MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anna Halászová

Optimální řízení v radikálních řetězcích s diskrétním časem

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, PhD.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 18. května 2017 Podpis autora

Ráda bych poděkovala především vedoucímu své práce, Mgr. Petru Dostálovi, PhD., za všechen čas, který mi věnoval na konzultacích, trpělivé odpovídání na mé nikdy nekončící otázky a všechny rady a připomínky. Děkuji také svým rodičům a Martinovi za odbornou i duševní podporu.

Název práce: Optimální řízení v radikálních řetězcích s diskrétním časem

Autor: Anna Halászová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, PhD., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Abstrakt: Tato práce pojednává o markovských procesech s diskrétním časem a konečnou množinou stavů, z nichž některé stavy jsou tzv. radikální a řetězec je z pohledu vnějšího pozorovatele ihned opouští. Teorie oceněných a řízených Markovových řetězců je zde zobecněna pro řetězce s radikálními stavy, jejichž nabytí je penalizováno. Naším cílem je především hledání optimálního homogenního řízení (vhodnou úpravou Howardova algoritmu) a rozšíření teorie pro procesy řízené adaptivními strategiemi.

Klíčová slova: Markovovy procesy, Howardův algoritmus, martingaly

Title: Optimal control in radical chains with discrete time

Author: Anna Halászová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics, MFF UK

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, PhD., Department of Probability and Mathematical Statistics, MFF UK

Abstract: This thesis describes Markov processes with discrete time and finite sets of possible values where some states are so called radical and from the outer point of view, the chain leaves them immediately. The basic theory of chains with control is generalized for the case with radical states, whose visits are penalized. Our intention is to find the optimal homogeneous control (by a modification of Howard's iterative algorithm) and to broaden the theory for processes which are controlled by adaptive strategies.

Keywords: Markov processes, Howard's algorithm, martingales

Obsah

Úvod

V této práci se zabýváme speciálním typem markovských procesů s diskrétním časem a konečnou množinou stavů, jež jsou v mnohém blízké markovským řetězcům s časem spojitým (viz např. [6, Def. 3.1, str. 77]). Jedním z požadavků, které na markovské řetězce se spojitým časem často klademe, je neexistence tzv. nestabilních stavů. Střední doba setrvání ve stabilních stavech je kladná; nestabilní stavy jsou okamžitě opouštěny, takže jejich navštívení je nezaznamenatelné [6, Def. 3.3, str. 83-84]. V diplomové práci [4] je teorie řetězců se spojitým časem částečně zpracována i pro případ s přítomností nestabilních stavů. V tomto textu budeme rovněž předpokládat některé stavy nestabilní (zde je budeme nazývat radikální), ale čas uvažujeme diskrétní. Můžeme začít rozlišovat mezi vnějším pozorovatelem, který je schopen zaznamenat jen stavy stabilní, a pohledem vnitřním, kde indexová množina časových okamžiků je o něco bohatší. Z takového řetězce bychom pak mohli vygenerovat Markovův řetězec se spojitým časem, pro nějž by byl námi uvažovaný diskrétní proces vnořeným řetězcem.

V první kapitole formálně zavedeme markovský proces, jaký jsme motivovali v předchozím odstavci, a budeme se zabývat jeho vlastnostmi, tvarem matic přechodu atd. Rovněž vyslovíme větu o procesu z vnějšího pohledu a jeho vztahu k procesu z pohledu vnitřního pozorovatele. Součástí kapitoly je i krátká Sekce 1.2 o martingalech, jejichž vlastností využíváme v důkazech vět druhé a třetí kapitoly.

Kapitola dva je věnována markovským procesům s oceněním. Zavedeme v ní veličiny, které popisují tzv. diskontované výnosy, a odvodíme, jak vypadají jejich střední hodnoty. Procesy budeme opět analyzovat z pohledu vnitřního i vnějšího.

Nejdůležitější část práce tvoří poslední kapitola. Oceněné procesy z kapitoly 2 rozšiřujeme o možnost řízení a v Sekci 3.1 představujeme úpravu Howardova iteračního algoritmu pro daný typ markovských procesů. Dále kapitola obsahuje modifikaci Howardova algoritmu pro oslabené předpoklady (Sekce 3.2) a nakonec sekci o procesech řízených adaptivními strategiemi, jejichž výnosy jsou pak srovnávány s výnosy procesů řízených homogenně.

Appendix obsahuje důkazy tvrzení, jež jsou v textu používána, avšak s tématem práce souvisí pouze volně.

1. Základní vlastnosti markovských procesů s radikálními stavy

Tato kapitola zavádí markovské procesy s diskrétním časem, u nichž jsou přítomny tzv. radikální stavy. Toto zobecnění je motivováno rolišováním stabilních a nestabilních stavů v markovských řetězcích s časem spojitým, jak je popsáno např. v Sekci 1.2 v [4].

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $(T, \preceq)$ (úplně) uspořádaná množina, na které uvažujeme tolopogii generovanou úplným uspořádáním. Mějme $X = \{X_t : t \in T\}$ náhodný proces na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indexovaný množinou T, s hodnotami v nejvýše spočetné množině stavů S. Definujme posloupnost σ-algeber $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \in T, s \preceq t), t \in T$.

Následující definice je převzatá z [5, str. 156, kap. 4].

Definice 1. Proces X nazveme *markovským procesem*, pokud pro každé $j \in S$ a všechna $t, s \in T, s \preceq t$ splňuje

$$\mathbb{P}(X_t = j|\mathcal{F}_s) \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{P}(X_t = j|X_s). \tag{1.1}$$

Poznámka 1.1. σ-algebru $\mathcal{F}_t$ můžeme interpretovat jako informaci o historii procesu X do času t. Rovnost (1.1) je zobecněním tzv. markovské vlastnosti, mj. nám usnadní zápis.

Pokud systém matic $\{\mathbf{P}_t\}_{t \in T}$ pro každý stav $j \in S$ a každé $t \in T$ a jeho bezprostředního následníka u (v daném uspořádání) splňuje

$$\mathbb{P}(X_u = j|X_t) \overset{\text{sj}}{=} p_{X_t,j}(t),$$

budeme říkat, že $\mathbf{P}_t$ je *matice přechodu v čase* t.

Definice 2. [6, Def. 1.5, str. 10] Řekneme, že proces X má *spojité trajektorie skoro jistě*, pokud pro každé $t \in T$ platí

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{s \to t, s \in T} X_s(\omega) = X_t(\omega)\}) = 1,$$

je-li $\{\omega \in \Omega : \lim_{s \to t, s \in T} X_s(\omega) = X_t(\omega)\} \subseteq \mathcal{A}$.

Proces X je *spojitý v pravděpodobnosti (stochasticky spojitý)*, pokud pro všechna $t \in T$ a $\epsilon > 0$ platí

$$\lim_{s \to t, s \in T} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_s(\omega) - X_t(\omega)| > \epsilon\}) = 0,$$

je-li $\{\omega \in \Omega : |X_s(\omega) - X_t(\omega)| > \epsilon\} \subseteq \mathcal{A}$.

Příklad. (1) Proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ s indexovou množinou $(T, \preceq) = (\mathbb{N}_0, \leq)$, který splňuje (1.1), je markovským procesem. Jedná se o Markovův řetězec s diskrétním časem, jak je definován např. v [6, Def. 2.1, str. 15], zde ovšem připouštíme i takové stavy i, kde pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\mathbb{P}(X_n = i) = 0$. Z Věty 2.1 v [6] pak plyne, že rozdělení X je jednoznačně určeno počátečním rozdělením $\mathbf{p}$ a systémem $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, což jsou matice přechodu v čase n .

(2) Uvažujme indexovou množinu $T = \mathbb{N}_0 \times (\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ s lexikografickým uspořádáním. Proces $Y = \{Y_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ splňující podmínky Definice 1 je tedy markovským procesem.

Předpokládejme navíc, že jeho trajektorie jsou spojité skoro jistě. Potom se dá analogicky jako v předchozím příkladě ukázat, že rozdělení Y je jednoznačně určeno počátečním rozdělením $\mathbf{p}$ a systémem matic přechodu v čase $\binom{n}{k}$ (označme jej $\{\mathbf{P}_{n,k} = (p_{ij}\binom{n}{k})_{i,j \in S}\}_{\binom{n}{k} \in T}$), který splňuje

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{k+1}^n = j | Y_k^n) &\overset{\text{sj}}{=} p_{Y_k^n, j}\binom{n}{k}, \quad \forall j \in S, \forall n, k \in \mathbb{N}_0, \\
\mathbb{P}(Y_0^{n+1} = j | Y_\infty^n) &\overset{\text{sj}}{=} p_{Y_\infty^n, j}\binom{n}{k}, \quad \forall j \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

Poznámka 1.2. Vzhledem k tomu, že body $\binom{n}{k}, n, k \in \mathbb{N}_0$ jsou izolované a bod $\binom{n}{\infty}$ je izolovaný zprava, je spojitost trajektorií skoro jistě u procesu Y ekvivalentní podmínce

$$\lim_{k \to \infty} Y_k^n \overset{\text{sj}}{=} Y_\infty^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.2}$$

Protože konvergence skoro jistě implikuje konvergenci v pravděpodobnosti, zřejmě proces se spojitými trajektoriemi skoro jistě bude spojitý v pravděpodobnosti.

Definice 3. Markovský proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nazveme *homogenním*, pokud existuje stochastická matice $\mathbf{P}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\mathbf{P}_n \overset{\text{sj}}{=} \mathbf{P}$. Matici $\mathbf{P}$ potom označujeme pouze jako *matici přechodu.*

Definice 4. Markovský proces $Y = \{Y_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ se spojitými trajektoriemi skoro jistě nazveme *homogenním*, pokud existují stochastické matice $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ a $\bar{\mathbf{P}} = (\bar{p}_{ij})_{i,j \in S}$ takové, že $\mathbf{P}_{n,k} \overset{\text{sj}}{=} \bar{\mathbf{P}}$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}_0$ a $\mathbf{P}_{n,\infty} \overset{\text{sj}}{=} \mathbf{Q}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka 1.3. Indexy $n \in \mathbb{N}_0$ budeme interpretovat jako *reálný čas*, který plyne mezi $\binom{n}{\infty}$ a $\binom{n+1}{0}$. Pro indexy $n, k \in \mathbb{N}_0$ budeme říkat, že mezi $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{k+1}$ plyne *imaginární čas.*

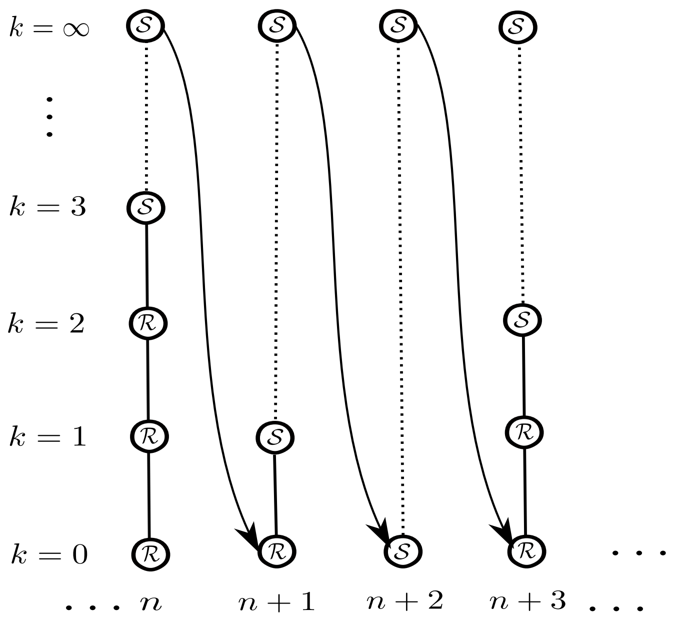
Matici $\mathbf{Q}$ pak nazýváme *maticí přechodu v reálném čase*, matici $\bar{\mathbf{P}}$ *maticí přechodu v imaginárním čase.*

Definice 5. Homogenní markovský proces $Y = \{Y_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ se spojitými trajektoriemi skoro jistě nazveme *radikální*, pokud existuje neprázdná podmnožina $\mathcal{R} \subseteq S$ taková, že během přechodů v imaginárním čase jsou stavy $i \in \mathcal{S} := S \backslash \mathcal{R}$ absorpční a současně neexistuje neprázdná uzavřená podmnožina $\mathcal{R}$, tzn.

$$\forall i \in \mathcal{S}, \forall j \in S : \bar{p}_{ij} = \mathbf{1}_{[i=j]}, \tag{1.3}$$

$$\forall i \in \mathcal{R}, \exists j \in \mathcal{S}, \exists k \in \mathbb{N}_0 : \bar{p}_{ij}^{(k)} > 0. \tag{1.4}$$

Prvky množiny $\mathcal{R}$ budeme nazývat *radikální stavy*, prvky množiny $\mathcal{S}$ *stabilní stavy.*



Proces Y v reálném a imaginárním čase

Poznámka 1.4 (interpretace). V první, druhé a části třetí kapitoly budeme dále pracovat s radikálními homogenními markovskými procesy s konečnou množinou stavů. Formální zavedení procesu Y s indexovou množinou $\mathbb{N}_0 \times (\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ nám umožní modelovat následující situaci.

Mějme proces s diskrétním časem a konečnou množinou stavů splňující markovskou vlastnost. Stavy jsou dvou kategorií (stabilní a radikální), přičemž zatímco návštěvy stabilních stavů je vnější pozorovatel schopen zaznamenat, návštěvy radikálních stavů nikoli (tyto průchody se zvnějšku odehrávají jakoby „mimo čas“, proto mluvíme o reálném a imaginárním čase). Počet radikálních stavů navštívených mezi dvěma stabilními stavy může být různý, víme pouze, že jich bude vždy skoro jistě konečně mnoho (což formalizuje podmínka (1.4) v Definici 5). Proces viděný z pohledu vnějšího pozorovatele, tj. proces $\{Y_\infty^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, budeme zkráceně označovat jako *vnější proces*; proces Y pak reprezentuje perspektivu vnitřního pozorovatele, pro nějž jsou všechny stavy viditelné, a budeme mu říkat *vnitřní proces*. Řetězec $\{Y_k^n : k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ budeme někdy nazývat *imaginární řetězec* v čase n.

Díky předpokladu spojitosti trajektorií skoro jistě a podmínce (1.3) víme, že řetězec Y se nachází v čase $\binom{n}{\infty}$ ve stabilním stavu skoro jistě. Následující přesun, daný maticí $\mathbf{Q}$, se odehrává v (reálném) čase. Dále se vše řídí maticí přechodů v imaginárním čase $\bar{\mathbf{P}}$. Po konečně mnoha návštěvách radikálních stavů je řetězec s pravděpodobností jedna absorbován stavem stabilním a cyklus se opakuje.

1.1 Vztah mezi vnitřním a vnějším procesem

Pokusme se nyní odvodit, jak bude vypadat vnější proces, známe-li proces vnitřní. Ukážeme, že bude rovněž markovský (půjde dokonce o homogenní Markovův řetězec) a najdeme jeho matici přechodu.

Nechť Y je radikální homogenní markovský proces s konečnou množinou stavů, jak bylo popsáno výše. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat stavy uspořádané tak, že stabilní předcházejí radikálním. Matice přechodu $\mathbf{Q}$ v čase $\binom{n}{\infty}$, v němž je proces ve stabilním stavu skoro jistě, pak lze rozepsat do bloků:

$$\mathbf{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline * & * \end{array}\right), \tag{1.5}$$

kde blok $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ odpovídá přechodům mezi stabilními stavy a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}\times\mathcal{R}}$ reprezentuje přesuny ze stabilních do radikálních stavů.

Zaměříme-li se na $\{Y_k^n : k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ pro jedno konkrétní $n \in \mathbb{N}_0$, z Definice 3 ihned máme, že jde o homogenní Markovův řetězec, navíc z Definice 5 má $\bar{\mathbf{P}}$ tvar

$$\bar{\mathbf{P}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right), \tag{1.6}$$

kde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}\times\mathcal{S}}$ reprezentuje přesuny z radikálních stavů do stabilních a $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}\times\mathcal{R}}$ přechody mezi radikálními stavy.

Lemma 1.5. *Pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbf{D}$ platí, že $|\lambda| < 1$.*

Důkaz. Mějme λ vlastní číslo $\mathbf{D}$ s příslušným vlastním vektorem $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. Pro stav $i \in \operatorname{Arg}\max_{j\in\mathcal{R}} |x_j|$ z podmínky (1.4) máme, že existuje $k \in N_0$ takové, že

$$\sum_{j\in\mathcal{R}} d_{ij}^{(k)} = \sum_{j\in\mathcal{R}} \bar{p}_{ij}^{(k)} < 1.$$

Potom

$$|\lambda^k x_i| = |\sum_{j\in\mathcal{R}} d_{ij}^{(k)} x_j| \leq \sum_{j\in\mathcal{R}} d_{ij}^{(k)} |x_j| \leq |x_i| \sum_{j\in\mathcal{R}} d_{ij}^{(k)} < |x_i|,$$

tedy $|\lambda|$ musí být ostře menší než jedna. □

Tvrzení 1.6 (o zúžení markovského procesu)**.** *Nechť $Y = \{Y_t : t \in T\}$ je markovský proces s nejvýše spočetnou množinou stavů S. Pro $R \subseteq T$ označme $X := \{Y_r : r \in R\}$ zúžení procesu Y na indexovou množinu R. Potom X je rovněž markovský proces.*

Důkaz. Z definice markovského procesu víme, že platí

$$\mathbb{P}(Y_t = j|\mathcal{F}_s) \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{P}(Y_t = j|Y_s), \quad \forall s, t \in T, s \preceq t, \forall j \in S,$$

speciálně tedy pro všechna $r, u \in R, r \preceq u$ a každé $j \in S$

$$\mathbb{P}(X_u = j|\mathcal{F}_r) \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{P}(Y_u = j|\mathcal{F}_r) \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{P}(Y_u = j|Y_r) \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{P}(X_u = j|X_r).$$

Označíme-li $\mathcal{G}_u := \sigma(Y_r : r \in R, r \preceq u), u \in R$ posloupnost σ-algeber generovaných zúžením procesu Y na R, pak zřejmě $\mathcal{G}_u \subseteq \mathcal{F}_u$ pro každé $u \in R$, tedy z vlastností podmíněné střední hodnoty (viz např. Větu 7.5(v)[2, str. 41]) dostaneme

$$\mathbb{P}(X_u = j|\mathcal{G}_r) \overset{\text{sj}}{=} E[\mathbb{P}(X_u = j|\mathcal{F}_r)|\mathcal{G}_r] \overset{\text{sj}}{=} E[\mathbb{P}(X_u = j|X_r)|\mathcal{G}_u] \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{P}(X_u = j|X_r).$$

kde poslední rovnost skoro jistě platí, poněvadž $\sigma(X_r) \subseteq \mathcal{G}_r$. □

Věta 1.7 (o vnějším procesu)**.** *Nechť Y je radikální homogenní markovský proces s konečnou množinou stavů S. Potom $X := \{Y_\infty^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský proces s maticí pravděpodobností přechodu mezi stabilními stavy $\widehat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ takovou, že*

$$\widehat{\mathbf{P}} := \mathbf{A} + \mathbf{BU}, \quad \textit{kde } \mathbf{U} := (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{C}.$$

Důkaz. Matematickou indukcí bychom snadno ověřili, že

$$\bar{\mathbf{P}}^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \hline \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{D}^j \mathbf{C} & \mathbf{D}^k \end{array}\right),$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Dle Lemmatu 1.5 a Věty A.1 obdržíme $\mathbf{D}^k \to \mathbf{O}, k \to \infty$ a také

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{D}^j.$$

Pak můžeme klást

$$\bar{\mathbf{U}} := \lim_{k\to\infty} \bar{\mathbf{P}}^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{U} & \mathbf{O} \end{array}\right), \quad \text{kde } \mathbf{U} := (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{C}.$$

X je markovským procesem podle Tvrzení 1.6 a pro všechna $j \in \mathcal{S}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí (z markovské vlastnosti), že

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_k^{n+1} = j | Y_\infty^n) &\stackrel{\text{sj}}{=} \sum_{i\in S} \mathbb{P}(Y_0^{n+1} = i | Y_\infty^n)\, \mathbb{P}(Y_k^{n+1} = j | Y_0^{n+1} = i) \\ &\stackrel{\text{sj}}{=} \sum_{i\in S} q_{Y_\infty^n, i}\; \bar{p}_{ij}^{(k)}. \end{aligned}$$

Na základě předpkladu spojitosti trajektorií skoro jistě, konkrétně (1.2), a konečnosti množiny S můžeme provést záměnu limity a integrálu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_\infty^{n+1} = j | Y_\infty^n) &\stackrel{\text{sj}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(Y_k^{n+1} = j | Y_\infty^n) \stackrel{\text{sj}}{=} \sum_{i\in S} q_{Y_\infty^n, i} \lim_{k\to\infty} \bar{p}_{ij}^{(k)} \\ &= \sum_{i\in S} q_{Y_\infty^n, i} \bar{u}_{ij} = \mathbf{e}_{Y_\infty^n}^{\mathsf{T}} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{U}} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{Y_\infty^n}^{\mathsf{T}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{BU} & \mathbf{O} \\ \hline * & \mathbf{O} \end{array}\right) \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Nyní si stačí uvědomit, že v časech $\binom{n}{\infty}$ se proces nachází ve stabilních stavech skoro jistě, tedy

$$\mathbb{P}(Y_\infty^{n+1} = j | Y_\infty^n) \stackrel{\text{sj}}{=} \hat{p}_{Y_\infty^n, j}.$$

Homogenita řetězce vyplývá z nezávislosti matice $\widehat{\mathbf{P}}$ na n. □

Vraťme se nyní k vnitřnímu řetězci. Nachází-li se řetězec v radikálním stavu (to se s kladnou pravděpodobností může stát pouze v časech $\binom{n}{k}, k \in \mathbb{N}_0$), jsou pravděpodobnosti přechodu do dalšího stavu zapsány v dolních blocích matice $\bar{\mathbf{P}}$. V čase $\binom{n}{\infty}$ je nabytý stav skoro jistě stabilní, pravděpodobnosti přechodu jsou proto zapsané v horních blocích matice $\mathbf{Q}$. Jedinou informací, kterou nám poskytují horní bloky matice $\bar{\mathbf{P}}$, je, že stabilní stavy jsou z hlediska imaginárního řetězce absorpční. Z techto důvodů zaveďme matici $\mathbf{P}$, jež bude zahrnovat veškeré signifikantní informace o přechodových pravděpodobnostech. Praktičnost tohoto značení se plně vyjeví v Sekci 2.2 a Kapitole 3.

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right).$$

1.2 Martingaly

V Sekcích 2.2, 2.3 a 3.3 budeme využívat pojmu martingal a jeho základních vlastností.

Definice 6. [1, str. 93] Systém σ-algeber $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in T\}$, indexovaných úplně uspořádanou množinou $(T, \preceq)$, je *filtrace* na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pokud pro všechna $s, t \in T, s \preceq t$ platí

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}.$$

Reálný proces $X = \{X_t : t \in T\}$ nazveme $\mathcal{F}$*-adaptovaný*, pokud X_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná pro každé $t \in T$.

Definice 7. [1, str. 94] Mějme filtraci $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}$-adaptovaný proces $X = \{X_t : t \in T\}$, kde $X_t \in L^1$ pro každé $t \in T$.

Řekneme, že X je $\mathcal{F}$*-martingal*, jestliže platí

$$E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} 0, \quad \forall s,t \in T, s \preceq t.$$

X nazveme $\mathcal{F}$*-supermartingalem*, pokud splňuje

$$E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{\leq} 0, \quad \forall s,t \in T, s \preceq t. \tag{1.7}$$

Poznámka 1.8. V tomto textu budeme uvažovat pouze $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \in T, s \preceq t)$. Takový systém σ-algeber je automaticky filtrací a proces X je $\mathcal{F}$-adaptovaný. Místo označení $\mathcal{F}$-martingal budeme někdy používat méně přesné $\mathcal{F}_t$-martingal, pokud to budeme vzhledem ke komplikovanější indexové množině T považovat za užitečné.

Tvrzení 1.9 (postačující podmínka pro supermartingal)**.** *Uvažujme integrovatelný proces $S := \{S^n_k : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$, který je spojitý v L^1, tzn.*

$$\lim_{k \to \infty} E|S^n_\infty - S^n_k| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

adaptovaný vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}^n_k : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ a který splňuje

$$E[S^n_{k+1} - S^n_k|\mathcal{F}^n_k] \overset{\text{sj}}{\leq} 0, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0,$$
$$E[S^{n+1}_0 - S^n_\infty|\mathcal{F}^n_\infty] \overset{\text{sj}}{\leq} 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Potom S je $\mathcal{F}^n_k$-supermartingal.

Důkaz. Zvolme $s = \binom{n}{k}$ pevně. Ukážeme transfinitní indukcí, že pro s a všechna $t = \binom{m}{l}, t \succeq s$ platí supermartingalová vlastnost (1.7).

1. Pokud $\binom{n}{k} = \binom{m}{l}$, pak zřejmě $E[S^m_l|\mathcal{F}^n_k] \overset{\text{sj}}{=} S^n_k$.

2. Pokud (1.7) platí pro s a $t = \binom{N}{K}$, pak platí i pro s a následníka $\binom{N}{K}$. Vskutku, je-li $K \in \mathbb{N}_0$, pak z vlastnosti podmiňování platí

$$\begin{aligned} E[S^N_{K+1}|\mathcal{F}^n_k] &\overset{\text{sj}}{=} E[E[S^N_{K+1}|\mathcal{F}^N_K]|\mathcal{F}^n_k] \\ &\overset{\text{sj}}{\leq} E[S^N_K|\mathcal{F}^n_k] \overset{\text{sj}}{\leq} S^n_k, \end{aligned}$$

je-li $K = \infty$, máme

$$\begin{aligned} E[S^{N+1}_0|\mathcal{F}^n_k] &\overset{\text{sj}}{=} E[E[S^{N+1}_0|\mathcal{F}^N_\infty]|\mathcal{F}^n_k] \\ &\overset{\text{sj}}{\leq} E[S^N_\infty|\mathcal{F}^n_k] \overset{\text{sj}}{\leq} S^n_k. \end{aligned}$$

3. Pokud platí (1.7) pro s a všechny indexy $t = \binom{m}{l} \prec \binom{N}{\infty}$, platí i pro s a $\binom{N}{\infty}$. Ze spojitosti v L^1 totiž dostaneme

$$E[S_\infty^N - S_k^n | \mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} \lim_{l \to \infty} E[S_l^N - S_k^n | \mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{\leq} 0.$$

□

Důsledek. *Nechť integrovatelný proces* $M := \{M_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ *je spojitý v* L^1*, adaptovaný vzhledem k filtraci* $\{\mathcal{F}_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ *a splňuje*

$$E[M_{k+1}^n - M_k^n | \mathcal{F}_k^n] \overset{sj}{=} 0, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0,$$
$$E[M_0^{n+1} - M_\infty^n | \mathcal{F}_\infty^n] \overset{sj}{=} 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Potom M *je* $\mathcal{F}_k^n$*-martingal.*

Důkaz. Stačí užít Tvrzení 1.9 postupně na $S_k^n := M_k^n$ a $S_k^n := -M_k^n$. □

Poznámka 1.10. Máme-li integrovatelný proces $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, který je adaptovaný vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ a splňuje

$$E[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] \overset{\text{sj}}{=} 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

z vlastností podmíněné střední hodnoty okamžitě bez dalších předpokladů dostáváme, že X je $\mathcal{F}_n$-martingal.

2. Markovské procesy s oceněním přechodů

Nadále uvažujme, že přechodům mezi každými dvěma stavy jsou přiřazena *ocenění*, jež budou zapsaná v matici $\mathbf{Z} = (z_{ij})_{i,j\in S}$. Budeme ztotožňovat zápisy $z(i,j)$ a $z_{ij}, i, j \in S$.

Současně budeme opět chtít přistupovat k imaginárnímu řetězci v čase n s maticí přechodu $\bar{\mathbf{P}}$. Poněvadž po nabytí stabilního stavu se tento proces stává „vnitřně umrtveným“, matice ocenění bude mít tvar $\bar{\mathbf{Z}} = (z_{ij}\mathbf{1}_{[i\in\mathcal{R}]})_{i,j\in S}$.

Naším cílem nyní bude odvodit, jak budou vypadat *očekávané výnosy* jednotlivých procesů, podstatný pro nás bude především výnos vnitřního procesu, který využijeme v následující kapitole. Soustředit se budeme výhradně na diskontovaný případ, tzn. hodnotu všech výnosů budeme přepočítávat vzhledem k počátečnímu okamžiku. Odvozování vztahů provádíme podobně jako v Sekcích 1.3 a 1.4 v [4], avšak pro procesy s diskrétním časem.

Poznámka 2.1. Bez dalších odkazů budeme využívat znalosti toho, že podmíněnou střední hodnotu lze počítat jako střední hodnotu při podmíněném rozdělení (viz např. Větu 9.2 v [2, str. 58]). Pro markovský proces s diskrétní množinou stavů $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ má výpočet tvar

$$E[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \overset{\text{sj}}{=} \sum_{j\in S} f(j)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n),$$

kde f je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. U radikálního homogenního markovského procesu Y platí analogicky

$$\begin{aligned} E[f(Y^n_{k+1})|\mathcal{F}^n_k] &\overset{\text{sj}}{=} \sum_{j\in S} f(j)\,\mathbb{P}(Y^n_{k+1} = j|Y^n_k), \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0, \\ E[f(Y^{n+1}_0)|\mathcal{F}^n_\infty] &\overset{\text{sj}}{=} \sum_{j\in S} f(j)\,\mathbb{P}(Y^{n+1}_0 = j|Y^n_\infty), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Uveďme nyní lemma, které opakovaně využijeme v důkazech této kapitoly.

Lemma 2.2. *Mějme posloupnost náhodných veličin $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, kde $W_n \in L^1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť je splněna podmínka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E|W_n - W_{n+1}| < \infty.$$

Potom existuje $W \in L^1$ takové, že $|W - W_n|$ konverguje k nule v L^1 a skoro jistě.

Důkaz. Viz Appendix, Lemma A.3. □

2.1 Výnosy v imaginárním čase

Nejprve se podívejme na výnosy realizované imaginárním řetězcem pro pevné $n \in \mathbb{N}_0$. Pro přehlednost je stejně jako příslušnou matici přechodu $\bar{\mathbf{P}}$ opatřeme čárkou. Položme

$$\bar{V}^n_k := \sum_{l=0}^{k-1} \bar{z}(Y^n_l, Y^n_{l+1}). \tag{2.1}$$

Přirozenou interpretací $\bar{V}_k^n$ je výnos realizovaný imaginárním řetězcem mezi časy $\binom{n}{0}$ a $\binom{n}{k}$. Následující lemma ukazuje, že $\bar{V}_k^n$ má limitu pro $k \to \infty$ ve smyslu skoro jistě i v L^1, a je tedy dobře definován celkový výnos realizovaný imaginárním řetězcem v čase n (až na množinu míry nula, kde jej můžeme položit např. rovný nule).

Lemma 2.3. *Nechť $\bar{V}_k^n$ je jako v* (2.1)*. Pak platí, že pro $k \to \infty$ $\bar{V}_k^n$ konverguje skoro jistě a v L^1. Tuto limitu označme $\bar{V}_\infty^n$, tj.*

$$\bar{V}_\infty^n := \sum_{l=0}^{\infty} \bar{z}(Y_l^n, Y_{l+1}^n). \tag{2.2}$$

Důkaz. Obor hodnot $\bar{z}$ je omezená množina, proto pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí, že $\bar{V}_k^n \in L^1$. Z tvaru matice $\bar{\mathbf{Z}}$ máme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} E|\bar{V}_k^n - \bar{V}_{k+1}^n| &= \sum_{k=0}^{\infty} E|\bar{z}(Y_k^n, Y_{k+1}^n)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \max\nolimits_{i,j \in S}|\bar{z}_{ij}| P(Y_k^n \in \mathcal{R}) \\
&= \max\nolimits_{i,j \in S}|\bar{z}_{ij}| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{R}} P(Y_k^n = j) \\
&= \max\nolimits_{i,j \in S}|\bar{z}_{ij}| \sum_{i \in \mathcal{R}} P(Y_0^n = i) \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_{ij}^{(k)} \\
&\leq \max\nolimits_{i,j \in S}|\bar{z}_{ij}| \sum_{i \in \mathcal{R}} \sum_{j \in \mathcal{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_{ij}^{(k)} \\
&\leq \max\nolimits_{i,j \in S}|\bar{z}_{ij}| \mathbf{1}^{\mathsf{T}} (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Z Lemmatu 2.2 pak dostaneme, že existuje limita $\bar{V}_k^n$ pro $k \to \infty$ skoro jistě i v L^1 (ležící v L^1), která je pro obě konvergence stejná. Tedy

$$\bar{V}_k^n \to \sum_{l=0}^{\infty} \bar{z}(Y_l^n, Y_{l+1}^n) \quad \text{sj. a v } L^1, k \to \infty.$$

□

Poznámka 2.4. Pro zjednodušení dalšího zápisu označme

$$\mathcal{D} := \mathbf{1}^{\mathsf{T}} (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{1}, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{Z} := \max_{i,j \in S} |z_{ij}| \tag{2.4}$$

a uvědomme si, že $\max_{i,j \in S} |\bar{z}_{ij}| \leq \mathcal{Z}$. Mj. jsme pak v rámci důkazu získali následující odhad:

$$E|\bar{V}_\infty^n| \leq E[\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{z}(Y_k^n, Y_{k+1}^n)|] = \sum_{k=0}^{\infty} E|\bar{z}(Y_k^n, Y_{k+1}^n)| \leq \mathcal{Z}\mathcal{D}. \tag{2.5}$$

Pokusme se nyní odvodit, jak by mohly vypadat očekávané hodnoty $\bar{V}_\infty^n$ (následující řádky jsou pouze intuitivním odvozením, pro důkaz viz Větu 2.6).

Podmíněný střední výnos za přechod $\binom{n}{k} \to \binom{n}{k+1}, k \in \mathbb{N}_0$, tj. za jeden přechod v imaginárním čase, dostaneme jako

$$\bar{q}_i := \sum_{j \in S} \bar{p}_{ij} \bar{z}_{ij}.$$

Pro očekávaný výnos za období $\binom{n}{k} \to \binom{n}{k+2}, k \in \mathbb{N}_0$ by pak přirozeně mělo platit

$$\begin{aligned} \bar{v}_i^{[n]}(k, k+2) &= \bar{q}_i + \sum_{\xi \in S} \sum_{\nu \in S} \bar{z}_{\xi\nu} \bar{p}_{i\xi} \bar{p}_{\xi\nu} \\ &= \bar{q}_i + \sum_{\xi \in S} \bar{p}_{i\xi} \bar{q}_\xi = \mathbf{e}_i^\intercal (\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{q}}). \end{aligned}$$

Pro $m \in \mathbb{N}$ iterováním stejného postupu obdržíme

$$\bar{v}_i^{[n]}(k, k+m) = \mathbf{e}_i^\intercal (\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{q}} + \cdots + \bar{\mathbf{P}}^{m-1} \bar{\mathbf{q}}).$$

Limitním přechodem získáme

$$\bar{\mathbf{v}}^{[n]}(k,\infty) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}^j \bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ (\mathbf{I}-\mathbf{D})^{-1} \bar{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}.$$

Poznámka 2.5. Limitní přechod je korektní, jelikož $\mathbf{D}^j \to \mathbf{O}, j \to \infty$ (viz Lemma 1.5) a $\bar{\mathbf{q}}$ má nulový podvektor $\bar{\mathbf{q}}_S$. Hodnota $\bar{\mathbf{v}}^{[n]}(k,\infty)$ nezávisí na k ani n, což je v souladu s předpokladem homogenity řetězce $\{Y_k^n : k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$.

V následující větě formálně dokážeme výše popsanou hypotézu o tom, jak bude vypadat očekávaný výnos imaginárního řetězce, máme-li informaci o chování řetězce do času $\binom{n}{k}$.

Věta 2.6 (o výnosech imaginárního řetězce)**.** *Nechť $\bar{V}_k^n$ je jako v* (2.1) *a $\bar{V}_\infty^n$ jako v* (2.2)*. Potom platí:*

$$E[\bar{V}_\infty^n | \mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} \bar{V}_k^n + \bar{\mathbf{v}}(Y_k^n),$$

kde $\bar{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \bar{\mathbf{v}}_R \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{v}}_R := (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \bar{\mathbf{q}}_R$.

Důkaz. Z Lemmatu 2.3 dostaneme záměnou limity a integrálu a s využitím vlastností podmíněné střední hodnoty:

$$\begin{aligned} E[\bar{V}_\infty^n - \bar{V}_k^n | \mathcal{F}_k^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\sum_{l=k}^{\infty} \bar{z}(Y_l^n, Y_{l+1}^n) | \mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} \sum_{l=k}^{\infty} E[\bar{z}(Y_l^n, Y_{l+1}^n) | \mathcal{F}_k^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} \sum_{l=k}^{\infty} E[E[\bar{z}(Y_l^n, Y_{l+1}^n) | \mathcal{F}_l^n] | \mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} \sum_{l=k}^{\infty} E[\bar{\mathbf{q}}(Y_l^n) | \mathcal{F}_k^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} \sum_{l=k}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}^{l-k} \bar{\mathbf{q}}(Y_k^n) \overset{\text{sj}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}^{l} \bar{\mathbf{q}}(Y_k^n) \overset{\text{sj}}{=} \bar{\mathbf{v}}(Y_k^n). \end{aligned}$$

$\square$

2.2 Výnosy vnitřního procesu

Položme dále

$$
\begin{aligned}
V_{n,0}^{(\beta)} &:= \sum_{m=0}^{n-1} [\beta^m \bar{V}_\infty^m + \beta^{m+1} z(Y_\infty^m, Y_0^{m+1})], \quad n \in \mathbb{N}_0, \\
V_{n,k}^{(\beta)} &:= V_{n,0}^{(\beta)} + \beta^n \bar{V}_k^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Veličinu $V_{n,k}^{(\beta)}$ interpretujeme jako celkový výnos až do k-tého imaginárního přechodu v čase n. Přitom zisky spojené s přechody, jež končí v čase $\binom{m}{\cdot}$, diskontujeme do počátečního okamžiku, tj. faktorem β^m .

Podobně jako výše budeme chtít ukázat, že $V_{n,k}^{(\beta)}$ konverguje pro $n \to \infty$ (skoro jistě i v L^1) k nějaké veličině, která by popisovala celkový diskontovaný výnos (v nekonečném časovém horizontu).

Poznámka 2.7. Platí následující odhad (mj. z odhadu pro $\bar{V}_\infty^n$ v (2.5)):

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} E|V_{n+1,0}^{(\beta)} - V_{n,0}^{(\beta)}| &= \sum_{n=0}^{\infty} E|\beta^n \bar{V}_\infty^n + \beta^{n+1} z(Y_\infty^n, Y_0^{n+1})| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} [\beta^n \mathcal{Z}\mathcal{D} + \beta^{n+1} \mathcal{Z}] = \frac{\mathcal{Z}\mathcal{D}}{1-\beta} + \frac{\beta \mathcal{Z}}{1-\beta}.
\end{aligned}
$$

Z Lemmatu 2.2 proto $V_{n,0}^{(\beta)}$ konverguje pro $n \to \infty$ skoro jistě i v L^1. Tuto limitu označme jako $V^{(\beta)}$.

$$
V^{(\beta)} := \sum_{m=0}^{\infty} [\beta^m \bar{V}_\infty^m + \beta^{m+1} z(Y_\infty^m, Y_0^{m+1})]. \qquad (2.7)
$$

Lemma 2.8. *Nechť* $V_{n,k}^{(\beta)}$ *a* $V^{(\beta)}$ *jsou jako v* (2.6) *a* (2.7). *Potom platí:*

$$
\sup_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}| \to 0 \quad \textit{sj. a v } L^1, n \to \infty.
$$

Důkaz. Z omezenosti z a odhadu (2.5) máme, že $V_{n,k}^{(\beta)} \in L^1$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}_0$, z Poznámky 2.7 rovněž $V^{(\beta)} \in L^1$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ platí

$$
\sum_{n=0}^{\infty} E[\sup_k |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}|] = \sum_{n=0}^{\infty} E[\sup_k |\sum_{m=n}^{\infty} [\beta^m \bar{V}_\infty^m + \beta^{m+1} z(Y_\infty^m, Y_0^{m+1})] - \beta^n \bar{V}_k^n|].
$$

Pokud užijeme trojúhelníkovou nerovnost pro supremum, dostaneme

$$
\sum_{n=0}^{\infty} E[\sup_k |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}|] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} [\beta^m \sum_{l=0}^{\infty} E|\bar{z}(Y_l^n, Y_{l+1}^n)| + \beta^{m+1} E|z(Y_\infty^m, Y_0^{m+1})|].
$$

Nakonec opět využijeme odhad (2.5), čímž získáme

$$
\sum_{n=0}^{\infty} E[\sup_k |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}|] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{1-\beta} \mathcal{Z}\mathcal{D} + \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta} \mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathcal{D} + \beta \mathcal{Z} < \infty.
$$

Z nutné podmínky konvergence dostáváme okamžitě, že

$$
\sup_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}| \to 0, \quad \text{v } L^1, n \to \infty.
$$

Záměnou limity a integrálu máme také

$$E[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_k |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}|] = \sum_{n=0}^{\infty} E[\sup_k |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}|] < \infty,$$

tedy $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_k |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}| < \infty$ skoro jistě, pročež platí

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}| \to 0, \quad \text{sj.}, n \to \infty.$$

□

Nyní bychom rádi odvodili vztah pro střední hodnotu celkového diskontovaného výnosu. Připomeňme si, že řetězcem $\{Y_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ modelujeme proces, kde se některé přesuny z pohledu vnějšího pozorovatele dějí v čase, zatímco jiné nikoli, a právě dvourozměrný řetězec nám umožnil elegantně se vyrovnat s faktem, že nevíme, kolik radikálních stavů se mezi dvěma stabilními navštíví.

Diskontování uvažujeme jen u výnosů spojených s výstupy ze stabilních stavů (skoro jistě pouze tehdy plyne čas z pohledu vnějšího pozorovatele). Zaveďme tedy matici $\mathbf{P}^{(\beta)}$ analogicky, jako jsme zaváděli $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P}^{(\beta)} = \left(\begin{array}{c|c} \beta\mathbf{A} & \beta\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right). \tag{2.8}$$

Položme

$$\mathbf{q}_S := (\sum_{j \in S} p_{ij} z_{ij})_{i \in \mathcal{S}} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{q}_R := (\sum_{j \in S} p_{ij} z_{ij})_{i \in \mathcal{R}} = \bar{\mathbf{q}}_R. \tag{2.10}$$

Následující odstavce jsou pouze heurististickým odvozováním, důkaz provedeme až ve Větě 2.12. Představme si, že v čase $\binom{n}{k}$ je řetězec ve stavu $i \in S$. Na základě tvaru procesu Y bychom se pak mohli domnívat, že střední hodnota výnosu od okamžiku $\binom{n}{k}$ dále, diskontovaného do času $\binom{n}{k}$, nezávisí na n ani k. Vektor takových středních hodnot bychom tedy mohli zapisovat jako $\mathbf{v}^{(\beta)} = (v_i^{(\beta)})_{i \in S}$.

Přešli bychom k rekurentním vyjádřením. Pro $i \in \mathcal{S}$ v čase $\binom{n}{\infty}$ bychom očekávali, že bude platit

$$v_i^{(\beta)} = \beta q_i + \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}} \beta \mathbf{Q} \mathbf{v}^{(\beta)} = \beta q_i + \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}} \mathbf{P}^{(\beta)} \mathbf{v}^{(\beta)}$$

a pro $i \in \mathcal{R}$ obdobně

$$v_i^{(\beta)} = q_i + \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{v}^{(\beta)} = q_i + \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}} \mathbf{P}^{(\beta)} \mathbf{v}^{(\beta)},$$

což lze souhrnně zapsat následujícím způsobem:

$$\mathbf{v}^{(\beta)} = \mathbf{h} + \mathbf{P}^{(\beta)} \mathbf{v}^{(\beta)}, \quad \text{kde } \mathbf{h} := (\beta \mathbf{q}_S^{\mathsf{T}}, \mathbf{q}_R^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}.$$

Označíme-li $\mathbf{v}_S^{(\beta)} := (v_i^{(\beta)})_{i \in \mathcal{S}}$ a $\mathbf{v}_R^{(\beta)} := (v_i^{(\beta)})_{i \in \mathcal{R}}$ stabilní a radikální část vektoru $\mathbf{v}^{(\beta)}$, je předchozí rovnost ekvivalentní rovnostem

$$\mathbf{v}_S^{(\beta)} = \beta(\mathbf{q}_S + \mathbf{A}\mathbf{v}_S^{(\beta)} + \mathbf{B}\mathbf{v}_R^{(\beta)}),$$
$$\mathbf{v}_R^{(\beta)} = \mathbf{q}_R + \mathbf{C}\mathbf{v}_S^{(\beta)} + \mathbf{D}\mathbf{v}_R^{(\beta)}.$$

Poznámka 2.9. Úpravami této soustavy dostaneme

$$\mathbf{v}_R^{(\beta)} = (\mathbf{I}-\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{q}_R + \mathbf{C}\mathbf{v}_S^{(\beta)}),$$
$$\mathbf{v}_S^{(\beta)} = (\mathbf{I}-\beta\widehat{\mathbf{P}})^{-1}(\beta\mathbf{q}_S + \beta\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{D})^{-1}\mathbf{q}_R),$$

přičemž existenci inverze $\mathbf{I}-\mathbf{D}$ jsme okomentovali v Lemmatu 1.5, inverze $\mathbf{I}-\beta\widehat{\mathbf{P}}$ existuje, protože $\beta \in (0,1)$. Matice $\mathbf{I}-\mathbf{P}^{(\beta)}$ je tedy regulární a dohromady pak můžeme psát

$$\mathbf{v}^{(\beta)} := (\mathbf{I}-\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}\mathbf{h}, \tag{2.11}$$
$$\mathbf{h} := (\beta\mathbf{q}_S^{\mathsf{T}}, \mathbf{q}_R^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}, \tag{2.12}$$

kde $\mathbf{P}^{(\beta)}, \mathbf{q}_S, \mathbf{q}_R$ jsou jako v (2.8), (2.9) a (2.10).

Poznámka 2.10. Pro matici $\mathbf{P}^{(\beta)}$ lze navíc obdobným výpočtem jako v důkazu Lemmatu 1.5 ukázat, že všechna její vlastní čísla jsou v absolutní hodnotě nejvýše jedna. Proto se pak pro každé $\alpha \in (0,1)$ dá $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}$ vyjádřit jako $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha\mathbf{P}^{(\beta)})^j$, tj. jako součet nezáporných matic. Limitním přechodem (s využitím spojitosti inverze matice) dostaneme, že

$$\lim_{\alpha\to 1-}(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1} = (\mathbf{I}-\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}.$$

Protože $(\mathbf{I}-\alpha\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}$ je nezáporná pro α z nějakého levého prstencového okolí 1, musí být i $(\mathbf{I}-\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}$ nezáporná.

Nyní dokážeme dvě tvrzení; první bude pomocné a druhé nám v důsledku dá, že platí

$$E[V^{(\beta)}|\mathcal{F}_0^0] \overset{\text{sj}}{=} \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_0^0).$$

Tvrzení 2.11. *Nechť* $V_{n,k}^{(\beta)}$, $V^{(\beta)}$ *a* $\mathbf{v}^{(\beta)}$ *jsou jako v* (2.6), (2.7) *a* (2.11). *Položme*

$$M_k^n := V_{n,k}^{(\beta)} + \beta^n\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n), \quad n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$
$$M := \{M_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}.$$

Pak platí:

(1) $\sup_{k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}} |V^{(\beta)} - M_k^n| \to 0, n \to \infty$ *skoro jistě a v* L^1*,*

(2) M *je* $\mathcal{F}_k^n$*-martingal.*

Důkaz. (1) Z trojúhelníkové nerovnosti máme, že

$$\sup_k |V^{(\beta)} - M_k^n| \leq \sup_k |V^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}| + \beta^n \sup_k |\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n)|.$$

Díky $\beta \in (0,1)$, tvaru $\mathbf{v}^{(\beta)}$, který nezávisí na n, a Lemmatu 2.8 určitě platí, že $\sup_{k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}} |V^{(\beta)} - M_k^n| \to 0, n \to \infty$ sj. Rovněž

$$\sup_k |V^{(\beta)} - M_k^n| \leq \sum_{m=0}^{\infty}[\beta^{m+1}|z(Y_\infty^m, Y_0^{m+1})| + \beta^m \sum_{l=0}^{\infty}|\bar{z}(Y_l^m, Y_{l+1}^m)|] + \max_{i\in S}|v_i^{(\beta)}|.$$

Máme tedy integrovatelnou majorantu (integrál z prvního členu je konečný - lze odhadnout stejně jako v Poznámce 2.7), a tudíž i $\sup_{k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}|V^{(\beta)} - M_k^n| \to 0$ v L^1 pro $n \to \infty$.

(2) Zřejmě $\mathbf{v}^{(\beta)} = \mathbf{h} + \mathbf{P}^{(\beta)}\mathbf{v}^{(\beta)}$. Pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\begin{aligned} E[M_{k+1}^n - M_k^n|\mathcal{F}_k^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\beta^n \bar{z}(Y_k^n, Y_{k+1}^n) + \beta^n \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_{k+1}^n) - \beta^n \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n)|\mathcal{F}_k^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^n[\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{v}^{(\beta)} - \mathbf{v}^{(\beta)}](Y_k^n). \end{aligned}$$

Pokud $Y_k^n \in \mathcal{R}$, máme

$$[\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{v}^{(\beta)} - \mathbf{v}^{(\beta)}](Y_k^n) = [\mathbf{h} + \mathbf{P}^{(\beta)}\mathbf{v}^{(\beta)} - \mathbf{v}^{(\beta)}](Y_k^n) = 0,$$

pokud $Y_k^n \in \mathcal{S}$, pak $\bar{\mathbf{q}}(Y_k^n) = 0$ a $\bar{\mathbf{P}}\mathbf{v}^{(\beta)} = \mathbf{v}^{(\beta)}$. V obou případech platí tedy

$$E[M_{k+1}^n - M_k^n|\mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

Pro $k = \infty$ víme, že $Y_k^n \in \mathcal{S}$ sj., dostáváme proto

$$\begin{aligned} E[M_0^{n+1} - M_\infty^n|\mathcal{F}_\infty^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\beta^{n+1} z(Y_\infty^n, Y_0^{n+1}) + \beta^{n+1}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_0^{n+1}) - \beta^n \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n)|\mathcal{F}_\infty^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^{n+1}\mathbf{q}_S(Y_\infty^n) + \beta^n[\beta\mathbf{Q}\mathbf{v}^{(\beta)} - \mathbf{v}^{(\beta)}](Y_\infty^n) \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^n[\mathbf{h} + \mathbf{P}^{(\beta)}\mathbf{v}^{(\beta)} - \mathbf{v}^{(\beta)}](Y_\infty^n) \overset{\text{sj}}{=} 0. \end{aligned}$$

Ověřme, že $E|M_\infty^n - M_k^n| \to 0, k \to \infty$, tj. že M je spojitý v L^1. Z odhadu (2.5) máme

$$E|V_{n,\infty}^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}| \le E[\sum_{l=k}^{\infty} |\bar{z}(Y_l^n, Y_{l+1}^n)|] \to 0, \quad k \to \infty,$$

dále ze spojitosti trajektorií sj. procesu Y a spojitosti funkce $\mathbf{v}^{(\beta)}$ na S obdržíme

$$\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n) \to \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n) \quad \text{sj.}, \, k \to \infty$$

a $\mathbf{v}^{(\beta)}$ má integrovatelnou majorantu, tedy $E|\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n) - \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n)| \to 0, k \to \infty$. Proto pak platí i

$$E|M_\infty^n - M_k^n| \le E|V_{n,\infty}^{(\beta)} - V_{n,k}^{(\beta)}| + \beta^n E|\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n) - \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n)| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Využijeme-li nyní Tvrzení 1.2, dostaneme, že M je F_k^n-martingal. □

Nyní už není těžké ukázat, jak bude vypadat celkový výnos vnitřního procesu, diskontovaný do počátečního okamžiku, máme-li informace o chování řetězce do času $\binom{n}{k}$.

Věta 2.12 (o výnosech vnitřního procesu)**.** *Nechť* $V_{n,k}^{(\beta)}$ *je jako v* (2.6) *a* $V^{(\beta)}$ *jako v* (2.7)*. Potom platí:*

$$E[V^{(\beta)}|\mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} V_{n,k}^{(\beta)} + \beta^n \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n), \tag{2.13}$$

kde $\mathbf{v}^{(\beta)} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}\mathbf{h},\ \mathbf{h} = (\beta\mathbf{q}_S^{\mathsf{T}}, \mathbf{q}_R^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ máme

$$\begin{aligned} E[V^{(\beta)}|\mathcal{F}_k^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\lim_{m\to\infty} M_k^m|\mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} \lim_{m\to\infty} E[M_k^m|\mathcal{F}_k^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} M_k^n = V_{n,k}^{(\beta)} + \beta^n \mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n), \end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti sj. jsme využili existenci integrovatelné majoranty, která umožnila záměnu limity a integrálu (z Tvrzení 2.11(1)), v další rovnosti sj. pak fakt, že M je $\mathcal{F}_k^n$-martingal (dle Tvrzení 2.11(2)). □

2.3 Výnosy vnějšího procesu

Nakonec se podívejme, jak budou vypadat diskontované výnosy realizované vnějším procesem. Protože matice přechodu vnějšího řetězce je $\widehat{\mathbf{P}}$, označme stříškou i související výnosy. Pro zdůraznění toho, že vycházíme ze stabilního stavu, budeme někdy doplňovat index S. Nejprve stejně jako v předešlých sekcích odvozujme neformálně, důkaz bude proveden ve Větě 2.15.

Očekávaný výnos za přechod $\binom{n}{\infty} \to \binom{n+1}{0}$, $n \in \mathbb{N}_0$ by měl pro $i \in \mathcal{S}$ být

$$\beta q_i := \sum_{j \in S} \beta q_{ij} z_{ij}.$$

Podmíněný střední výnos za období $\binom{n}{\infty} \to \binom{n+1}{\infty}$ pro $i \in \mathcal{S}$ by pak měl mít tvar (dochází k diskontování faktorem β, což označme pomocí horního indexu)

$$\begin{aligned} \widehat{q}_i^{(\beta)} &= \beta q_i + \beta \sum_{j \in S} q_{ij} \bar{v}_j = \beta[q_i + \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{v}}] \\ &= \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}} (\beta \mathbf{q}_S + \beta \mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_R). \end{aligned}$$

Pro vektorové výnosy bychom tedy mohli psát

$$\widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)} := \beta(\mathbf{q}_S + \mathbf{B} \bar{\mathbf{v}}_R). \tag{2.14}$$

Poznámka 2.13. Povšimněme si, že $\widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)}$ nezávisí na n, poněvadž ani $\bar{\mathbf{v}}_R$ nezávisí na n. To je v souladu s Větou 1.7, tj. tím, že vnější řetězec $\{Y_\infty^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní s maticí přechodu $\widehat{\mathbf{P}}$.

Nyní induktivně odvodíme (obdobným způsobem jako pro $\bar{\mathbf{v}}$, s využitím Poznámky 2.13), že pro vnější proces bude nejspíš platit

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}[n,n+2] &= \widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)} + \beta \widehat{\mathbf{P}} \widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)}, \\ \widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}[n,n+m] &= \sum_{j=0}^{m-1} (\beta \widehat{\mathbf{P}})^j \widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nakonec díky tomu, že $\beta \in (0,1)$, můžeme provést limitní přechod, čímž dostaneme

$$\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}[n,\infty] = \lim_{m \to \infty} \widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}[n,n+m] = \sum_{j=0}^{\infty} (\beta \widehat{\mathbf{P}})^j \widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)} = (\mathbf{I} - \beta \widehat{\mathbf{P}})^{-1} \widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)}.$$

Platí-li nezávislost na n, budeme moct opět opustit časové indexy a psát pouze $\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}$ místo $\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}[n,\infty]$.

K formálnímu důkazu využijeme prostředky, které jsme získali v předcházející sekci.

Tvrzení 2.14. *Pro $n \in \mathbb{N}_0$ uvažujme*

$$N_\infty^n := V_{n,\infty}^{(\beta)} + \beta^n \widehat{\mathbf{v}}^{(\beta)}(Y_\infty^n),$$

kde $\widehat{\mathbf{v}}^{(\beta)} := (\mathbf{I} - \beta \widehat{\mathbf{P}})^{-1} \widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)}$ a $\widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)}$ je jako v (2.14)*. Potom $N := \{N_\infty^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ je martingal vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_\infty^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.*

Důkaz. Zřejmě $\widehat{\mathbf{v}}^{(\beta)} = \widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)} + \beta\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{v}}^{(\beta)}$. Z Věty 2.6 dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} E[\bar{V}_\infty^{n+1}|\mathcal{F}_\infty^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[E[\bar{V}_\infty^{n+1}|\mathcal{F}_0^{n+1}]|\mathcal{F}_\infty^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} E[\bar{\mathbf{v}}(Y_0^{n+1})|\mathcal{F}_\infty^n] \overset{\text{sj}}{=} (\mathbf{Q}\bar{\mathbf{v}})(Y_\infty^n) \\ &\overset{\text{sj}}{=} (\mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}_R)(Y_\infty^n), \end{aligned}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili předpokladu, že v čase $\binom{n}{\infty}$ se proces nachází ve stabilním stavu skoro jistě. Potom

$$\begin{aligned} E[N_\infty^{n+1} - N_\infty^n|\mathcal{F}_\infty^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\beta^{n+1} z(Y_\infty^n, Y_0^{n+1}) + \beta^{n+1}\bar{V}_\infty^{n+1} \\ &\quad + \beta^{n+1}\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}(Y_\infty^{n+1}) - \beta^n\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}(Y_\infty^n)|\mathcal{F}_\infty^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^n[\beta\mathbf{q}_S + \beta\mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}_R + \beta\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)} - \widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}](Y_\infty^n) \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^n[\widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)} + \beta\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)} - \widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}](Y_\infty^n) \overset{\text{sj}}{=} 0. \end{aligned}$$

K dokončení důkazu již stačí použít Poznámku 1.10. □

Nyní zbývá formálně ukázat, jaký tvar má celkový výnos vnějšího procesu, diskontovaný do počátečního okamžiku, známe-li chování řetězce do času $\binom{n}{\infty}$.

Věta 2.15 (o výnosech vnějšího procesu)**.** *Nechť $V_{n,\infty}^{(\beta)}$ a $V^{(\beta)}$ jsou jako v* (2.6) *a* (2.7)*. Poté platí:*

$$E[V^{(\beta)}|\mathcal{F}_\infty^n] = V_{n,\infty}^{(\beta)} + \beta^n\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}(Y_\infty^n),$$

kde

$$\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)} = (\mathbf{I} - \beta\widehat{\mathbf{P}})^{-1}\widehat{\mathbf{q}}^{(\beta)}.$$

Důkaz. Z Lemmatu 2.8 máme speciálně, že $V_{n,\infty}^{(\beta)} \to V^{(\beta)}, n \to \infty$ skoro jistě a v L^1, dále $\beta \in (0,1)$, z čehož dohromady plyne, že $N_\infty^n \to V^{(\beta)}, n \to \infty$ sj. Konvergence v L^1 platí také, neboť máme integrovatelnou majorantu:

$$|N_\infty^n| \leq \sum_{m=0}^{\infty}[\beta^{m+1}|z(Y_\infty^m, Y_0^{m+1})| + \beta^m \sum_{l=0}^{\infty}|\bar{z}(Y_l^m, Y_{l+1}^m)|] + \max_{i\in\mathcal{S}}|\widehat{v}_i^{(\beta)}|.$$

Potom z martingalové vlastnosti (dokázané v Tvrzení 2.14) máme, že

$$\begin{aligned} E[V^{(\beta)}|\mathcal{F}_\infty^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\lim_{m\to\infty} N_\infty^m|\mathcal{F}_\infty^n] \overset{\text{sj}}{=} \lim_{m\to\infty} E[N_\infty^m|\mathcal{F}_\infty^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} N_\infty^n \overset{\text{sj}}{=} V_{n,\infty}^{(\beta)} + \beta^n\widehat{\mathbf{v}}_S^{(\beta)}(Y_\infty^n). \end{aligned}$$

□

3. Řízené markovské procesy

V této kapitole náš model rozšíříme o možnost tzv. *řízení*. Pro každý stav $i \in S$ mějme konečnou množinu rozhodnutí $\varDelta_i$. Rozlišujeme *stabilní a radikální rozhodnutí*, $\varDelta_i$ je tedy disjunktním sjednocením množin $\varDelta_i^{\mathcal{S}}$ a $\varDelta_i^{\mathcal{R}}$. Označme $\boldsymbol{\varDelta} := \prod_{i\in S} \varDelta_i$. Pevně zvolený vektor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_i)_{i\in S} \in \boldsymbol{\varDelta}$ budeme nazývat *homogenním řízením.*

Stabilní rozhodnutí indukuje, že při následujícím přechodu plyne čas, u radikálního je tomu naopak. Charakter stavů tedy není pevně dán, teprve rozhodnutí v daném stavu určuje, zda jej budeme nazývat stabilním či radikálním. Chceme-li zvolit stabilní rozhodnutí v čase $\binom{n}{k}, k \in \mathbb{N}_0$, musíme nejprve vyčkat až do času $\binom{n}{\infty}$ v posledním dosaženém stavu a teprve pak můžeme stabilní rozhodnutí učinit.

Pro homogenní řízení $\boldsymbol{\delta}$ (kde je pevně dáno, v kterých stavech budeme činit stabilní a v kterých radikální rozhodnutí), můžeme tedy definovat množinu stavů stabilních: $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}} := \{i \in S : \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{S}}\}$ a radikálních: $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}} := S \setminus \mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}}$.

To vše je v souladu s úvahami předchozích kapitol. Fakt, že do řetězce nemůžeme zasahovat, si můžeme představit jako situaci, kdy je k dispozici jediné homogenní řízení $\boldsymbol{\delta}$. Potom $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}}$ a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}}$.

Pro každé rozhodnutí $\delta_i \in \varDelta_i$ mějme dáno pravděpodobnostní rozdělení přechodu řetězce, popsané vektorem $\mathbf{p}_i(\delta_i)$, a vektor ocenění tohoto přechodu $\mathbf{z}_i(\delta_i)$. Pro $i,j \in S$ a $\delta_i \in \varDelta_i$ definujme

$$q_i(\delta_i) := \mathbf{p}_i(\delta_i)^{\mathsf{T}} \mathbf{z}_i(\delta_i),$$

$$q_{ij}(\delta_i) := \begin{cases} p_{ij}(\delta_i) & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{S}} \\ \text{libovolně} & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{R}} \end{cases}, \quad \bar{p}_{ij}(\delta_i) := \begin{cases} \mathbf{1}_{[i=j]}(\delta_i) & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{S}} \\ p_{ij}(\delta_i) & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{R}} \end{cases}.$$

Pak můžeme sestrojit matice ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q} := (q_{ij}(\delta_i))_{i,j\in S}$ a ${}_{\boldsymbol{\delta}}\bar{\mathbf{P}} := (\bar{p}_{ij}(\delta_i))_{i,j\in S}$. Lze také položit analogii „kompaktnějšího“ značení (viz Sekci 2.2)

$$h_i(\delta_i) := \begin{cases} \beta q_i(\delta_i) & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{S}} \\ q_i(\delta_i) & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{R}} \end{cases}, \quad \mathbf{p}_i^{(\beta)}(\delta_i) := \begin{cases} \beta \mathbf{p}_i(\delta_i) & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{S}} \\ \mathbf{p}_i(\delta_i) & \text{pokud } \delta_i \in \varDelta_i^{\mathcal{R}} \end{cases}.$$

Díky zavedení $h_i(\delta_i)$ a $\mathbf{p}_i^{(\beta)}(\delta_i)$ budeme moci snadno přejít k maticovému zápisu, který bude respektovat, že jen během některých přechodů plyne čas, a příslušné výnosy mají být tudíž diskontovány (faktorem $\beta \in (0,1)$). Máme-li tedy homogenní řízení $\boldsymbol{\delta}$, můžeme klást

$${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{P}^{(\beta)} := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{(\beta)}(\delta_1)^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{p}_2^{(\beta)}(\delta_2)^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_S^{(\beta)}(\delta_S)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}, \quad {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1(\delta_1)^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{z}_2(\delta_2)^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_S(\delta_S)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix},$$

$${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{h} := (h_i(\delta_i))_{i\in S}.$$

Uvědomme si, že kvůli závislosti charakteru stavů na řízení již stavy nemusí být seřazené. Matice ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}$, ${}_{\boldsymbol{\delta}}\bar{\mathbf{P}}$ a ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{P}^{(\beta)}$ tedy nemají blokový tvar jako v (1.5), (1.6) a (2.8), stejně tak ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{h}$ není složena ze za sebou jdoucích vektorů $\beta\mathbf{q}_S$ a $\mathbf{q}_R$. Přesto můžeme získat analogie matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ a vektorů $\mathbf{q}_S$ a $\mathbf{q}_R$ (vybráním některých prvků z matice ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{P}^{(\beta)}$, resp. vektoru ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{h}$):

$$\begin{aligned} {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{A} &:= (p_{ij}(\delta_i))_{i,j\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}}}, & {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{B} &:= (p_{ij}(\delta_i))_{i\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}},j\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}}}, \\ {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{C} &:= (p_{ij}(\delta_i))_{i\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}},j\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}}}, & {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{D} &:= (p_{ij}(\delta_i))_{i,j\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}}}, \\ {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{q}_S &:= (q_i(\delta_i))_{i\in\mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}}}, & {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{q}_R &:= (q_i(\delta_i))_{i\in\mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}}}. \end{aligned}$$

Dosud jsme předpokládali, že neexistuje netriviální uzavřená množina radikálních stavů. Připusťme tedy pouze taková řízení, pro něž jimi indukovaná množina radikálních stavů neobsahuje uzavřený cyklus. Formálně: uvažujme jen $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}$, kde

$$\boldsymbol{\Lambda} := \{\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Delta} : \forall i \in \mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}}, \exists j \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{\delta}}, \exists n \in \mathbb{N} : p_{ij}^{(n)}(\delta_i) > 0\} \neq \varnothing.$$

Řekneme, že proces Y se řídí řízením $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}$, pokud je Y radikální homogenní markovský proces s maticemi přechodu ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{Q}$ (v čase $\binom{n}{\infty}, n \in \mathbb{N}_0$) a ${}_{\boldsymbol{\delta}}\bar{\mathbf{P}}$ (v čase $\binom{n}{k}, n, k \in \mathbb{N}_0$).

Nejprve představíme *Howardův iterační algoritmus* a ukážeme, že s jeho pomocí vždy najdeme homogenní řízení, jež maximalizuje očekávaný diskontovaný výnos. Poté algoritmus upravíme, aby fungoval s o něco slabšími předpoklady. Nakonec budeme diskutovat, jak se situace liší v případě *nehomogenního řízení*, kdy si strategii $\boldsymbol{\delta}(\binom{n}{k}) \in \boldsymbol{\Lambda}$ volíme pro každý okamžik $\binom{n}{k}$, přičemž využíváme i informací o předešlém chování řetězce.

Proveďme nejdříve „přípravné práce“, díky kterým budeme mít jistotu, že algoritmus proběhne bez problémů.

Definice 8. [6, Def. 2.12, str. 52] *Stacionárním rozdělením* homogenního markovského procesu s množinou stavů S budeme rozumět pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i\in S}$ na S, které splňuje

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{P},$$

kde $\mathbf{P}$ je matice přechodu.

Věta 3.1 (o stacionárním rozdělení)**.** *Mějme homogenní markovský proces s konečnou množinou stavů S a maticí přechodu $\mathbf{P}$, který je nerozložitelný (tzn. $\forall i \in S, \forall j \in S, \exists n \in \mathbb{N}_0 : p_{ij}^{(n)} > 0$). Pak existuje stacionární rozdělení a je dáno jednoznačně.*

Důkaz. Viz Větu 2.17, 2.18, 2.19 a 2.26 na str. 42-43 a 53 v [6]. □

Tvrzení 3.2. *Mějme $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Lambda}$ a $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Delta}$ splňující*

$$_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)}. \tag{3.1}$$

Předpokládejme, že radikální rozhodnutí jsou ostře penalizována, tj.

$$\forall \boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Delta}, \forall i \in \mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}} : z_{ij}(\delta_i) < 0. \tag{3.2}$$

Potom $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Lambda}$.

Důkaz. Podle předpokladu $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Lambda}$ řízení $\boldsymbol{\sigma}$ nevytváří žádnou neprázdnou uzavřenou množinu radikálních stavů. Pro spor předpokládejme, že $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Delta} \backslash \boldsymbol{\Lambda}$. Vezměme podmnožinu stavů $\mathcal{R}_{\boldsymbol{\rho}}$, která je neprázdná, uzavřená a nerozložitelná, a označme ji K. Dále položme

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &:= (p_{ij}^{(\beta)}(\rho_i))_{i,j\in K},\\
\mathbf{g} &:= (h_i(\rho_i))_{i\in K},\\
\mathbf{w} &:= (v_i^{(\beta)}(\sigma_i))_{i\in K}.
\end{aligned}$$

Potom $\mathbf{F}$ je stochastická matice, která je maticí přechodu nerozložitelného podřetězce s množinou stavů K. Podle Věty 3.1 proto existuje stacionární rozdělení $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i\in K}$. Platí tedy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F},\\
\mathbf{g} &\geq (\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{w},
\end{aligned}$$

přičemž druhá nerovnost plyne z (3.1). Proto

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} \geq (\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})\mathbf{w} = 0.$$

Tím dostáváme spor, neboť $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = \sum_{i\in K}\sum_{j\in K}\pi_i p_{ij}^{(\beta)}(\rho_i) z_{ij}(\rho_i) < 0$ z předpokladu ostré penalizace radikálních rozhodnutí v (3.2). □

3.1 Howardův iterační algoritmus

Howardův iterační postup je založen na vytváření posloupnosti $\{\boldsymbol{\delta}^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}_0}$, která čím dál lépe aproximuje optimální homogenní řízení, tj. řízení vedoucí k maximálnímu očekávanému výnosu. Předpokládejme, že radikální rozhodnutí jsou ostře penalizována jako v (3.2). Pro zjednodušení zápisu budeme matice přechodu či ocenění, stejně jako z nich odvozené očekávané výnosy, příslušné prvku posloupnosti $\boldsymbol{\delta}^{(m)}$, značit ${}_m\mathbf{P}^{(\beta)}, {}_m\mathbf{Z}, {}_m\mathbf{v}^{(\beta)}$. Formulace algoritmu a důkaz Věty 3.6 jsou drobnou úpravou téhož v Sekci 1.2 [3].

Postup bude následující:

1. Zvolíme $\boldsymbol{\delta}^{(0)} \in \boldsymbol{\Lambda}$ libovolně, $m := 0$.

2. Spočteme výnosy odpovídající $\boldsymbol{\delta}^{(m)}$:

$$\begin{aligned}
h_i(\delta_i^{(m)}) &:= \begin{cases} \beta\mathbf{p}_i(\delta_i^{(m)})^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_i(\delta_i^{(m)}) & \text{pokud } \delta_i^{(m)} \in \Delta_i^{\mathcal{S}} \\ \mathbf{p}_i(\delta_i^{(m)})^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_i(\delta_i^{(m)}) & \text{pokud } \delta_i^{(m)} \in \Delta_i^{\mathcal{R}} \end{cases},\\
{}_m\mathbf{h} &:= (h_i(\delta_i^{(m)}))_{i\in S},\\
{}_m\mathbf{v}^{(\beta)} &:= (\mathbf{I} - {}_m\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}{}_m\mathbf{h}.
\end{aligned}$$

3. Pro každé $i \in S$ sestrojíme

$$\operatorname{Arg\,max} := \{\rho \in \Delta_i : (h_i(\rho) + \mathbf{p}_i^{(\beta)}(\rho)^{\mathrm{T}}{}_m\mathbf{v}^{(\beta)}) = \max_{\sigma\in\Delta_i}(h_i(\sigma) + \mathbf{p}_i^{(\beta)}(\sigma)^{\mathrm{T}}{}_m\mathbf{v}^{(\beta)})\}$$

a položíme

$$\delta_i^{(m+1)} := \begin{cases} \delta_i^{(m)} & \text{pokud } \delta_i^{(m)} \in \operatorname{Arg\,max} \\ \text{libovolné } \rho \in \operatorname{Arg\,max} & \text{pokud } \delta_i^{(m)} \notin \operatorname{Arg\,max} \end{cases}.$$

Dostaneme $\boldsymbol{\delta}^{(m+1)} := (\delta_i^{(m+1)})_{i \in S}$.

4. Jestliže $\boldsymbol{\delta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(m)}$, ukončíme výpočet; jinak navýšíme m o jednotku a pokračujeme krokem 2.

Poznámka 3.3. Způsob maximalizace v kroku 3 nám zajistí, že je splněn předpoklad (3.1) Tvrzení 3.2. Tedy ačkoliv v kroku 3 maximalizujeme přese všechna $\sigma \in \Delta_i$, řízení, které budeme pokládat jako aproximaci do dalšího kroku, leží v $\boldsymbol{\Lambda}$, a je tedy korektní psát ${}_m\mathbf{v}^{(\beta)} := (\mathbf{I} - {}_m\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1} {}_m\mathbf{h}$ atd.

Lemma 3.4. *Nechť $\boldsymbol{\rho}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou řízení splňující nerovnost*

$$_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)}. \tag{3.3}$$

Potom ${}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)}$.

Důkaz. Z Věty 2.12 máme

$$_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)} = {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)},$$

tudíž

$$_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} \geq {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)} = (\mathbf{I} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}){}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)}. \tag{3.4}$$

Dle Poznámek 2.9 a 2.10 je matice $\mathbf{I} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}$ invertovatelná a její inverze je nezáporná, nerovnost (3.4) můžeme tudíž vynásobit $(\mathbf{I} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}$ zleva a získat tak

$$_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{v}^{(\beta)} = (\mathbf{I} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}{}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} \geq {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)},$$

tedy ${}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)}$. □

Poznámka 3.5. K důkazu následující věty by nám stačilo dokázat tuto nerovnost pouze pro dvě speciální řízení ($\boldsymbol{\delta}^{(m+1)}$ a $\boldsymbol{\delta}^{(m)}$), je ale vhodné všimnout si, že tvrzení je v platnosti pro libovolné „inovativní řízení“, jež splňuje (3.3).

Věta 3.6 (konečnost a parciální správnost Howardova algoritmu)**.** *Howardův iterační algoritmus skončí po konečně mnoha krocích nalezením optimálního homogenního řízení.*

Důkaz. Důkaz provedeme v několika krocích:

(1) Posloupnost $\{{}_m\mathbf{v}^{(\beta)}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ je neklesající.

Pro $\boldsymbol{\rho} := \boldsymbol{\delta}^{(m+1)}, \boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\delta}^{(m)}$ platí z kroku 3 algoritmu nerovnost (3.3) v předpokladu Lemmatu 3.4, tedy ${}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_m\mathbf{v}^{(\beta)}$.

(2) Posloupnost $\{{}_m\mathbf{v}^{(\beta)}\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ je od nějakého indexu m konstantní.

Množina $\boldsymbol{\Lambda}$ je konečná, pročež nutně (s využitím monotonie z (1)) existuje $m_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro všechna $m \in \mathbb{N}_0, m \geq m_0$ platí ${}_m\mathbf{v}^{(\beta)} = {}_{m_0}\mathbf{v}^{(\beta)}$.

(3) Dále z kroku 3 algoritmu a (1) máme pro každé $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Lambda}$

$$ {}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)}, \tag{3.5} $$

neboť

$$ {}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} = {}_{m+1}\mathbf{h} + {}_{m+1}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{m+1}\mathbf{h} + {}_{m+1}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)}. $$

(4) Jakmile ${}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} = {}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)}$, máme pro všechna $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Lambda}$, že ${}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{v}^{(\beta)}$, tedy řízením $\boldsymbol{\delta}^{(m)}$ dosáhneme maximálního očekávaného výnosu.

S využitím (3.5) totiž

$$ \begin{aligned} {}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)} = {}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} &\geq {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)}, \\ (\mathbf{I} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}){}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)} &\geq {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h}, \\ {}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)} &\geq (\mathbf{I} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}{}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h}, \\ {}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)} &\geq {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{v}^{(\beta)}. \end{aligned} $$

(5) Posloupnost výnosů $\{{}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)}\}_{m \geq m_0}$ je konstantní právě tehdy, když je konstantní posloupnost řízení $\{\boldsymbol{\delta}^{(m)}\}_{m \geq m_0}$, tj.

$$ {}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} = {}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)} \iff \boldsymbol{\delta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(m)}. $$

Pokud $\boldsymbol{\delta}^{(m+1)} \neq \boldsymbol{\delta}^{(m)}$, pak z definice $\boldsymbol{\delta}^{(m+1)}$ musela nastat v (3.3) pro $\boldsymbol{\delta}^{(m+1)}$ a $\boldsymbol{\delta}^{(m)}$ v některé složce ostrá nerovnost, pročež ${}_{m+1}\mathbf{v}^{(\beta)} \neq {}_{m}\mathbf{v}^{(\beta)}$. Opačná implikace je triviální.

Dokázali jsme tedy, že po konečném počtu kroků nastane ukončovací podmínka algoritmu $\boldsymbol{\delta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(m)}$, k čemuž dojde tehdy a jen tehdy, když řízení $\boldsymbol{\delta}^{(m)}$ vede k maximálnímu (očekávanému) výnosu. □

3.2 Úprava algoritmu pro neostrou penalizaci radikálních rozhodnutí

V této sekci rozvádíme diskusi o tom, jaké důsledky má oslabení předpokladu ostré penalizace radikálních rozhodnutí na neostrou penalizaci. Algoritmus je třeba pozměnit, aby se i v takovém případě vyvaroval vybírání strategií, jež vedou k neprázdné uzavřené množině radikálních stavů. Dokažme nejprve pomocné tvrzení.

Tvrzení 3.7. *Nechť $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Lambda}$ a $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Delta}$ splňují*

$$ ({}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)}, -{}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{r} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{w}^{(\beta)}) \geq_{lex} ({}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{v}^{(\beta)}, {}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{w}^{(\beta)}), \tag{3.6} $$

kde

$$ \begin{aligned} {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{r} &= (\mathbf{1}_{[\rho_i \in \Delta_i^{\mathcal{R}}]})_{i \in S}, \\ {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{w} &= -(\mathbf{I} - {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}{}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{r} \end{aligned} $$

a pro $\boldsymbol{\sigma}$ tyto vektory definujeme analogicky. Předpokládejme, že radikální rozhodnutí jsou penalizována neostře, tj.

$$ \forall \boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Delta}, \forall i \in \mathcal{R}_{\boldsymbol{\delta}} : z_{ij}(\delta_i) \leq 0. \tag{3.7} $$

Potom $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Lambda}$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\boldsymbol{\rho}$ vytváří neprázdnou uzavřenou množinu radikálních stavů, která je nerozložitelná. Podobně jako v důkazu Tvrzení 3.2 tuto množinu označíme K a položíme

$$\mathbf{F} := (p_{ij}^{(\beta)}(\rho_i))_{i,j\in K}, \qquad \mathbf{v}_R := (v_i^{(\beta)}(\sigma_i))_{i\in K},$$
$$\mathbf{g} := (h_i(\rho_i))_{i\in K}, \qquad \mathbf{w}_R := (w_i^{(\beta)}(\sigma_i))_{i\in K}.$$

Z lexikografické nerovnosti (3.6) máme speciálně

$$(\mathbf{g} + \mathbf{F}\mathbf{v}_R, -\mathbf{1} + \mathbf{F}\mathbf{w}_R) \geq_{lex} (\mathbf{v}_R, \mathbf{w}_R),$$
$$(\mathbf{g}, -\mathbf{1}) \geq_{lex} ((\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{v}_R, (\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{w}_R).$$

Podle Věty 3.1 existuje vektor $\boldsymbol{\pi} \in [0,1]^K, \boldsymbol{\pi}^\intercal\mathbf{1} = 1$, takový, že $\boldsymbol{\pi}^\intercal = \boldsymbol{\pi}^\intercal\mathbf{F}$. Pak platí lexikografická nerovnost (mezi čísly)

$$(\boldsymbol{\pi}^\intercal\mathbf{g}, -1) \geq_{lex} (0,0).$$

Z předpokladu neostré penalizace radikálních rozhodnutí v (3.7) musí platit i $\boldsymbol{\pi}^\intercal\mathbf{g} \leq 0$, v první složce tedy musí nastat rovnost. V druhé složce poté máme nerovnost $-1 \geq 0$, což je spor. □

Představme nyní modifikovanou verzi algoritmu. Uvažujme, že všechna radikální rozhodnutí jsou neostře penalizována, tzn. platí (3.7). Zaveďme indikátor radikality rozhodnutí

$$r_i(\delta_i) := \mathbf{1}_{[\delta_i\in\Delta_i^{\mathcal{R}}]}, \quad i \in S, \delta_i \in \Delta_i.$$

Z něj můžeme sestavit vektor pro příslušné řízení ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{r} := (r_i(\delta_i))_{i\in S}$. V kroku 2 algoritmu spočtěme navíc hnodnotu

$${}_m\mathbf{w}^{(\beta)} := -(\mathbf{I} - {}_m\mathbf{P}^{(\beta)})^{-1}{}_m\mathbf{r}.$$

Krok 3 v algoritmu nahraďme následovně:

3*. Pro každé $i \in S$ sestrojíme

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg\,max} := \{\rho \in \Delta_i : (&h_i(\rho) + \mathbf{p}_i^{(\beta)}(\rho)^\intercal{}_m\mathbf{v}^{(\beta)}, -r_i(\rho) + \mathbf{p}_i^{(\beta)}(\rho)^\intercal{}_m\mathbf{w}^{(\beta)})\\ &= \max_{\sigma\in\Delta_i}(h_i(\sigma) + \mathbf{p}_i^{(\beta)}(\sigma)^\intercal{}_m\mathbf{v}^{(\beta)}, -r_i(\sigma) + \mathbf{p}_i^{(\beta)}(\sigma)^\intercal{}_m\mathbf{w}^{(\beta)})\}\end{aligned}$$

a položíme

$$\delta_i^{(m+1)} := \begin{cases}\delta_i^{(m)} & \text{pokud } \delta_i^{(m)} \in \operatorname{Arg\,max}\\ \text{libovolné } \rho \in \operatorname{Arg\,max} & \text{pokud } \delta_i^{(m)} \notin \operatorname{Arg\,max}\end{cases}.$$

Poznámka 3.8. Interpretace kroku 3* je následující: radikální rozhodnutí nepenalizujeme ostře záporným ohodnocením, místo toho si představíme vektor očekávaných výnosů za jedno období ${}_m\mathbf{h}$ zmenšený o velmi malou (kladnou) hodnotu ϵ, pokud činíme radikální rozhodnutí, tj. máme ${}_m\mathbf{h} - \epsilon_m\mathbf{r}$. Toto se pak projeví i ve tvaru vektoru kumulovaných očekávaných výnosů, tedy máme ${}_m\mathbf{v}^{(\beta)} + \epsilon_m\mathbf{w}^{(\beta)}$.

Lexikografická maximalizace v kroku 3* zajistí splnění předpokladu (3.6) Tvrzení 3.7, díky čemuž $\boldsymbol{\delta}^{(m)} \in \boldsymbol{\Lambda}$ pro každé $m \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz tvrzení, že takto upravený algoritmus skončí po konečně mnoha krocích a nalezne optimální homogenní řízení, se provede naprosto analogicky jako důkaz Věty 3.6. Jediný rozdíl je v tom, že nesměřujeme k nalezení $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}$ takového, že pro všechna $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Lambda}$ platí ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} \geq {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{v}^{(\beta)}$, nýbrž k získání $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}$, které povede k dosažení nerovnosti $({}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}, {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{w}^{(\beta)}) \geq_{lex} ({}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{v}^{(\beta)}, {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{w}^{(\beta)})$.

3.3 Nehomogenní řízení

V předešlých odstavcích jsme ukázali, že jsme schopni nalézt optimální homogenní řízení. V této podkapitole dojdeme k tomu, že takto nalezená strategie je nejlepší možná dokonce i tehdy, připustíme-li nehomogenní řízení.

Definice 9. Nechť $\mathcal{G} := \{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ je filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$. Posloupnost náhodných vektorů $\Psi := \{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \psi^n : \Omega \to \boldsymbol{\Lambda}$, nazveme *$\mathcal{G}$-adaptivní strategií*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je ψ^n $\mathcal{G}_n$-měřitelné, tzn.:

$$[\psi^n = \boldsymbol{\delta}] \in \mathcal{G}_n, \quad \boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}.$$

Definice 10. Nechť $Y := \{Y_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$ je stochasticky spojitý proces s hodnotami v konečné množině stavů S. Uvažujme filtraci $\mathcal{F}$ generovanou procesem Y, $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$. Řekneme, že se *proces Y řídí adaptivní strategií Ψ*, pokud jsou splněny následující podmínky:

(1) Ψ je $\mathcal{G}$-adaptivní strategie, kde $\mathcal{G}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_\infty^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\mathbb{P}(Y_{k+1}^n = j | \mathcal{F}_k^n) \overset{\text{sj}}{=} p_{Y_k^n,j}(\psi^n_{Y_k^n}), \quad \forall j \in S, \forall n, k \in \mathbb{N}_0,$

(3) $\mathbb{P}(Y_0^{n+1} = j | \mathcal{F}_\infty^n) \overset{\text{sj}}{=} p_{Y_\infty^n,j}(\psi^n_{Y_\infty^n}), \quad \forall j \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0.$

Poznámka 3.9. Představme si, že je proces Y v čase $\binom{n}{k}$ (tj. po k imaginárních přesunech v reálném čase n) ve stavu $i \in S$. Pak $\delta_i = \psi_i^n$ je rozhodnutí řídící přechod procesu Y ze stavu i a pravděpodobnostní rozdělení tohoto přechodu je dáno vektorem $\mathbf{p}_i(\delta_i)$. Příslušný vektor ocenění bude $\mathbf{z}_i(\delta_i)$. Situace je tedy podobná jako v předchozích sekcích Kapitoly 3, rozhodnutí δ_i ovšem není deterministické.

Podle bodu (1) může být řízení ψ^n, které udává strategii pro období $\binom{n}{0}$ až $\binom{n}{\infty}$, ovlivněno informací o chování procesu Y až do času $\binom{n-1}{\infty}$; řízení v čase 0 je deterministické. Předpokládáme tedy, že v rámci imaginárních přechodů pro daný reálný čas n už je řízení neměnné.

Značení Vektory $\mathbf{p}_i(\psi_i^n)$ a $\mathbf{z}_i(\psi_i^n)$ můžeme uspořádat do matic ${}_{\psi^n}\mathbf{P}^{(\beta)}$ a ${}_{\psi^n}\mathbf{Z}$, kde matice ${}_{\psi^n}\mathbf{P}^{(\beta)}$ bude obsahovat i informaci o tom, že některé přechody jsou diskontovány. Dále bychom mohli uvažovat ${}_{\psi^n}\bar{\mathbf{P}}$, vektor ${}_{\psi^n}\bar{\mathbf{q}}$ atd. (vždy analogicky, jako tomu bylo v úvodu Kapitoly 3). Opět ztotožňujeme zápisy ${}_{\psi^n}z(i,j)$ a ${}_{\psi^n}z_{ij}$.

Pokud se Y řídí adaptivní strategií Ψ, budeme symbolem

$${}_\Psi Z := \{{}_\Psi Z_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$$

označovat systém veličin ${}_\Psi Z_k^n$, kde

$$\begin{aligned} {}_\Psi Z_k^n &:= {}_{\psi^n}z(Y_k^n, Y_{k+1}^n)\mathbf{1}_{[\psi^n_{Y_k^n} \in \Delta_i^{\mathcal{R}}]}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, \\ {}_\Psi Z_\infty^n &:= {}_{\psi^n}z(Y_\infty^n, Y_0^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Veličina ${}_\Psi Z_k^n$ tedy popisuje ocenění přechodu probíhajícího mezi časy $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{k+1}$, resp. $\binom{n+1}{0}$, a respektuje, že setrvávání procesu ve stabilním stavu v rámci imaginárních přechodů neoceňujeme.

Budeme také používat značení ${}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{D}$ a ${}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{Z}$ jako v (2.3) a (2.4), kde předním indexem $\boldsymbol\delta$ myslíme příslušnost k řízení $\boldsymbol\delta \in \boldsymbol\Lambda$.

Nyní směřujeme k definici veličin popisujících kumulované diskontované výnosy. Podobně jako v Sekci 2.1 bychom obdrželi následující nerovnost pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E|{}_{\Psi}Z_k^n| \le \max_{\boldsymbol\delta\in\boldsymbol\Lambda} {}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{Z}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{D}, \tag{3.8}$$

Z tohoto odhadu získáme, že $\sum_{k=0}^{\infty} {}_{\Psi}Z_k^n$ je konvergentní skoro jistě a v L^1. Poté můžeme analogicky jako v Sekci 2.2 položit

$${}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)} := \sum_{m=0}^{n-1}[\beta^m \sum_{l=0}^{\infty} {}_{\Psi}Z_l^m + \beta^{m+1} {}_{\Psi}Z_{\infty}^m] + \beta^n \sum_{l=0}^{k-1} {}_{\Psi}Z_l^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.9}$$

pokud $\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{\infty} {}_{\Psi}Z_l^m(\omega)$ je konečná. Na množině míry nula, kde konečná není, ${}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)}$ dodefinujeme nulou. Veličinu ${}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)}$ budeme nazývat *kumulovaným diskontovaným výnosem procesu Y, řízeného adaptivní strategií Ψ, v čase n po k imaginárních přechodech.* Rovněž platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} E[\beta^n \sum_{k=0}^{\infty} |{}_{\Psi}Z_k^n| + \beta^{n+1}|{}_{\Psi}Z_{\infty}^n|] \le \frac{1}{1-\beta}\max_{\boldsymbol\delta\in\boldsymbol\Lambda}[{}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{Z}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{D} + \beta_{\boldsymbol\delta}\mathcal{Z}],$$

proto je $\sum_{n=0}^{\infty}[\beta^n \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\Psi}Z_k^n + \beta^{n+1} {}_{\Psi}Z_{\infty}^m]$ konvergentní skoro jistě a v L^1. Označme součet této řady jako ${}_{\Psi}V^{(\beta)}$.

$${}_{\Psi}V^{(\beta)} := \sum_{n=0}^{\infty}[\beta^n \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\Psi}Z_k^n + \beta^{n+1} {}_{\Psi}Z_{\infty}^m]. \tag{3.10}$$

Veličinu ${}_{\Psi}V^{(\beta)}$ budeme nazývat *celkový diskontovaný výnos procesu Y, řízeného adaptivní strategií Ψ*. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0, k,l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ máme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} E[\sup_k |{}_{\Psi}V^{(\beta)} - {}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)}|] \le \max_{\boldsymbol\delta\in\boldsymbol\Lambda}[{}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{Z}_{\boldsymbol\delta}\mathcal{D} + \beta_{\boldsymbol\delta}\mathcal{Z}].$$

Zcela stejně jako v důkazu Lemmatu 2.8 odsud dostaneme

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}} |{}_{\Psi}V^{(\beta)} - {}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)}| \to 0 \quad \text{sj. a v } L^1, n \to \infty.$$

Nyní dokážeme podobné výsledky jako v Tvrzení 2.11.

Tvrzení 3.10. *Nechť ${}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)}$ a ${}_{\Psi}V^{(\beta)}$ jsou jako v* (3.9) *a* (3.10)*. Položme*

$$\begin{aligned} {}_{\Psi}S_k^n &:= {}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)} + \beta^n {}_{\boldsymbol\delta}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n), \quad n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \\ {}_{\Psi}S &:= \{{}_{\Psi}S_k^n : n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}. \end{aligned}$$

kde korekce ${}_{\boldsymbol\delta}\mathbf{v}^{(\beta)}$ odpovídá optimálnímu homogennímu řízení $\boldsymbol\delta \in \boldsymbol\Lambda$, nalezenému pomocí Howardova algoritmu. Pak platí:

(1) $\sup_{k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}} |_\Psi V^{(\beta)} - {}_\Psi S_k^n| \to 0, n\to\infty$ *skoro jistě a v* L^1*,*

(2) ${}_\Psi S$ *je* $\mathcal{F}_k^n$*-supermartingal.*

Důkaz. (1) Podobně jako v důkazu Tvrzení 2.11(1) provedeme následující odhad:

$$\sup_k |_\Psi V^{(\beta)} - {}_\Psi S_k^n| \leq \sup_k |_\Psi V^{(\beta)} - {}_\Psi V_{n,k}^{(\beta)}| + \beta^n \sup_k |_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n)|.$$

Výše jsme ukázali, že platí $\sup_k |_\Psi V^{(\beta)} - {}_\Psi V_{n,k}^{(\beta)}| \to 0, n\to\infty$ sj. a v L^1. Korekce ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}$ je omezená a nezávisí na n ani k, $\beta \in (0,1)$, dostáváme tedy, že $\sup_{k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}} |_\Psi V^{(\beta)} - {}_\Psi S_k^n| \to 0, n\to\infty$ sj. Rovněž:

$$\sup_k |_\Psi V^{(\beta)} - {}_\Psi S_k^n| \leq \sum_{m=0}^{\infty} [\beta^m \sum_{l=0}^{\infty} |_\Psi Z_l^m| + \beta^{m+1} |_\Psi Z_\infty^m|] + \max_{i\in S} |v_i^{(\beta)}(\delta_i)|,$$

máme tedy integrovatelnou majorantu, a proto i $\sup_k |_\Psi V^{(\beta)} - {}_\Psi S_k^n| \to 0, n\to\infty$ v L^1.

(2) Z Howardova algoritmu dále víme, že pro všechna $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Lambda}$ platí

$${}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{h} + {}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} \leq {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}.$$

Označme $\mathcal{S}_\Psi^n$ náhodnou množinu stavů, které jsou při adaptivní strategii Ψ v čase n stabilní, tj.

$$\mathcal{S}_\Psi^n := \{i \in S : \psi_i^n \in \Delta_i^{\mathcal{S}}\}.$$

Pro $k \in \mathbb{N}_0$ zřejmě

$$\begin{aligned} E[{}_\Psi S_{k+1}^n - {}_\Psi S_k^n | \mathcal{F}_k^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\beta^n {}_\Psi Z_k^n + \beta^n {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_{k+1}^n) - \beta^n {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n) | \mathcal{F}_k^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^n [{}_{\psi^n}\bar{\mathbf{q}} + {}_{\psi^n}\bar{\mathbf{P}}{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}](Y_k^n). \end{aligned}$$

Platí inkluze

$$[Y_k^n \in \mathcal{S}_\Psi^n] \subseteq ([{}_{\psi^n}\bar{\mathbf{q}}(Y_k^n) = 0] \cap [{}_{\psi^n}\bar{\mathbf{P}}{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} = {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}])$$

a na množině $[Y_k^n \notin \mathcal{S}_\Psi^n]$ máme následující nerovnost:

$$[{}_{\psi^n}\bar{\mathbf{q}} + {}_{\psi^n}\bar{\mathbf{P}}{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}](Y_k^n) = [{}_{\psi^n}\mathbf{h} + {}_{\psi^n}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}](Y_k^n) \leq 0.$$

Dohromady tedy můžeme psát

$$E[{}_\Psi S_{k+1}^n - {}_\Psi S_k^n | \mathcal{F}_k^n] \overset{\text{sj}}{=} \mathbf{1}_{[Y_k^n \notin \mathcal{S}_\Psi^n]} [{}_{\psi^n}\mathbf{h} + {}_{\psi^n}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}](Y_k^n) \overset{\text{sj}}{\leq} 0.$$

Pro $k = \infty$ platí, že $Y_k^n \in \mathcal{S}_\Psi^n$ sj., proto

$$\begin{aligned} E[{}_\Psi S_0^{n+1} - {}_\Psi S_\infty^n | \mathcal{F}_\infty^n] &\overset{\text{sj}}{=} E[\beta^{n+1} {}_\Psi Z_\infty^n + \beta^{n+1} {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_0^{n+1}) - \beta^n {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n) | \mathcal{F}_\infty^n] \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^{n+1} {}_{\psi^n}\mathbf{q}_S(Y_\infty^n) + \beta^n [\beta_{\psi^n}\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}](Y_\infty^n) \\ &\overset{\text{sj}}{=} \beta^n [{}_{\psi^n}\mathbf{h} + {}_{\psi^n}\mathbf{P}^{(\beta)}{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)} - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}](Y_\infty^n) \overset{\text{sj}}{\leq} 0. \end{aligned}$$

Ověřme, že $E|_\Psi S_\infty^n - {}_\Psi S_k^n| \to 0, k\to\infty$, tj. že ${}_\Psi S$ je spojitý v L^1. Z odhadu (3.8) máme, že

$$E|_\Psi V_{n,\infty}^{(\beta)} - {}_\Psi V_{n,k}^{(\beta)}| \leq \sum_{l=k}^{\infty} E|_\Psi Z_k^n| \to 0, \quad k\to\infty,$$

dále díky stochastické spojitosti procesu Y a spojitosti funkce ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}$ na S platí

$$ {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n) \to {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n) \quad \text{sj.}, \, k \to \infty $$

a ${}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}$ má integrovatelnou majorantu, tedy $E|{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n) - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n)|$ konverguje k nule pro $k \to \infty$. Proto pak platí i

$$ E|{}_{\Psi}S_\infty^n - {}_{\Psi}S_k^n| \leq E|{}_{\Psi}V_{n,\infty}^{(\beta)} - {}_{\Psi}V_{n,k}^{(\beta)}| + \beta^n E|{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_\infty^n) - {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_k^n)| \to 0, \quad k \to \infty. $$

Nyní stačí využít Tvrzení 1.9 a již budeme mít, že ${}_{\Psi}S$ je F_k^n-supermartingal. □

S nově nabytými poznatky se nám již podaří dokázat požadovaný výsledek. Následující věta říká, že očekávaný celkový diskontovaný výnos procesu Y, řízeného adaptivní strategií, nemůže být větší než očekávaný výnos při homogenním řízení, jež jsme nalezli Howardovým algoritmem.

Věta 3.11. *Nechť se proces Y řídí adaptivní strategií Ψ a ${}_{\Psi}V^{(\beta)}$ je jemu odpovídající celkový diskontovaný výnos definovaný jako v (3.10). Uvažme $\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}$ homogenní strategii, nalezenou Howardovým algoritmem, a ${}_{\boldsymbol{\delta}}V^{(\beta)}$ celkový diskontovaný výnos příslušný procesu ${}_{\boldsymbol{\delta}}Y$, který by se řídil strategií $\boldsymbol{\delta}$. Předpokládejme, že $Y_0^0 \overset{sj}{=} {}_{\boldsymbol{\delta}}Y_0^0$. Potom platí:*

$$ E[{}_{\Psi}V^{(\beta)}|\mathcal{F}_0^0] \overset{sj}{\leq} E[{}_{\boldsymbol{\delta}}V^{(\beta)}|{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathcal{F}_0^0]. $$

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že díky předchozímu tvrzení máme

$$ \begin{aligned} E[{}_{\Psi}V^{(\beta)}|\mathcal{F}_0^0] &\overset{\text{sj}}{=} E[\lim_{n\to\infty} {}_{\Psi}S_k^n|\mathcal{F}_0^0] \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} E[{}_{\Psi}S_k^n|\mathcal{F}_0^0] \\ &\overset{\text{sj}}{\leq} E[{}_{\Psi}S_0^0|\mathcal{F}_0^0] \overset{\text{sj}}{=} S_0^0. \end{aligned} $$

Využijeme-li Tvrzení 2.11 pro proces ${}_{\boldsymbol{\delta}}Y$ a předpoklad $Y_0^0 \overset{\text{sj}}{=} {}_{\boldsymbol{\delta}}Y_0^0$, obdržíme požadovanou nerovnost:

$$ \begin{aligned} E[{}_{\boldsymbol{\delta}}V^{(\beta)}|{}_{\boldsymbol{\delta}}\mathcal{F}_0^0] &\overset{\text{sj}}{=} {}_{\boldsymbol{\delta}}M_0^0 = {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}({}_{\boldsymbol{\delta}}Y_0^0) \\ &\overset{\text{sj}}{=} {}_{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{v}^{(\beta)}(Y_0^0) = S_0^0 \\ &\overset{\text{sj}}{\geq} E[{}_{\Psi}V^{(\beta)}|\mathcal{F}_0^0]. \end{aligned} $$

□

Závěr

V kapitolách 2 a 3 jsme se zabývali výhradně procesy s diskontovaným oceněním přechodů. Nabízí se přirozeně otázka, jak vypadají výnosy v případě nediskontovaném. Je možné najít vztah mezi očekávanými výnosy diskontovaného a nediskontovaného případu a na jeho základě pak odvodit modifikaci Howardova algoritmu. Stejně tak by bylo možné dokázat analogické výsledky, jaké obsahuje Sekce 3.3.

Teorie radikálních homogenních markovských procesů má přirozené aplikace ve financích, konkrétně v optimálním řízení portfolia při existenci proporcionálních transakčních nákladů. V takovém případě jsou radikální rozhodnutí (zde v podobě rozhodnutí nakoupit či prodat aktivum) penalizována transakčními poplatky, jež jsou úměrné objemu obchodu.

Tato témata již součástí práce nejsou, nicméně nabízí možnosti dalšího rozšíření.

Seznam použité literatury

[1] Williams, D. (1991). *Probability with martingales.* Cambridge mathematical textbooks. Cambridge university press, Cambridge. ISBN 0-521-40605-6.

[2] Lachout, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti.* 2. vyd. Nakladatelství Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0872-3.

[3] Kalužíková, M. (2008). *Diskontované řízení portfolia.* Bakalářská práce MFF UK, Praha.

[4] Kováč, J. (2009). *Asymptotické riadenie portfólia pre niekoľko akcií.* Diplomová práce MFF UK, Praha.

[5] Ethier, S. N. a Kurtz, T. G. (1986). *Markov processes: characterization and convergence.* Wiley series in probability and mathematical statistics. John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-08176-8.

[6] Prášková, Z. a Lachout, P. (2012). *Základy náhodnỳch procesů I.* 2. vyd., v Matfyzpressu 1. vyd. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-210-8.

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{R}^{m\times n}$	prostor všech reálných matic typu $m \times n$
$\mathbb{P}$	pravděpodobnostní míra
$\mathbf{1}_{[i=j]}$	indikátor jevu
$\mathbf{v} = (v_i)_{i\in S}$	sloupcový vektor $\mathbf{v}$ se složkami v_i
$\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$	transponovaný vektor
$\mathbf{e}_i$	i-tý kanonický vektor
$\mathbf{o}$	nulový vektor
$\mathbf{1}$	vektor $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$
$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j\in S}$	matice $\mathbf{A}$, tvořená prvky a_{ij}
$a_{ij}^{(n)}$	prvek matice $\mathbf{A}^n$
$\mathbf{I}$	jednotková matice, identita
$\mathbf{O}$	nulová matice
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost

Appendix

Věta A.1 (o inverzi matice $\mathbf{I}-\mathbf{A}$). *Nechť pro všechna vlastní čísla λ_i, $i=1,\dots,n$ matice $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ platí $|\lambda_i|<1$. Potom má matice $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ inverzi splňující*

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}^n.$$

Poznámka A.2. Je užitečné si uvědomit, že podmínka $|\lambda_i|<1$ je ekvivalentní $\mathbf{A}^n\to\mathbf{O}, n\to\infty$, což je evidentní, rozvedeme-li $\mathbf{A}^n$ do Jordanova kanonického tvaru.

Důkaz. 1. způsob: Pro spor předpokládejme, že matice $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ je singulární. Musí tedy existovat $\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$ takový, že $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{v}=\mathbf{o}$. To však znamená, že $\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{v}$, což je spor s tím, že jedna není vlastní číslo matice $\mathbf{A}$.
Dále platí:

$$\mathbf{I}-\mathbf{A}^{n+1}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\dots+\mathbf{A}^n).$$

Vynásobíme-li rovnost maticí $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ (o níž už víme, že existuje) zleva a provedeme-li limitní přechod pro $n\to\infty$, dostaneme (s využitím poznámky výše) požadovaný vztah.

2. způsob: Důkaz pomocí Jordanova kanonického tvaru je sice zdlouhavý, poskytuje ovšem lepší představu o rychlosti konvergence.

Nechť $\mathbf{A}=\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^{-1}$, kde $\mathbf{J}$ je Jordanova matice a $\mathbf{R}$ obsahuje Jordanovy řetízky příslušné jednotlivým buňkám. Podívejme se na řadu mocnin Jordanovy buňky řádu k, příslušné vlastnímu číslu λ. S využitím předpokladu, že $|\lambda|<1$, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{J}^n_{\lambda,k}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1}\\ 0 & \lambda^n & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda} & \frac{1}{(1-\lambda)^2} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda)^k}\\ 0 & \frac{1}{1-\lambda} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{1-\lambda}\end{pmatrix}$$

a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{J}^n_{\lambda,k}(\mathbf{I}-\mathbf{J}_{\lambda,k})=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda} & \frac{1}{(1-\lambda)^2} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda)^k}\\ 0 & \frac{1}{1-\lambda} & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{1-\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 0 & \cdots\\ 0 & 1-\lambda & -1 & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & 1-\lambda\end{pmatrix}=\mathbf{I}.$$

Proto pak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}^n(\mathbf{I}-\mathbf{A})=(\mathbf{I}-\mathbf{A})\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}^n=\mathbf{R}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{J}^n(\mathbf{I}-\mathbf{J})\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}\mathbf{I}\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{I},$$

neboli $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}^n$ je inverzí matice $\mathbf{I}-\mathbf{A}$. □

Lemma A.3. *Mějme posloupnost náhodných veličin $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, kde $W_n\in L^1$ pro všechna $n\in\mathbb{N}_0$. Nechť je splněna podmínka*

$$\sum_{n=0}^{\infty}E|W_n-W_{n+1}|<\infty.$$

Potom existuje $W \in L^1$ takové, že $|W - W_n|$ konverguje k nule pro $n \to \infty$ v L^1 a skoro jistě.

Důkaz. Zřejmě platí, že

$$E[\sum_{n=0}^{\infty} |W_n - W_{n+1}|] = \sum_{n=0}^{\infty} E|W_n - W_{n+1}| < \infty.$$

Proto $\sum_{n=0}^{\infty} |W_n - W_{n+1}| < \infty$ skoro jistě, $|W_n - W_{n+1}|$ je cauchyovská skoro jistě, a můžeme tedy klást

$$W(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} W_n(\omega) & \text{pokud } \{W_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ je konvergentní,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

přičemž W bude náhodná veličina. Z Fatouova lemmatu a trojúhelníkové nerovnosti platí také odhad

$$\begin{aligned} E|W_n - W| &\leq \lim_{m\to\infty} E|W_n - W_m| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=n}^{m-1} E|W_j - W_{j+1}| \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} E|W_j - W_{j+1}| \to 0, \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

čímž dostáváme i konvergenci v L^1. $\square$