MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Týbl

Stochastická integrace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 17. 5. 2017 Ondřej Týbl

Název práce: Stochastická integrace

Autor: Ondřej Týbl

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V předložené práci je vyložena teorie stochastické integrace, tedy integrál náhodného procesu podle náhodného procesu. Nejprve je vybudován Itôův integrál podle procesu s konečnou kvadratickou variací. Stratonovičův integrál je pak definován právě pomocí Itôova integrálu. Následně jsou oba tyto přístupy srovnány z hlediska martingalové vlastnosti a tzv. řetízkového pravidla. Těžištěm práce je pak srovnání obou integrálů jako limit jistých částečných součtů. Následně je vyložena třetí varianta integrálu motivována zavedením znovu odlišných částečných součtů, dle Stratonovich (1966), která je při integraci podle Wienerova procesu ekvivalentní s původní Stratonovičovou variantou. Na protipříkladu dle Yor (1977) však v práci předložíme argument, že pro, ač spojitý, integrátor se tyto dvě definice obecně rozcházejí. Postačující podmínku pro jejich ekvivalenci budeme čerpat z Protter (2004).

Klíčová slova: Wienerův proces, Itôův integrál, Stratonovičův integrál

Title: Stochastic Integration

Author: Ondřej Týbl

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The object of this thesis is a theory of stochastic integration, i.e., an integration of a stochastic process with respect to a stochastic process. First, the Ito integral with respect to processes with finite quadratic variation is presented. This integral is then used to define the Stratonovich integral and both integrals are subsequently compared in terms of a martingale property and so-called chain rule. The core of this work is then a comparison of these two integrals as limits of aproximating sums. A third variant of an integral, first introduced in Stratonovich (1966), is then defined as a limit of sums of a different type. The resulting integral is equivalent to the original Stratonovich integral when the integrand is the Wiener process, however, it may differ if even when integrating with respect to a continuous process (a counterexample Yor (1977) is provided). A sufficient condition for an equivalence of these two integrals from Protter (2004) is presented.

Keywords: Wiener process, Itô integral, Stratonovich integral

Na tomto místě chci poděkovat svým vedoucím práce, panu prof. RNDr. Bohdanu Maslowskému, DrSc. a Mgr. Petru Čoupkovi za odborné vedení, cenné připomínky a zejména trpělivost a ochotu, kterou mi v celém průběhu zpracování bakalářské práce věnovali.

Obsah

Úvod

Provedeme následující heuristickou úvahu, jak je popsána v Oksendal (2013), str. 21. Předpokládejme, že máme nějaký model daný diferenciální rovnicí

$$\frac{dN}{dt} = a\,(t,N(t))\,, \quad t \in [0,T], \quad N(0) = N_0,$$

pro nějaké reálné funkce N, a a reálné číslo N_0. Lze si například představit populační model. Potom $N(t)$ by znázorňovalo počet jedinců v čase t a $a(t,N(t))$ by udávalo relativní růst v čase t. Častým problémem je určení právě funkce a. Díky chybám v měření dat nebo nezahrnutí všech vlivných faktorů se může stát, že tato funkce je nám známa pouze s určitou přesností. Je tak rozumné rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{dN}{dt} = a\,(t,N(t)) + b\,(t,N(t))\,V(t), \quad t \in [0,T], \quad N(0) = N_0, \tag{1}$$

kde $V = (V(t), t \in [0,T])$ je náhodný proces popisující právě zmíněnou nejistotu a b je nějaká reálná funkce. Na V bychom mohli klást přirozené podmínky, a sice

- je-li $t_1 \neq t_2 \in [0,T]$, pak V_{t_1}, V_{t_2} jsou nezávislé,
- sdružené rozdělení $\{V_{(t_1+h)},V_{(t_2+h)},\ldots,V_{(t_n+h)}\}$ nezávisí na h pro každou n-tici $t_1,\ldots,t_n \in [0,T]$ a $h > 0$ dostatečně malé,
- proces V je spojitý (viz Definice 4).

Pokud bychom takový proces V našli, potom, je-li N integrovatelná, bychom mohli (1) vyřešit klasickými metodami řešení diferenciálních rovnic pouze s tím rozdílem, že výsledek by byl náhodnou veličinou. Takový proces V ovšem neexistuje (viz Kallianpur (1980), str. 10). Existuje více přístupů, jak se s tímto vypořádat. Jeden takový nabízí např. Hida (1980). My se ovšem přidržíme postupu z Oksendal (2013) a pokusíme se rovnici (1) vhodně upravit.

Místo (1) uvažujme pro nějaké dělení $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ diferenční rovnici

$$N_{t_{k+1}} - N_{t_k} = a\,(t_k,N(\tau_k))\,(t_{k+1} - t_k) + b\,(t_k,N(\tau_k))\,V(t_k)\,(t_{k+1} - t_k)\,,$$

$$0 \le k \le n-1, \quad N(0) = N_0,$$

kde τ_k je určitý pevný bod z $[t_k,t_{k+1}]$. Při označení

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta W_k = V(t_k)\Delta t_k, \quad N_k = N(\tau_k),$$

kde $\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ určuje nějaký náhodný proces $W = (W(t), t \in [0,T])$, lze psát

$$N_n = N_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a\,(t_k,N_k)\,\Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} b\,(t_k,N_k)\,\Delta W_k, \quad 0 \le k \le n-1. \tag{2}$$

Ukazuje se, že podmínky, které jsme neúspěšně kladli na proces V, můžou přírustky procesu W splňovat. Dokonce existuje jediný takový a je jím tzv. Wienerův proces (viz Knight (1981)). Pokud bychom se od diferenční rovnice chtěli nějakým způsobem vrátit zpět k rovnici diferenciální, provedli bychom zřejmě limitní přechod $\Delta t_k \to 0$. Za jistých podmínek by druhý člen rovnice (2) konvergoval k

$$\int_0^T a\,(t,N(t))\,dt.$$

Pro spojitý integrand by konvergence nezávisela na volbě τ_k (viz Rudin (2003)). K čemu a jak by však konvergoval poslední člen této rovnice? Cílem této práce je ukázat, že lze definovat výraz

$$\int_0^T b\,(t,N(t))\,dW(t), \tag{3}$$

aby reprezentoval limitu (v L_2 normě) této sumy pro zmenšující se normu dělení. Ukáže se však, že konvergence závisí na volbě τ_k. I pro N spojité nebude jedno, jakou hodnotou v částečných součtech (2) aproximujeme a to díky vlastnostem procesu W. Dále zjistíme, že rozumnou konvergenci obdržíme, i pokud místo hodnot $N_k = N_{\tau_k}$ použijeme průměr hodnot v krajních bodech $[t_k,t_{k+1}]$, tj.

$$\widehat{N}_k = \frac{1}{2}\left(N_{t_k} + N_{t_{k+1}}\right).$$

Po první kapitole, která nabídne potřebné poznatky z teorie pravděpodobnosti, náhodných procesů a integrace, ukážeme v kapitole druhé dva základní přístupy, pomocí kterých lze výraz (3) pri různé aproximaci N definovat. První volba $\tau_k = t_k$ vede na integrál Itôův a druhý s pomocí $\widehat{N}_k$ na integrál Stratonovičův. Přejdeme ovšem k obecnější třídě integrátorů, i když Wienerův proces pro nás zůstane stále důležitým příkladem (teorii integrace i přesto nenabídneme v plné obecnosti, pro hlubší teorii viz Zähle (1998), Biagini a kol. (2008)). Při definici Itôova integrálu pro nás bude výchozím textem zejména Karatzas a Shreve (1988) a při definici Stratonovičova integrálu pak Stratonovich (1966) a Protter (2004).

Poslední kapitola nabídne třetí přístup k definici integrálu, a sice přístup navrhovaný ve Stratonovich (1966). Ukážeme konstrukci, která aproximuje funkci N pomocí hodnot v bodech $\tau_k = \frac{1}{2}(t_{k+1} + t_k)$. Ukážeme, že tento přístup je pro jistou třídu procesů ekvivalentní s původním Stratonovičovým integrálem. Těžištěm této kapitoly pak bude protipříklad z Yor (1977) jako ukázka toho, že i pro spojité integrandy nám tyto různé integrály dávají různé výsledky.

Práce je kompilačního charakteru a jejím přínosem je zejména ucelený výklad a porovnání tří výše popsaných přístupů, neboť výchozí literatura obsahuje vždy teorii k jednomu, či maximálně dvěma integrálům.

1. Základní pojmy

Nechť $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$ je stochastická báze. O filtraci $\{\mathscr{F}_t, t \in [0,T]\}$ předpokládáme, že splňuje obvyklé podmínky, jmenovitě

1. $\mathscr{F}_0$ obsahuje všechny $\mathscr{F}$-nulové množiny,
2. $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s\in(t,T]} \mathscr{F}_s$.

Poznámka. Předpokládat splnění obvyklích podmínek není příliš restriktivní podmínka, jak se lze dočíst v Protter (2004), str. 16 a 22. Teorie se s tímto předpokladem značně zjednodušší, neboť pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že pracujeme s procesy, jejichž trajektorie jsou zprava spojité a limity zleva jsou konečné.

1.1 Pojmy z teorie pravděpodobnosti

Definice 1. *Nechť $1 \le p < \infty$. Pro X reálnou náhodnou veličinu označme $\|X\|_{L_p} = \mathrm{E}[|X|^p]^{1/p}$. Prostor všechreálných náhodných veličin X, pro které je $\|X\|_{L_p} < \infty$ označíme jako $\mathscr{L}_p(A, \mathscr{A}, \mu)$. Na $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ dále definujme relaci $\sim$ jako $X \sim Y$, právě když $\|X - Y\|_{L_p} = 0$. Třídy této ekvivalence pak označme jako $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$.*

Poznámka. Bude-li prostor $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ z předešlé definice zřejmý z kontextu, dovolíme si používat zkrácené značení L_p. Třídy ekvivalence jsou tvořeny náhodnými veličinami, které jsou si rovny P-s.j. Jak je v literatuře zvykem, budeme nadále o prvcích z L_p hovořit jako o náhodných veličinách a budeme mít na paměti, že tyto prvky jsou určeny jednoznačně pouze P-s.j. Normu z $\mathscr{L}_p$ převedeme dále zřejmým způsobem na normu L_p.

Věta 1. *Pro $1 \le p < \infty$ a metriku d_p indukovanou normou $\|\cdot\|_{L_p}$ je metrický prostor (L_p, d_p) úplný.*

Důkaz. Věta je dokázána např. v Lachout (1998), str. 28. $\square$

Definice 2. *Nechť $X, X_n, n \in \mathbb{N}$, jsou reálné náhodné veličiny. Řekneme, že X_n konvergují k X*

1. *v pravděpodobnosti P, píšeme $X_n \xrightarrow{P} X$, pokud*
$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0,$$
2. *v $L_p, 1 \le p < \infty$, píšeme $X_n \xrightarrow{L_p} X$, pokud $X, X_n \in L_p, n \in \mathbb{N}$, a*
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Následující věta popisuje vztah mezi těmito pojmy.

Věta 2. *Nechť $X, X_n \in L_p, n \in \mathbb{N}$, jsou reálné náhodné veličiny. Pokud X_n konverguje k X v $L_p, 1 \le p < \infty$, pak X_n konverguje k X v pravděpodobnosti P a je-li $1 \le q \le p < \infty$, pak X_n konverguje k X v L_q.*

Důkaz. Věta je dokázána např. v Lachout (1998), str. 28. □

Věta 3 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť* $1 \leq q \leq p < \infty$ *splňují* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *a* $X \in L_p, Y \in L_q$ *jsou reálné náhodné veličiny. Potom* $\|XY\|_{L_1} \leq \|X\|_{L_p}\|Y\|_{L_q}$.

Důkaz. Věta je dokázána např. v Lukeš a Malý (2005), str. 39. □

Věta 4 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť* $(A, \mathscr{A}, \mu)$ *je prostor s mírou a* $X, X_n, n \in \mathbb{N}$, *jsou měřitelné reálné funkce,* $X \in L_1(A, \mathscr{A}, \mu)$. *Je-li pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *splněno* $X_n \leq X$ μ*-s.v. a* $\{X_n\}$ *je konvergentní* μ*-s.v., pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_n d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} X_n d\mu.$$

Důkaz. Věta je dokázána např. Lukeš a Malý (2005) v str. 34. □

Definice 3. *Nechť* $X \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *je reálná náhodná veličina,* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ *je* σ*-algebra. Reálnou náhodnou veličinu* $Y \in L_1(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *nazveme podmíněnou střední hodnotou* X *při* $\mathscr{A}$, *značíme* $Y = \mathrm{E}[X \mid \mathscr{A}]$, *pokud*

$$\forall A \in \mathscr{A} : \int_A X dP = \int_A Y dP.$$

Věta 5. *Nechť* $X, Y \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *jsou reálné náhodné veličiny a* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ *je* σ*-algebra. Potom* $\mathrm{E}[X \mid \mathscr{A}]$ *existuje. Dále*

1. $\mathrm{E}[X \mid \mathscr{A}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathscr{C}] \mid \mathscr{A}]$ P*-s.j., pokud* $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$ *je* σ*-algebra,*
2. $\mathrm{E}[X \mid \mathscr{A}] = \mathrm{E}[X]$ P*-s.j., pokud* X *a* $\mathscr{A}$ *jsou nezávislé,*
3. *je-li* $XY \in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *a* X *je* $\mathscr{A}$*-měřitelná, je* $\mathrm{E}[XY \mid \mathscr{A}] = X\,\mathrm{E}[Y \mid \mathscr{A}]$ P*-s.j.,*
4. *je-li* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *je* $\mathrm{E}[\alpha X + \beta Y \mid \mathscr{A}] = \alpha\,\mathrm{E}[X \mid \mathscr{A}] + \beta\,\mathrm{E}[Y \mid \mathscr{A}]$ P*-s.j.,*
5. $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathscr{A}]] = \mathrm{E}[X]$.

Důkaz. Věta je dokázána např. v Lachout (1998), str. 32. □

Definice 4. *Náhodný proces* $X = (X_t, t \in [0,T])$ *nazveme*

- *adaptovaným, pokud pro každé* $t \in [0,T]$ *je* X_t $\mathscr{F}_t$*-měřitelná,*
- $\mathscr{F}_t$*-progresivně měřitelným, pokud pro každé* $t \in [0,T]$ *zobrazení definované na* $[0,t] \times \Omega$ *předpisem* $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ *je* $\mathscr{B}[0,t] \times \mathscr{F}_t$*-měřitelné (*$\mathscr{B}[0,t]$ *značí borelovskou* σ*-algebru na* $[0,t]$*). Bude-li filtrace zřejmá z kontextu, budeme hovořit zkráceně o progresivní měřitelnosti,*
- *omezeným, pokud existuje* $C > 0$ *takové, že pro* P*-s.v.* $\omega \in \Omega$ *a každé* $t \in [0,T]$ *je* $|X_t(\omega)| < C$,
- *spojitým, pokud pro* P*-s.v.* $\omega \in \Omega$ *je zobrazení* $t \mapsto X_t(\omega)$ *spojité.*

1.2 Lebesgueova-Stieltjesova integrace

Definice 5. *Nechť* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Označme* D *množinu všech dělení* $[a,b]$ *a*

$$V(g)_a^b = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|, \{x_i\}_{i=0}^n \in D\}.$$

Řekneme, že g *má omezenou variaci na* $[a,b]$, *jestliže* $V(g)_a^b < \infty$.

Definice 6 (Lebegueův-Stieltjesův integrál)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *a* $f, g^+, g^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jsou borelovsky měřitelné reálné funkce. Nechť* g^+, g^- *jsou po řadě distribučními funkcemi měr* μ^+, μ^- *na reálné přímce* $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ *s borelovskou* σ*-algebrou a nechť integrály*

$$\int_a^b f d\mu^+, \int_a^b f d\mu^-$$

jsou konečné. Označme $g = g^+ - g^-$. *Potom definujeme Lebesgueův-Stieltjesův integrál* f *od* a *do* b *podle* g *jako*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f d\mu^+ - \int_a^b f d\mu^-.$$

Věta 6. *Nechť* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je zprava spojitá a má omezenou variaci na* $[a,b]$. *Potom existují funkce* g^+, g^- *splňující předpoklady Definice 6 takové, že* $g = g^+ - g^-$. *Je-li* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omezená, pak je integrál z této definice dobře definovaný.*

Důkaz. Existence měr je dokázána v Rudin (2003), str. 178. Konečnost integrálu plyne z omezenosti f a toho, že μ^+, μ^- přiřazují omezenému intervalu konečnou míru. □

Poznámka. Definici Lebesgueova-Stieltjesova integrálu můžeme rozšířit i na náhodné procesy. Nechť $X = (X_t, t \in [0,T])$, $Y = (Y_t, t \in [0,T])$ jsou náhodné procesy. Potom definujme Lebesgueův-Stieltjesův integrál X podle Y vztahem

$$\left(\int_0^T X dY\right)(\omega) = \int_0^T X(\omega) dY(\omega),$$

pokud je integrál konečný pro P-s.v. $\omega \in \Omega$. Je-li X omezený a P-s.v. trajektorie Y mají omezené variace na $[0,T]$, máme dle předešlé věty tuto náhodnou veličinu definovanou korektně jen P-s.j. Zavádíme však úmluvu, že pro ostatní $\omega \in \Omega$ budeme považovat za hodnotu tohoto náhodného procesu nulu.

Tvrzení 7. *Nechť* $Y = (Y_t, t \in [0,T])$ *je spojitý adaptovaný proces, který má neklesající trajektorie a* $X = (X_t, t \in [0,T])$ *je progresivně měřitelný. Potom integrály*

$$\int_0^t X^{\pm} dY, \quad 0 \leq t \leq T,$$

kde X^+, X^- *je kladná a záporná část procesu* X, *jsou dobře definované. Jsou-li konečné, pak, chápané jako procesy, jsou zprava spojité a progresivně měřitelné.*

Důkaz. Tvrzení je formulováno v Karatzas a Shreve (1988), str. 23. □

1.3 Wienerův proces

Definice 7 (Wienerův proces)**.** *Spojitý náhodný proces* $W = (W_t, t \in [0,T])$ *nazveme* $\mathscr{F}_t$*-Wienerovým procesem, pokud je* $\mathscr{F}_t$*-adaptovaný a splňuje*

- $W_0 = 0$ *P-s.j.,*
- *pro každé* $t, s \in [0,T], t < s$ *jsou* $W_s - W_t$ *a* $\mathscr{F}_t$ *nezávislé, tj.* $\sigma(W_s - W_t)$ *a* $\mathscr{F}_t$ *jsou nezávislé,*
- *pro každé* $t, s \in [0,T], t < s : W_s - W_t \sim N(0,s-t)$.

Poznámka. Standardně se v definici Wienerova procesu požaduje pouze adaptovanost W. Je-li však proces zprava spojitý a $\mathscr{F}_t$-adaptovaný, je automaticky $\mathscr{F}_t$-progresivně měřitelný. Pro podrobnosti viz Karatzas a Shreve (1988), str. 5.

Poznámka. Pro Wienerův proces dále platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a n-tici bodů $t_1, \dots, t_n \in [0,T], t_1 < t_2 \leq t_3 <, \dots, < t_n$ jsou náhodné veličiny

$$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

nezávislé.

Poznámka. Dle definice zřejmě pro $t, s \in [0,T], t < s$ platí

$$\mathrm{E}[(W_s - W_t)^2] = \mathrm{var}\,(W_s - W_t) = s - t. \tag{1.1}$$

Dokázat, že takový proces existuje, je netriviální. Jedna z možných konstrukcí je předvedena v Karlin a Taylor (1975), str. 371. Dá se ukázat, že při konstrukci si vystačíme pouze s jedinou vhodně použitou veličinou, která má rovnoměrné rozdělení na $(0,1)$.

Věta 8. *Náhodný proces* W *z Definice 7 existuje.*

Důkaz. Věta je dokázána např. v Karlin a Taylor (1975), str. 371. □

V další části práce se ukáže, že Wienerův proces je velmi důležitým příkladem procesů, podle kterých budeme integrovat. Je tedy potřeba o něm něco zjistit.

Definice 8. *Náhodný proces* $X = (X_t, t \in [0,T])$ *nazveme martingalem, pokud každé* $t, s \in [0,T], t < s$ *platí*

- $X_t \in L_1$,
- $\mathrm{E}[X_s - X_t \mid \mathscr{F}_t] = 0$ *P-s.j.*

Poznámka. Poznamenejme, že proces uvedený X v Definici 8 se často nazývá $\mathscr{F}_t$-martingal. Jelikož jsme ale na začátku zafixovali bázi $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$, dovolíme si říkat zkráceně martingal.

Tvrzení 9. *Wienerův proces* $W = (W_t, t \in [0,T])$ *je martingal.*

Důkaz. Tvrzení plyne z toho, že W je dle Definice 7 $\mathscr{F}_t$-adaptovaný, $W_t = W_t - W_0 \sim N(0,t)$ je integrovatelná a pro $t < s$ je

$$\mathrm{E}[W_s - W_t \mid \mathscr{F}_t] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[W_s - W_t \mid \sigma(W_t)] \mid \mathscr{F}_t] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[W_s - W_t] \mid \mathscr{F}_t] = 0,$$

přičemž rovnosti jsou ve smyslu P-s.j. První rovnost dostaneme použitím Věty 5, bodu 1, neboť $\sigma(W_t) \subseteq \mathscr{F}_t$, a druhou z dle téže Věty, bodu 2 ($W_s - W_t$ a $W_t = W_t - W_0$ jsou nezávislé a stejně tak tedy i $W_s - W_t$ a $\sigma(W_t)$). Dále $\mathrm{E}[W_s - W_t]$ má nulovou střední hodnotu, neboť má rozdělení $N(0,s-t)$. □

1.4 Kovariace

V následujícím se jako důležitá ukáže následující definice.

Definice 9 (Množina integrátorů)**.** *Množinu všech spojitých* $\mathscr{F}_t$*martingalů* $X = (X_t, t \in [0,T])$ *splňujících* $X_0 = 0$ P*-s.j. a* $\mathrm{E}[{X_t}^2] < \infty, t \in [0,T]$*, označíme jako* $\mathbf{M}_2^c(\mathscr{F}_t)$*. Je-li filtrace zřejmá z kontextu, značíme zkráceně* $\mathbf{M}_2^c = \mathbf{M}_2^c(\mathscr{F}_t)$*.*

Tvrzení 10. *Prostor* $\mathbf{M}_2^c$ *s metrikou indukovanou* L_2 *normou je úplný.*

Důkaz. Tvrzení je dokázáno v Karatzas a Shreve (1988), str. 37. □

Tvrzení 11. *Wienerův proces* $W = (W_t, t \in [0,T])$ *je prvkem* $\mathbf{M}_2^c$*.*

Důkaz. Dle Definice 7 je W spojitý, $W_0 = 0$ a $\mathrm{E}[W_t^2] = t$ dle vztahu (1.1). W je martingal dle Tvrzení 9. □

Definice 10 (Kovariace)**.** *Nechť* $X = (X_t, t \in [0,T]), Y = (Y_t, t \in [0,T])$ *jsou náhodné procesy. Nechť* $t \in (0,T]$*,* $\delta_n = \{0 = t_n^0 < t_n^1 < , \dots, < t_n^{k_n} = t\}, n \in \mathbb{N}, k_n \in \mathbb{N}$*, jsou dělení intervalu* $[0,t]$ *splňující*

$$\|\delta_n\| = \max_{0 \le i < k_n} \left(t_n^{i+1} - t_n^i\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

. Označme

$$V(X,Y,\delta_n) = \sum_{i=0}^{k_n} (X_{t_n^{i+1}} - X_{t_n^i})(Y_{t_n^{i+1}} - Y_{t_n^i}). \tag{1.2}$$

Dále označme

$$V(X,Y) = \lim_{n \to \infty} V(X,Y,\delta_n), \tag{1.3}$$

chápanou jako limitu v pravděpodobnosti P*, pokud limita existuje. Pokud navíc tato limita nezávisí na posloupnosti dělení* δ_n*, označíme ji jako* $\langle X,Y \rangle_t$ *a hovoříme o kovariaci* X,Y*. Je-li* $X = Y$*, pak hovoříme o kvadratické variaci* X *a značíme* $\langle X \rangle_t = \langle X,X \rangle_t$*.*

Následující věta ukazuje, že pro prvky $\mathbf{M}_2^c$ právě definovaní kovariace existuje.

Věta 12. *Nechť* $X, Y \in \mathbf{M}_2^c$*. Potom pro každé* $t \in [0,T]$ *je kovariace* $\langle X,Y \rangle_t$ *dobře definovaná, tj. limita (1.3) existuje a nezávisí na dělení* $\{\delta_n\}$ *a funkce* $t \mapsto \langle X,Y \rangle_t$ *má omezenou variaci na* $[0,T]$ P*-s.j.*

Důkaz. Tvrzení je formulováno v Karatzas a Shreve (1988), str. 36. □

Věta 13. *Pro* $X \in \mathbf{M}_2^c$ *má náhodný proces* $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t, t \in [0,T])$ *následující vlastnosti:*

- *je adaptovaný,*
- *má neklesající, spojité trajektorie,*
- $\langle X \rangle_0 = 0$ P*-s.j.,*
- *pro pevné* $t \in [0,T]$ *je* $\langle X \rangle_t \in L_1$*,*
- *proces* $X^2 - \langle X \rangle$ *je martingal.*

Důkaz. Věta je dokázána v Karatzas a Shreve (1988), str. 30. $\square$

Tvrzení 14. *Nechť W je Wienerův proces. Potom pro $t \in [0,T]$ je $\langle W \rangle_t = t$ P-s.j.*

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme dělení $\delta_n = \{0, \frac{1}{n}t, \frac{2}{n}t, \dots, t\}$. Zřejmě

$$\|\delta_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dále platí

$$\mathrm{E}[V(W,W,\delta_n)] - t = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}[(W_{\frac{k+1}{n}} - W_{\frac{k}{n}})^2] - t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}t - t = 0.$$

Využili jsme vztah (1.1). Tedy $V(W,W,\delta_n) - t$ konverguje k 0 v L_1 a dle Věty 2 také $V(W,W,\delta_n) \xrightarrow{P} t$. Z Věty 12 plyne tvrzení, neboť $W \in \mathbf{M}_2^c$ dle Tvrzení 11. $\square$

Následující nerovnost, použijeme v závěru práce k odvození zajímavého vztahu ve Tvrzení 34.

Věta 15 (Kunita-Watanabe)**.** *Nechť $X, Y \in \mathbf{M}_2^c$ a $H = (H_t, t \in [0,T]), G = (G_t, t \in [0,T])$ jsou omezené, adaptované náhodné procesy. Potom pro $0 \le s \le t \le T$ je*

$$\int_s^t |H_u G_u| \, d\langle X,Y \rangle_u \le \sqrt{\int_s^t H_u^2 d\langle X \rangle_u} \sqrt{\int_s^t G_u^2 d\langle Y \rangle_u} P - s.j.$$

Integrály chápeme ve smyslu Definice 6.

Důkaz. Věta je dokázána v Karatzas a Shreve (1988), str. 142. $\square$

Tvrzení 16. *Nechť $X, Y \in \mathbf{M}_2^c$. Potom pro $0 \le s \le t \le T$ je*

$$|\langle X,Y \rangle_t - \langle X,Y \rangle_s| \le \sqrt{\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s} \sqrt{\langle Y \rangle_t - \langle Y \rangle_s} P - s.j.$$

Důkaz. Přímo z Definice 6 plyne, že pro $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí $\int_a^b dg = g(b) - g(a)$, pokud Lebesgueův-Stieltjesův integrál existuje. To využijeme v následujícím výpočtu. Protože dle Věty 12 mají procesy $\langle X,Y \rangle, \langle X \rangle, \langle Y \rangle$ trajektorie s omezenou variací, lze dle Věty 6 a Poznámky pod ní počítat následující integrály:

$$\begin{aligned}
|\langle X,Y \rangle_t - \langle X,Y \rangle_s| &= \left| \int_s^t d\langle X,Y \rangle_u \right| \\
&= \left| \int_0^t 1_{[s,t]}(u) d\langle X,Y \rangle_u \right| \\
&\le \sqrt{\int_0^t 1_{[s,t]}^2(u) d\langle X \rangle_u} \sqrt{\int_0^t 1_{[s,t]}^2(u) d\langle Y \rangle_u} \\
&= \sqrt{\int_s^t d\langle X \rangle_u} \sqrt{\int_s^t d\langle Y \rangle_u} \\
&= \sqrt{\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s} \sqrt{\langle Y \rangle_t - \langle Y \rangle_s}.
\end{aligned}$$

Nerovnost plyne přímo z Věty 15 použitím $H(\omega)_u = G(\omega)_u = \mathbf{1}_{[s,t]}(u)$. Předpoklady jsou splněny, neboť to jsou měřitelné procesy, pro pevné $u \in [0,T]$ jsou $H(\omega)_u = G(\omega)_u$ konstantní a tedy $\mathscr{F}_u$-měřitelné a $H(\omega)_u = G(\omega)_u \leq 1, \omega \in \Omega$.

$\square$

2. Konstrukce integrálů

2.1 Itôův integrál

Nechť $Y = (Y_t, t \in [0,T])$ je prvkem $\mathbf{M}_2^c$. V této sekci vybudujeme Itôův integrál podle Y pro nějakou vhodnou třídu funkcí X. Inspirujeme se přitom postupem v Karatzas a Shreve (1988), kap. 3.

Na prostoru $([0,T] \times \Omega, \mathscr{B}[0,T] \otimes \mathscr{F})$, kde $\mathscr{B}[0,T]$ značí borelovskou σ-algebru na $[0,T]$, definujme míru

$$\mu_Y(A) = \mathrm{E}[\int_0^T \mathbf{1}_A(t,\cdot)\, d\langle Y\rangle_t(\cdot)], \quad A \in \mathscr{B}[0,T] \otimes \mathscr{F}.$$

Dle Věty 12 je kovariace $\langle Y\rangle$ dobře definována a je navíc neklesající, nezáporná, spojitá a adaptovaná a tedy dle Tvrzení 7 je míra dobře definovaná. Prostor s touto mírou je pro nás výchozí pro definici množiny integrandů.

Definice 11. *Prostor progresivně měřitelných procesů $X = (X_t, t \in [0,T]), X \in L_2([0,T] \times \Omega, \mathscr{B}[0,T] \otimes \mathscr{F}, \mu_Y)$ označme jako $\mathbf{L}(Y)$. Pro L_2 normu na tomto prostoru budeme dále užívat označení $[\cdot]_Y$, tj.*

$$[X]_Y^2 = \mathrm{E}[\int_0^T X_t^2(\omega) d\langle Y\rangle_t(\omega)], \quad X \in \mathbf{L}(Y).$$

Poznámka. Nechť kvadratická variace procesu Y z předešlé definice nezávisí na $\omega \in \Omega$ P-s.j., tedy $\langle Y\rangle_t(\omega) = g(t), t \in [0,T]$, pro P-s.v. $\omega \in \Omega$ a nějakou g funkci s konečnou variací na $[0,T]$. Potom je-li X progresivně měřitelný proces na $[0,T]$, pak

$$[X]_Y^2 = \mathrm{E}[\int_0^T X_t^2(\omega) d\langle Y\rangle_t(\omega)] = \int_0^T \mathrm{E}[X_t^2(\omega)] dg(t).$$

Tento vztah plyne z Fubiniho věty, kde za součinový prostor bereme $([0,T] \times \Omega, \mathscr{B}[0,T] \otimes \mathscr{F}, \mu_g \times P)$, kde μ_g je míra definovaná v Lebesgue-Stieltjesově smyslu. Předpoklad o existenci integrálu

$$\int_{[0,T]\times\Omega} X_t^2(\omega) d(\mu_g(t) \otimes P(\omega))$$

je splněn, neboť X^2 je nezáporná na $[0,T] \times \Omega$.

Věta 17. *Prostor $\mathbf{L}(Y)$ s metrikou indikovanou normou $[\cdot]_Y$ je úplný.*

Důkaz. Věta je dokázána v Karatzas a Shreve (1988), str. 131. □

Definice 12. *Omezený proces $Z = (Z_t, t \in [0,T])$ nazveme jednoduchým, pokud existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < , \dots , < t_k = T$ a posloupnost náhodných veličin $\xi_0, \dots, \xi_n$ takových, že ξ_j je $\mathscr{F}_{t_j}$-měřitelná, $0 \le j \le n$ a*

$$Z_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j \mathbf{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{2.1}$$

Množinu takových procesů označíme $\mathbf{L}_0$.

Poznámka. Jsou-li Z_1,Z_2 jednoduché, pak i $Z_1 + Z_2$ je jednoduchá. Za potřebné dělení určující tuto funkci totiž stačí vzít sjednocení dělení určující funkce Z_1 a Z_2. Za hodnoty na těchto nových intervalech pak vezmeme součet hodnot původních funkcí na příslušných nadintervalech. Množina $\mathbf{L}_0$ je zřejmě uzavřena i na násobení skalárem.

Poznámka. Zřejmě platí $\mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}(Y)$ pro každé $Y \in \mathbf{M}_2^c$. Totiž veličiny ξ_j a $\mathbf{1}_{(t_j,t_{j+1}]}$ chápané jako náhodné procesy jsou progresivně měřitelné (stejně tak potom i Z) a z omezenosti je $Z < C$ na $[0,T] \times \Omega$ pro nějaké $C > 0$ a tedy i $[Z]_Y^2 = \mathrm{E}[\int_0^T Z^2 d\langle Y\rangle] < C^2\,\mathrm{E}[\langle Y\rangle_T] < \infty$, neboť dle Věty 13 je náhodná veličina $\langle Y\rangle_T$ integrovatelná.

Pro jednoduché procesy zavedeme Itôův integrál přirozeným způsobem. Je-li $Z \in \mathbf{L}_0$ tvaru (2.1) a $Y \in \mathbf{M}_2^c$, označme

$$I(Z)_Y = \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j (Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j}). \tag{2.2}$$

Následující vlastnost této transformace se ukáže jako důležitá při konstrukci integrálu pro obecné procesy.

Lemma 18. *Nechť $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_k \le T$ je dělení intervalu $[0,T]$, pro každé $0 \le j \le k$ je ξ_j náhodná veličina, která je $\mathscr{F}_{t_j}$-měřitelná a má konečný rozptyl. Nechť $Y \in \mathbf{M}_2^c$. Potom platí, že*

- *je-li $0 \le i < j \le k-1$, je*

$$\mathrm{E}[\xi_i(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})\xi_j(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})] = 0, \tag{2.3}$$

- *a je-li $0 \le j \le k$, je*

$$\mathrm{E}[(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}] = \mathrm{E}[\langle Y\rangle_{t_{j+1}} - \langle Y\rangle_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}] \quad P-s.j. \tag{2.4}$$

Důkaz. Vztah (2.3) dostaneme výpočtem

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\xi_i(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})\xi_j(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi_j\xi_i(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j}) \mid \mathscr{F}_{t_j}]] = \\ &= \mathrm{E}[\xi_j\xi_i(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})\,\mathrm{E}[Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}]] = 0.\end{aligned}$$

Všechny veličiny $Y_{t.}$,$\xi_.$ jsou $\mathscr{F}$-měřitelné a $\mathscr{F}_{t_j} \subseteq \mathscr{F}$, navíc mají konečný rozptyl. Dle Věty 3 je tedy jejich součin z L_1 a podmínění je korektní dle Definice 3. První rovnost je bod 5 Věty 5, druhá rovnost je pak dána bodem 3. Třetí rovnost je přímo z Definice 8, neboť $\mathrm{E}[Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}] = 0$ P-s.j.

Dokážeme vztah (2.4):

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}] &= \mathrm{E}[Y_{t_{j+1}}^2 - 2Y_{t_{j+1}}Y_{t_j} + Y_{t_j}^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}] = \\ &= \mathrm{E}[Y_{t_{j+1}}^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}] - 2\,\mathrm{E}[Y_{t_{j+1}}Y_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}] + \mathrm{E}[Y_{t_j}^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}] = \\ &= \mathrm{E}[Y_{t_{j+1}}^2 - Y_{t_j}^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}] = \\ &= \mathrm{E}[Y_{t_{j+1}}^2 - \langle Y\rangle_{t_{j+1}} \mid \mathscr{F}_{t_j}] - \mathrm{E}[Y_{t_j}^2 - \langle Y\rangle_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}] + \\ &\quad + \mathrm{E}[\langle Y\rangle_{t_{j+1}} - \langle Y\rangle_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}] = \\ &= 0 + \mathrm{E}[\langle Y\rangle_{t_{j+1}} - \langle Y\rangle_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}].\end{aligned}$$

Rovnosti jsou ve smyslu P-s.j. Nově jsme použili linearitu podmíněné střední hodnoty (bod 4 Věty 5) a tvrzení, že $Y_t^2 - \langle Y\rangle_t$ je $\mathscr{F}_t$-martingal dle Věty 13. □

Tvrzení 19. *Nechť* $Z, Z_1, Z_2 \in \mathbf{L}_0$ *a* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. *Potom*

$$\|I(Z)_Y\|_{L_2} = [Z]_Y.$$

Dále platí

$$I(\alpha Z_1 + \beta Z_2)_Y = \alpha I(Z_1)_Y + \beta I(Z_2)_Y.$$

Důkaz. Linearita je zřejmá z poznámky o uzavřenosti $\mathbf{L}_0$ na sčítání a násobení skalárem a vztahu (2.2). Dokážeme pouze rovnost norem. Nechť Z je tvaru (2.1). Jelikož náhodné veličiny ξ_j, Y_{t_j} jsou z L_2 (ξ_j jsou dokonce omezené a Y_{t_j} mají konečný rozptyl dle Definice 9), lze počítat podmíněnou střední hodnotu z jejich kvadrátů. $I(Z)_Y$ je tvaru (2.2) a platí

$$\begin{aligned}
\|I(Z)_Y\|^2_{L_2} = \mathrm{E}[I(Z)^2_Y] &= \mathrm{E}[(\sum_{j=0}^{k-1} \xi_j (Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^2] \\
&\overset{(i)}{=} \mathrm{E}[\sum_{j=0}^{k-1} \xi_j^2 (Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^2] \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{E}[\xi_j^2 (Y_{t_{j+1}} - Y_{t_k})^2] \\
&\overset{(iii)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi_j^2 (Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}]] \\
&\overset{(iv)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{E}[\xi_j^2\, \mathrm{E}[(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^2 \mid \mathscr{F}_{t_j}]] \\
&\overset{(v)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{E}[\xi_j^2\, \mathrm{E}[\langle Y\rangle_{t_{j+1}} - \langle Y\rangle_{t_j} \mid \mathscr{F}_{t_j}]] \\
&\overset{(vi)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi_j^2 (\langle Y\rangle_{t_{j+1}} - \langle Y\rangle_{t_j}) \mid \mathscr{F}_{t_j}]] \\
&\overset{(vii)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{E}[\xi_j^2 (\langle Y\rangle_{t_{j+1}} - \langle Y\rangle_{t_j})] \\
&\overset{(viii)}{=} \mathrm{E}[\sum_{j=0}^{k-1} \xi_j^2 (\langle Y\rangle_{t_{j+1}} - \langle Y\rangle_{t_j})] \\
&\overset{(ix)}{=} \mathrm{E}[\int_0^T Z_t^2 d\langle Y\rangle_t] = [Z]_Y.
\end{aligned}$$

Rovnost (i) je ze vztahu (2.3), neboť ξ_j jsou omezené a tedy z L_2. Rovnost (ii) je linearita střední hodnoty, rovnost (iii) je z bodu 5 Věty 5, neboť náhodné veličiny ξ_j, Y_{t_j} jsou z L_2 a jejich součin jako prvek L_1 tedy lze podmiňovat. Rovnost (iv) je opět z Věty 5, nyní bod 4 s použitím $\mathscr{F}_{t_j}$-měřitelnosti ξ_j. Rovnost (v) je dle vztahu (2.4). Rovnost (vi) je opětovné použití bodu 4 Věty 5. Dále rovnost (vii) je z bodu 5 téže Věty. V další rovnosti jsme použili linearitu střední hodnoty a nakonec rovnost (ix) je dle Definice 6 Lebesgueova-Stieltjesova integrálu. □

Konstrukci integrálu pro obecný prvek $\mathbf{L}(Y)$ provedeme tak, že takový proces aproximujeme posloupností jednoduchých procesů, pro které máme integrál již definovaný. V této práci si předvedeme takový postup pouze pro $Y = W$, kde W je Wienerův proces. Pro obecný případ odkazujeme na Karatzas a Shreve (1988), str. 138. Náš případ shrnuje Tvrzení 23, kterému předchází několik technických lemmat, pomocí kterých nejprve aproximujeme spojitý proces jednoduchými procesy, pak omezený proces spojitými a nakonec obecný proces omezenými procesy. Ve zmíněném Tvrzení 23 pak z těchto postupných aproximací sestavíme naši kýženou posloupnost jednoduchých procesů.

Je užitečné si uvědomit, že v tomto případě je z Tvrzení 14

$$[X]_W = \mathrm{E}[\int_0^T X_t^2 dt], \quad X \in \mathbf{L}(W).$$

Lemma 20. *Nechť $X = (X_t, t \in [0,T])$ je spojitý, omezený a progresivně měřitelný proces. Potom existuje posloupnost $\{Z^{(m)}\}$ jednoduchých procesů takových, že*

$$\mathrm{E}[\int_0^T (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] \to 0, \quad m \to \infty.$$

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \ldots, 2^m\}$ položme $t_k^m = \frac{k}{2^m} T$ a

$$Z_t^{(m)} = X_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{2^m - 1} X_{t_k^m} \mathbf{1}_{(t_k^m, t_k^{m+1}]}(t). \tag{2.5}$$

Z omezenosti X plyne omezenost $Z_t^{(m)}$ a dále $Z_t^{(m)}$ je zřejmě tvaru (2.1), neboť za ξ_k můžeme volit $\mathscr{F}_{t_k^m}$-měřitelné procesy $X_{t_k^m}$. Dále existuje $C >$ takové, že

$$\forall t \in [0,T] : |X_t| \leq C \quad P - s.j.$$

Z toho plyne, že

$$\int_0^T \left(X_t - Z_t^{(m)} \right)^2 dt \leq 4CT \quad P - s.j.$$

neboť $\left| X_t - Z_t^{(n)} \right| \leq 2C$. To nás opravňuje k dvojímu použití Věty 4, čímž dostaneme požadovaný vztah:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \mathrm{E}[\int_0^T (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] &= \mathrm{E}[\lim_{m\to\infty} \int_0^T (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] \\
&= \mathrm{E}[\int_0^T \lim_{m\to\infty} (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] \\
&= \mathrm{E}[\int_0^T 0 dt] = 0.
\end{aligned}$$

Totiž spojitost X implikuje $Z^{(m)} \to X, n \to \infty$. □

Lemma 21. *Nechť $X = (X_t, t \in [0,T])$ je omezený, progresivně měřitelný proces. Potom existuje posloupnost spojitých, progresivně měřitelných procesů $\{Z^{(m)}\}$ takových, že*

$$\mathrm{E}[\int_0^T (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Důkaz. Označme

$$F_t = \int_0^t X_s ds, \quad t \in [0,T].$$

Tento integrál vyjde z omezenosti X konečný P-s.j. V ostatních případech dodefinujme nulou, tj. je-li $\omega \in \Omega$ takové, že $F_t(\omega)$ není konečné pro nějaké $t \in [0,T]$, definujeme $F_t(\omega) = 0, t \in [0,T]$. Proces $F = (F_t, t \in [0,T])$ je progresivně měřitelný dle Tvrzení 7 s použitím $Y_t = t$. Navíc F je jako funkce horní meze spojitá. Označme

$$Z_t^{(m)} = m\left(F_t - F_{(t-1/m)\vee 0}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Jelikož funkce pro $m \in \mathbb{N}$ je funkce $t \mapsto t - 1/m$ je spojitá, jsou i $Z^{(m)}$ spojité. Z progresivní měřitelnosti F plyne i progresivní měřitelnost $Z^{(m)}$, totiž o progresivní měřitelnosti F již víme a pro $t \in [0,T]$ a $s \in [0,t]$ je $F_{s-1/m\vee 0}$ proces $\mathscr{B}[0,t] \otimes \mathscr{F}_t$-měřitelný, neboť $s - 1/m < s$. Označme

$$A = \{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega : \lim_{m\to\infty} Z_t^{(m)}(\omega) \neq X_t(\omega)\}.$$

Z progresivní měřitelnosti X a $Z^{(m)}$ plyne, že $A \in \mathscr{B}[0,T] \otimes \mathscr{F}_T$. Tedy $A_\omega = \{t \in [0,T] : (t,\omega) \in A\} \in \mathscr{B}[0,T]$. Tvrdím, že každá A_ω je množinou Lebesgueovy míry 0 pro P-s.v. $\omega \in \Omega$. X je totiž omezený a tedy existuje $C > 0$, že pro P-s.v. $\omega \in \Omega$ je $|X_t(\omega)| < C, t \in [0,T]$. Fixujme nyní $\omega_0 \in \Omega$, že je toto splněno. Potom je trajektorie $X(\omega)$ zřejmě integrovatelná na $(t - 1/m) \vee 0,t), t \in [0,T]$ a dle Lebesguovy věty o derivaci (viz Lebesgue (1910)) je tedy pro λ-s.v. $t \in [0,T]$

$$Z_t^{(m)}(\omega_0) = m \int_{t-1/m)\vee 0}^t X_s(\omega_0) ds \to X_t(\omega_0), \quad m \to \infty.$$

Z $Z_t^{(m)}(\omega_0) \to X_t(\omega_0)$ λ-s.v. již dostáváme dle Věty 4 a omezenosti integrandu

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(Z_t^{(m)}(\omega_0) - X_t(\omega_0))\right)^2 dt = 0.$$

Nyní opětovným použitím Věty 4, omezenosti X a konvergence (a tedy omezenosti) $\{Z^{(m)}\}$ dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{E}[\int_0^T \left(Z_t^{(m)} - X_t\right)^2 dt] = 0.$$

□

Lemma 22. *Nechť $X = (X_t, t \in [0,T]) \in \mathbf{L}(W)$. Potom existuje posloupnost omezených, progresivně měřitelných procesů $\{Z^{(m)}\}$ takových, že*

$$\mathrm{E}[\int_0^T (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ položím $Z^{(m)} = m \wedge (X \vee -m)$. Pak každá $Z^{(m)}$ je omezená a $Z_m \in \mathbf{L}(W)$, neboť

- $Z^{(m)}$ je $\mathscr{B}$-měřitelnou funkcí $\mathscr{B} \times \mathscr{F}$-měřitelné funkce X a je tedy sama měřitelná,

- dle stejného argumentu je $Z_t^{(m)}$ $\mathscr{F}_t$-progresivně měřitelná,
- $\left(Z^{(m)}\right)^2 \leq\ n^2$ a tedy $[Z^{(m)}]_W^2 = \mathrm{E}[\int_0^T \left(Z^{(m)}\right)^2 dt]\ \leq \mathrm{E}[Tn^2]\ <\ \infty$.

Požadovanou konvergenci dostaneme opět užitím Věty 4, neboť $|X - Z^{(m)}| \leq |2X| \in \mathbf{L}(W)$ a tedy

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{E}[\int_0^T (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] = \mathrm{E}[\int_0^T \lim_{n\to\infty} (X_t - Z_t^{(m)})^2 dt] = 0.$$

□

Tvrzení 23. *Množina* $\mathbf{L}_0$ *je hustá v* $\mathbf{L}(Y)$ *pro každé* $Y \in \mathbf{M}_2^c$*. Konkrétně pro každé* $X \in \mathbf{L}(Y)$ *existuje posloupnost* $\{Z^{(n)}\}$ *jednoduchých funkcí taková, že*

$$[X - Z^{(n)}]_Y \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.6}$$

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro speciální případ, kdy $Y = W$ je Wienerův proces. Obecnou konstrukci lze nalézt v Karatzas a Shreve (1988), str. 138. Dle Tvrzení 14 je $\langle W\rangle_t = t$ a po $\{Z^{(n)}\}$ budeme požadovat

$$\mathrm{E}[\int_0^T (X_t - Z_t^{(n)})^2 dt] \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.7}$$

Dle lemmat 20, 21 a 22 nalezneme procesy A_n, B_{nk}, C_{nkj} splňující

$$\begin{aligned} [A_n - X]_W &\to 0, \quad n \to \infty, \\ \forall n \in \mathbb{N} :[B_{nk} - A_n]_W &\to 0, \quad k \to \infty, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} :[C_{nkj} - B_{nk}]_W &\to 0, \quad j \to \infty. \end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} :[A_n - X]_W &< \frac{1}{n}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} :[B_{nk} - A_n]_W &< \frac{1}{k}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N} :[C_{nkj} - B_{nk}]_W &< \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

neboť pokud $[f_n - f]_W \to 0$, pak existuje vybraná podposloupnost splňující $[f_{n_k} - f]_W < 1/k$. Nyní stačí položit $Z_n = C_{nnn}$. Díky trojúhelníkové nerovnosti pro L_2 normu $[\cdot]_W$ máme

$$[X - Z_n]_W \leq [C_{nnn} - B_{nn}]_W + [B_{nn} - A_n]_W + [A_n - X]_W \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n},$$

což dokazuje tvrzení. □

Nyní máme připraveno vše k tomu, abychom mohli definovat Itôův integrál.

Definice 13. *Nechť $Y \in \mathbf{M}_2^c$ a $X \in \mathbf{L}(Y)$. Integrálem X podle Y v Itôově smyslu, značíme $(I)\int_0^T XdY$, myslíme*

$$(I)\int_0^T XdY = \lim_{n\to\infty} I(Z_n)_Y, \tag{2.8}$$

limitu chápanou v prostoru L_2, kde $Z_n \in \mathbf{L}_0, [X - Z_n]_Y \to 0$ a $I(Z_n)_Y$ je definováno vztahem (2.2).

Tato definice v sobě skrývá mnohá úskalí. Na první pohled totiž nemáme zaručenu existenci ani jednoznačnost limity, pomocí níž definujeme. S použitím předešlých odstavců však není těžké definici ospravedlnit.

Tvrzení 24. *Definice 13 je korektní, tj. je-li $X \in \mathbf{L}(Y)$, pak*

- *existuje posloupnost $\{Z_n\}$ prvků $\mathbf{L}_0$, že $[X-Z_n]_Y \to 0, n\to\infty$ a posloupnost ve výrazu (2.8) konverguje,*
- *jsou-li $\{Z_n^1\}, \{Z_n^2\}$ posloupnosti prvků prostoru $\mathbf{L}_0$ takové, že $[X-Z_n^1]_Y, [X-Z_n^2]_Y \to 0, n\to\infty$, pak $\|I(Z_n^1)_Y - I(Z_n^2)_Y\|_{L_2} \to 0, n\to\infty$.*

Důkaz.

- Existence takové posloupnosti je dokázána v Lemma 23. Z Věty 1 víme, že prostor L_2 je úplný a tedy pro důkaz konvergence limity 2.8 stačí ukázat, že posloupnost $\{I(Z_n)_Y\}$ je cauchyovská v L_2. Tedy nechť $n, m \in \mathbb{N}$, pak
$$\|I(Z_n)_Y - I(Z_m)_Y\|_{L_2} = \|I(Z_n - Z_m)_Y\|_{L_2} = [Z_n - Z_m]_Y,$$
což je dle předpokladu cauchyovská posloupnost (u obou rovností použili Tvrzení 19).

- Jednoznačnost plyne opět z Tvrzení 19, totiž
$$\begin{aligned}\|I(Z_n^1)_Y - I(Z_n^2)_Y\|_{L_2} = \|I(Z_n^1 - Z_n^2)_Y\|_{L_2} &= [Z_n^1 - Z_n^2]_Y \leq \\ &\leq [X - Z_n^1]_Y + [X - Z_n^2]_Y\end{aligned}$$
a obě tyto normy jdou dle předpokladu k nule.

□

Tvrzení 25. *Nechť $X \in \mathbf{L}(Y)$ je spojitý proces a $\delta_n = \{0 = t_n^0 < t_n^1 <, \dots, < t_n^{k_n} = t\}, n \in \mathbb{N}$ jsou dělení $[0,T]$ splňující*

$$\|\delta_n\| = \max_{0\leq j<k_n} \left(t_n^{j+1} - t_n^j\right) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{j=0}^{k-1} X_{t_n^j}(Y_{t_n^{j+1}} - Y_{t_n^j}) \xrightarrow{P} (I)\int_0^T XdY, \quad n\to\infty$$

Důkaz. Tvrzení je dokázáno v Protter (2004), str. 64. V důkazu se stejně jako v Lemmatu 20 sestaví pro $n \in \mathbb{N}$ aproximující jednoduché funkce $Z^{(n)}$ z rovnice (2.5). Potom $(I)\int_0^T Z^{(n)}dY, n \in \mathbb{N}$ je přesně levá strana dokazované rovnosti. Dále se pak ukáže, že tyto integrály konvergují v P k pravé straně. □

2.2 Stratonovičův integrál

V této sekci budeme opět značit $Y = (Y_t, t \in [0,T])$ prvek $\mathbf{M}_2^c$ a definujeme Stratonovičův integrál podle Y pro vhodnou třídu funkcí X.

Definice 14. *Nechť $X = (X_t, t \in [0,T]) \in \mathbf{L}(Y)$ je spojitý proces. Předpokládejme, že $\langle X,Y \rangle_T$ existuje. Integrálem X podle Y ve Stratonovičově smyslu, značíme $(S) \int_0^T X dY$, myslíme*

$$(S) \int_0^T X dY = (I) \int_0^T X dY + \frac{1}{2} \langle X,Y \rangle_T. \tag{2.9}$$

Následující tvrzení je analogií Tvrzení 25 a ukazuje, proč bylo vhodné definovat Stratonovičův integrál právě uvedeným způsobem.

Tvrzení 26. *Nechť $X = (X_t, t \in [0,T]) \in \mathbf{L}(Y)$ je spojitý. Předpokládejme, že $\langle X,Y \rangle_T$ existuje a $\delta_n = \{0 = t_n^0 < t_n^1 < , \dots , < t_n^{k_n} = t\}, n \in \mathbb{N}$ jsou dělení $[0,T]$ splňující*

$$\|\delta_n\| = \max_{0 \leq j < k_n} \left(t_n^{j+1} - t_n^j \right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Potom

$$\sum_{j=0}^{k_n - 1} \frac{1}{2} (X_{t_n^{j+1}} + X_{t_n^j})(Y_{t_n^{j+1}} - Y_{t_n^j}) \xrightarrow{P} (S) \int_0^T X dY, \quad n \to \infty$$

Důkaz. Platí

$$\sum_{j=0}^{k_n - 1} \frac{1}{2} (X_{t_n^{j+1}} + X_{t_n^j})(Y_{t_n^{j+1}} - Y_{t_n^j}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k_n - 1} X_{t_n^j} (Y_{t_n^{j+1}} - Y_{t_n^j}) + \sum_{j=0}^{k_n - 1} \frac{1}{2} (X_{t_n^{j+1}} - X_{t_n^j})(Y_{t_n^{j+1}} - Y_{t_n^j}),$$

přičemž první z těchto výrazů konverguje v P k $(I) \int_0^T X dY$ dle Tvrzení 25 a 2 a druhý k $\frac{1}{2} \langle X,Y \rangle_T$ dle Definice 10. □

2.3 Vlastnosti integrálů

Tvrzení 25 a 26 porovnávají základní vlastnosti Itôova a Stratonovičova integrálu. V této sekci se zaměříme na další dva aspekty, a sice martingalovou vlastnost a analogii tzv. řetízkového pravidla. Opět uvažujme $Y = (Y_t, t \in [0,T]) \in \mathbf{M}_2^c$.

Tvrzení 27. *Nechť $X \in \mathbf{L}(Y)$. Označme $I = (I_t, t \in [0,T])$, kde $I_t = (I) \int_0^t X dY$ s konvencí $I_0 = 0$. Potom I je martingal.*

Důkaz. Nejprve nechť $X \in \mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}(Y)$. Ukážeme, že dokonce $I \in \mathbf{M}_2^c$, z toho již bude plynout martingalová vlastnost díky Definici 9. Můžeme předpokládat, že $(I) \int_0^t X dY$ je dáno jako

$$\sum_{j=0}^{k-1} \xi_j \left(Y_{t_{j+1} \wedge t} - Y_{t_j \wedge t} \right).$$

Pro podrobnosti ohledně tohoto předpokladu (konstrukce integrálu pro různá $t \geq 0$) viz Karatzas a Shreve (1988). Stačí si uvědomit, že X je jednoduchá funkce i jako proces na intervalu $[0,t]$ a Itôův integrál tak počítáme vztahem 2.2 (volíme $T = t$), díky volbě $Z_n = X, n \in \mathbb{N}$, v Definici 13. Vlastnost $I_0 = 0$ je zřejmá a spojitost taktéž, neboť Y i každé ξ_j jsou v t spojité. Volme nyní $0 \leq t \leq T$. Potom

- I_t je dáno jako součet součinu vhodných $\mathscr{F}_t$-měřitelných procesů ξ_j, Y_{t_j}, kde $Y_{t_j} \in L_2$ a ξ je omezená, neboť každý jednoduchý proces je omezený. Součin $\xi_j Y_{t_j}$ je pak z L_2 a linearitou se tato vlastnost převede i na I_t, tedy $\mathrm{E}[I_t^2] < \infty, t \in [0,T]$.
- Je-li $0 \leq s < t$ a $j \in \{0,1 \ldots ,k-1\}$, je

$$\mathrm{E}[\xi_j \left(Y_{t_{j+1} \wedge t} - Y_{t_j \wedge t} \right) \mid \mathscr{F}_s] = \xi_j \left(Y_{t_{j+1} \wedge s} - Y_{t_j \wedge s} \right) \quad P - s.j. \tag{2.10}$$

  Pro j takové, že $t_{j+1} < s$ je toto tvrzení vztahu (2.10) triviální (s použitím Věty 5, bodu 3), neboť pak jsou všechny podmiňované veličiny $\mathscr{F}_s$ měřitelné. Je-li $t_j < s \leq t_{j+1}$, pak

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\xi_j \left(Y_{t_{j+1} \wedge t} - Y_{t_j \wedge t} \right) \mid \mathscr{F}_s] &= \mathrm{E}[\xi_j Y_{t_{j+1} \wedge t} \mid \mathscr{F}_s] - \mathrm{E}[\xi_j Y_{t_j \wedge t} \mid \mathscr{F}_s] \\ &= \xi_j \, \mathrm{E}[Y_{t_{j+1} \wedge t} \mid \mathscr{F}_s] - \xi_j Y_{t_j \wedge t} \\ &= \xi_j \left(Y_{t_{j+1} \wedge s} - Y_{t_j \wedge s} \right) \quad P - s.j.\end{aligned}$$

  Použili jsme $\mathscr{F}_s$-měřitelnost ξ a $Y_{t_j \wedge t}$ a martingalovou vlastnost Y. Konečně, je-li $s \leq t_j$, dostáváme na pravé straně v (2.10) nulu, což odpovídá i levé straně, neboť

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\xi_j \left(Y_{t_{j+1} \wedge t} - Y_{t_j \wedge t} \right) \mid \mathscr{F}_s] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi_j \left(Y_{t_{j+1} \wedge t} - Y_{t_j \wedge t} \right) \mid \mathscr{F}_{t_j}] \mid \mathscr{F}_s] \\ &= \mathrm{E}[\xi_j \, \mathrm{E}[Y_{t_{j+1} \wedge t} - Y_{t_j \wedge t} \mid \mathscr{F}_{t_j}] \mid \mathscr{F}_s] \\ &= \mathrm{E}[\xi_j 0 \mid \mathscr{F}_s] \quad P - s.j.\end{aligned}$$

Použili jsme $\mathscr{F}_{t_j}$-měřitelnost ξ_j a bod 3 Věty 5. Nakonec ještě martingalovou vlastnost Y. Celkem z 2.10 plyne, že

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[I_t \mid \mathscr{F}_s] &= \mathrm{E}[\sum_{j=0}^{k-1} \xi_j \left(Y_{t_{j+1}\wedge t} - Y_{t_j \wedge t}\right) \mid \mathscr{F}_s] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{E}[\xi_j \left(Y_{t_{j+1}\wedge t} - Y_{t_j \wedge t}\right) \mid \mathscr{F}_s] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j \left(Y_{t_{j+1}\wedge s} - Y_{t_j \wedge s}\right) = I_s \quad P - s.j.,
\end{aligned}$$

s použitím linearity podmíněné střední hodnoty.

Tímto jsme ověřili podmínky Definice 9. Tvrzení se snadno rozšíří pro obecný prvek z $\mathbf{L}(Y)$. Neboť pro $X \in \mathbf{L}(Y)$ je Itôův integrál dle Definice 13 daný jako konvergentní a tedy cauchyovská posloupnost Itôových integrálů jednoduchých procesů, které jsou dle předchozího prvky $\mathbf{M}_2^c$, a $\mathbf{M}_2^c$ je dle Tvrzení 10 úplná a tedy uzavřená množina. Tedy $I \in \mathbf{M}_2^c$ a I je martingal. $\square$

Příklad. Analogie Tvrzení 27 pro Stratonovičův integrál neplatí. Uvedeme zde protipříklad. Ukážeme, že pro Wienerův proces $W \in \mathbf{L}(W)$ integrál

$$(S)\int_0^T W dW$$

není martingal. Nejprve spočítáme $\int_0^T W dW$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme dělení $\delta_n = \{0, \frac{1}{n}T, \frac{2}{n}T, \ldots, T\}$. Zřejmě $\|\delta_n\| \to 0, n \to \infty$. Ze spojitosti W tedy dle Věty 25

$$\sum_{j=0}^{n-1} W_{\frac{k}{n}T}(W_{\frac{k+1}{n}T} - W_{\frac{k}{n}T}) \xrightarrow{P} (I)\int_0^T W dW, \quad n \to \infty.$$

Zároveň však pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ je s označením $t_k^n = \frac{k}{n}T$

$$W_{t_{k+1}^n}^2 - W_{t_k^n}^2 = \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}\right)^2 + 2W_{t_k^n}(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}).$$

Tedy, neboť $W_0 = 0$ P-s.j.,

$$W_t^2 = \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_{k+1}^n}^2 - W_{t_k^n}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}\right)^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k^n}(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}).$$

První člen na pravé straně rovnosti pro $n \to \infty$ konverguje v pravděpodobnosti P k T dle Tvrzení 14 a dle výše uvedeného jde druhý výraz k $(I)\int_0^T W dW$. Dohromady

$$(I)\int_0^T W dW = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T.$$

Dle Definice 2.9 a Tvrzení 14 je

$$(S)\int_0^T W dW = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}W_T^2.$$

Označme $S = (S_t, t \in [0,T])$, kde $S_t = (S)\int_0^t W dW$. Dle předešlého je $S_t = \frac{1}{2}W_t^2, t \in [0,T]$. Ukážeme, že pro $0 \leq s < t \leq T$, není pravda, že $\mathrm{E}[S_t - S_s \mid \mathscr{F}_s] = 0$ P-s.j. Tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S_t - S_s \mid \mathscr{F}_s] &= \mathrm{E}[\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}W_s^2 \mid \mathscr{F}_s] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[W_t^2 - W_s^2 \mid \mathscr{F}_s] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[(W_t - W_s)^2 + 2W_tW_s - 2W_s^2 \mid \mathscr{F}_s] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[2W_s(W_t - W_s) + (W_t - W_s)^2) \mid \mathscr{F}_s] \\
&= \mathrm{E}[W_s(W_t - W_s) \mid \mathscr{F}_s] + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[(W_t - W_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] \\
&= W_s\,\mathrm{E}[(W_t - W_s) \mid \mathscr{F}_s] + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}[(W_t - W_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] \\
&= 0 + \frac{1}{2}(t - s) \neq 0.
\end{aligned}$$

Uvedené rovnosti jsou ve smyslu P-s.j. Použili jsme Větu 5, $\mathscr{F}_s$-měřitelnost W_s, nezávislost $W_t - W_s$ a $\mathscr{F}_s$ a konečně $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$. Z toho již vyplývá, že zmíněný integrál není martingal. △

Z doposud vyložené teorie není příliš zřejmé, jak v praxi takovéto integrály počítat. Stejně jako v teorii klasické integrace je potřebova zavést nějakou obdobu tzv. řetízkového pravidla. Bez důkazu předkládáme výsledek, který přinesl Itô (pro případ, kdy integrujeme podle Wienerova procesu) a později Kunita a Watanabe (pro obecný případ).

Věta 28 (Itôova formule)**.** *Nechť $Y = (Y_t, t \in [0,T]) \in \mathbf{M}_2^c$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $\mathscr{C}^2$. Potom*

$$f(Y_T) = f(Y_0) + (I)\int_0^T f'(Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''(Y_t)\, d\langle Y\rangle_t \quad P - s.j., \tag{2.11}$$

kde druhý integrál počítáme v Lebesgue-Stieltjesově smyslu.

Důkaz. Věta je dokázána v Karatzas a Shreve (1988), str. 149. □

Oproti tzv. řetízkovému pravidlu z klasické teorie tedy přibyl člen obsahující druhou derivaci funkce f. Zásadní rozdíl přináší verze tohoto pravidla pro Stratonovičův integrál. Pokud budeme od f požadovat i spojitost třetí derivace, tento člen se zde nevyskytuje a výpočty se tím zjednodušují.

Věta 29 (Řetízkové pravidlo pro Stratonovičův integrál)**.** *Nechť $Y = (Y_t, t \in [0,T]) \in \mathbf{M}_2^c$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $\mathscr{C}^3$. Potom*

$$f(Y_T) = f(Y_0) + (S)\int_0^T f'(Y_t)\, dY_t \quad P - s.j. \tag{2.12}$$

Důkaz. Věta je formulována v Karatzas a Shreve (1988), str. 156. □

Poznámka. Na tomto místě by se hodilo vysvětlit zmíněnou paralelu s tzv. řetízkovým pravidlem. Pokud přijmeme zjednodušené značení a v rovnici (2.12) obě strany neformálně „zderivujeme“ (zde pro přesný výklad doporučuji Karatzas a Shreve (1988), str. 150, dostaneme rovnici tvaru

$$d\left(f\left(X_T\right)\right) = f'\left(X_T\right) dX_T,$$

což ve svém tvaru připomíná právě řetízkové pravidlo klasického kalkulu.

3. Aproximační sumy

Shrňme si nyní náš postup z kapitol 1 a 2. Pro daný interval $[0,T]$, posloupnost dělení $\delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < , \ldots , < t_{k_n} = T\}$, kde

$$\max_{0 \leq j \leq k_n} (t_n^{i+1} - t_n^j) \to 0, \quad n \to \infty,$$

a náhodné procesy X, Y jsme zaváděli integrály pomocí sum tvaru

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(X,i)(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \tag{3.1}$$

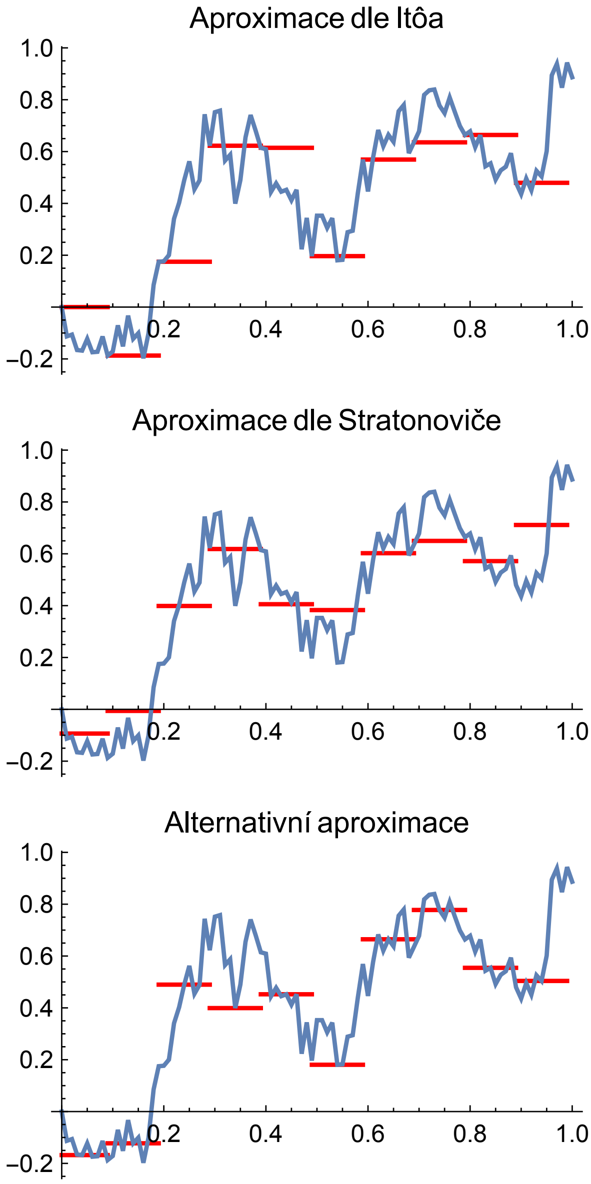
pro vhodnou funkci $h(\cdot,\cdot)$. V prvém případě jsme volili $h(X,i) = X_{t_i}$, v druhém pak $h(X,i) = \frac{1}{2}(X_{t_{i+1}} + X_{t_i})$. Ukázali jsme, že například pro spojité martingaly vedou obě volby na definici rozumných integrálů - Itôova a Stratonovičova. Volba aproximací pro Itôův integrál pro nás byla velmi přirozená a získali jsme díky ní integrál, který transformuje martingal X opět na martingal. Motivací pro zavedení Stratonovičova integrálu pomocí druhé aproximace byla mimo jiné i složitost řetízkového pravidla pro Itôův integrál (viz vztahy (2.11) a (2.12)), jejíž Stratonovičova verze je o mnoho jednodušší.

Ve Stratonovičově integrálu aproximujeme pomocí průměru hodnot X v krajních bodech dělení $[t_i,t_{i+1}]$ - nejde tedy o hodnotu X v žádném bodě. V této kapitole se pokusíme vyšetřit, co by se stalo, pokud bychom definovali integrál pomocí aproximací (3.1) s volbou $h(X,i) = X_{t_i^*}$ pro nějaké $t_i^* \in [t_i,t_{i+1}]$. Jak již bylo řečeno, volba $t_i^* = t_i$ dává Itôův integrál. Stratonovič ale ve svém článku Stratonovich (1966), str. 362, navrhuje, že bychom měli volit

$$t_i^* = \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_i). \tag{3.2}$$

V dalším se budeme zabývat právě touto volbou. Tedy t_i^* bude dáno (3.2).

Předešlý odstavec ilustruje Obrázek 3.1. Pro konkrétní trajektorii Wienerova procesu aproximujeme nejprve v Itôově smyslu, a sice hodnotou v krajním bodě intervalu, poté ve Stratonovičově smyslu, tedy průměrem hodnot v krajních bodech intervalu a konečně v nově navrhovaném smyslu, a sice hodnotou v prostředním bodu intervalu.



Obrázek 3.1: Aproximace trajektorie Wienerova procesu

Pro X,Y náhodné procesy na $[0,T]$ a dělení δ_n označme

$$Aprox(X,Y,\delta_n) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i^*}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

V této kapitole nás bude zajímat odpověď na následující otázku:

Kdy, k čemu a jak konverguje výraz $Aprox(X,Y\delta_n)$ pro posloupnost dělení, jejichž normy jdou k nule?

3.1 Protipříklad

Částečnou odpověď na naši otázku nám dává Yor (1977), str. 518. Příklad uvedený v jeho publikaci si nyní předvedeme. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme dělení

$$\delta_n = \left\{ t_n^k = \frac{k}{2^n}, k = 0, \dots, 2^n \right\} \tag{3.3}$$

intervalu [0,1]. Zřejmě platí, že $\max_{0 \leq k \leq 2^n}(t_n k - 1 - t_n^k) \to 0, n \to \infty$. Zvolme $u \in [0,1)$ pevně a definujme $F_0 : [0,1] \to [0,1], F_0(t) = t$ a dále indukcí $F_{n+1} : [0,1] \to [0,1], n \in \mathbb{N}_0$ jako

$$F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = F_n\left(\frac{k}{2^n}\right), \quad 0 \leq k \leq 2^n, \tag{3.4}$$

$$F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1-u}{2} F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1+u}{2} F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1. \tag{3.5}$$

V bodech $t \in (\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}})$ pro nějaké k dodefinujme funkci F_{n+1} lineární interpolací mezi těmito krajními body. Tedy jako

$$F_{n+1}(t) = F_{n+1}\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) + \left(F_{n+1}\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) - F_{n+1}\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) \frac{t - \frac{k}{2^{n+1}}}{\frac{k+1}{2^{n+1}} - \frac{k}{2^{n+1}}}. \tag{3.6}$$

Lemma 30. *Funkce $F_n, n \in \mathbb{N}_0$, mají následující vlastnosti:*

1. *pro každé $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ platí $0 < F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \leq \left(\frac{1+u}{2}\right)^n$,*
2. *F_n je rostoucí,*
3. *F_n je spojitá,*
4. *pro každé $t \in [0,1]$ je $\{F_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ neklesající omezená posloupnost.*

Důkaz. 1. Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 0$ je zřejmě $0 < F_0(1) - F_0(0) = 1 - 0 = (\frac{1+u}{2})^0$. Nechť dále tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že tvrzení platí i pro $n+1$ a to zvlášť pro $k \in \{0, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ sudá a lichá. Využijeme alternativního zápisu a důkaz ve skutečnosti provedeme pro

$$2k, \quad k \in \{0, \dots, 2^n\},$$
$$2k+1, \quad k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}.$$

Tím pokryjeme všechny potřebné body. Zvolme nejprve $k \in \{0, \dots, 2^n\}$. Platí

$$\begin{aligned}
F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) - F_{n+1}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) &= \\
&= F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) - F_{n+1}\left(\frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}}\right) = \\
&= F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) - \frac{1-u}{2} F_n\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + \frac{1+u}{2} F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \\
&= \frac{1-u}{2}\left(F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Při přechodu od F_{n+1} k F_n jsme použili definiční vztahy (3.4) a (3.5). Dle indukčního předpokladu ale:

$$0 < F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \leq \left(\frac{1+u}{2}\right)^n$$

a tedy i

$$0 < F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) - F_{n+1}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{1-u}{2}\left(\frac{1+u}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1+u}{2}\right)^{n+1}.$$

Obdobný postup s $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ dává

$$F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = \frac{1-u}{2}F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1+u}{2}F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \\ - F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{1+u}{2}\left(F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

A opět dle indukčního předpokladu

$$0 < F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{1+u}{2}\left(\frac{1+u}{2}\right)^n = \left(\frac{1+u}{2}\right)^{n+1}.$$

Z těchto výpočtů již plyne tvrzení.

2. Nejprve si všimneme, že F_n je rostoucí na každém z intervalů $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, neboť je zde dle definičního vztahu (3.6) definována jako přímka, která má navíc z bodu 1 tohoto lemmatu kladnou směrnici. Nechť $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t < s \leq 1$. Nalezneme $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, aby platilo $t \in [\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n})$, $s \in [\frac{k_2}{2^n}, \frac{k_2+1}{2^n})$. Pokud $k_1 = k_2$, pak zřejmě $F_n(t) < F_n(s)$ dle výše uvedeného pozorování. Z něj a opět bodu 1 tohoto lemmatu plyne i případ pro $k_1 < k_2$:

$$F_n(t) < F_n\left(\frac{k_1+1}{2^n}\right) \leq F_n\left(\frac{k_2}{2^n}\right) \leq F_n(s).$$

U ostré nerovnosti jsme navíc využili, že $t < \frac{k_1+1}{2^n}$.

3. Pro F_0 tvrzení zřejmě platí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom F_n je spojitá v každém $t \notin \delta_n$, neboť je na nějakém okolí definována jako lineární funkce a je také spojitá v každém $t \in \delta_n$, neboť na nějakém pravém i levém okolí t je definována jako lineární funkce procházející bodem $F_n(t)$.

4. Zvolme $t \in [0,1]$. Můžeme předpokládat, že $t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ pro nějaké $k \in \{0, \ldots, 2^n\}$. Potom

$$F_{n+1}(t) - F_n(t) \geq F_{n+1}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \\ = F_{n+1}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_{n+1}\left(\frac{k}{2^n}\right) \geq 0.$$

Na první nerovnost jsme použili bod 2 tohoto lemmatu, na následující rovnost definiční vztah (3.4) a na poslední nerovnost pak bod 1 tohoto lemmatu. Zbývá ukázat omezenost posloupnosti $\{F_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$0 \leq t = F_0(t) \leq F_n(t) \leq F_n(1) = F_0(1) = 1.$$

□

Poznámka. Z definičního vztahu (3.4) lze vidět, že od určitého indexu n_0 je posloupnost některých bodů $\{F_n(t)\}$ konstantní. Navíc těchto bodů se zvyšujícím se n přibývá. To nám dává možnost definovat limitní funkci $F = \lim_{n\to\infty} F_n$, jejíž existence je dokázána v následujícím lemmatu.

Lemma 31. *Funkce $F = \lim_{n\to\infty} F_n$ existuje, je neklesající a spojitá. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí vztahy*

$$\forall k \in \{0,\ldots,2^n\} : F\left(\frac{k}{2^n}\right) = F_n\left(\frac{k}{2^n}\right), \tag{3.7}$$

$$\forall k \in \{0,\ldots,2^n-1\} : F\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{1+u}{2}\left(F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right). \tag{3.8}$$

Důkaz. Existence plyne z toho, že dle bodu 4 předchozího lemmatu je pro $t \in [0,T]$ posloupnost $\{F_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ neklesající a omezená, tedy konvergentní. Monotonie plyne z bodu 1. Předpokládejme platnost vztahu (3.7). Ukážeme spojitost zprava na $[0,1)$. Nechť $\epsilon > 0$. Díky tomu, že $0 \le u < 1$, existuje $n \in \mathbb{N}$, že $(\frac{1+u}{2})^n < \epsilon$. Pro $t \in [0,1)$ nalezneme $k \in \{0,\ldots,2^n\}$, že $t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$. Pak pro $s \in [t, \frac{k+1}{2^n})$ je

$$\begin{aligned} 0 \le F(t) - F(s) &\le F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right) \\ &= F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \le \left(\frac{1+u}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

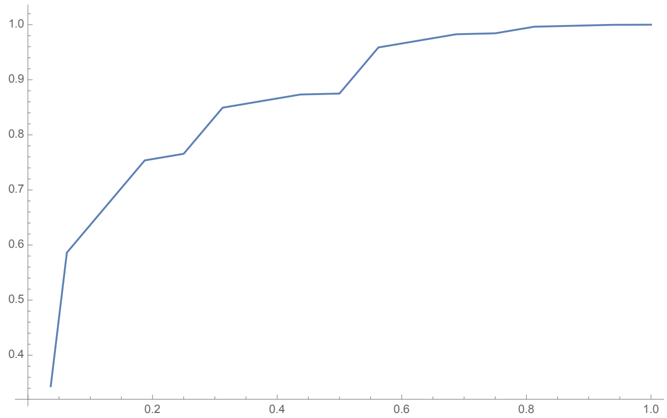
Na první dvě nerovnost jsme použili monotonii F, přechod od F k F_n je zajištěn vztahem (3.7) a následující nerovnost je bod 4 předchozího lemmatu. F je tak zprava spojitá na $[0,1)$. Spojitost zleva na $(0,1]$ by se ukázala obdobně. Zbývá tedy dokázat vztahy (3.7), (3.8).
Vztah (3.7): F je dána jako limita $\{F_n\}$ a tedy stačí ukázat, že $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $m \ge n : F_m\left(\frac{k}{2^n}\right) = F_n\left(\frac{n}{2^k}\right)$. To ukážeme indukcí. Pro $m = n$ tvrzení zřejmě platí. Nechť tvrzení platí pro nějaké $m \ge n$. Zvolme $k \in \{0,\ldots,2^n\}$. Potom

$$F_{m+1}\left(\frac{n}{2^k}\right) = F_{m+1}\left(\frac{2^{m+1-n}k}{2^{m+1}}\right) = F_m\left(\frac{2^m}{2^m}2^{-n}k\right) = F_m\left(\frac{k}{2^n}\right) = F_n\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

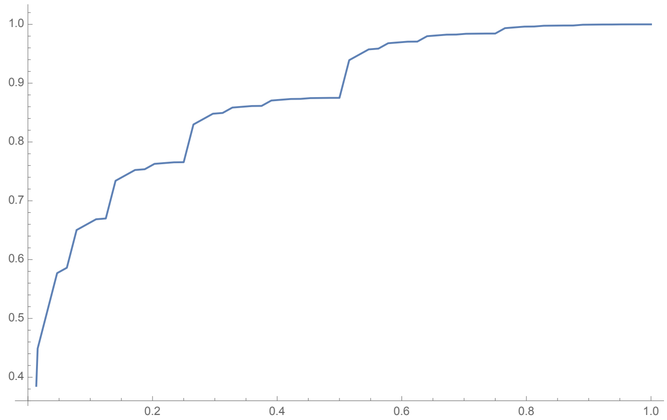
Při přechodu od F_{m+1} k F_m jsme využili toho, že $2^{m-n}k \in \{0,\ldots,2^m\}$ a tedy můžeme použít vztah (3.4). Poslední rovnost je indukční předpoklad.
Vztah (3.8):

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right) &= F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - F_{n+1}\left(\frac{k}{2^n}\right) \\ &= \frac{1-u}{2}F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1+u}{2}F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \\ &= \frac{1+u}{2}\left(F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\ &= \frac{1+u}{2}\left(F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right). \end{aligned}$$

Přechodu od F k F_{n+1} je dán (3.7) a od F_{n+1} k F_n pak (3.5)). $\square$



Obrázek 3.2: Graf F_4 pro $u = 0.75$



Obrázek 3.3: Graf F_6 pro $u = 0.75$

K ilustraci slouží grafy funkcí F_n pro $u = 0.75$ a $n = 4{,}6$ na Obr.3.2,3.3.

Nyní můžeme konečně definovat centrální objekt tohoto příkladu. Víme, že funkce F má pěkné vlastnosti (spojitost, monotonie). Nabízí se tedy, že by se dala použít jako změna parametru pro nějaký náhodný proces. To také učiníme. Označme náhodný proces

$$X = (X_t, t \in [0,1]), \quad X_t = W_{F(t)},$$

kde $W = (W_t, t \in [0,1])$ je $\mathscr{F}_t$-Wienerův proces. X je tedy časová transformace Wienerůva procesu. Zjistíme, zda změna parametru F zachovala některé důležité vlastnosti Wienerova procesu. Ukáže nám to následující lemma.

Lemma 32. *Náhodný proces X má následující vlastnosti:*

1. $X \in \mathbf{M}_2^c(\mathscr{F}_{F(t)})$,
2. $\langle X,X \rangle_1 = 1$,
3. $X \in \mathbf{L}(X)$.

Důkaz. 1. $X(\omega)$ je spojitá funkce na $[0,1]$ pro P-skoro každé $\omega \in \Omega$, neboť je složeninou P-skoro jistě spojité funkce $W(\omega)$ a spojité F. $X_t = W_{F(t)}$ je zřejmě $\mathscr{F}_{F(t)}$-měřitelná, neboť W_t je $\mathscr{F}_t$-měřitelná. Dále nechť $0 \leq t < s \leq 1$, potom

$$\mathrm{E}[X_s \mid \mathscr{F}_{F(t)}] = \mathrm{E}[W_{F(s)} \mid \mathscr{F}_{F(t)}] = W_{F(t)} = X_s \quad P - s.j.,$$

neboť F je neklesající a W je $\mathscr{F}_t$-martingal dle Tvrzení 9. Dle Definice 9 zbývá ukázat, že $\forall t \in [0,1] : EX_t^2 < \infty$. Ale

$$\mathrm{E}[X_t^2] = \mathrm{E}[W_{F(t)}^2]) = \mathrm{E}[\big(W_{F(t)} - W_0\big)^2] = F(t) < \infty,$$

dle poznámky pod Definicí 7.

2. Pro výpočet použijeme vzorec (1.2). Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{2^n-1} (X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}})^2] = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{E}[(W_{\frac{k+1}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}})^2] = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} = 1$$

První rovnost je jen definice X a linearita střední hodnoty. Druhá rovnost je vztah (1.1). Součty kvadrátů odchylek X tedy v prostoru L_1 konvergují ke konstantě 1. A tedy dle Věty 2 tyto součty konvergují k 1 i v P. Dle Věty 12 tak $\langle X,X \rangle_1 = 1$, neboť $X \in \mathbf{M}_2^c$ dle bodu 1 tohoto lemmatu.

3. Proces X je $\mathscr{F}_{F(t)}$-progresivně měřitelný, neboť dle poznámky pod Definicí 7 je ale W $\mathscr{F}_t$-progresivně měřitelný a tedy $(s,\omega) \mapsto W_s(\omega)$ je $\mathscr{B}[0,t] \times \mathscr{F}_t$-měřitelné. A složení s měřitelnou reálnou funkcí F měřitelnost zachová. Tedy $(s,\omega) \mapsto W_{F(s)}(\omega)$ je $\mathscr{B}[0,t] \times \mathscr{F}_t$-měřitelné. Progresivní měřitelnost už vyplývá z toho, že $t \leq F(t)$ a tedy $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_{F(t)}$. Zbývá tedy ukázat konečnost $[X]_X$. Dle poznámky pod Definicí 11 je

$$\begin{aligned}
[X]_X &= \mathrm{E}[\int_0^T X_t^2(\omega) d\langle X \rangle_t(\omega)] \\
&= \mathrm{E}[\int_0^T W_{F(t)}^2(\omega) d\langle W \rangle_{F(t)}(\omega)] \\
&= \mathrm{E}[\int_0^T W_{F(t)}^2(\omega) dF(t)] \\
&= \int_0^T \mathrm{E}[W_{F(t)}^2(\omega))] dF(t) \\
&= \int_0^T F(t) dF(t).
\end{aligned}$$

Kvadratickou variaci jsme počítali dle Věty 14 a druhý moment pak dle vztahu (1.1). Poslední integrál je konečný dle Věty 6, neboť F je spojitá (a tedy na omezeném intervalu omezená) a neklesající (a tedy má konečnou variaci na $[0,T]$.

$\square$

Dle Lemmatu 32 tedy $X \in \mathbf{M}_2^c \cap \mathbf{L}(X)$ a navíc má spojité trajektorie. Můžeme definovat tak integrály $(I)\ \int_0^1 XdX$ a $(S)\ \int_0^1 XdX$ (viz Definice 13, 2.9). Nyní se můžeme vrátit k otázce formulované na začátku této kapitoly: K čemu a jak, pokud vůbec, konvergují aproximační výrazy (3.1)? Sestavme pro $n \in \mathbb{N}$

$$Aprox(X,X,\delta_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{t_{n+1}^{k*}}(X_{t_n^{k+1}} - X_{t_n^k}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}),$$

kde δ_n je dáno výrazem (3.3), $t_{n+1}^{k*} = \frac{1}{2}(t_n^{k+1} + t_n^k) = t_{n+1}^{2k+1} = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$. X je skoro jistě spojitý proces - hypotéza tedy zní, že půjde-li norma dělení k nule, bude jedno, zda v aproximační sumě počítáme s $X_{t_{n+1}^{2k+1}}$ a nebo $\frac{1}{2}(X_{t_n^{k+1}} - X_{t_n^k})$. V takovém případě by mělo platit, že $Aprox(X,X,\delta_n)$ jde v nějakém smyslu k $(S)\ \int_0^1 XdX$. Jak je to ve skutečnosti, nám napoví následující výpočet:

$$\begin{aligned} Aprox(X,X,\delta_n) &= \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{k}{2^n}}(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}) + \sum_{k=0}^{2^n-1} (X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} - X_{\frac{k}{2^n}})^2 + \\ &+ \sum_{k=0}^{2^n-1} (X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} - X_{\frac{k}{2^n}})(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}) \end{aligned}$$

Označme po řadě $I_1(n), I_2(n), I_3(n)$ výrazy za poslední rovností a zkoumejme jejich konvergenci v L_2 pro $n \to \infty$.

- $I_1(n)$ je přesně výraz z Tvrzení 25. Jak již víme, X lze Itôovsky integrovat podle sebe sama dle Lemmatu 32 a tedy

$$I_1(n) \xrightarrow{P} (I) \int_0^1 XdX, \quad n \to \infty.$$

- L_1 normu výrazu $I_2(n)$ lze upravit na

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[I_2(n)] &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{E}[(X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} - X_{\frac{k}{2^n}})^2] \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{E}[(W_{F(\frac{2k+1}{2^{n+1}})} - W_{F(\frac{k}{2^n})})^2] \\
&\overset{(i)}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1+u}{2}\left(F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \\
&= \frac{1+u}{2}\,(F(1) - F(0)) \\
&= \frac{1+u}{2} \\
&\overset{(iii)}{=} \frac{1+u}{2}\langle X,X\rangle_1.
\end{aligned}$$

  Rovnost (i) plyne ze vztahu (1.1), rovnost (ii) plyne z Lemmatu (3.8) a rovnost (iii) plyne z Lemmatu 32, bod 3.

- Poslední výraz $I_3(n)$ má L_1 normu rovnou nule. F je neklesající a tedy $F(\frac{k}{2^n}) \leq F(\frac{2k+1}{2^{n+1}}) \leq F(\frac{k+1}{2^n})$. Díky nezávislosti přírůstků procesu W dle Definice 7 je pak pro $k = 0, \ldots, 2^n - 1$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[(X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} - X_{\frac{k}{2^n}})(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}})] = \\
&\qquad = \mathrm{E}[(W_{F(\frac{2k+1}{2^{n+1}})} - W_{F(\frac{k}{2^n})})(W_{F(\frac{k+1}{2^n})} - W_{F(\frac{2k+1}{2^{n+1}})})] = 0
\end{aligned}$$

Použitím Věty 2 dostáváme konvergenci

$$Aprox(X,X,\delta_n) \xrightarrow{P} (I)\int_0^1 X dX + \frac{1+u}{2}\langle X,X\rangle_1.$$

Poznámka. Nyní máme částečnou odpověď na zadanou otázku. Našli jsme konkrétní příklad, kdy aproximace *Aprox* konvergují v pravděpodobnosti a našli jsme dokonce konkrétní limitu. Hypotéza formulovaná v tomto příkladu, a sice že je jedno, zda v aproximační sumě počítáme s $X_{t^{2k+1}_{n+1}}$ a nebo $\frac{1}{2}(X_{t^{k+1}_n} - X_{t^k_n})$ je vyvrácena.
Když porovnáme konvergenci s Tvrzením 26, zjistíme, že námi zavedená aproximace *Aprox* v tomto konkrétním případě tvoří právě Stratonovičův integrál pouze tehdy, když $u = 0$. V takovém případě pak $F(t) = t$ a $X = W$.

3.2 Postačující podmínky

V předešlém příkladu jsme vyšetřili limitní chování aproximací $Aprox$. Zprvu jsme očekávali, že by $Aprox$ mohla pro spojité procesy konvergovat ke Stratonovičově integrálu. To se obecně nepotvrdilo. Pro jeden konkrétní proces však ano, a sice pro Wienerův proces. Odpověď na otázku proč tomu tak je, podává Protter (2004). Zde si ukážeme slabší verzi jeho výsledku.

Věta 33. *Nechť $X = (X_t, t \in [0,T])$ je martingal, $Y = (Y_t, t \in [0,T]) \in \mathbf{M}_2^c$. Jsou-li trajektorie procesu $\langle X,Y \rangle_t$ absolutně spojité, potom*

$$Aprox(X,Y,\delta_n) \xrightarrow{P} (S) \int_0^T X dY.$$

Důkaz. Věta je dokázána v Protter (2004), str. 290. □

Poznámka. Pro integrátory a integrandy splňující předpoklady této věty jsme tak mohli definovat Stratonovičův integrál také jako limitu v pravděpodobnosti aproximací $Aprox$. Věta nám také dává vysvětlení, proč nám v předešlé části vyšla konvergence

$$Aprox(W,W,\delta_n) \xrightarrow{P} (S) \int_0^1 W dW.$$

Wienerův proces W totiž dle Tvrzení 14 splňuje $\langle W,W \rangle_t = \langle W \rangle_t = t$, což je zřejmě absolutně spojitá funkce. Toto pozorování lze dále zobecnit dle následujícího tvrzení.

Tvrzení 34. *Nechť $X = (X_t, t \in [0,T])$ je spojitý martingal a $W = (W_t, t \in [0,T])$ je Wienerův proces. Potom*

$$Aprox(X,W,\delta_n) \xrightarrow{P} (S) \int_0^T X dW.$$

.

Důkaz. Dle Věty 33 stačí ukázat, že $\langle X,W \rangle_t$ je absolutně spojitý proces. Označíme $K = \sqrt{\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_0} < \infty$ (díky Větě 12 odmocňujeme nezáporné číslo). Z Tvrzení 16 plyne, že pro $0 \leq t \leq s \leq T$ platí

$$|\langle X,W \rangle_s - \langle X,W \rangle_t| \leq K\sqrt{s-t}.$$

Využili jsme dále $\langle W \rangle_u = u$ dle Tvrzení 14. Nechť $0 < \epsilon < 1$. Položíme $\delta = \frac{T}{K}\epsilon$. Potom pro $n \in \mathbb{N}$ a dělení $0 \leq t_1 \leq s_1 \leq \ldots, t_n \leq s_n \leq T$ takové, že $\sum_{j=1}^n (s_j - t_j) < \delta$ platí

$$\sum_{j=1}^n |\langle X,W \rangle_{s_j} - \langle X,W \rangle_{t_j}| \leq \sum_{j=1}^n K\sqrt{s_j - t_j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{K}{T}(s_j - t_j) < \frac{K}{T}\delta = \epsilon.$$

□

Seznam použité literatury

Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B. a Zhang, T. (2008). *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications.* Springer.

Hida, T. (1980). *Brownian motion.* Springer.

Kallianpur, G. (1980). *Stochastic filtering theory.* První vydání. Springer.

Karatzas, I. a Shreve, S. (1988). *Brownian motian and stochastic calculus.* Třetí vydání. Springer.

Karlin, S. a Taylor, H. M. (1975). *A first course in stochastic processes Academic.* Druhé vydání. Academic press.

Knight, F. B. (1981). *Essentials of Brownian motion and diffusion.* American Mathematical Soc.

Lachout, P. (1998). *Teorie pravděpodobnosti.* Druhé vydání. Karolinum.

Lebesgue, H. (1910). Sur l'intégration des fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **27**, 361–450.

Lukeš, J. a Malý, J. (2005). *Measure and integral.* První vydání. Matfyzpress.

Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications.* Páté vydání. Springer.

Protter, P. E. (2004). *Stochastic integration and differential equations.* Druhé vydání. Springer.

Rudin, W. (2003). *Analýza v reálném a komplexním oboru: Učebnice pro vys. školy.* První vydání. Academia.

Stratonovich, R. (1966). A new representation for stochastic integrals and equations. *SIAM Journal on Control*, **4**, 362–371.

Yor, M. (1977). Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques. In *Séminaire de Probabilités XI*, První vydání. Springer.

Zähle, M. (1998). Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I. *Probability theory and related fields*, **111**, 333–374.

Seznam obrázků