

## Stochastická integrace

Student se ve své práci věnuje především zavedení a vlastnostem Itôova integrálu podle Wienerova procesu a kromě toho také Stratonovičovu integrálu. Téma práce je spíše náročné, co do kontextu, ve kterém se musí student pohybovat. Podle všeho by práci prospělo, pokud by se student přikláněl spíše k formulaci slabších tvrzení tím, že by předpokládal některé vlastnosti objektů ve striktnější podobě. Například by vůbec nevadilo, pokud by pracoval s procesy, které mají skutečně spojitě všechny trajektorie a totéž se týká předpokladů omezenosti. Některé úvahy, které student v práci uvádí, by se tím staly méně napadnutelné. Za současného nastavení se zdá, že by určitá místa vyžadovaly minimálně dovysvětlení resp. rozepsání popř. korekce.

- (1) Kniha Brownian Motion and Stochastic Calculus ve svém druhém vydání předpokládá, že spojitost procesu a podobné vlastnosti jsou definovány striktně po trajektoriích a třetí vydání se podle všeho od druhého v tomto ohledu neliší. Bez odpovídajícího předpokladu si lze obtížně představit, že bychom byli schopni obdržet měřitelnost procesu (či progresivní měřitelnost), která zajišťuje, že jsou všechny trajektorie měřitelnými funkcemi. Zde (v bakalářské práci) o některých trajektoriích nepředpokládáme vůbec nic, pokud určité vlastnosti trajektorií požadujeme pouze skoro jistě.
- (2) V důkazu Tvrzení 14 a stejně tak Lemmatu 32 student ukazuje konvergenci střední hodnot, kterou interpretuje jako konvergenci v  $L_1$ , a odvozuje z ní tvrzení o konvergenci v pravděpodobnosti. Tato část podle mě zasluhuje pozornost u obhajoby, kde by měl student sdělit, jak by důkaz probíhal správně. Jinak podobná chyba se vyskytuje v argumentaci na str. 31.
- (3) Podle mě by více pozornosti zasluhoval pojem progresivní měřitelnosti, se kterým student v průběhu práce příliš neoperuje, pouze na straně 29, kde místo rozepisování uvádí pro důkaz nepodstatné argumenty jako  $t \leq F(t)$  s tím, že pro taková  $t$ , pro která uvedená nerovnost platí ostře, naopak neplatí následující podmínka  $\mathcal{F}_t$ -měřitelnosti veličiny  $W_{F(t)}$ , která je důsledkem deklarovaného tvrzení v důkazu.
- (4) Další nalezená nedopatření:
  - (a) Požadavek 1. v nahoře na str. 4: místo  $\mathcal{F}$  má být  $P$ .
  - (b) V Definici 1 na str. 4 má být patrně  $P$  místo  $\mu$ .
  - (c) Na str. 4 v Poznámce za Definicí 1: při zavádění  $L_p$ -prostoru je lépe se vyhnout pojmenování norma pro pseudonormu  $\|\cdot\|_{L_p}$  na  $\mathcal{L}_p$ .
  - (d) Ve Větě 4 (Lebesgueova věta o majorantě) chybí absolutní hodnota v nerovnosti, která má zaručovat majorizaci.
  - (e) Striktně vzato Věta 12 tak, jak je napsaná, neplatí (s ohledem na Definici 10). Konkrétně definice nijak nezaručuje omezenou variaci funkce  $t \mapsto \langle X, Y \rangle_t$  na kompaktním intervalu s pravděpodobností jedna, neboť pro každé  $t$  je náhodná veličina  $\langle X, Y \rangle_t$  definována zvlášť jednoznačně pouze skoro jistě. Stačí si tedy představit

$$\Omega = [0, T], \quad P = R[0, T], \quad X = Y = 0 \quad \text{a} \quad \langle X, Y \rangle_t(\omega) = 1_{[t-\omega \in \mathbb{Q}]}$$

Stejně tak definice nezaručuje 2. bod z Věty 13 (neklesající a spojitě trajektorie  $\langle X \rangle$ ).

- (f) V Důkazu na straně 10 je použit (do té doby) nedefinovaný pojem měřitelného procesu.
- (g) Na straně 14 v důkazu Lemmatu 20 je uvedena nerovnost  $C >$  bez pravé strany.
- (h) Strana 15, odstavec za první odsazenou formulí: Tvrzení 7 nelze bezprostředně použít, protože není splněn předpoklad konečnosti integrálů. Odpovídající příprava pro použití by byla patrně zbytečně komplikující. Jako řešení se zde jeví zesílit předpoklady Lemmatu 21 tak, aby byly trajektorie procesu  $X$  skutečně všechny omezené.

- (i) Na str. 16 nahoře je používáno  $n$  patrně místo  $m$ .
  - (j) Ve Tvrzení 10 by bylo dobré, pokud by byla specifikována  $L_2$ -norma na  $\mathbf{M}_2^c$ . Patrně pro  $X \in \mathbf{M}_2^c$  je rovna hodnotě  $(\mathbf{E}|X_T|^2)^{1/2}$ .
  - (k) Důkaz Tvrzení 27 na straně 20 ke konci podle všeho není úplně v pořádku, neboť proces  $I$  tak, jak je definován, nemůže být bez dalších předpokladů vměstnán do prostoru  $\mathbf{M}_2^c$ , kde jsou pouze procesy se spojitými trajektoriemi (až na množinu míry nula).
  - (l) V první odsazené formuli na straně 23 má být  $j$  místo  $i$ .
  - (m) V poslední odsazené formuli na straně 25 je chyba ve znaménku.
  - (n) První nerovnost v předposlední odsazené formuli na straně 26 podle všeho obecně neplatí.
  - (o) Na str. 27 jsou alespoň ve dvou případech prohozeny hodnoty  $n, k$ .
- Bylo téma pro bakalářskou práci přiměřené a bylo pojato přiměřeným způsobem? ANO (až na doporučené změny).
  - Obsahuje práce vlastní příspěvek autora? ANO Je v práci dostatečně specifikován? ANO V čem tento příspěvek spočívá? Je specifikován jako ucelený výklad.
  - Obsahuje práce rigorózně a korektně zformulovaný matematický text? ANO Jaká je matematická úroveň práce? Až na nedopatření s množinou míry nula a práce s konvergencí v  $L_1$  je na slušné úrovni.
  - Jsou zdroje správně citovány? ANO Je práce po formální stránce v pořádku? ANO
  - Lze práci uznat jako práci bakalářskou? ANO

Na závěr nezbyvá než konstatovat, že uvedená práce splňuje předpoklady kladené na bakalářskou práci na MFF UK.

V Praze dne 7.6.2017

Mgr. Petr Dostál, PhD.