{E}\,[X_i^c X_j^c] = \mathrm{e}^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j)^2}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Dosadíme to do (3.1) a dostaneme

$$\mathsf{E}\,[(S^c)^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{2\mu_i + 2\sigma_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{e}^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j)^2}.$$

Ďalej počítajme

$$(\mathsf{E}\,[S^c])^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{2\mu_i + \sigma_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{e}^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}.$$

Použitím vzorca pre rozptyl, $\mathrm{var}[S^c] = \mathsf{E}\,[(S^c)^2] - (\mathsf{E}\,[S^c])^2$, máme

$$\mathrm{var}[S^c] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{2\mu_i + \sigma_i^2}(\mathrm{e}^{\sigma_i^2} - 1) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{e}^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}(\mathrm{e}^{\sigma_i \sigma_j} - 1).$$

Pre prípad nezávislých $X_i \sim \log N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, platí, že rozptyl S je rovný súčtu rozptylov X_i. To znamená

$$\mathrm{var}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{2\mu_i + \sigma_i^2}(\mathrm{e}^{\sigma_i^2} - 1).$$

Opäť vidíme, že $\mathrm{var}[S^c] \geq \mathrm{var}[S]$.

3.3 Doživotný dôchodok

Doživotný polehotne platený ročný dôchodok spočíva v tom, že poistenec dostáva na konci každého roku platbu vo výške α. Je očividné, že musí byť nažive, aby dostal túto platbu. My sa budeme zaoberať súčasnou hodnotou súčtu týchto náhodných platieb.

Najskôr označme spojitú náhodnú veličinu $T(x)$, ktorá vyjadruje zostávajúcu dĺžku života človeka vo veku x. Ďalej používajme označenie $T = T(x)$.

Nasledujúce poznatky o T čerpáme z (Gerber, 1995, Kapitola 2).

T má distribučnú funkciu

$$G(t) = \mathsf{P}(T \leq t), \quad t \geq 0.$$

Hustotu T si označíme ako $g(t) = G'(t)$.

Obvyklé značenie pravdepodobnosti, že človek vo veku x má zostávajúcu dĺžku života menšiu ako t, je

$$_tq_x = G(t).$$

Pravdepodobnosť opačného javu sa značí

$$_tp_x = 1 - G(t).$$

Ďalej si definujeme pojem *intenzita úmrtnosti* vo veku $x + t$ ako

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt}\log(1 - G(t)) = -\frac{d}{dt}\log({}_tp_x). \tag{3.2}$$

Z toho dostaneme

$$_tp_x = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds}, \tag{3.3}$$

$$_tq_x = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds}. \tag{3.4}$$

Vidíme, že $G(t)$ môžeme vyjadriť pomocou μ_{x+t}, kde $t \geq 0$.

Jedna z možností ako analyticky vyjadriť distribučnú funkciu G je pomocou *Gompertz-Makeham*ovej intenzity úmrtnosti:

$$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, \quad t > 0. \tag{3.5}$$

Vypočítajme $\int_0^t \mu_{x+t}\,ds$ dosadením (3.5):

$$\int_0^t (A + Bc^{x+s})\,ds = At + Bc^x \int_0^t c^s\,ds = At + Bc^x \frac{c^t - 1}{\log c}.$$

Takže dostávame

$$G(t) = 1 - \mathrm{e}^{-At - Bc^x \frac{c^t - 1}{\log c}}, \quad t > 0. \tag{3.6}$$

Budú nás zaujímať súčasné hodnoty náhodných platieb poistencovi. Preto majme úrokovú mieru r. Označme náhodné veličiny X_i, vyjadrujúce súčasnú hodnotu platby na konci roku $x + i$.

$$X_i = \frac{\alpha}{(1+r)^i}\mathbb{1}(T > i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Potom súčasnú hodnotu súčtu platieb označíme ako

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Všimnime si, že X_i sú neklesajúce zľava spojité funkcie náhodnej veličiny T. Teda z (2.3) vyplýva, že X_i sú komonotónne a z (1.6) máme

$$F_{X_i}^{-1}(p) = \frac{\alpha}{(1+r)^i} \mathbb{1}(G^{-1}(p) > i) = \frac{\alpha}{(1+r)^i} \mathbb{1}(\lceil G^{-1}(p) \rceil - 1 \geq i), \quad p \in (0,1),$$

kde $\lceil x \rceil$ označuje najmenšie možné celé číslo, ktoré je väčšie alebo rovné než x.

Z komonotónie X_i a (2.5) môžeme napísať

$$F_S^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{X_i}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{\lceil G^{-1}(p) \rceil - 1} \frac{\alpha}{(1+r)^i}, \quad p \in (0,1).$$

Následne vieme vyjadriť distribučnú funkciu S pomocou (2.6)

$$F_S(t) = \sup \left\{ p \in (0{,}1) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\lceil G^{-1}(p) \rceil - 1} \frac{\alpha}{(1+r)^i} \leq t \right\}, \quad t \geq 0.$$

Predpokladajme, že poistenec má vek $x = 60$, výška úrokovej miery je $r = 0.04$ a platby α sú pre jednoduchosť rovné 1. Hodnoty *Gompertz-Makeham*ových parametrov zvolíme z (Danešová, 2011, str. 17), kde ich autorka vypočítala podľa metodiky Českého štatistického úradu pre úmrtnostnú tabulku mužov z roku 2009:

$$\begin{aligned} A &= 0.00956 \\ B &= 7.515\,65 \times 10^{-6} \\ c &= 1.12148. \end{aligned}$$

Pomocou matematického softvéru sme schopní numericky vyčísliť hodnotu distribučnej funkcie $F_S(t)$ pre konkrétne $t \geq 0$.

Na bodovom grafe 3.1 vidíme numerickú aproximáciu funkcie F_S v 440 bodoch (konkrétne v bodoch $\frac{j}{20}$, kde $j = 0, 1, \ldots, 440$).

Kedže body grafu sú počítané numerickou aproximáciou, môžu nastať chyby výpočtu. Tie budú pravdepodobne spôsobené najmä počítaním inverznej funkcie G^{-1} a taktiež počítaním supréma. Na grafe vidíme zopár bodov, ktoré sa vymykajú trendu zvyšných bodov. V týchto prípadoch softvér nebol schopný vypočítať ich hodnotu s dostatočne malou presnosťou. Tieto body sú chybami výpočtu s veľkou nepresnosťou a preto ich nebudeme brať do úvahy ako hodnoty distribučnej funkcie F_S.

Z definície náhodnej veličiny S je zrejmé, že sa jedná o diskrétnu náhodnú veličinu. Mimo pár chybne vypočítaných bodov vidíme, že F_S je naozaj nespojitá skokovitá funkcia.

Náhodná veličina S vyjadruje hodnotu všetkých platieb poisťovne klientovi, v prípade keby ich vyplatila na začiatku poistného obdobia. Vypočítame teda strednú hodnotu S.

$$\mathsf{E}\left[S\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{E}\left[X_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} 1.04^{-i}\, \mathsf{P}(T > i) = \sum_{i=1}^{\infty} 1.04^{-i}\, {}_ip_{60}.$$

Numerickým výpočtom získame hodnotu: $\mathsf{E}\left[S\right] = 11.82$.

Z grafu 3.1 môžeme zistiť približnú pravdepodobnosť toho, že S bude mať hodnotu menšiu alebo rovnú jej strednej hodnote $\mathsf{E}\left[S\right]$. Vidíme, že to môže byť blízko 40 %. Po dosadení do distribučnej funkcie F_S dostaneme, že to je približne 42 %.

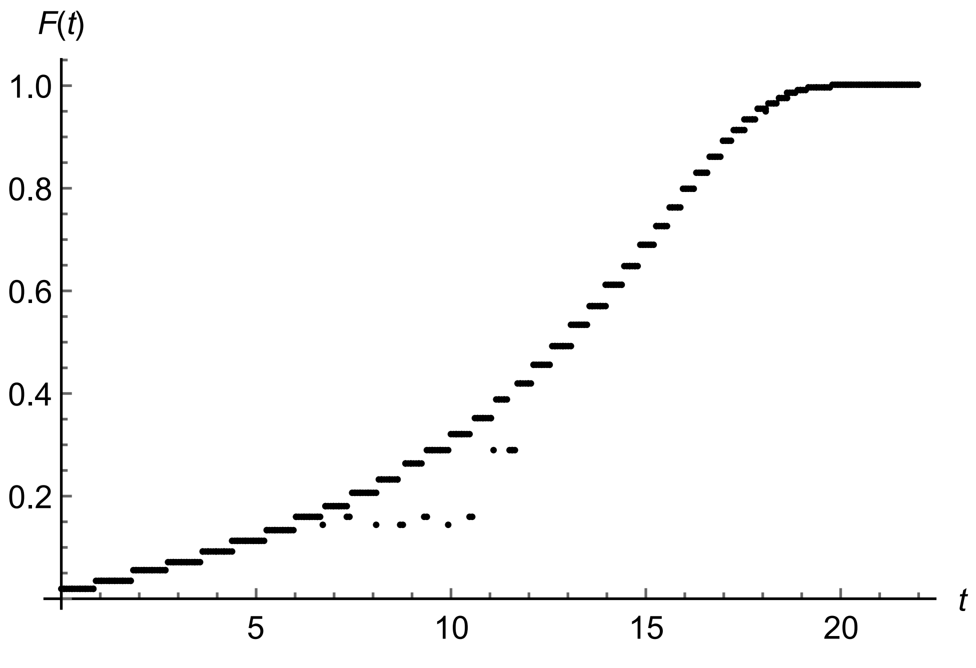
To znamená, že pravdepodobnosť prekročenia strednej hodnoty bude väčšia než 50 %.

Stredná hodnota S je v terminológii životného poistenia jednorazové netto poistné pre doživotný dôchodok zakúpený vo veku 60 rokov.

Zo znalosti F_S, vieme určiť, s akou pravdepodobnosťou bude súčasná hodnota čiastky, ktorú poisťovňa vyplatí klientovi, väčšia než daná hodnota K. Napríklad s pravdepodobnosťou blízkou 0 bude S väčšia než 20.

Rovnako z grafu 3.1 je možné zistiť, že s pravdepodobnosťou okolo 95 % hodnota S neprekročí 18. Numericky vypočítaný kvantil na hladine 95% má hodnotu 17.87.

Vidíme, že znalosť distribučnej funkcie môže byť užitočná.



Obr. 3.1: Bodová aproximácia distribučnej funkcie F_S, v grafe označenej ako F, v bodoch $t = \frac{j}{20}$, pre $j = 0, 1, \ldots, 440$.

Záver

V tejto práci sme ukázali, že pre sumu náhodných veličín sme schopní nájsť jej komonotónnu verziu. Vďaka znalostiam z druhej kapitoly vieme určiť distribučnú funkciu komonotónnej sumy. Taktiež sme dokázali, že komonotónna suma odhaduje pôvodnú sumu zhora v zmysle *konvexného usporiadania*, preto o nej hovoríme ako o rizikovejšej náhodnej veličine.

Ak nás zaujíma súčet náhodných veličín, ktorého rozdelenie nie sme schopní určiť, môžeme ho nahradiť jeho komonotónnou verziou. Samozrejme musíme poznať jednotlivé rozdelenia zložiek tohto súčtu. Táto stratégia sa ukazuje ako konzervatívna, lebo prechádzame k rizikovejšej náhodnej veličine.

V poslednej kapitole sme to ukázali na konkrétnych príkladoch. V dvoch sme našli komonotónne verzie pôvodných náhodných vektorov a pre súčet ich zložiek sme určili strednú hodnotu s rozptylom. V poslednom príklade doživotného dôchodku sme videli, že súčasná hodnota doživotného dôchodku je príkladom náhodnej veličiny, ktorá je súčtom komonotonných náhodných veličín. Vďaka znalostiam z tejto práce sme boli schopní vyjadriť distribučnú funkciu súčtu náhodných platieb a k nej príslušnú inverznú distribučnú funkciu. Taktiež sme boli schopní aspoň numericky nakresliť graf tejto distribučnej funkcie.

Zoznam použitej literatúry

DANEŠOVÁ, Z. (2011). Riziko dlouhověkosti v životním pojištění. Master's thesis, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha.

DHAENE, J., DENUIT, M., GOOVAERTS, M., KAAS, R. a VYNCKE, D. (2002a). The concept of comonocity in actuarial science and finance: applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 133–161.

DHAENE, J., DENUIT, M., GOOVAERTS, M., KAAS, R. a VYNCKE, D. (2002b). The concept of comonocity in actuarial science and finance: theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 3–33.

GERBER, H. U. (1995). *Life Insurance Mathematics.* Second Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 3-540-58858-2.