



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Zuzana Vlasáková

**Pole proudových smyček kolem  
černých děr**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 17.5.2017

Podpis autora

Tímto bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Oldřichu Semerákovi, DSc., za ochotné vedení této bakalářské práce a pomoc při jejím zpracování. Dále děkuji své rodině za podporu během celého studia.

Název práce: Pole proudových smyček kolem černých děr

Autor: Zuzana Vlasáková

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Magnetické pole testovací kruhové proudové smyčky umístěné symetricky okolo Schwarzschildovy černé díry bylo v literatuře určeno několikrát a řešení byla vyjádřena pomocí různých vzorců. Porovnáváme tyto vzorce jak analyticky, tak numericky, a konkrétně ukazujeme, jak se chovají na ose symetrie, v ekvatoriální rovině a na horizontu. Tento problém je významný pro modelování akrečních disků okolo černých děr.

Klíčová slova: obecná teorie relativity, černé díry, magnetická pole, akreční disky

Title: Fields of current loops around black holes

Author: Zuzana Vlasáková

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract: The magnetic field of a test circular current loop placed symmetrically around a Schwarzschild black hole has been determined several times in the literature and solutions has been expressed by different formulas. We compare these formulas analytically as well as numerically, and show, in particular, how they behave on the symmetry axis, in the equatorial plane and on the horizon. The problem is relevant for modelling accretion discs around black holes.

Keywords: general theory of relativity, black holes, magnetic fields, accretion discs

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Pole proudové smyčky kolem černé díry</b>	<b>4</b>
1.1 Maxwellovy rovnice . . . . .	4
1.2 Newmanův-Penroseův formalismus . . . . .	5
<b>2 Přehled studovaných řešení</b>	<b>8</b>
2.1 Řešení Pettersona I . . . . .	8
2.2 Řešení Bičáka a Dvořáka . . . . .	9
2.3 Řešení Chitreho a Vishveshwary . . . . .	12
2.4 Řešení Pettersona II . . . . .	13
2.5 Řešení Mosse . . . . .	15
2.6 Řešení Znajeka . . . . .	15
<b>3 Porovnání studovaných řešení</b>	<b>17</b>
3.1 Porovnání úhlových částí . . . . .	17
3.2 Porovnání radiálních částí . . . . .	18
3.3 Porovnání multiplikatивních konstant . . . . .	21
3.4 Numerické porovnání řešení . . . . .	23
<b>Závěr</b>	<b>30</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>31</b>

# Úvod

Obecná teorie relativity má tři hlavní aplikační oblasti – situace s velkou křivostí prostoročasu (fyzika v poli velmi hustých objektů), prostoročas na velmi velkých škálách (kosmologie) a při velmi nestacionárních procesech (gravitační kolaps, gravitační vlny). Kromě chování samotného prostoročasu (gravitačního pole) je přirozené – a pro konzistenci často i nutné – zabývat se i chováním přítomných zdrojů. V "self-konzistentním" případě jsou konfigurace a vývoj zdrojů a prostoročasu vzájemně provázány Einsteinovými rovnicemi, jen pokud jsou zdroje slabé, je možno je považovat za testovací, tedy bez vlastního gravitačního vlivu.

Jedinou další fundamentální makroskopickou interakcí kromě gravitace je elektromagnetismus. Je proto zvláště zajímavé studovat konfigurace elektromagnetických polí v relativistických prostoročasech, a to zejména v self-konzistentním případě, kdy elektromagnetické pole samo ovlivňuje prostoročasu geometrii, tedy vystupuje jako zdroj. V naprosté většině reálných situací je však elektromagnetické pole natolik slabé, že je možné na něj nahlížet jako na testovací a studovat jeho chování v zadaném prostoročase (tzv. "na pozadí").

V této práci se zajímáme o testovací magnetické pole buzené testovacími (nehmotnými) proudovými smyčkami kolem Schwarzschildovy černé díry. Uvažujeme vždy jednu kruhovou smyčku určitého poloměru umístěnou symetricky kolem černé díry a řešíme příslušné Maxwellovy rovnice. Vzhledem ke sférické symetrii schwarzschildovského pozadí budeme pracovat ve sférických, Schwarzschildových souřadnicích, jejichž ekvatoriální rovinu zvolíme jako určenou rovinou smyčky.

Popsaná úloha byla v literatuře několikrát uvažována a jako řešení byly předloženy různé formule. V následující práci tyto formule vzájemně porovnáme, analyticky i numericky, a speciálně se podíváme se na jejich chování ve významných místech - na ose symetrie, v ekvatoriální rovině a na horizontu. Posoudíme také, se kterými formulami se lépe pracuje (speciálně ve zmíněných limitních situacích), což bude vhodné vědět mj. pro možné budoucí zobecnění na případ s rotující Kerrovou černou dírou, s vícero smyčkami nebo s "těžkou" (ne-testovací) smyčkou.

Téma, kterému se zde věnujeme, je nejen teoreticky zajímavé, ale rovněž astrofyzikálně významné. O pravděpodobné přítomnosti černých děr ve vesmíru se totiž dozvídáme díky jejich interakci s okolní látkou a poli, a tato interakce by měla, díky spojení gravitace a odstředivé síly, mít typicky podobu diskové akrece materiálu na černou díru. Ukazuje se, že podél (ve stacionárním případě zhruba kruhových) orbit akrečních disků může být přenášen velmi silný elektrický proud, takže na celý disk je možno nahlížet jako na soustavu proudových smyček. Zobecnění na takovýto složitější systém by mělo být jedním z přirozených pokračování naší práce.

Řešení, jejichž porovnáním se budeme zabývat, pochází konkrétně z článků Pettersona [6], [7], Bičáka a Dvořáka [1], Chitreho a Vishveshwary [2], Mosse [3] a Znajeka [8]. Tato bakalářská práce dále navazuje na bakalářskou práci Jakuba Pejchy [5], která se zabývala stejným tématem, součástí naší práce tedy bude zároveň kontrola jeho závěrů.

V následujícím textu používáme geometrizované jednotky, pokládáme tedy gravitační konstantu a rychlost světla rovnu jedné ( $G = c = 1$ ). Dále používáme signaturu metriky  $(-, +, +, +)$ , čímž se shodujeme s většinou zkoumaných článků. Výjimku tvoří články Bičáka a Dvořáka a Znajeka, které používají opačnou signaturu  $(+, -, -, -)$ .

# 1. Pole proudové smyčky kolem černé díry

## 1.1 Maxwellovy rovnice

K úloze hledání magnetického pole proudové smyčky můžeme přistoupit jako k přímému hledání řešení Maxwellových rovnic v tenzorovém tvaru. Pro zakřivený prostoročas, obecně daný metrikou  $g_{\mu\nu}$ , se zdrojem charakterizovaným proudovou hustotou  $J^\mu$  je můžeme psát ve tvaru [6]

$$F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\alpha\mu,\nu} + F_{\nu\alpha,\mu} = 0 , \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( |g|^{\frac{1}{2}} F^{\mu\nu} \right) = 4\pi |g|^{\frac{1}{2}} J^\mu , \quad (1.2)$$

kde je elektromagnetické pole charakterizováno tenzorem elektromagnetického pole  $F_{\mu\nu}$ , který je pomocí vektorového potenciálu  $A_\mu$  definován jako

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} , \quad (1.3)$$

a  $|g|^{\frac{1}{2}}$  je determinant  $g_{\mu\nu}$ . Dosazením potenciálu jsou rovnice (1.1) splněny identicky, stačí tedy řešit pouze rovnice (1.2).

Konkrétně Schwarzschildovu metriku můžeme vyjádřit

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (1.4)$$

kde  $M$  je hmotnost černé díry.

Pro Kerrovu metriku platí podle [2]

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \left( (r^2 + a^2) d\phi - a dt \right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 , \quad (1.5)$$

kde bylo použito označení

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta ,$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr ,$$

příčemž  $a$  je rotační parametr černé díry.

Z (1.4) a (1.5) vidíme, že Kerrova metrika přechází ve Schwarzschildovu při položení rotačního parametru rovného nule. Tuto limitu proto můžeme využít při řešení problému ve Schwarzschildově prostoročasu, pokud známe jeho řešení v Kerrově prostoročasu.

Dále zavádíme tzv. duální tenzor k  $F_{\mu\nu}$  vztahem

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} , \quad (1.6)$$

kde  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  je čtyřrozměrný Levi-Civitův tenzor – zcela antisymetrický tenzor, určený permutačním symbolem  $[\mu\nu\rho\sigma]$ ,

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = |g|^{\frac{1}{2}} [\mu\nu\rho\sigma] ,$$



kde volíme  $[0123] = +1$ . V referenční soustavě

$$\begin{aligned} d\hat{t} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt , \\ d\hat{r} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr , \\ d\hat{\theta} &= r d\theta , \\ d\hat{\phi} &= r \sin \theta d\phi \end{aligned} \quad (1.7)$$

složky  $F_{\hat{0}\hat{\mu}}$  tenzoru elektromagnetického pole charakterizují elektrické pole, zatímco zbylé nenulové složky charakterizují magnetické pole – v případě duálního tenzoru pak dojde k záměně těchto dvou druhů složek. Ze znalosti  $*F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  můžeme vyjádřit magnetické pole jako jeho průmět na čtyř-rychlost stojícího pozorovatele

$$B_{\hat{\mu}} = *F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} u^{\hat{\nu}} = -*F_{\hat{\mu}\hat{t}} . \quad (1.8)$$

Z axiální symetrie úlohy vyplývá, že jediné dvě nenulové složky magnetického pole budou  $B_{\hat{r}} = -*F_{\hat{r}\hat{t}}$  a  $B_{\hat{\theta}} = -*F_{\hat{\theta}\hat{t}}$ . S využitím (1.7) a dosazením determinantu metriky (1.4)  $|g|^{\frac{1}{2}} = r^2 \sin \theta$  do vztahu pro duální tenzor (1.6) dostáváme vztahy

$$*F_{\hat{r}\hat{t}} = *F_{rt} = -r^2 \sin \theta F^{\theta\phi} , \quad (1.9)$$

$$*F_{\hat{\theta}\hat{t}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} *F_{\theta t} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} r \sin \theta F^{r\phi} , \quad (1.10)$$

díky kterým můžeme určit výsledné magnetické pole:

$$B_{\hat{r}} = r^2 \sin \theta F^{\theta\phi} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} A_{\phi,\theta} , \quad (1.11)$$

$$B_{\hat{\theta}} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} r \sin \theta F^{r\phi} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r \sin \theta} A_{\phi,r} . \quad (1.12)$$

## 1.2 Newmanův-Penroseův formalismus

Další způsob řešení, využitý ve většině zkoumaných článků, je řešení Maxwellových rovnic v tzv. Newmanově-Penroseově formalismu. Podle [1] zavedeme nulovou tetradu  $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$  (používáme značení  $\bar{a}$  pro komplexní sdružení  $a$ ) tak, že  $l_\nu n^\nu = 1$ ,  $m_\nu \bar{m}^\nu = -1$  a všechny ostatní skalární součiny jsou nulové. Místo složek  $F_{\mu\nu}$  potom pracujeme pouze se třemi skalárními veličinami  $\phi_0, \phi_1$  a  $\phi_2$ :

$$\phi_0 = F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu , \quad (1.13)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu) , \quad (1.14)$$

$$\phi_2 = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu . \quad (1.15)$$

Zpětně tenzor elektromagnetického pole získáme jako

$$F_{\mu\nu} = \left\{ \phi_1 \left( n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} \bar{m}_{\nu]} \right) + \phi_2 l_{[\mu} m_{\nu]} + \phi_0 \bar{m}_{[\mu} n_{\nu]} \right\} + c.c. , \quad (1.16)$$

kde c.c. značí komplexní sdružení předchozího výrazu a hranaté závorky antisymetrizaci přes dané indexy.

V článcích Chitreho a Vishveshwary [2], Pettersona [7] a Mosse [3], které řeší úlohu v Kerrově prostoročasu, je použita Kinnersleyova nulová tetráda, která má v Boyerových-Lindquistových souřadnicích složky

$$\begin{aligned} l^\mu &= \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \\ n^\mu &= \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left( ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Řešení Bičáka a Dvořáka [1], zabývající se Schwarzschildovým prostoročasnem, používá tetrádu danou (1.17) po položení rotačního parametru rovného nule. Jediné řešení, používající Newmanův-Penroseův formalismus, které využívá jiné nulové tetrády, je řešení Znajeka [8], které používá symetrickou formu danou rotací  $l \rightarrow \sqrt{\frac{\Delta}{2\Sigma}} l$ ,  $m \rightarrow -\frac{m\sqrt{\Sigma}}{r - ia \cos \theta}$ .

V článcích Bičáka a Dvořáka [1] a Pettersona [7] jsou řešeny Maxwellovy rovnice v Newmanově-Penroseově tvaru

$$\begin{aligned} (D - 2\rho + 2\epsilon)\Phi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\Phi_0 &= 2\pi J_l, \\ (\delta - 2\tau)\Phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\Phi_0 &= 2\pi J_m, \\ (D - \rho + 2\epsilon)\Phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\Phi_1 &= 2\pi J_{\bar{m}}, \\ (\delta - \tau + 2\beta)\Phi_2 - (\Delta + 2\mu)\Phi_1 &= 2\pi J_n, \end{aligned} \quad (1.18)$$

kde byly použity diferenciální operátory

$$\begin{aligned} D &= l^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ \delta &= m^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ \Delta &= n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (1.19)$$

a  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $\beta$ ,  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\pi$  a  $\gamma$  jsou spinové koeficienty definované následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \kappa &= l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu & \nu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu \\ \rho &= l_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu & \mu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu \\ \sigma &= l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu & \lambda &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu \\ \tau &= l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu & \pi &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu \\ \beta &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu) & \alpha &= -\frac{1}{2} (n_{\mu;\nu} l^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu) \\ \epsilon &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu) & \gamma &= -\frac{1}{2} (n_{\mu;\nu} l^\mu n^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Podle Teukolského [1] lze Maxwellovy rovnice dále přepsat do separovaného tvaru, čímž získáme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro  $\phi_0$ ,  $\phi_1$

a  $\phi_2$ :

$$\begin{aligned}
& ((D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) \\
& \quad - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha))\phi_0 = 2\pi J_0 , \\
& ((D + \epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})(\Delta + 2\mu) \\
& \quad - (\delta + \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - \tau)(\bar{\delta} + 2\pi))\phi_1 = 2\pi J_1 , \\
& ((\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) \\
& \quad - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta))\phi_2 = 2\pi J_2 ,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

kde

$$\begin{aligned}
J_0 &= (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})J_l - (D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})J_m , \\
J_1 &= (\delta + \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - \tau)J_{\bar{m}} - (D + \epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})J_n , \\
J_2 &= (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})J_{\bar{m}} - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})J_n .
\end{aligned}$$

V ostatních člancích je řešena Teukolského rovnice pro  $\Psi = \frac{\phi_2}{\rho^2}$ , která má pro stacionární axisymetrický případ tvar

$$-\Delta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + (\cot^2 \theta + 1) \Psi = 4\pi J , \tag{1.22}$$

kde  $\rho$  je spinový koeficient definovaný v (1.20), konkrétně po dosazení (1.5) a (1.17) roven

$$\rho = -\frac{1}{r - ia \cos \theta} .$$

Pokud zkoumáme čistě magnetické pole, musí platit  $F^{tr} = F^{t\theta} = F^{t\phi} = 0$ , a zároveň pro axiálně symetrický problém platí  $F^{r\theta} = 0$ . Dosazením (1.17) do (1.16) dostáváme vztahy pro jediné nenulové složky tenzoru elektromagnetického pole

$$F^{r\phi} = \frac{i\sqrt{2}(\phi_2 - \bar{\phi}_2)}{r \sin \theta} , \tag{1.23}$$

$$F^{\theta\phi} = \frac{-2i\phi_1}{r^2 \sin \theta} , \tag{1.24}$$

kde jsme navíc využili faktu, že pro tento případ platí  $(1 - \frac{2M}{r})^{-1} \phi_2 = \frac{1}{2} \bar{\phi}_0$  a  $\phi_1 = -\bar{\phi}_1$  (viz [1]). Z (1.11), (1.12) dostáváme výsledný vztah pro magnetické pole vyjádřené pomocí veličin  $\phi_1$  a  $\phi_2$ :

$$B_{\hat{r}} = -2i\phi_1 , \tag{1.25}$$

$$B_{\hat{\theta}} = -i\sqrt{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} (\phi_2 - \bar{\phi}_2) . \tag{1.26}$$

# 2. Přehled studovaných řešení

## 2.1 Řešení Pettersona I

Článek Pettersona [6] se zaměřuje na řešení magnetického pole koncentrické proudové smyčky kolem Schwarzschildovy černé díry. Protože budeme později zkoumat řešení z jiného článku stejného autora (který se zabývá stejnou úlohou v případě Kerrový černé díry), pro rozlišení budeme řešení z této kapitoly nazývat jako řešení Pettersona I, zatímco pozdější [7] jako řešení Pettersona II.

Po dosazení vektorového potenciálu do Maxwellových rovnic (1.1), (1.2) je při použití metriky dané (1.4) problém převeden na řešení rovnice

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) A_{\phi,r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} A_{\phi,\theta} \right] = -4\pi r^2 J^\phi \sin \theta . \quad (2.1)$$

Z požadavku, aby celkový proud protékající rovinou  $(\hat{\theta}, \hat{r})$  v lokálním referenčním systému byl roven  $I$ , přitom dostáváme tvar čtyřproudu ( $b$  budeme nadále značit poloměr kruhové proudové smyčky)

$$J^\phi = \left[ 1 - \frac{2M}{r} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^2} \delta(r - b) \delta(\cos \theta) I . \quad (2.2)$$

Po separaci potenciálu na radiální a úhlovou část,  $A_\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , získáváme dvě rovnice

$$r^2 \frac{d}{dr} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dR}{dr} \right] - (l + 1)(l + 2)R = 0 , \quad (2.3)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \right] + (l + 1)(l + 2)\Theta = 0 . \quad (2.4)$$

Rovnice (2.4) má řešení

$$\Theta_l = C_l^{\frac{3}{2}} (\cos \theta) \sin^2 \theta , \quad (2.5)$$

kde  $C_l^{\frac{3}{2}}$  značí Gegenbauerův polynom. Jedno z řešení (2.3) můžeme určit po substituci  $x = \frac{r}{2M}$  jako

$$U_l = x^2 (2M)^{l+2} P_l^{(2,0)}(1 - 2x) , \quad (2.6)$$

kde  $P_l^{(2,0)}(1 - 2x)$  je Jacobiho polynom  $l$ -tého stupně. Zde je podle [5] opraven článek [6], ve kterém je multiplikatívni konstanta rovna  $(2M)^l$ , ta by ale nezařučovala konečnost v ploché limitě. Druhé nezávislé řešení lze určit z prvního integrací

$$V_l = c U_l \int \frac{x dx}{(1 - x) U_l^2} . \quad (2.7)$$

Z chování v oblastech  $r < b$  a  $r > b$  vidíme, že  $U_l$  je vnitřní řešení (diverguje v nekonečnu), zatímco  $V_l$  je vnější řešení (diverguje na horizontu).

Z požadavků spojitosti potenciálu a splnění rovnice (2.1) ve všech bodech určíme výsledné řešení jako

$$A_\phi = \sum_{l=0,2}^{\infty} a_l R_l(r) C_l^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) \sin^2 \theta , \quad (2.8)$$

kde

$$a_l = (-1)^{\frac{l+2}{2}} \frac{4\sqrt{\pi}I(l + \frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2}(l + 1))}{(l + 2)(\frac{l}{2})!(1 - \frac{2M}{b})^{\frac{1}{2}}(\frac{dR_l}{dr})_{r=b}}, \quad (2.9)$$

$$R_l(r) = \begin{cases} r^2(2M)^l P_l^{(2,0)}(1 - \frac{r}{M})V_l(b) & \text{pro } 2M \leq r \leq b \\ b^2(2M)^l P_l^{(2,0)}(1 - \frac{b}{M})V_l(r) & \text{pro } r \geq b \end{cases}.$$

MAPLE má problém s vykreslením integrálů v (2.7), proto jsme alternativně použili také řešení rovnice (2.3) ve tvaru hypergeometrické funkce (viz [5]). Potom pro řešení platí

$$R_l(r) = c_1 R_l^{(1)}(r) + c_2 R_l^{(2)}(r), \quad (2.10)$$

kde

$$R_l^{(1)}(r) = F\left(-l, -l - 2, -2 - 2l; \frac{1}{x}\right) x^{l+2}, \quad (2.11)$$

$$R_l^{(2)}(r) = F\left(l + 1, l + 3, 4 + 2l; \frac{1}{x}\right) x^{-l-1}. \quad (2.12)$$

První sčítanec je regulární na horizontu, druhý v nekonečnu, výsledné řešení je tedy rovno

$$R_l(r) = \begin{cases} R_l^{(1)}(r)R_l^{(2)}(b) & \text{pro } 2M \leq r \leq b \\ R_l^{(2)}(r)R_l^{(1)}(b) & \text{pro } r \geq b \end{cases}.$$

Dosazením do (1.11), (1.12) dostáváme výsledné vztahy pro magnetické pole:

$$B_{\hat{\theta}} = -\frac{1}{r} \sum_{l=0,2}^{\infty} a_l \frac{dR_l(r)}{dr} C_l^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) \sin \theta, \quad (2.13)$$

$$B_{\hat{r}} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=0,2}^{\infty} a_l R_l(r) \left( 2C_l^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) \cos \theta + \frac{dC_l^{\frac{3}{2}}(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta \right). \quad (2.14)$$

## 2.2 Řešení Bičáka a Dvořáka

Článek Bičáka a Dvořáka [1] řeší elektromagnetické pole obecného stacionárního zdroje v blízkosti Schwarzschildovy černé díry za použití Newmanova-Penroseova formalismu. Poté řešení upřesňuje pro různé konkrétní zdroje, mezi nimiž je i proudová smyčka.

Po dosazení nulové tetrády a spinových koeficientů podle (1.17), (1.20) do Maxwellových rovnic (1.18) se v článku řeší rovnice

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right] \phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2r}} {}^* \bar{\partial} \phi_0 = 2\pi J_l, \\ & -\frac{1}{\sqrt{2r}} {}^* \partial \phi_1 + \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \phi_0 = 2\pi J_m, \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{2r}} {}^* \bar{\partial} \phi_1 = 2\pi J_{\bar{m}}, \\ & -\frac{1}{\sqrt{2r}} {}^* \partial \phi_2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right] \phi_1 = 2\pi J_n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Použili jsme přitom označení  ${}^*\partial\eta$  a  ${}^*\bar{\partial}\eta$  pro operátory

$${}^*\partial\eta = -(\sin\theta)^s \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] (\sin\theta)^{-s}\eta, \quad (2.16)$$

$${}^*\bar{\partial}\eta = -(\sin\theta)^{-s} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] (\sin\theta)^s\eta, \quad (2.17)$$

kde  $s$  značí tzv. spinovou váhu  $\eta$ . Ta je definovaná tím způsobem, že při transformaci  $m^\mu \rightarrow e^{i\chi}m^\mu$  se  $\eta$  transformuje jako  $\eta \rightarrow e^{is\chi}\eta$ . Řešení určíme na základě rozvoje do spinových sférických harmonik

$$\phi_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}^0R_{lm}(r) {}_1Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.18)$$

$$\phi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}^1R_{lm}(r) {}_0Y_{lm}(\theta, \phi) + {}^1R_{00}(r) {}_0Y_{00}(\theta, \phi), \quad (2.19)$$

$$\phi_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}^2R_{lm}(r) {}_{-1}Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.20)$$

které jsou definované následujícím způsobem:

$${}_sY_{lm}(r) = \begin{cases} \left( \frac{(l-s)!}{(l+s)!} \right)^{\frac{1}{2}} {}^*\partial\eta^s Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{pro } 0 \leq s \leq l \\ (-1)^s \left( \frac{(l-s)!}{(l+s)!} \right)^{\frac{1}{2}} {}^*\bar{\partial}\eta^{-s} Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{pro } -l \leq s \leq 0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

kde  $Y_{lm} = {}_0Y_{lm}$  jsou obyčejné sférické harmoniky. Dále dosazením (2.19) do (2.15) získáme rovnici pro členy rozvoje  $\phi_1$ ,

$$r(r-2M) {}^1R_{lm}'' + 2(2r-3M) {}^1R_{lm}' - (l-1)(l+2) {}^1R_{lm} = -4\pi \int J_1(r, \theta, \phi) {}_0\bar{Y}_{lm} r^2 d\Omega, \quad (2.22)$$

zbylé neznámé můžeme pak vyjádřit ze znalosti  $\phi_1$  pomocí (2.15).

Po substituci  $x = \frac{r}{2M}$  do rovnice (2.22) s nulovou pravou stranou dostáváme hypergeometrickou rovnici, která má dvě nezávislá řešení. Ta mají pro  $l \neq 0$  tvar

$$\begin{aligned} {}^1R_l^{(I)} &= F(1-l, l+2, 3; x), \\ {}^1R_l^{(II)} &= (-x)^{-l-2} F(l, l+2, 2l+2; x^{-1}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

zatímco pro  $l = 0$

$$\begin{aligned} {}^1R_0^{(I)} &= x^{-2} \ln(x-1) + x^{-1}, \\ {}^1R_0^{(II)} &= x^{-2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Zpětným dosazením do Maxwellových rovnic (2.15) pro  $l = 0$  plyne rovnost  $\left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) {}^1R_{00} = 0$ , kterou ale splňuje pouze druhé z daných řešení.  ${}^1R_0^{(I)}$  proto dále nebudeme uvažovat. Obecným řešením je tedy

$${}^1R_{lm} = a_{lm} {}^1R_l^{(I)} + b_{lm} {}^1R_l^{(II)}. \quad (2.25)$$

Dosazením těchto výsledků a rozvoju do (2.15) a řešením těchto rovnic dostáváme zbylé členy rozvoje

$${}^0R_{lm} = a_{lm} {}^0R_l^{(I)} + b_{lm} {}^0R_l^{(II)}, \quad (2.26)$$

$${}^2R_{lm} = a_{lm} {}^2R_l^{(I)} + b_{lm} {}^2R_l^{(II)} , \quad (2.27)$$

kde

$$\begin{aligned} {}^0R_l^{(I)} &= 2^{\frac{3}{2}} [l(l+1)]^{-\frac{1}{2}} F(1-l, l+2, 2; x) , \\ {}^0R_l^{(II)} &= -(2l)^{\frac{1}{2}} (l+1)^{-\frac{1}{2}} (-x)^{-l-2} F(l+1, l+2, 2l+2; x^{-1}) , \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} {}^2R_l^{(I)} &= -2^{\frac{1}{2}} [l(l+1)]^{-\frac{1}{2}} x^{-1} F(-l, l+1, 2; x) , \\ {}^2R_l^{(II)} &= -l^{\frac{1}{2}} [2(l+1)]^{-\frac{1}{2}} (-x)^{-l-2} F(l+1, l, 2l+2; x^{-1}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

(pro  $l \neq 0$ , pro  $l = 0$  nejsou členy rozvoje definované).

Z asymptotického chování hypergeometrických funkcí lze zjistit, že pro  $l \neq 0$  jsou  $R_l^{(II)}$  regulární v nekonečnu, zatímco  $R_l^{(I)}$  jsou regulární na horizontu. Pouze řešení  ${}^1R_0^{(II)}$  je regulární v obou limitách.

Řešením rovnice (2.22) s nenulovou pravou stranou (na základě znalosti jejího řešení s nulovou pravou stranou) a využitím spojitosti  $\phi$  můžeme získat vztah pro koeficienty  $a_{lm}$ ,  $b_{lm}$  (detailní výpočet viz [1]). Tyto koeficienty jsou v případě proudové smyčky úměrné  $\delta_{m0}$ , suma přes  $m$  tedy vymizí a dále budeme tyto koeficienty značit pouze jako  $a_l$ ,  $b_l$ :

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{\pi^2 i I [(l+1)!]^2}{2M (2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left[(-x)^{-l} F(l, l+2, 2l+2; x^{-1})\right]_{r=b} \left(\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} , \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} b_l &= \frac{\pi^2 i I [(l+1)!]^2}{2M (2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left[x^2 F(1-l, l+2, 3; x)\right]_{r=b} \left(\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Využili jsme přitom vztahy pro spinové sférické harmoniky (2.21), [4]

$$\begin{aligned} Y_{l0} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} P_l(\cos \theta) , \\ {}_1Y_{l0}(\theta) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) , \\ {}_{-1}Y_{l0}(\theta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) , \end{aligned} \quad (2.32)$$

kde  $P_l$  je Legendreův polynom  $l$ -tého stupně.

V článku [1] je také určena konstanta rozvoje stojící u  ${}^1R_0^{(II)}$ , ta je ale úměrná náboji zdroje, v našem případě nenabitě smyčky je tedy nulová.

Pro použití vztahů (1.25), (1.26) dostáváme výsledný tvar magnetického pole:

$$B_{\hat{\theta}} = - \sum_l \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} i \sqrt{\frac{2(2l+1)}{\pi l(l+1)}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \begin{cases} a_l^2 R_l^{(I)} & \text{pro } r < b \\ b_l^2 R_l^{(II)} & \text{pro } r > b \end{cases} \quad (2.33)$$

$$B_{\hat{r}} = - \sum_l i \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} P_l(\cos \theta) \begin{cases} a_l^1 R_l^{(I)} & \text{pro } r < b \\ b_l^1 R_l^{(II)} & \text{pro } r > b \end{cases} \quad (2.34)$$

## 2.3 Řešení Chitreho a Vishveshwary

V článku [2] je řešena rovnice (1.22) v Kerrově prostoročasu s nulovou tetradou danou (1.17). Dále budeme uvádět rovnou výsledky vzniklé položením rotačního parametru  $a$  rovného nule (tedy v limitě Schwarzschildova prostoročasu).

Proudová hustota je zvolena

$$J^\mu = \left(0, 0, 0, \frac{I}{b^2} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \delta(r-b) \delta(\cos \theta)\right), \quad (2.35)$$

tak, aby v lokálním referenčním systému byl rovinou  $(\hat{r}, \hat{\theta})$  naměřen celkový proud  $I$ . Pro řešení rovnice (1.22) provedeme rozvoj  $\Psi$  a  $J$  do sférických harmonik,

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{2l+1}{4\pi l(l+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} R_l(r), \\ J &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{2l+1}{4\pi l(l+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} J_l(r), \end{aligned} \quad (2.36)$$

čímž problém převedeme na řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{\Delta} R_l = -4\pi \frac{J_l(r)}{\Delta}, \quad (2.37)$$

kde pro koeficienty rozvoje  $J$  z (2.36) platí

$$\begin{aligned} J_l &= 2\pi I i \left[ \frac{2l+1}{4\pi l(l+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \times \\ &\quad \times \left( \frac{2Mb - b^2}{2\sqrt{2}} \delta(r-b) + \frac{b(2Mr - r^2)}{2\sqrt{2}} \delta'(r-b) \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (2.37) mají podobu

$$F_l(r) = - \frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)! l! M^{l+1}} (r^2 - 2Mr) \frac{dQ_l(u)}{dr}, \quad (2.39)$$

$$G_l(r) = \frac{2^l(l-1)! l! M^l}{(2l)!} (r^2 - 2Mr) \frac{dP_l(u)}{dr}, \quad (2.40)$$

$F_l(r)$  je přitom vnější řešení, zatímco  $G_l(r)$  vnitřní. Členy obsahující  $P_l(u)$  jsou totiž regulární na horizontu, zatímco členy obsahující  $Q_l(u)$  jsou regulární v nekonečnu. Z těchto výsledků lze určit  $\phi_2$  pro  $r > b$  jako

$$\phi_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{H_l^>(b)}{r^2} F_l \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}, \quad (2.41)$$



kde jsme použili značení

$$H_l^>(b) = -\frac{2\sqrt{\pi}Ii}{l(l+1)} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi l}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \left(b \frac{dG_l(b)}{db} - G_l(b)\right). \quad (2.42)$$

Obdobně zavedeme značení  $H_l^<(b)$  pro stejnou konstantu po záměně  $G_l \rightarrow F_l$ . Integrováním Maxwellových rovnic dále získáme

$$\phi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{H_l^>(b)}{r^2} \left(r \frac{dF_l(r)}{dr} - F_l(r)\right) P_l(\cos\theta). \quad (2.43)$$

Výsledky pro  $r < b$  dostaneme analogicky záměnou  $F_l \rightarrow G_l$ ,  $H_l^>(b) \rightarrow H_l^<(b)$ .

Ze znalosti  $\phi_1$  a  $\phi_2$  už můžeme podle (1.25), (1.26) určit výsledné magnetické pole:

$$B_{\hat{r}} = -2i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{r^2} P_l(\cos\theta) \begin{cases} H_l^<\left(r \frac{dG_l(r)}{dr} - G_l(r)\right) & \text{pro } r < b \\ H_l^>\left(r \frac{dF_l(r)}{dr} - F_l(r)\right) & \text{pro } r > b \end{cases}, \quad (2.44)$$

$$B_{\hat{\theta}} = -2i\sqrt{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \begin{cases} H_l^<G_l(r) & \text{pro } r < b \\ H_l^>F_l(r) & \text{pro } r > b \end{cases}. \quad (2.45)$$

## 2.4 Řešení Pettersona II

Článek Pettersona II [7] řeší úlohu proudové smyčky okolo Kerroy černé díry. Článek ale obsahuje chybu, na kterou později upozornil v článku Moss [3], a jeho opravenému řešení se budeme zabývat v další sekci. Nyní uvedeme původní řešení spolu s jeho opravou podle Pejchy [5].

V článku jsou řešeny Maxwellovy rovnice v Newmanově-Penroseově formalismu (1.18) s nulovou tetradou (1.17). Z nich je odvozen vztah mezi  $\phi_0$  a  $\phi_2$ ,

$$\phi_2 = \frac{\rho^2 \Delta}{2} \phi_0. \quad (2.46)$$

Dále pomocí Maxwellových rovnic v separovaném tvaru můžeme nalézt  $\phi_0$ . Po separaci proměnných  $\phi_0 = R_0(r)S(\theta)$  se řeší rovnice

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d}{dr} \left( \Delta^2 \frac{dR_0}{dr} \right) - (l-1)(l+2)R_0 = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{1}{\sin^2\theta} \right] S = 0. \quad (2.48)$$

Po substituci  $R_0(r) = \Delta^{-\frac{1}{2}} R(r)$  a  $u = \frac{r-M}{M}$  do rovnice (2.47) dostáváme rovnici, jejímž řešením jsou přidružené Legendreovy polynomy  $P_l^1(u)$  a Legendreovy funkce 2. druhu  $Q_l^1(u)$ . Přidružené Legendreovy polynomy řeší také rovnici (2.48), dostáváme tedy řešení pro  $\phi_0$ :

$$\phi_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} \Delta^{-\frac{1}{2}} \left[ \alpha_l P_l^1(u) + \beta_l Q_l^1(u) \right] P_l^1(\cos\theta). \quad (2.49)$$

Integrací Maxwellových rovnic (1.18) dostaneme pro  $\phi_1$  vztah

$$\phi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} [\alpha_l A_l + \beta_l B_l] , \quad (2.50)$$

kde

$$\begin{aligned} A_l &= \left( \frac{l(l+1)}{\rho} P_l(u) + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} \right) P_l(\cos \theta) - ia P_l(u) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta , \\ B_l &= \left( \frac{l(l+1)}{\rho} Q_l(u) + \Delta \frac{dQ_l(u)}{dr} \right) P_l(\cos \theta) - ia Q_l(u) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Po dosazení proudového členu

$$J^\phi = \frac{1}{2\pi b^2} \delta(r-b) \delta(\cos \theta) \quad (2.52)$$

do (1.18) a integrací přes nekonečně tenkou vrstvu ( $x-b, x+b$ ) dostáváme podmínku pro skok  $\phi_0$  a  $\phi_1$  v místě smyčky,

$$\begin{aligned} [\phi_1] &= 0 , \\ [\phi_0] &= \frac{2iIb}{\sqrt{2}(b^2 - 2Mb)} . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dosažením skoku  $\phi_0$  a  $\phi_1$  podle rovnic (2.49), (2.50) do podmínek (2.53) a po rozdělení koeficientů  $\alpha_l, \beta_l$  na jejich imaginární složky  $\alpha_l^i, \beta_l^i$  a reálné složky  $\alpha_l^r, \beta_l^r$  získáváme podmínky

$$\begin{aligned} \sum_l \left[ \beta_l^i \left( \Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)rQ_l(u) \right) - \alpha_l^i \left( \Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)rP_l(u) \right) \right]_{r=b} \times \\ \times P_l(\cos \theta) = 0 , \quad (2.54) \\ \sum_l \left[ \beta_l^i \frac{dQ_l}{dr} - \alpha_l^i \frac{dP_l}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(\cos \theta) = \frac{Ib}{b^2 - 2Mb} \delta(\cos \theta) . \end{aligned}$$

V článku [7] jsou z podmínky (2.53) odvozeny nesprávné rovnice pro koeficienty  $\alpha_l^i, \beta_l^i$ . V [5] je ale tato chyba opravena a je řešena správná rovnice (2.54). S využitím ortogonalitity Legendrových funkcí jsou tedy podle [5] správné hodnoty koeficientů

$$\alpha_l^i = \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{I}{M} \left[ bQ_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(0) , \quad (2.55)$$

$$\beta_l^i = \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{I}{M} \left[ bP_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(0) . \quad (2.56)$$

Ze znalosti  $\phi_1$  a  $\phi_2$  (2.46) můžeme určit podle (1.25), (1.26) magnetické pole

$$B_{\hat{r}} = \sum_l \alpha_l^i \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dP_l(u)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r} P_l(u) \right] P_l(\cos \theta) , \quad (2.57)$$

$$B_{\hat{\theta}} = - \sum_l \alpha_l^i \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{dr} P_l^1(\cos \theta) . \quad (2.58)$$

Tyto vztahy platí pro  $r < b$ ; vztahy platné pro  $r > b$  dostaneme po záměně  $\alpha_l^i \rightarrow \beta_l^i$  a  $P_l(u) \rightarrow Q_l(u)$ .

## 2.5 Řešení Mosse

Článek Mosse [3] poukazuje na nekonzistenci mezi články Pettersona II [7], Bičáka a Dvořáka [1] a Chitreho [2]. Ta je podle něj způsobena chybou v článku Pettersona II – přesněji řečeno chyba byla způsobena špatným napojením jednotlivých řešení. Zbytek článku se zaměřuje na opravu tohoto řešení.

V článku je opět řešena rovnice (1.22) na Kerrově pozadí (1.5) s nulovou tetrádou danou (1.17). Řešení pro  $\phi_0$  je zde uvedeno ve tvaru

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} \right) P_l^1(\cos \theta) . \quad (2.59)$$

Dále je uveden tvar vektorového potenciálu pro obecně rotující nabitou černou díru, zde uvádíme schwarzschildovskou limitu

$$A_\phi = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^i \sin \theta \left( r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) P_l^1(\cos \theta) , \quad (2.60)$$

platnou pro  $r < b$ ; pro  $r > b$  získáme potenciál záměnou  $P_l(u) \rightarrow Q_l(u)$ .

Konstanty  $\alpha_l^i, \beta_l^i$  získáme napojením vnitřního a vnějšího řešení – v této části řešení došlo k chybě v článku Pettersona II. S využitím tvaru proudové hustoty

$$J^\mu = \left( 0, 0, 0, \frac{I}{b^2} \delta(r-b) \delta(\cos \theta) \right) \quad (2.61)$$

a rovnice (1.22), kde  $\Psi$  rozvineme do sférických harmonik podobně jako v článku [2], získáváme hledaný vztah

$$\alpha_l^i = \frac{2\pi I}{M} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left( b Q_l - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right)_{r=b} P_l^1(0) ; \quad (2.62)$$

vztah pro  $\beta_l^i$  vznikne z  $\alpha_l^i$  záměnou  $Q_l(u) \rightarrow P_l(u)$ .

Z (1.11), (1.12) můžeme vyjádřit výsledné magnetické pole pomocí vektorového potenciálu:

$$B_{\hat{r}} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^i \frac{1}{r^2} \left( r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) \frac{1}{\sin \theta} \times \\ \times \left( P_l^1(\cos \theta) \cos \theta + \frac{dP_l^1(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta \right) , \quad (2.63)$$

$$B_{\hat{\theta}} = \sum_{l=1}^{\infty} -\alpha_l^i \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) P_l^1(\cos \theta) . \quad (2.64)$$

## 2.6 Řešení Znajeka

Článek Znajeka [8] opět upozorňuje na chybu v článku Pettersona II [7]. Dále uvádí řešení po transformaci nulové tetrády do symetrické podoby  $l \rightarrow \sqrt{\frac{\Delta}{2\Sigma}} l$ ,  $m \rightarrow -\frac{m\sqrt{\Sigma}}{r-ia\cos\theta}$ . Tím nabývá řešení pro  $\phi_0, \phi_1$  a  $\phi_2$  tvaru

$$\phi_0 = \frac{\sqrt{r^2 - 2Mr}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} \right) P_l^1(\cos \theta) , \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = \frac{1}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \left( (r^2 - 2Mr) \frac{dP_l(u)}{dr} - rl(l+1)P_l(u) \right) P_l(\cos \theta) \\ + \beta_l \left( (r^2 - 2Mr) \frac{dQ_l(u)}{dr} - rl(l+1)Q_l(u) \right) P_l(\cos \theta) , \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\phi_2 = -\phi_0 . \quad (2.67)$$

Dále článek uvádí vztah pro vektorový potenciál (ze kterého podle (1.11), (1.12) můžeme jednoduše určit magnetické pole),

$$A_\phi = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^i \sin \theta \left( rP_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) P_l^1(\cos \theta) . \quad (2.68)$$

Tento vztah platí pro  $r < b$ , jeho protějšek platný pro  $r > b$  dostaneme záměnou  $\alpha_l^i \rightarrow \beta_l^i$  a  $P_l(u) \rightarrow Q_l(u)$ . Pomocí vyjádření proudu

$$J^\phi = \frac{I}{r^2} \delta(r-b) \delta(\cos \theta) \quad (2.69)$$

a integrací přes nekonečně tenkou vrstvu v místě smyčky opět dostáváme, obdobně jako v článku Pettersona II, podmínky pro skok  $\phi_0$  a  $\phi_1$ , ze kterých lze určit konstanty  $\alpha_l^i$ ,  $\beta_l^i$ :

$$\alpha_l^i = \frac{I}{M} \frac{2l+1}{2l(l+1)} \left( bQ_l - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right)_{r=b} P_l^1(0) , \quad (2.70)$$

$\beta_l^i$  je dáno stejně po záměně  $Q_l \rightarrow P_l$ .

## 3. Porovnání studovaných řešení

U všech řešení jsou složky magnetické indukce dané ve tvaru nekonečné sumy, dále proto budeme porovnávat jejich jednotlivé členy.

### 3.1 Porovnání úhlových částí

Nejdříve se pokusíme porovnat úhlové části řešení. Úhlovou část  $l$ -tého sčítance složky  $B_{\hat{r}}$  označíme  $B_{\hat{r}}^{(\theta,l)}$  a úhlovou část  $l$ -tého sčítance složky  $B_{\hat{\theta}}$  označíme  $B_{\hat{\theta}}^{(\theta,l)}$ .

Na první pohled vidíme, že pro řešení Chitreho a Vishveshwary [2], Bičáka a Dvořáka [1] a Pettersona II [7] platí

$$B_{\hat{r}}^{(\theta,l)} = P_l(\cos \theta) , \quad (3.1)$$

$$B_{\hat{\theta}}^{(\theta,l)} = \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = P_l^1(\cos \theta) . \quad (3.2)$$

U řešení Mosse [3] ihned vidíme, že  $B_{\hat{\theta}}^{(\theta,l)}$  je opět  $P_l^1(\cos \theta)$ , druhou složku  $B$  se pokusíme upravit. Po provedení derivace podle  $\theta$  dostáváme

$$B_{\hat{r}}^{(\theta,l)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_l^1(\cos \theta) - \frac{dP_l^1(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \sin \theta . \quad (3.3)$$

Využijeme rekurentního vztahu pro derivaci Legendreových funkcí [4]

$$-\frac{dP_l^1(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \sin^2 \theta = -(l+1)lP_l(\cos \theta) \sin \theta - P_l^1(\cos \theta) \cos \theta \quad (3.4)$$

a dosazením do (3.3) dostaneme

$$B_{\hat{r}}^{(\theta,l)} = -l(l+1)P_l(\cos \theta) . \quad (3.5)$$

Řešení Znajeka se od řešení Mosse liší jen multiplikatívní konstantou, jak je vidět z tvarů potenciálů (2.60), (2.68).

Na závěr se podíváme na řešení Pettersona I. Využijeme vztahu mezi Gegenbauerovými polynomy a Legendreovými funkcemi [4]

$$C_{l-1}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) \sin \theta = P_l^1(\cos \theta) , \quad (3.6)$$

jehož dosazením do vztahu pro potenciál (2.8) po posunutí sčítacího indexu dostáváme

$$A_{\phi\text{Petterson}} = \sum_{l'=0,2}^{\infty} f_{l'}(r) C_{l'}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) \sin^2(\theta) = \sum_{l=1,3}^{\infty} f_{l-1}(r) P_l^1(\cos \theta) \sin(\theta) . \quad (3.7)$$

Tedy úhlová část potenciálu u řešení Pettersona I je stejná jako u řešení Mosse (a proto i úhlová část  $B$  bude stejná).

Ze symetrie úlohy podle ekvatoriální roviny ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) plyne, že  $A_{\phi}(\frac{\pi}{2} + x) = A_{\phi}(\frac{\pi}{2} - x)$ . Protože funkce  $\sin(x)$  je sudá a  $\cos(x)$  lichá podle  $x = \frac{\pi}{2}$ , z tvaru  $A_{\phi}$

plyne, že nenulový příspěvek budou dávat jen členy, pro které je  $P_l^1(\cos\theta)$  sudou funkcí – podle [4] je toto pro funkci  $P_l^1(x)$  splněno na intervalu  $-1 < x < 1$  pro  $l$  liché. Všechny sumy se proto redukují pouze na součet přes lichá  $l$ .

Zjistili jsme, že pro všechna řešení je  $B_{\hat{r}}^{(\theta,l)} \sim P_l(\cos\theta)$  a  $B_{\hat{\theta}}^{(\theta,l)} \sim P_l^1(\cos\theta)$ . Toho můžeme využít a ze známých hodnot Legendreových polynomů a Legendreových funkcí (podle [4]) určit limity řešení pro ekvatoriální rovinu a osu symetrie. Ekvatoriální rovina je daná hodnotou  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0$ , platí tedy

$$B_{\hat{r}}^{(\theta,l)} \sim P_l(0) = \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}l\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)} = 0 \quad (3.8)$$

(pro  $l$  liché) a

$$B_{\hat{\theta}}^{(\theta,l)} \sim P_l^1(0) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(l+1)\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}. \quad (3.9)$$

Pro horní poloosu platí  $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$ , pro dolní poloosu  $\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$ :

$$B_{\hat{r}}^{(\theta,l)} \sim P_l(1) = 1, \quad (3.10)$$

$$B_{\hat{r}}^{(\theta,l)} \sim P_l(-1) = (-1)^l = -1 \quad (3.11)$$

(pro  $l$  liché) a

$$B_{\hat{\theta}}^{(\theta,l)} \sim P_l^1(\pm 1) = 0. \quad (3.12)$$

## 3.2 Porovnání radiálních částí

Dále se podíváme na radiální části řešení. Radiální část  $l$ -tého sčítance v nekonečné sumě, popisující složky magnetického pole, označíme  $B_{\hat{r}}^{(r,l)}$  a  $B_{\hat{\theta}}^{(r,l)}$ .

Na první pohled nejjednodušší tvar radiální části  $B$  má řešení Pettersona II – pro  $r < b$  je to (2.57), (2.58):

$$B_{\hat{r}}^{(r,l)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dP_l(u)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r} P_l(u), \quad (3.13)$$

$$B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{dr}, \quad (3.14)$$

řešení pro  $r > b$  získáme záměnou Legendreových polynomů  $P_l \rightarrow Q_l$ .

Pokusíme se ostatní řešení převést do podobného tvaru. Začneme s řešením Mosse. Vidíme, že vytknutím členu  $-\frac{1}{l(l+1)}$  je zbytek  $B_{\hat{r}}^{(r,l)}$  stejný jako u Pettersona II (pro  $r < b$ , stejně pro  $r > b$  po záměně  $P_l \rightarrow Q_l$ ):

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}}^{(r,l)} &= \frac{1}{r^2} \left( r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) = \\ &= -\frac{1}{l(l+1)} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dP_l(u)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r} P_l(u) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Podíváme se na druhou složku  $B$ , začneme řešením pro  $r < b$ . Po vyjádření derivace podle  $r$  ve vztahu pro  $B_{\hat{\theta}}^{(r,l)}$  (viz (2.64)) a využití substituce  $u = \frac{r}{M} - 1$  dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) &= \\ &= r \frac{dP_l(u)}{dr} + \frac{1}{l(l+1)} \left( (1-u^2) \frac{d^2 P_l(u)}{du^2} - 2u \frac{dP_l(u)}{du} + l(l+1) P_l(u) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ze znalosti diferenciální rovnice, jejímž řešením jsou Legendreovy polynomy  $P_l$  [4],

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0, \quad (3.17)$$

vidíme, že výraz na pravé straně vztahu (3.16) v závorce je roven nule. Dostáváme tedy stejný výraz jako v případě řešení Pettersona II (3.14):

$$\begin{aligned} B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} &= - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) = \\ &= - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{dr}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

V případě  $r > b$  postupujeme stejným způsobem, pouze je třeba zaměnit  $P_l$  za  $Q_l$  ( $P_l$  a  $Q_l$  řeší stejnou diferenciální rovnici), řešení se tedy opět shoduje s řešením Pettersona II.

Porovnáním řešení Mosse jsme zároveň pokryli i řešení Znajeka, o kterém víme (viz předchozí sekce), že se od řešení Mosse liší pouze multiplikační konstantou.

Dále se podíváme na řešení Chitrehu a Vishveshwary. Pro  $r < b$  dostáváme při dosazení za  $G_l$  z (2.45) ihned

$$B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r^2} G_l = - \frac{2^l (l-1)!! M^l}{(2l)!} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{dr}, \quad (3.19)$$

tedy až na multiplikační konstantu  $\frac{2^l (l-1)!! M^l}{(2l)!}$  je řešení stejné jako řešení Pettersona II. Pro  $r > b$  dostáváme podobně

$$B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r^2} F_l = \frac{(2l+1)!}{2^l (l+1)!! M^{l+1}} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dQ_l(u)}{dr}, \quad (3.20)$$

což se opět shoduje s řešením Pettersona II, až na multiplikační konstantu  $-\frac{(2l+1)!}{2^l (l+1)!! M^{l+1}}$ . Dosazením  $G_l$  do  $B_r^{(r,l)}$  a po substituci  $u = \frac{r}{M} - 1$  pro  $r < b$  máme:

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}}^{(r,l)} &= \frac{2^l (l-1)!! M^l}{(2l)!} \frac{1}{r^2} \left[ r \frac{d}{dr} \left( (r^2 - 2Mr) \frac{dP_l(u)}{dr} \right) - (r^2 - 2Mr) \frac{dP_l(u)}{dr} \right] \\ &= \frac{2^l (l-1)!! M^l}{(2l)!} \left[ \frac{1}{r} \left( 2u \frac{dP_l(u)}{du} + (u^2 - 1) \frac{d^2 P_l(u)}{du^2} \right) - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dP_l(u)}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

S využitím (3.17) dostáváme

$$B_{\hat{r}}^{(r,l)} = - \frac{2^l (l-1)!! M^l}{(2l)!} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dP_l(u)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r} P_l(u) \right], \quad (3.22)$$

stejný výsledek bychom dostali pro  $r > b$  po záměně  $P_l \rightarrow Q_l$  a  $\frac{2^l(l-1)!!M^l}{(2l)!} \rightarrow -\frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)!!M^{l+1}}$ .

Pro radiální část řešení Bičáka a Dvořáka v případě  $r < b$  platí

$$B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} {}_2R_l^{(I)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-1} F(-l, l+1, 2; x). \quad (3.23)$$

S využitím vztahu pro derivaci hypergeometrické funkce a vztahu mezi hypergeometrickými funkcemi a Legendreovými polynomy

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x)^{a+b-c} F(a, b, c; x) \right] = \frac{(c-a)(c-b)}{c} (1-x)^{a+b-c-1} F(a, b, c+1; x), \quad (3.24)$$

$$F(-n, n+1, 1; x) = P_n(1-2x), \quad (3.25)$$

(podle [4]) můžeme řešení dále upravit na

$$x^{-1} F(-l, l+1, 2; x) = -\frac{1}{l(l+1)} \frac{1-x}{x} \frac{d}{dx} P_l(1-2x). \quad (3.26)$$

Po použití substitucí  $x = \frac{r}{2M}$  a  $u = 2x - 1$  a parity Legendreových polynomů dostáváme

$$B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} = (-1)^l \frac{2M}{l(l+1)} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} P_l(u). \quad (3.27)$$

K úpravě vnějšího řešení ( $r > b$ )

$$B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} {}_2R_l^{(II)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} (-x)^{-l-2} F(l+1, l, 2l+2; x^{-1}) \quad (3.28)$$

využijeme vztahu [4] mezi Legendreovými a hypergeometrickými funkcemi

$$e^{-\mu\pi i} \frac{Q_{\nu}^{\mu}(z)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} = \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) (z+1)^{\frac{\mu}{2}} F(\nu + 1, \nu + \mu + 1, 2\nu + 2; \frac{2}{1-z})}{(z-1)^{\frac{\mu}{2} + \nu + 1} \Gamma(2\nu + 2)}. \quad (3.29)$$

Dosazením dostáváme:

$$(-x)^{-l-2} F(l+1, l, 2l+2; x^{-1}) = -(-x)^{-l-2} \frac{Q_l^{-1}(-u)}{\Gamma(l)} \frac{\Gamma(2l+2) (-u-1)^{-\frac{1}{2}+l+1}}{2^l \Gamma(l+1) (1-u)^{-\frac{1}{2}}} \quad (3.30)$$

Dosazením za substituci  $u$  a použitím vlastností Legendreových funkcí (podle [4])

$$\begin{aligned} Q_l^{-1}(-u) &= -\frac{\Gamma(l)}{\Gamma(l+2)} Q_l^1(-u) = -\frac{\Gamma(l)}{\Gamma(l+2)} (-1)^l Q_l^1(u) = \\ &= (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(l+2)} (u^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{dQ_l(u)}{du} \end{aligned} \quad (3.31)$$

můžeme tento vztah dále upravit na

$$B_{\hat{\theta}}^{(r,l)} = (-1)^{l+1} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} 4M \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)} \frac{dQ_l(u)}{dr}. \quad (3.32)$$



Podívejme se dále na  $B_{\hat{r}}^{(r,l)}$  pro  $r < b$  – to je rovno  ${}^1R_l^{(I)}$ . K porovnání s ostatními řešeními využijeme vztahu (3.27) a vztahu

$$\begin{aligned} {}^2R_l^{(I)} &= \frac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}(l(l+1))^{-\frac{1}{2}}(r-2M)r^{-2}\frac{d}{dr}(r^{2l}R_l^{(I)}) = \\ &= -2^{\frac{1}{2}}(l(l+1))^{-\frac{1}{2}}(-1)^{l+1}\frac{2M}{l(l+1)}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{d}{dr}P_l(u), \end{aligned} \quad (3.33)$$

ze kterého bylo podle [1] odvozeno  ${}^2R_l^{(I)}$ . Z rovnice (3.18) vidíme, že platí

$$\frac{dP_l(u)}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{-\frac{r^2}{l(l+1)}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dP_l(u)}{dr}-\frac{l(l+1)}{r}P_l(u)\right]\right\} \quad (3.34)$$

a spojením s (3.33) dostáváme finální vztah

$$B_{\hat{r}}^{(r,l)} = {}^1R_l^{(I)} = (-1)^l\frac{4M}{(l(l+1))^2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dP_l(u)}{dr}-\frac{l(l+1)}{r}P_l(u)\right]. \quad (3.35)$$

Podobně pro  $r > b$  máme vztah

$$\begin{aligned} {}^2R_l^{(II)} &= \frac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}(l(l+1))^{-\frac{1}{2}}(r-2M)r^{-2}\frac{d}{dr}(r^{2l}R_l^{(II)}) = \\ &= -l^{\frac{1}{2}}(2(l+1))^{-\frac{1}{2}}(-1)^{l+1}\left(1-\frac{2M}{r}\right)4M\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}\frac{d}{dr}Q_l(u) \end{aligned} \quad (3.36)$$

a (3.34) platí ve stejné podobě po záměně  $P_l \rightarrow Q_l$ . Tím dostáváme výsledek

$$B_{\hat{r}}^{(r,l)} = {}^1R_l^{(II)} = (-1)^{l+1}\frac{4M\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+2)\Gamma(l+2)}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dQ_l(u)}{dr}-\frac{l(l+1)}{r}Q_l(u)\right]. \quad (3.37)$$

Porovnávané radiální části řešení se tedy opět liší jen o multiplikatívni konstantu.

Ze znalosti radiálního průběhu řešení můžeme určit pole na horizontu událostí výpočtem limity  $r \rightarrow 2M$ . Okamžitě vidíme, že v této limitě  $B_{\hat{\theta}} = 0$ . Dle použitého značení odpovídá limita  $r \rightarrow 2M$  limitě  $u \rightarrow 1$ . Ze známé hodnoty [4]  $P_l(1) = 1$  získáváme limitu pro  $B_{\hat{r}}$  (pro řešení Pettersona II):

$$B_{\hat{r}}^{(r,l)} = \frac{-l(l+1)}{2M}. \quad (3.38)$$

### 3.3 Porovnání multiplikatívni konstant

S výjimkou radiální části řešení Pettersona I se nám podařilo porovnat všechna řešení a zjistili jsme, že se liší nanejvýš multiplikatívni konstantou. Nyní se tyto konstanty pokusíme určit. Označme

$$\begin{aligned} f_r^l &= \left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dP_l(u)}{dr}-\frac{l(l+1)}{r}P_l(u)\right]P_l(\cos\theta), \\ f_{\theta}^l &= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dP_l(u)}{dr}P_l^1(\cos\theta) \end{aligned}$$

pro  $r < b$ , stejně pro  $r > b$  se záměnou  $P_l(u) \rightarrow Q_l(u)$ . Pak můžeme řešení Pettersona II (2.57) a Mosse (2.63) psát po úpravě následujícím způsobem:

$$B_{\hat{r}\text{Moss}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{\pi}I}{l(l+1)} \frac{2l+1}{M} \cos\left(\frac{\pi(l+1)}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \times \\ \times \left( bQ_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right)_{r=b} f_r^l, \quad (3.39)$$

$$B_{\hat{r}\text{PettersonII}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\pi^{-\frac{1}{2}}I}{l(l+1)} \frac{2l+1}{M} \cos\left(\frac{\pi(l+1)}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \times \\ \times \left( bQ_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right)_{r=b} f_r^l. \quad (3.40)$$

Při úpravě jsme dosadili  $P_l^1(0) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi(l+1)}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}$  (podle [4]). Řešení pro  $r > b$  vzniknou záměnou  $Q_l(u) \rightarrow P_l(u)$ . Stejným postupem jako u  $B_{\hat{r}}$  bychom dostali stejné vztahy pro  $B_{\hat{\theta}}$  v závislosti na  $f_{\hat{\theta}}^l$ .

Pro konstantu  $H_l^<(b)$  z řešení Chitrehu a Vishveshwary můžeme psát

$$H_l^<(b) = -\frac{\sqrt{2\pi}Ii}{l(l+1)} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi l}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)!!M^{l+1}} \times \\ \times \left( (b^2 - 2Mb) \frac{dQ_l(u)}{dr} - bl(l+1)Q_l(u) \right)_{r=b}, \quad (3.41)$$

podobně vztah pro  $H_l^>(b)$  získáme záměnou  $Q_l(u) \rightarrow P_l(u)$  a  $\frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)!!M^{l+1}} \rightarrow -\frac{2^l(l-1)!!M^l}{(2l)!}$ . Po dosazení do (2.44) dostáváme vztah

$$B_{\hat{r}\text{Chitre}} = \sum_{l=1}^{\infty} -\frac{4\sqrt{\pi}I}{l(l+1)} \frac{2l+1}{M} \sin\left(\frac{\pi l}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{l+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} \sqrt{1 - \frac{2M}{b}} \times \\ \times \left( bQ_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right)_{r=b} f_r^l, \quad (3.42)$$

platný pro  $r < b$ . Analogicky bychom dostali vztah pro  $r > b$  po záměně  $Q_l(u) \rightarrow P_l(u)$  a vztah pro  $B_{\hat{\theta}}$  v závislosti na  $f_{\hat{\theta}}^l$ .

Dále se podívejme na řešení Znajeka, o kterém jsme zmiňovali, že se liší od řešení Mosse pouze multiplikatívní konstantou. Porovnáním (2.60), (2.68), (2.62) a (2.70) ihned vidíme, že platí  $A_{\phi\text{Moss}} = 2\pi A_{\phi\text{Znajek}}$ .

Konstanty  $a_l$ ,  $b_l$  z řešení Bičáka můžeme ze znalosti  ${}^1R_l^{(I)}$  a  ${}^1R_l^{(II)}$  ((3.35) a

(3.37)) vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
a_l &= \frac{\pi^2 i I [(l+1)!]^2}{2M (2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} {}_1R_l^{(II)}(b) \left(-\frac{b}{2M}\right)^2 P_l^1(0) = \\
&= (-1)^l \frac{l(l+1)\pi^2 i I}{2M^2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times \left( bQ_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right)_{r=b} P_l^1(0), \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_l &= \frac{\pi^2 i I [(l+1)!]^2}{2M (2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} {}_1R_l^{(I)}(b) \left(\frac{b}{2M}\right)^2 P_l^1(0) = \\
&= (-1)^{l+1} \frac{(l-1)!(l+1)!\pi^2 i I}{(2l+1)!2M^2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times \left( bP_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right)_{r=b} P_l^1(0). \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Dosazením těchto výrazů do (2.34), společně s vyjádřením radiálních částí podle předchozí sekce, dostáváme pro  $r < b$

$$\begin{aligned}
B_{\tilde{r}\text{Bicak}} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\pi I}{M} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} P_l^1(0) \times \\
&\quad \times \left( bQ_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right)_{r=b} f_r^l, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

a vztah pro  $r > b$  vznikne po záměně  $Q_l(u) \rightarrow P_l(u)$ . Dosazením do (2.33) by opět vznikly analogické vztahy pro  $B_{\tilde{\theta}}$  v závislosti na  $f_{\theta}^l$ .

Z (3.42), (3.39), (3.40) a (3.45) můžeme nyní shrnout vztahy mezi řešeními takto:

$$\begin{aligned}
B_{\text{Moss}} &= 2\pi B_{\text{Znajek}} = 2\pi B_{\text{PetterssonII}} = \\
&= \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} B_{\text{Chitre}} = \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} B_{\text{Bicak}}. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

### 3.4 Numerické porovnání řešení

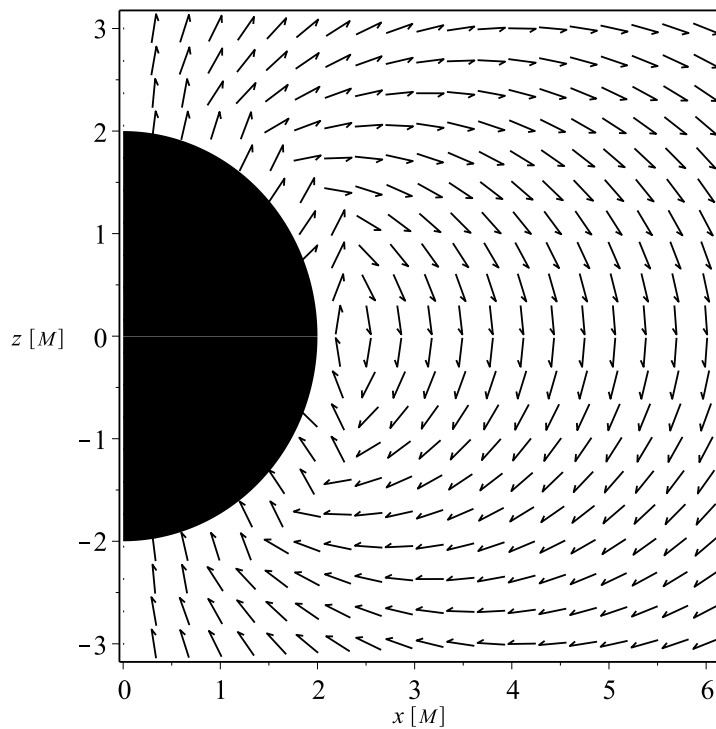
V této části se podíváme na magnetické pole vykreslené podle studovaných řešení pomocí programu MAPLE. Na obrázcích 3.1, 3.3 a 3.5 je řešení Pettersona I pro tři různé hodnoty poloměru smyčky, na obrázcích 3.2, 3.4 a 3.6 odpovídající pole podle řešení Pettersona II, oboje v řezu meridionální roviny. Proud jsme zvolili  $I = 1$  a osy jsou popsány v jednotkách  $M$ , velikost vektorů je fixována a suma je sčítána do  $l = 30$ . Ostatní řešení byla po vykreslení prakticky totožná s řešením Pettersona II, proto je zde neuvádíme.

Průběh pole na obrázcích je v obou případech stejný, k mírné odchylce dochází pouze v případě, kdy se smyčka nachází v blízkosti horizontu událostí ( $b = 2,5M$ ), což je způsobeno rozdílným numerickým chováním řešení v této oblasti.

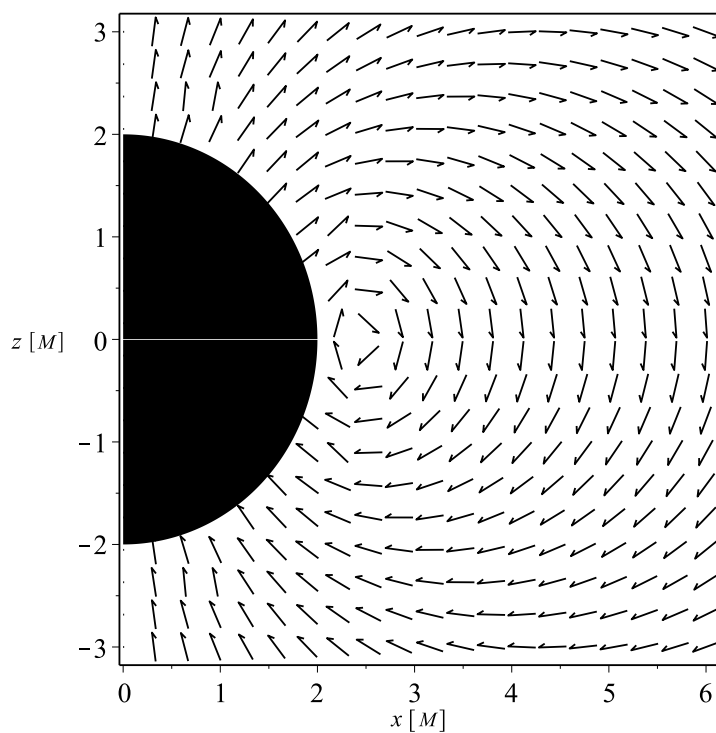
Zároveň si můžeme všimnout určitých nepravidelností na kružnici  $r = b$ , ty jsou způsobeny vyčíslením pole, které je dáno ve tvaru nekonečné sumy, pomocí konečného součtu. S rostoucím počtem sečtených členů tyto nepravidelnosti mizí (zároveň ale roste čas potřebný k výpočtu).

Dále se zaměříme na některé speciální hodnoty řešení. Jak je vidět z grafů 3.1–3.6 a z limit vypočtených v (3.8)–(3.12), je pole na ose čistě radiální, zatímco v ekvatoriální rovině je radiální složka nulová. Průběh nenulové složky pole v ekvatoriální rovině v závislosti na radiální souřadnici je vyneseno na obrázku 3.7 pro řešení Pettersona I a na obrázku 3.8 pro řešení Pettersona II. Smyčka je umístěna ve vzdálenosti  $b = 4M$ , zbylé parametry jsou stejné jako u předchozích grafů. Ostatní řešení měla po normování podle rovnice (3.46) stejný tvar jako na obrázku 3.8.

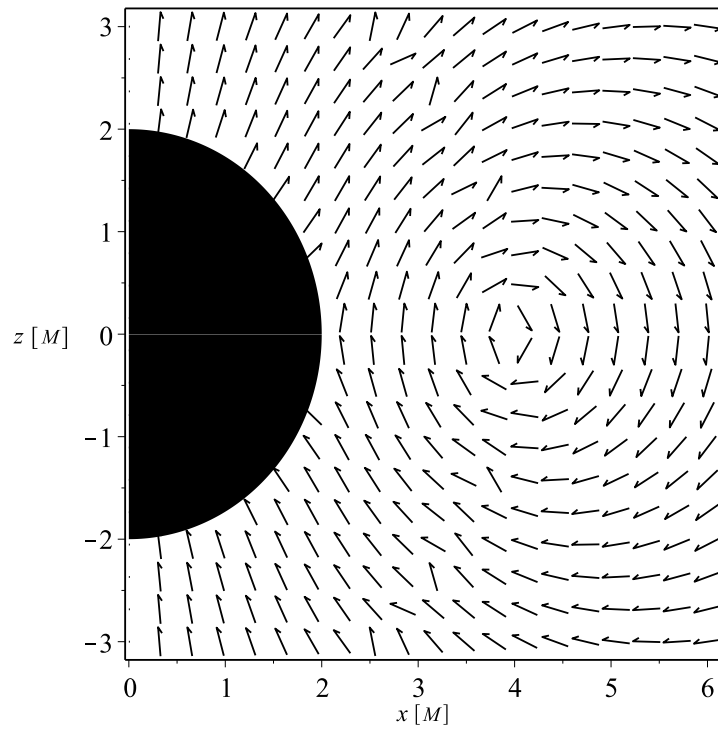
Pole na horizontu událostí je opět čistě radiální, jeho průběh v závislosti na úhlu  $\theta$  můžeme vidět na obrázku 3.9 pro řešení Pettersona I a 3.10 pro Pettersona II. V případě řešení Pettersona I jsme nechali limitu vypočítat MAPLE, v případě Pettersona II jsme použili námi určenou limitu (3.38).



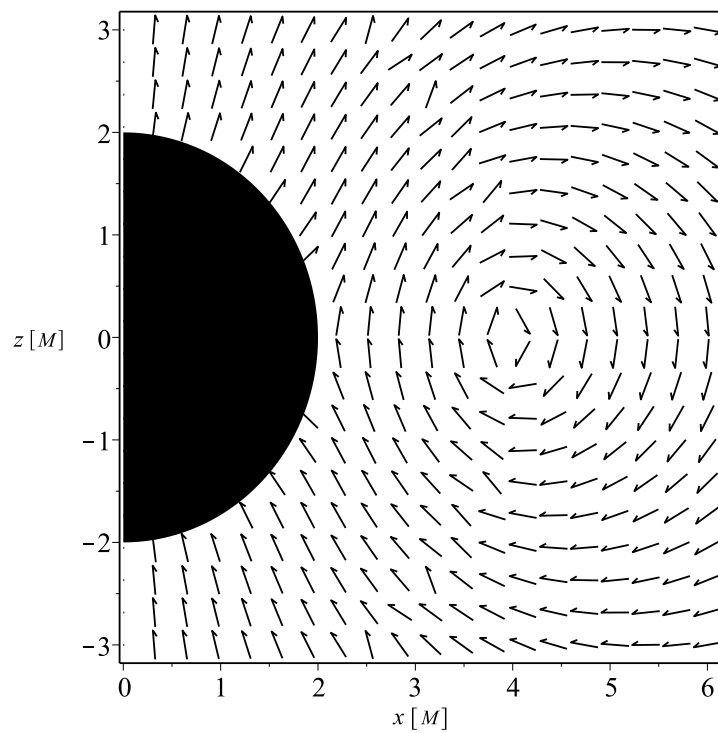
Obrázek 3.1: Průběh magnetického pole řešení Pettersona I v meridionální rovině, suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 2,5M$ .



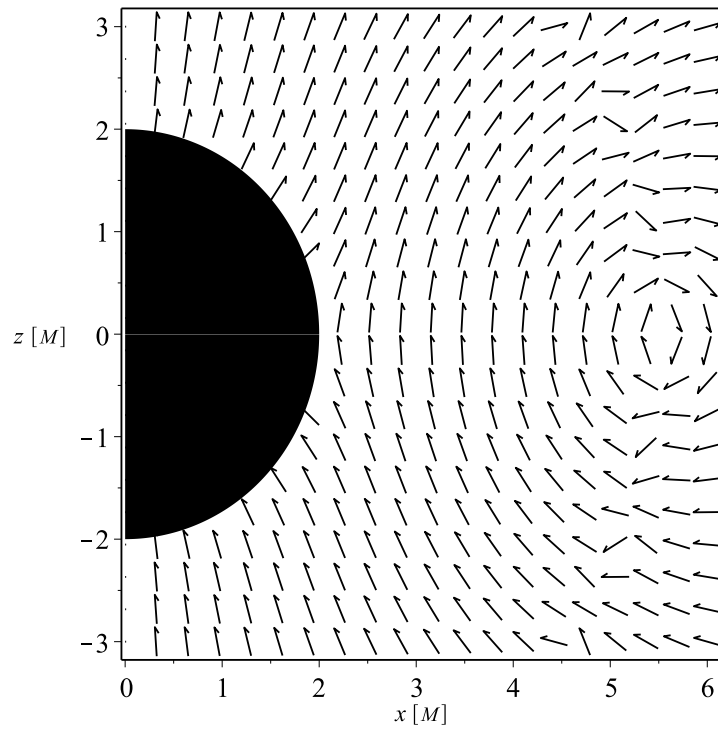
Obrázek 3.2: Průběh magnetického pole řešení Pettersona II v meridionální rovině, suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 2,5M$ .



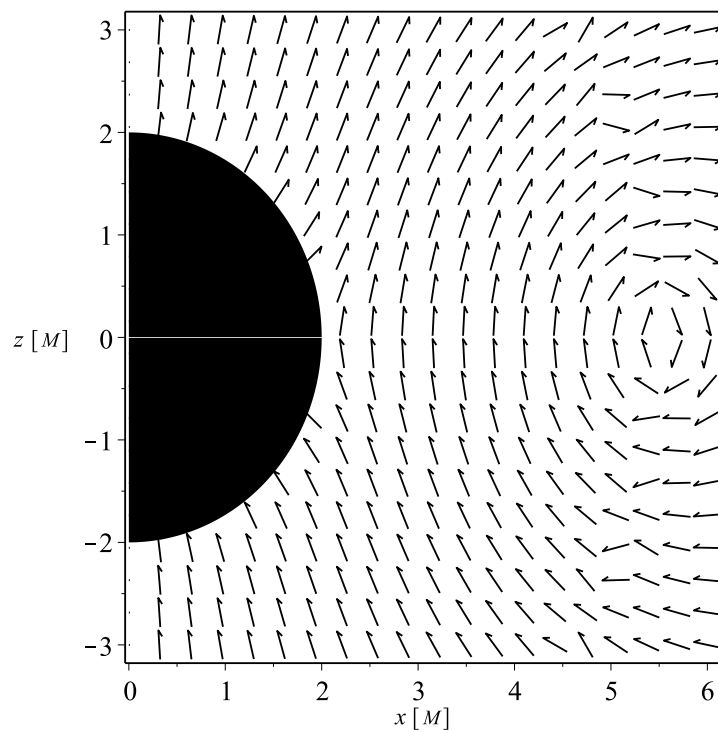
Obrázek 3.3: Průběh magnetického pole řešení Pettersona I v meridionální rovině, suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 4M$ .



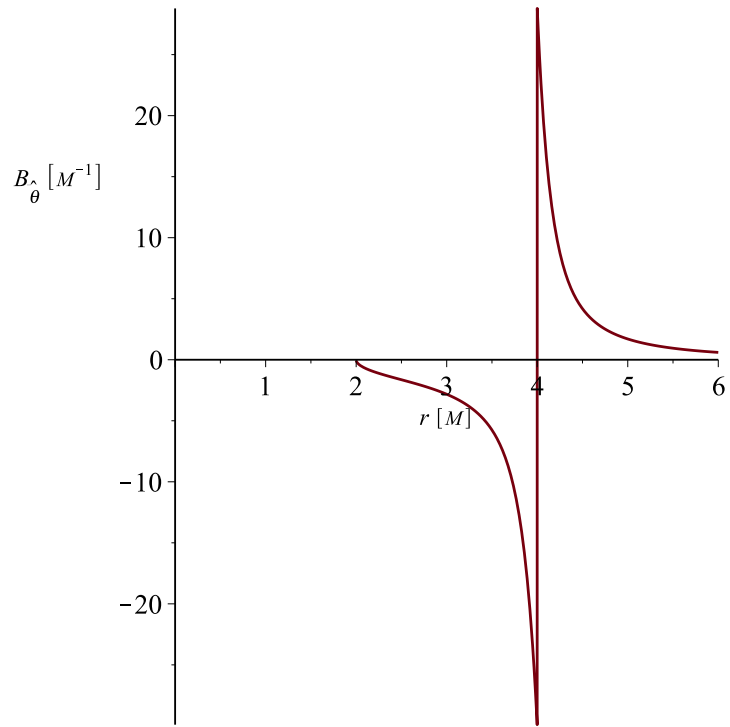
Obrázek 3.4: Průběh magnetického pole řešení Pettersona II v meridionální rovině, suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 4M$ .



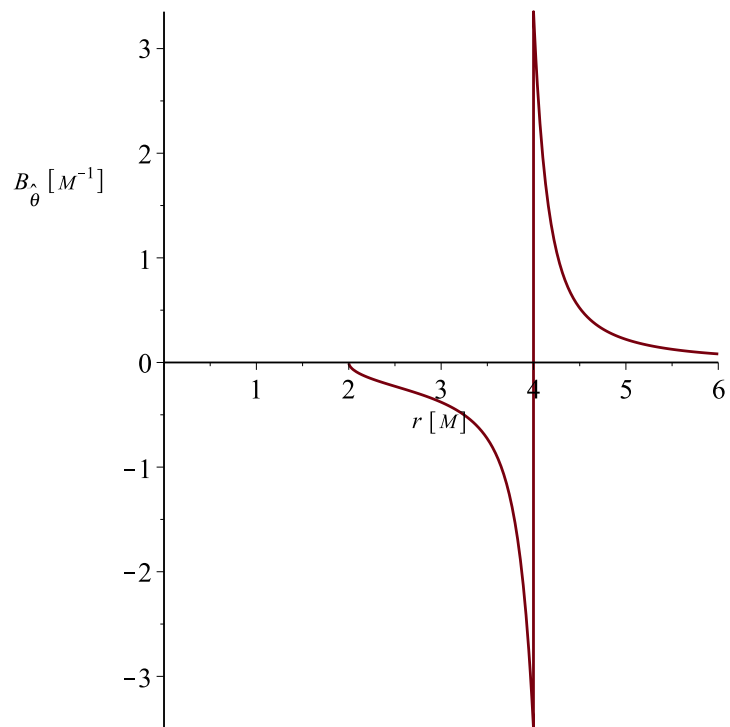
Obrázek 3.5: Průběh magnetického pole řešení Pettersona I v meridionální rovině, suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 5,5M$ .



Obrázek 3.6: Průběh magnetického pole řešení Pettersona II v meridionální rovině, suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 5,5M$ .

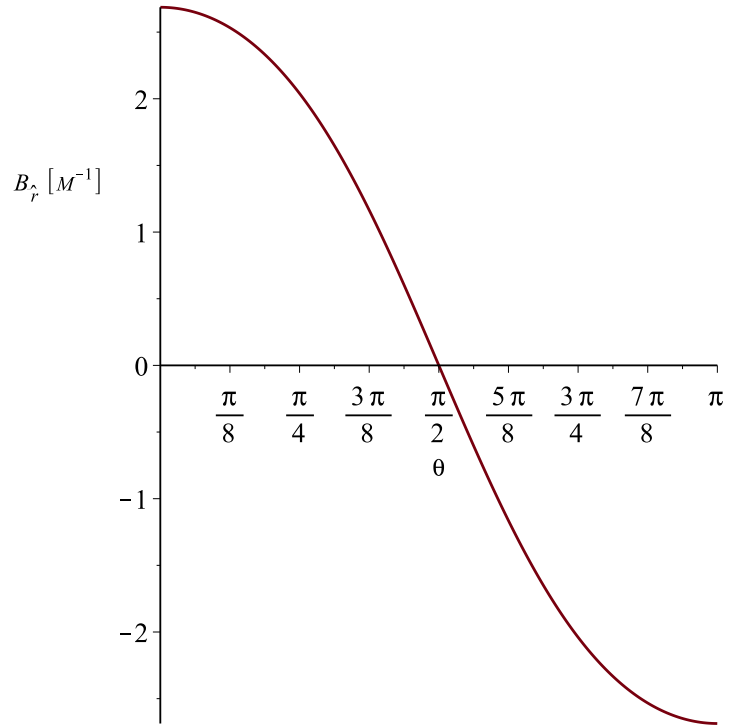


Obrázek 3.7: Průběh  $B_{\theta}$  v ekvatoriální rovině podle řešení Pettersona I v závislosti na  $r$ . Suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 4M$ .

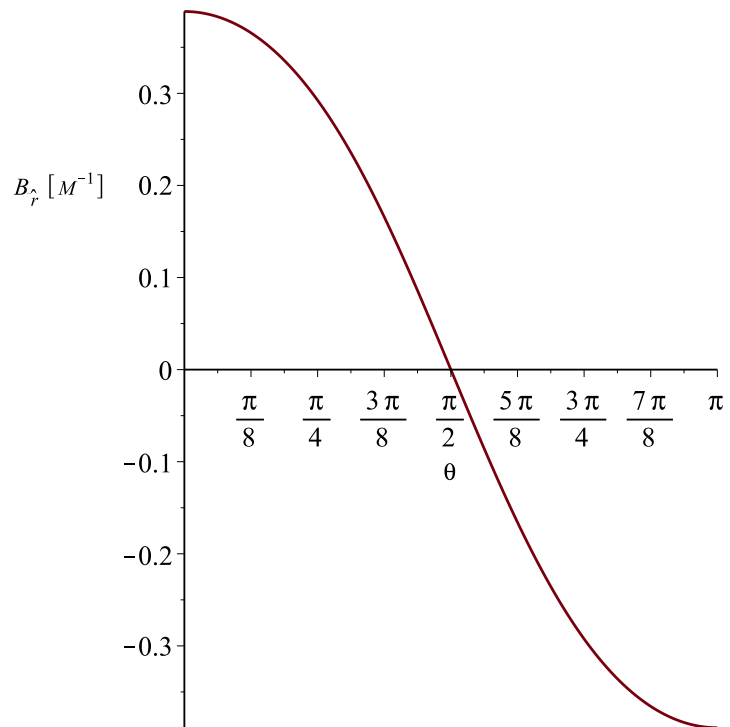


Obrázek 3.8: Průběh  $B_{\theta}$  v ekvatoriální rovině podle řešení Pettersona II v závislosti na  $r$ . Suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 4M$ .





Obrázek 3.9: Průběh  $B_{\hat{r}}$  na horizontu událostí podle řešení Pettersona I v závislosti na úhlu  $\theta$ . Suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 4M$ .



Obrázek 3.10: Průběh  $B_{\hat{r}}$  na horizontu událostí podle řešení Pettersona II v závislosti na úhlu  $\theta$ . Suma byla vysčítána do  $l = 30$ , proud byl zvolen  $I = 1$  a  $b = 4M$ .

# Závěr

V této práci jsme porovnávali šest různých řešení pro magnetické pole testovací proudové smyčky ve Schwarzschildově prostoročasu. Podařilo se nám dokázat, že se všechna kromě jednoho shodují až na multiplikativní konstantu, závisající nanejvýš na poloze smyčky. Tato odlišnost může být způsobena pouhým jiným zavedením proudu nebo obecně jinými konvencemi. Řešení jsme vykreslili pro několik poloh smyčky v programu MAPLE a tím jsme aspoň numericky porovnali zbylé řešení s ostatními. Dále jsme určili limity pro 3 významná místa úlohy - ekvatoriální rovinu, osu symetrie a horizont událostí.

Článek Pettersona I úlohu řešil přímo ve Schwarzschildově prostoročasu pomocí Maxwellových rovnic v tenzorovém tvaru. S tímto řešením se nám pracovalo nejhůře, zejména kvůli jeho vyjádření pomocí integrálu, který se pro obecný multipól špatně vyčísloval. Toto řešení bylo jediné, pro které se nám nepodařilo provést úplné analytické srovnání s ostatními. Také při numerickém zpracování jsme narázeli na problém, kdy MAPLE nebyl schopen integrály pro vyšší hodnoty  $l$  vykreslit. Proto jsme vyjádřili řešení v ekvivalentním tvaru pomocí hypergeometrických funkcí, abychom byli schopni vykreslit jeho tvar.

Článek Bičáka řešil úlohu opět přímo ve Schwarzschildově prostoročasu, tentokrát pomocí Newmanova-Penroseova formalismu. V článku se ale řešil obecnější problém libovolného stacionárního zdroje, který nemusí být umístěn axiálně symetricky. Řešení bylo vyjádřeno pomocí hypergeometrických funkcí a spinových sférických harmonik.

Článek Pettersona II se zabýval úlohou v Kerrově prostoročasu, nejdříve pro obecný axiálně symetrický zdroj a poté pro nabitou proudovou smyčku. V tomto článku byla chyba, po jejíž opravě se nám ale s tímto řešením pracovalo velmi dobře. Výsledek byl vyjádřen pomocí Legendreových polynomů a funkcí 2. druhu a jejich derivací, se kterými se zacházelo lépe než s hypergeometrickými funkcemi (zejména co se týká analytického výpočtu limit, při kterých šlo snadno využít jejich speciálních hodnot) a byly pro nás intuitivnější. Numericky se ale řešení obsahující v radiální části Legendreovy polynomy nechovala dobře při výpočtu limity pole na horizontu událostí, narozdíl od řešení Bičáka obsahujícího hypergeometrické funkce.

Článek Chitreho se opět zabýval úlohou v Kerrově prostoročasu. Řešení je vyjádřeno pomocí 1. a 2. derivací Legendreových polynomů a funkcí 2. druhu, toto řešení lze ale dále upravit na jednodušší tvar, který obsahuje nejvýše jejich 1. derivace.

Články Mosse a Znajeka řeší úlohu s nabitou proudovou smyčkou v Kerrově prostoročasu, řešení je opět uvedeno ve formě Legendreových polynomů a funkcí 2. druhu. Toto řešení je výhodné v tom, že je uveden explicitně tvar vektorového potenciálu.

Přestože většina námi porovnávaných článků řešila úlohu v Kerrově prostoročasu, zatím jsme s nimi pracovali pouze ve schwarzschildovské limitě. Jako další pokračování se proto nabízí zaměřit se přímo na řešení v prostoročasu rotující Kerrovy černé díry. Dále bychom výsledků této práce chtěli využít k určení pole soustavy proudových smyček, která by sloužila jako model akrečního disku.

# Seznam použité literatury

- [1] BIČÁK, J. a DVOŘÁK, L. (1977). Stationary electromagnetic fields around black holes. *Czechoslovak Journal of Physics B*, **27**(2), 127–147.
- [2] CHITRE, D. M. a VISHEWARA, C. V. (1975). Electromagnetic field of a current loop around a kerr black hole. *Physical Review D*, **12**(6), 1538–1543.
- [3] MOSS, I. G. (2011). Black holes with current loops revisited. *Physical Review D*, **83**, 124046.
- [4] OLVER, F. W. J., LOZIER, D. W., BOISVERT, R. F. a CLARK, C. W., editors (2010). *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-14063-8.
- [5] PEJCHA, J. (2014). Magnetická pole proudových smyček kolem černých děr. bakalářská práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [6] PETTERSON, J. A. (1974). Magnetic field of a current loop around a schwarzschild black hole. *Physical Review D*, **10**, 3166–3170.
- [7] PETTERSON, J. A. (1975). Stationary axisymmetric electromagnetic fields around a rotating black hole. *Physical Review D*, **12**(8), 2218–2225.
- [8] ZNAJEK, R. L. (1978). Charged current loops around kerr holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **182**, 639–646.