



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kryštof Kadlec

Křivky s pythagorejským hodografem

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.

Studijní program: Obecná matematika

Studijní obor: Matematické struktury

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Křivky s pythagorejským hodografem

Autor: Kryštof Kadlec

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této práci budeme zkoumat křivky s pythagorejským hodografem (PH křivky), které jsou charakteristické polynomiální rychlostí. Výhradně se budeme věnovat rovinným PH křivkám 3. stupně, takzvaným PH kubikám. Seznámíme se s jejich reprezentací pomocí komplexních čísel a takzvaným preimage, jednodušší křivkou, ze které PH křivka vzniká a která určuje její vlastnosti. Nejprve budeme zkoumat základní vlastnosti PH křivek v závislosti na preimage. Hlavním předmětem práce je zkoumání spojitosti navázání PH křivek, kterou jak ukážeme, je možné charakterizovat tvarem preimage a uvedeme konkrétní podmínky pro tvar preimage, abychom dosáhli určité spojitosti. Všechny dosažené výsledky budeme ilustrovat na názorných příkladech.

Klíčová slova: pythagorejský hodograf, polynomiální křivka, polynomiální rychlost, spline, preimage

Title: Curves with pythagorean hodograph

Author: Kryštof Kadlec

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In the thesis we will look at curves with pythagorean hodograph (PH curves) whose speed is polynomial with respect to parameter. We will consider planar PH curves of degree 3 (PH cubics) exclusively. We will present their complex representation and preimage. Preimage is a simpler curve from which a PH curve is created and which determines its properties. First we will look at the basic properties of PH curves with respect to their preimage. The main aim of the thesis is determining continuousness of joints of PH curves on the basis of the shape of their preimage. We will give specific conditions on preimage for achieving certain types of continuousness. Finally we will give some examples in order to illustrate the results.

Keywords: pythagorean hodograph, polynomial curve, polynomial speed, spline, preimage

Poděkování: V první řadě děkuji svému vedoucímu, doc. Šírovi, který mi poskytl zajímavé téma a zodpovědně mě jím provázel velmi přátelskou formou. Dále děkuji rodině za její podporu a rady, především pak dědovi za poznámky k matematické stránce a babičce za důkladnou typografickou kontrolu, jakožto i ostatním, kteří mě bedlivě poslouchali při vysvětlování a tím mi dali prostor k ujasnění si mnohých faktů.

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 2 |
| 1 Základní pojmy a definice | 3 |
| 1.1 Křivka a s ní spojené pojmy | 3 |
| 1.2 Bernsteinova báze a Bézierova křivka | 5 |
| 1.3 Křivka s pythagorejským hodografem | 6 |
| 1.4 Typy spojitosti | 10 |
| 2 Vlastnosti PH křivek | 14 |
| 2.1 Vlastnosti PH křivek v závislosti na preimage | 14 |
| 2.2 Spojité navázání PH křivek | 17 |
| 3 Příklady | 20 |
| Závěr | 24 |
| Seznam použité literatury | 25 |

Úvod

V této práci se budeme zabývat křivkami s pythagorejským hodografem – výpočetně zajímavými křivkami, neboť délka jejich oblouku závisí polynomiálně na parametru, což pro obecné křivky zdaleka neplatí.

Interpolace hermitovských dat (bodů a tečných vektorů v nich) byla již probrána a z různých pohledů nahlížena v mnoha pracích. Interpolace hermitovských dat je u PH křivek stupně 5 (těch dosud nejpoužívanějších) nejednoznačná a tak je třeba vhodným způsobem identifikovat „správný“ interpolant. Neopomeneme odkázat na některé práce týkající se tohoto tématu, nicméně příliš úsilí tomuto mu věnovat nebudeme.

Na PH křivky se podíváme z jiného, neméně zajímavého pohledu. Tyto křivky jsou jednoznačně určeny svým preimage, „jednodušší“ křivkou, ze které vznikají. Budeme zkoumat napojení PH křivek – konkrétně závislost spojitosti navázání dvou PH křivek na tvaru splinu preimage. Kvůli zjednodušení teorie se budeme zabývat pouze rovinnými PH křivkami stupně 3, takzvanými PH kubikami.

Práci členíme na 3 kapitoly a jejich obsah je následující. V 1. kapitole zavedeme základní pojmy, dokážeme ekvivalenci definic vhodných pro tuto práci a pro lepší porozumění uvedeme příklady. V 2. kapitole budeme zkoumat vlastnosti PH křivek v závislosti na preimage. Nejprve se podíváme na transformace PH křivek pomocí změn v preimage a kromě jiného dokážeme větu o výpočtu znaménkové křivosti PH křivky, kterou jsme s důkazem ve vhodné podobě nenalezli. Následně formulujeme a dokážeme věty o spojitosti navázání PH křivek v závislosti na tvaru preimage, neboť z tohoto pohledu na PH křivky nebylo dosud nahlíženo. Ve 3. kapitole se podíváme na příklady ilustrující tvrzení z 2. kapitoly.

Rád bych hned na úvod poděkoval firmě Wolfram Research za tvorbu softwaru Mathematica, díky němuž jsem se s tématem rychleji a hlouběji seznámil a v němž jsem tvořil obrázky pro ilustrující příklady.

1. Základní pojmy a definice

V této kapitole zavedeme základní pojmy pro práci s daným tématem. Kapitulu dělíme do čtyř tematických celků – křivka, Bernsteinova báze a Bézierova křivka, PH křivka a typy spojitosti. Mnoho definic, především z 1. podkapitoly týkající se diferenciální geometrie, bude čtenáři jistě známo. Uvádíme je zde pro úplnost a jednoznačnost značení. Další podkapitoly obsahují pro tuto práci naprosto stěžejní definice. Druhá a třetí podkapitola přináší většinu čtenářů pravděpodobně nepříliš známé pojmy a čtvrtá podkapitola zmiňuje přesné definice typů spojitosti, nutné k následnému zkoumání spojitosti splinů.

1.1 Křivka a s ní spojené pojmy

Definice 1 (parametrizovaná křivka). Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Hladké zobrazení $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá parametrizovaná křivka v \mathbb{R}^n . Obrazem parametrizované křivky \mathbf{c} rozumíme množinu $\{\mathbf{c}(t) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Poznámka. V definici 1 interval I může být i uzavřený, v takovém případě v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace.

Definice 2. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je regulární, jestliže

$$\forall t \in I : \mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}.$$

Vektor $\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ nazveme (jednotkovým) tečným vektorem ke křivce v bodě $t \in I$.

Poznámka. Dále budeme často tečným vektorem rozumět libovolný nenulový násobek jednotkového tečného vektoru. V případě definice 1 říkáme, že křivka \mathbf{c} je parametrizována přes interval I .

Dle intuice často ztotožňujeme křivku s jejím obrazem, v jistém smyslu tedy chceme, aby si křivka a její obraz jednoznačně odpovídaly. Dle definice 1 však stejnému obrazu odpovídá mnoho regulárních parametrizovaných křivek.

Příklad 1. Mějme regulární parametrizované křivky

$$\mathbf{c}_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{c}_1(t) = (t, t), \mathbf{c}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{c}_2(t) = (e^t, e^t).$$

Dle definice 1 se jedná o dva zcela odlišné objekty, nicméně jejich obrazy splývají. Existuje difeomorfismus $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ tak, že $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 \circ \Phi$, konkrétně $\Phi(t) = e^t$.

Rádi bychom křivky \mathbf{c}_1 a \mathbf{c}_2 z příkladu 1 ztotožnili, což nám umožňuje následující definice.

Definice 3 (změna parametru). Je-li $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka a $\Phi : \tilde{I} \rightarrow I$ difeomorfismus intervalu \tilde{I} na I , pak je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \Phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako \mathbf{c} .

Difeomorfismus Φ nazýváme změnou parametru křivky \mathbf{c} . Jestliže navíc $\Phi'(u) > 0, u \in \tilde{I}$, pak říkáme, že Φ je změna parametru zachovávající orientaci.

Poznámka. Říkáme, že $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}$ z definice 3 jsou ekvivalentní parametrizované křivky. Vskutku jde o ekvivalenci (snadno ověříme reflexivitu, symetrii i tranzitivitu).

Definice 4 (křivka). Křivka v \mathbb{R}^n je třída ekvivalence na množině regulárních parametrizovaných křivek modulo změna parametru.

Poznámka. Dále budeme křivkou často myslet jednoho konkrétního zástupce, tedy parametrizovanou křivku, dané třídy ekvivalence.

Definice 5 (křivost). Buď $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka. Její křivost v bodě $t \in I$ definujeme vztahem $\kappa(t) := \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$.

Věta 1. Buď $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka. Potom

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}, t \in I.$$

Důkaz. Jedná se o vztah v diferenciální geometrii rozšířený a používaný, proto jej na tomto místě nedokazujeme a pro důkaz odkažme na podkapitulu 8.1 v [1], popřípadě na klasickou knihu o diferenciální geometrii [8].

□

Poznámka. Pro geometrické porozumění křivosti je možné si křivost představovat jako „míru zatáčení (v absolutní hodnotě), když jedeme po křivce“. Body s nulovou křivostí nazýváme inflexní body. V neinflexním bodě $t \in I$ můžeme křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ aproximovat kružnicí. Volíme-li její poloměr $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$, pak křivka a kružnice mají v bodě dotyku stejné tečny i křivosti.

V této práci se budeme zabývat především rovinnými křivkami, tedy zobrazeními do \mathbb{R}^2 dle definice 4. Dále tedy křivkou, pokud nenapišeme jinak, budeme rozumět rovinnou regulární křivku.

Definice 6 (znaménková křivost). Buď $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka. Její znaménkovou křivost v bodě $t \in I$ definujeme vztahem

$$\kappa_z(t) := \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}. \quad (1.1)$$

Poznámka. Oproti křivosti dle definice 5 nám znaménková křivost dává ještě informaci o „směru zatáčení“ a její výpočet je jednodušší.

Na závěr této podkapitoly uveďme lemma z diferenciální geometrie týkající se derivací křivky při změně parametru, které dostáváme přímým derivováním.

Lemma 2. Nechtě $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{c} \circ \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou dvě parametrizace téže křivky, pišme $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(\phi(s))$. Potom v odpovídajícím si bodě platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}(\phi(s)) &= \dot{\phi}(s)\mathbf{c}'(\phi(s)), \\ \ddot{\mathbf{c}}(\phi(s)) &= \dot{\phi}(s)^2\mathbf{c}''(\phi(s)) + \ddot{\phi}(s)\mathbf{c}'(\phi(s)), \end{aligned}$$

kde čárkou značíme $\frac{d}{dt}$ a tečkou značíme $\frac{d}{ds}$.

1.2 Bernsteinova báze a Bézierova křivka

Bernsteinova báze je polynomiální báze pojmenovaná po ruském matematikovi. Sergej Natachovich Bernstein polynomy této báze v roce 1912 použil ke konstrukčnímu důkazu Weierstrassovy věty o aproximaci spojitě funkce polynommem (viz [6], kde je krátký a elegantní důkaz, upozorňuji však čtenáře, že je ve francouzském jazyce).

Bernsteinova báze má řadu velmi pěkných vlastností, které ji činí vhodnou pro modelování křivek a ploch. Některé nyní v této podkapitole uvedeme.

Definice 7 (Bernsteinova báze). Bernsteinova báze stupně $n \in \mathbb{N}$ je polynomiální báze tvořená $n + 1$ polynomy tvaru $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$, $i = 0, \dots, n$.

Poznámka. Chování Bernsteinovy báze pro $n = 3$ na intervalu $[0,1]$ vidíme na obrázku 1.1.

Polynomy Bernsteinovy báze mají přímou souvislost s pravděpodobností: i -tý polynom báze stupně n udává pravděpodobnost, že při n nezávislých pokusech z alternativního rozdělení (pouze 2 možné výsledky) s pravděpodobností $t \in [0,1]$ jich nastane právě i . Díky této souvislosti je několik vlastností, které uvedeme v následujícím pozorování, zcela zřejmých.

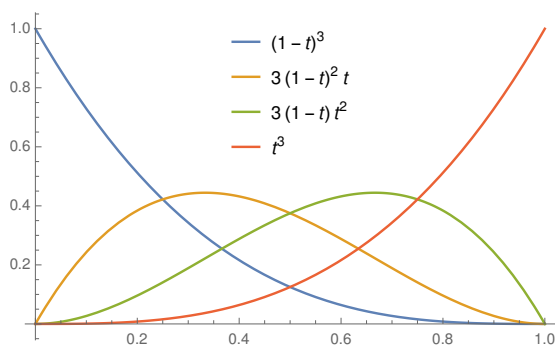
Pozorování (vlastnosti Bernsteinovy báze). Mějme Bernsteinovu bázi stupně $n \in \mathbb{N}$.

- (nezápornost) Pro všechna $t \in [0,1]$ platí $B_i^n(t) \geq 0$, $i = 0, \dots, n$.
- (rozklad jednotky) Pro všechna $t \in [0,1]$ platí $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.
- (symetrie) Pro všechna $t \in [0,1]$ platí $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1 - t)$, $i = 0, \dots, n$.
- (rekurence) Platí $B_i^n(t) = (1 - t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$, $t \in [0,1]$, $i = 0, \dots, n$. Zde dodefinujeme $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$, $B_n^{n-1}(t) = 0$.
- (derivace) Pro všechna $t \in [0,1]$ platí $(B_i^n)'(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$.
- (integrace) Pro všechna $i = 0, \dots, n$ platí
$$\int B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(t).$$

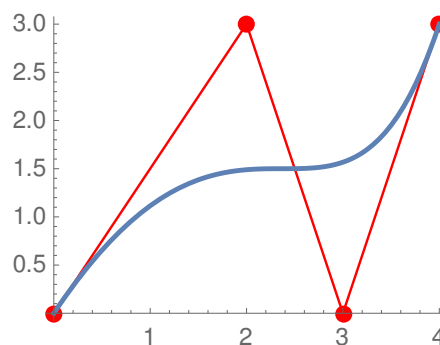
Důkaz. Všechny vlastnosti se ověřují přímým výpočtem, užitím vlastností kombinačních čísel, popřípadě pomocí již dokázaných vlastností (v případě derivace a integrálu). Ponechejme je tedy na tomto místě bez důkazu a odkážme na podkapitolu 11.2 v [1]. □

Poznámka. Bernsteinova báze má výše zmíněné pěkné vlastnosti na intervalu $[0,1]$, tento interval se však dá reparametrizovat na libovolný interval $[a,b]$ pomocí funkce $t = \frac{u - a}{b - a}$, $u \in [a,b]$.

Samotná Bernsteinova báze by si zajisté zasloužila více pozornosti, rozsah ani téma této práce to však nedovoluje a tak čtenáře jako na rozšiřující text odkazují na kapitolu 11 v [1]. Čtenáře zajímajícího se o CAGD (Computer Aided Geometric Design) odkazují na obsáhlý text [9].



Obrázek 1.1: Bernsteinova báze stupně 3 parametrizovaná přes interval $[0,1]$



Obrázek 1.2: Bézierova křivka \mathbf{c} stupně 3 a její řídicí polygon

Definice 8 (Bézierova křivka, řídicí polygon). Bézierova křivka stupně n v \mathbb{R}^m , $n, m \in \mathbb{N}$, je parametrizovaná křivka tvaru $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)$, $t \in [a, b]$, kde $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 0, \dots, n$ a B_i^n , $i = 0, \dots, n$ jsou polynomy Bernsteinovy báze stupně n parametrizované přes interval $[a, b]$. Body \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$ nazýváme řídicími body Bézierovy křivky \mathbf{c} , tyto body tvoří její řídicí polygon.

Poznámka. Bézierova křivka stupně n je tedy definována pomocí $n + 1$ řídicích bodů. Vlastnosti Bernsteinovy báze se přenáší na Bézierovy křivky. Především díky nezápornosti a rozkladu jednotky mají tyto křivky následující vlastnost: Bézierova křivka vždy leží uvnitř konvexního obalu svého řídicího polygonu. Pro přesnější popis této vlastnosti odkazují na kapitolu 13 knihy [1].

Příklad 2. Mějme Bernsteinovu bázi \mathcal{B} stupně $n = 3$ parametrizovanou přes interval $[0, 1]$. Dle definice 7

$$\mathcal{B} = \{B_0^3(t), B_1^3(t), B_2^3(t), B_3^3(t)\} = \{(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t), t^3\}.$$

Chování této báze můžeme sledovat na obrázku 1.1.

Dále uvažujme čtveřici ($n + 1 = 4$) řídicích bodů

$$\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3\} = \{[0, 0], [2, 3], [3, 0], [4, 3]\}.$$

Pomocí těchto bodů máme definovanou Bézierovu křivku

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i B_i^3(t) = [0, 0](1-t)^3 + [2, 3]3t(1-t)^2 + [3, 0]3t^2(1-t) + [4, 3]t^3 = \\ &= (0 \cdot (1-t)^3 + 2 \cdot 3t(1-t)^2 + 3 \cdot 3t^2(1-t) + 4 \cdot t^3, \\ &\quad 0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot 3t(1-t)^2 + 0 \cdot (3t^2(1-t) + 3 \cdot t^3) = \\ &= (t(6 - 3t + t^2), 3t(6 - 3t + 4t^2)). \end{aligned}$$

Tuto křivku společně s jejím řídicím polygonem vidíme na obrázku 1.2. Povšimněme si, že křivka skutečně leží uvnitř konvexního obalu řídicích bodů.

1.3 Křivka s pythagorejským hodografem

V této části zdefinujeme hlavní objekt našeho zkoumání – křivku s pythagorejským hodografem. Jedná se o křivky velmi speciální a proto považují za

rozumné si nejdříve uvést motivaci, která matematiky vedla k definici těchto křivek.

Mějme regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tvaru $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Úloha spočtení délky takové křivky obnáší vyčíslení určitého integrálu $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| d\tau = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau$. Integrand je velikost derivace. Výraz pod odmocninou ve většině případů nelze „elegantně“ odmocnit a tak pro vyčíslení daného integrálu přichází na řadu více či méně komplikované numerické metody.

Existují však případy, kdy výraz $x'^2(t) + y'^2(t)$ je druhou mocninou nějakého polynomu $\sigma(t)$ a lze jej tedy odmocnit. Úloha se nám poté značně zjednodušuje, neboť $\int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau = \int_a^t \sqrt{\sigma^2(\tau)} d\tau = \int_a^t |\sigma(\tau)| d\tau$. Poslední integrand je polynom v proměnné τ , vyčíslení posledního integrálu je tedy jednoduchou záležitostí. Křivky s touto vlastností nazýváme křivky s pythagorejským hodografem, kde hodografem myslíme křivku $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Definice 9 (křivka s pythagorejským hodografem). Buď $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ regulární parametrizovaná křivka. Křivka \mathbf{c} je křivka s pythagorejským hodografem (PH křivka), jestliže existuje polynom $\sigma(t)$ takový, že

$$(x_1)^{\prime 2}(t) + \dots + (x_n)^{\prime 2}(t) = \sigma^2(t), t \in I.$$

Hodografem rozumíme křivku $\mathbf{c}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$, $t \in I$.

Poznámka. Rychlost PH křivek (velikost jejich derivace) je tedy $|\sigma(t)|$, čili polynomiálně závisí na parametru. Podobně jako v motivaci před definicí 9 se budeme nadále zabírat rovinnými křivkami s pythagorejským hodografem, tedy křivkami tvaru $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, kde $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$ pro nějaký polynom $\sigma(t)$.

Otázkou však zůstává, jak explicitně popsat křivky s touto speciální vlastností. Zde výhodně použijeme komplexní čísla. Pro hodograf $\mathbf{c}'(t)$ požadujeme onu speciální vlastnost, totiž že $x'^2(t) + y'^2(t)$ je druhou mocninou nějakého polynomu. Postupujme však opačným směrem. Uvažujme křivku $\mathbf{q}(t) = (a(t), b(t))$, kterou můžeme pomocí komplexních čísel poměrně přirozeně reprezentovat jako $\mathbf{q}(t) = a(t) + ib(t)$, kde i je komplexní jednotka. Dle pravidel mocnění komplexních čísel $\mathbf{q}^2(t) = a^2(t) - b^2(t) + i2a(t)b(t)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}^2(t)\| &= \sqrt{(a^2(t) - b^2(t))^2 + (2a(t)b(t))^2} = \\ &= \sqrt{a^4(t) - 2a^2(t)b^2(t) + b^4(t) + 4a^2(t)b^2(t)} = \\ &= \sqrt{a^4(t) + 2a^2(t)b^2(t) + b^4(t)} = \\ &= \sqrt{(a^2(t) + b^2(t))^2} = a^2(t) + b^2(t). \end{aligned}$$

Křivka \mathbf{q}^2 má tedy vlastnost, kterou požadujeme po hodografu PH křivky. Přidáním společného faktoru $w(t)$, $\|\mathbf{q}^2(t)\| = w(t)(a^2(t) + b^2(t))$, bychom popsali všechny PH křivky (viz [7]). Nicméně pro PH kubiky tímto společným faktorem dostaneme navíc pouze regulární parametrizace přímek, které pro nás nejsou příliš zajímavé. Proto v následujícím vždy předpokládejme $w(t) \equiv 1$. Definujme nyní tedy preimage PH křivky.

Definice 10 (preimage PH křivky). Preimage PH křivky \mathbf{p} je křivka $\mathbf{q} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tvaru $\mathbf{q}(t) = (a(t), b(t))$ taková, že

$$\mathbf{h}(t) := \mathbf{p}'(t) = (a^2(t) - b^2(t), 2a(t)b(t))$$

Nadále se v tomto textu budeme věnovat PH kubikám, tedy PH křivkám stupně 3. Tyto PH křivky mají tedy dle výše uvedeného lineární preimage, neboť umocněním dostáváme kvadratický hodograf a poté integrací kubickou PH křivku. Všechny křivky budeme reprezentovat jako Bézierovy křivky, neboť díky vlastnostem Bernsteinovy báze se mocnění i integrace převádí pouze na manipulaci s řídicím polygonem, jak si podrobně ukážeme na příkladu.

V geometrickém modelování (již citovaná kniha [9] o CAGD) PH kubiky široké uplatnění nenajdou, neboť kvůli požadavku na polynomiální rychlost nemohou obsahovat inflexní body (viz důsledek věty 18.2 v [1]). Pro možnost inflexních bodů zvyšujeme stupeň preimage na kvadratický, umocněním dostáváme kvadratický hodograf a PH kvintiku, tedy PH křivku stupně 5. Zvídavého čtenáře tak odkazují na článek [2], popřípadě lehce obsáhlejší článek [3], které popisují hermitovskou interpolaci pomocí PH kvintik. I s pěkným úvodem o PH křivkách je napsán také článek [4], kde se autoři také zabývají hermitovskou interpolací a následným vybráním vhodného interpolantu.

Věta 3. Mějme rovinný lineární preimage

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{w}_0 B_0^1(t) + \mathbf{w}_1 B_1^1(t), t \in [0,1], \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}.$$

Potom $\mathbf{h}(t) = \mathbf{q}^2(t)$ má tvar

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{w}_0^2 B_0^2(t) + 2\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 B_1^2(t) + \mathbf{w}_1^2 B_2^2(t) = \mathbf{w}_0^2 (1-t)^2 + \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 2t(1-t) + \mathbf{w}_1^2 t^2,$$

kde mocnění a násobení řídicích bodů provádíme jako mocnění komplexních čísel.

Důkaz. Důkaz se provede přímým ověřením, když si napíšeme řídicí body i preimage po složkách, neboli $\mathbf{q}(t) = (w_{01}(1-t) + w_{11}t, w_{02}(1-t) + w_{12}t)$ pro $\mathbf{w}_0 = w_{01} + iw_{02}$, $\mathbf{w}_1 = w_{11} + iw_{12}$, a provedeme umocnění dle definice 10. □

Příklad 3. Mějme rovinný lineární preimage tvaru

$$\mathbf{q}(t) = [1,0](1-t) + [1,2]t = (1, 2t), t \in [0,1],$$

tedy Bézierovu křivku stupně 1 s řídicími body $[1,0], [1,2]$.

Dle věty 3 jsou řídicí body hodografu tvaru

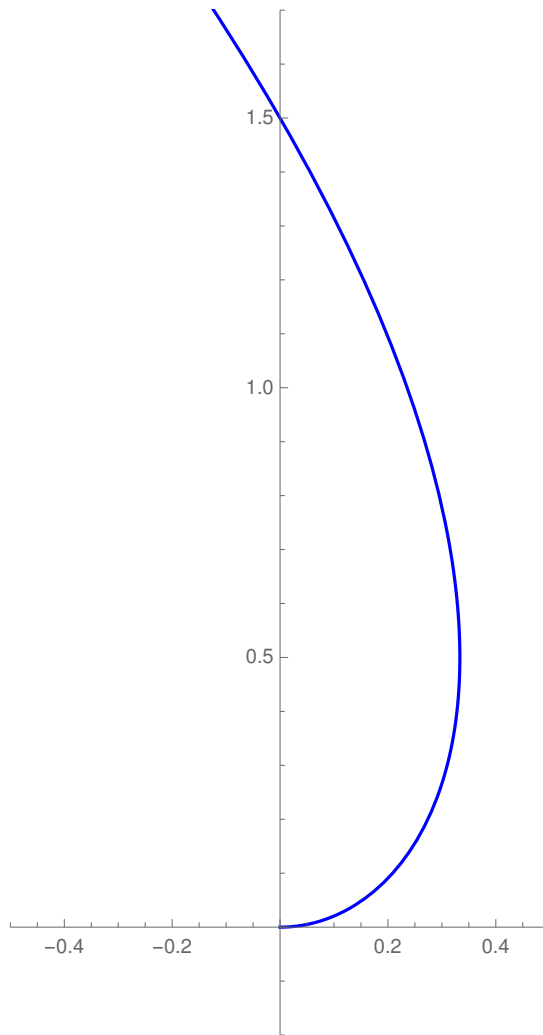
$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{w}_0^2 = [1,0], \mathbf{H}_1 = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 = [1,0][1,2] = [1,2], \mathbf{H}_2 = \mathbf{w}_1^2 = [-3,4],$$

kde násobení provádíme v oboru komplexních čísel. Máme tedy

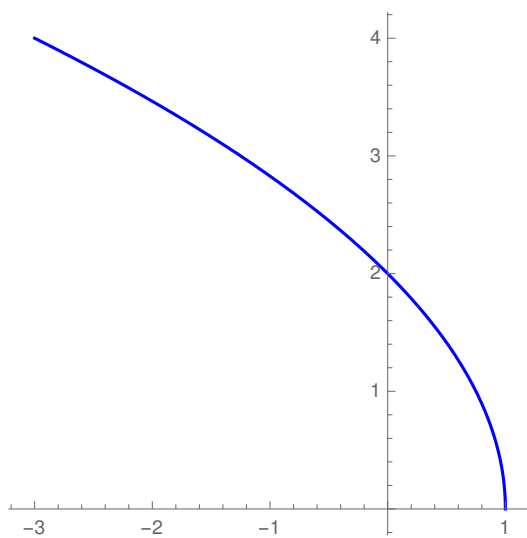
$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t) &= \mathbf{H}_0 B_0^2(t) + \mathbf{H}_1 B_1^2(t) + \mathbf{H}_2 B_2^2(t) = \\ &= [1,0](1-t)^2 + [1,2]2t(1-t) + [-3,4]t^2 = (1-4t^2, 4t). \end{aligned}$$

Nyní PH křivku dostaneme jako $\int \mathbf{h}(t) dt$, nicméně jak bylo již zmíněno, i tato operace se redukuje na manipulaci s řídicím polygonem. První řídicí bod můžeme díky volné integrační konstantě volit, volme tedy $\mathbf{P}_0 := [0,0]$. Dále

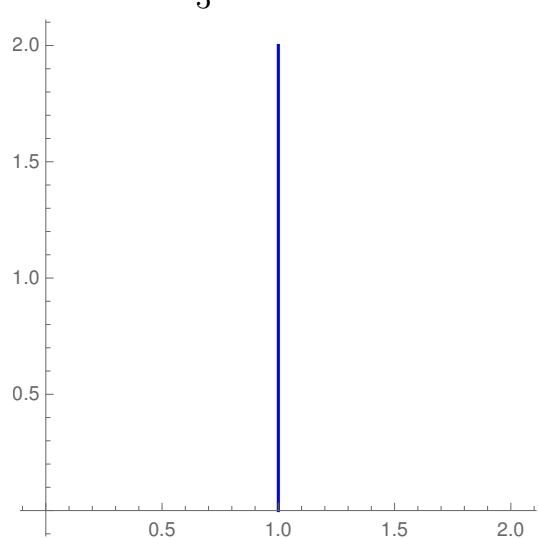
$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{\mathbf{H}_0}{3} = \left[\frac{1}{3}, 0 \right], \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \frac{\mathbf{H}_1}{3} = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right], \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{\mathbf{H}_2}{3} = \left[-\frac{1}{3}, 2 \right].$$



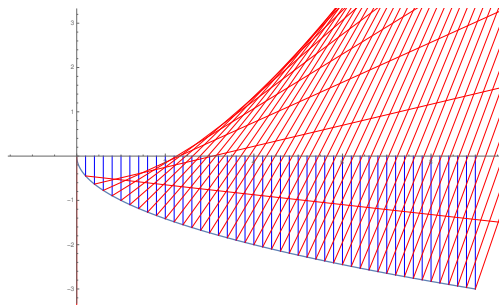
Obrázek 1.3: PH kubika $\mathbf{p}(t) = (t - \frac{4t^3}{3}, 2t^2)$



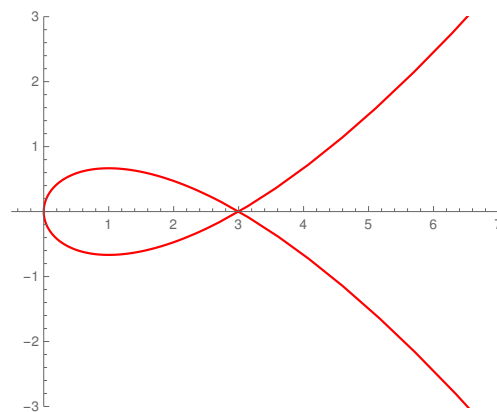
Obrázek 1.4: Hodograf $\mathbf{h}(t) = (1 - 4t^2, 2t^2)$ PH křivky \mathbf{p}



Obrázek 1.5: Preimage $\mathbf{q}(t) = (1, 2t)$ PH křivky \mathbf{p}



Obrázek 1.6: Polovina Tschirnhausenovy kubiky



Obrázek 1.7: Tschirnhausenova kubika

Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{P}_0 B_0^3(t) + \mathbf{P}_1 B_1^3(t) + \mathbf{P}_2 B_2^3(t) + \mathbf{P}_3 B_3^3(t) = \\ &= [0,0](1-t)^3 + \left[\frac{1}{3},0\right] 3t(1-t)^2 + \left[\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right] 3t^2(1-t) + \left[-\frac{1}{3},2\right] t^3 = \\ &= \left(t - \frac{4t^3}{3}, 2t^2\right), t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Získanou PH křivku, její hodograf i preimage, ze kterého PH kubika vznikla, můžeme postupně vidět na obrázcích 1.3, 1.4 a 1.5.

Poznámka. Všechny PH kubiky jsou po případném posunutí, otočení či škálování, částí takzvané Tschirnhausenovy kubiky (viz obrázek 1.7), což je dokázáno v [1] ve větě 18.2, popř. ve větě 12 v [5]. Tschirnhausenova kubika je obálka přímek, které vznikly odrazem paralelních paprsků od paraboly (viz obrázek 1.6).

1.4 Typy spojitosti

V této části zdefinujeme určité typy spojitosti a na příkladech si ukážeme jejich význam. Nakonec vyslovíme a dokážeme větu poskytující geometrický náhled na tyto spojitosti.

Definice 11 (parametrická spojitost \mathcal{C}^0). Nechť $\mathbf{f} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g} : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou křivky. Pokud $\mathbf{f}(b) = \mathbf{g}(c) = \mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$, říkáme, že křivky \mathbf{f}, \mathbf{g} jsou v bodě \mathbf{P} navázány se spojitostí \mathcal{C}^0 .

Definice 12 (parametrická spojitost \mathcal{C}^k). Nechť $\mathbf{f} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g} : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou křivky navázány se spojitostí \mathcal{C}^0 v bodě $\mathbf{f}(b) = \mathbf{g}(c) = \mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$. Řekneme, že křivky \mathbf{f}, \mathbf{g} jsou v bodě \mathbf{P} navázány se spojitostí \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$, pokud $\mathbf{f}^{(l)}(b) = \mathbf{g}^{(l)}(c)$, $l = 1, \dots, k$.

Ukazuje se však, že parametrická spojitost je v některých případech příliš svazující. To nás vede k definici geometrické spojitosti, která z vizuálního hlediska zajišťuje dostatečnou „hladkost“ a která nezávisí na reparametrizaci.

Definice 13 (geometrická spojitost \mathcal{G}^k). Nechť $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou křivky navázány \mathcal{C}^0 v bodě $\mathbf{f}(b) = \mathbf{g}(c) = \mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$. Řekneme, že křivky \mathbf{f} , \mathbf{g} jsou v bodě \mathbf{P} navázány se spojitostí \mathcal{G}^k , $k \in \mathbb{N}$, pokud existují změny parametrů zachovávající orientaci $\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $\Theta : [\gamma, \delta] \rightarrow [c, d]$ takové, že křivky $(\mathbf{f} \circ \Phi)$ a $(\mathbf{g} \circ \Theta)$ jsou navázány spojitostí \mathcal{C}^k , tedy $(\mathbf{f} \circ \Phi)^{(l)}(\beta) = (\mathbf{g} \circ \Theta)^{(l)}(\gamma)$, $l = 1, \dots, k$.

Poznámka. Z definic 12 a 13 je zřejmé, že parametrická spojitost triviálně zajišťuje geometrickou spojitost stejného řádu, obráceně to však neplatí (viz příklad 4).

Výše uvedená definice pro geometrickou spojitost nemá přímou geometrickou interpretaci, proto v následující větě uvedeme ekvivalentní podmínky geometrické spojitosti, které se budou snadněji ověřovat a budou navíc poskytovat geometrický náhled.

Následující věta popisuje geometrickou spojitost pro $k = 1, 2$.

Věta 4. Nechť $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou křivky navázané se spojitostí \mathcal{C}^0 v bodě $\mathbf{f}(b) = \mathbf{g}(c) = \mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$. Křivky jsou navíc navázány v bodě \mathbf{P} se spojitostí

- (i) \mathcal{G}^1 právě tehdy, když mají v bodě \mathbf{P} jejich tečné vektory stejný směr a orientaci;
- (ii) \mathcal{G}^2 právě tehdy, když jsou v bodě \mathbf{P} třídy \mathcal{G}^1 a navíc mají v bodě \mathbf{P} stejné znaménkové křivosti.

Důkaz. Podmínka v (i) je ekvivalentní s $\mathbf{T}_{\mathbf{f}}(b) = \mathbf{T}_{\mathbf{g}}(c)$, čili $\mathbf{f}'(b) = k\mathbf{g}'(c)$, $k > 0$, podmínka v (ii) je ekvivalentní s $\kappa_{z\mathbf{f}}(b) = \kappa_{z\mathbf{g}}(c)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pro dosažení parametrické spojitosti stačí reparametrizovat pouze křivku \mathbf{f} .

Dokažme nejprve (i). Předpokládejme tedy, že existuje $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ tak, že $(\mathbf{f} \circ \phi)(\beta) = \mathbf{g}'(c)$. Z toho plyne $\mathbf{f}'(\phi(\beta))\dot{\phi}(\beta) = \mathbf{g}'(c)$, tedy $\mathbf{f}'(b) = k\mathbf{g}'(c)$, $k > 0$, neboť ϕ je změna parametru (zachovávající orientaci) a tedy $\dot{\phi}(u) > 0$, $u \in [\alpha, \beta]$. Pro obrácenou implikaci předpokládejme $\mathbf{f}'(b) = k\mathbf{g}'(c)$, $k > 0$ a hledejme reparametrizaci dosvědčující \mathcal{G}^1 spojitost. Položme $\phi(s) := s/k$, $u \in [ka, kb]$. Potom ϕ je změna parametru zachovávající orientaci a s využitím věty 2 platí

$$\dot{\mathbf{f}}(\phi(kb)) = \mathbf{f}'(\phi(kb))\dot{\phi}(kb) = \frac{1}{k}\mathbf{f}'(b) = \mathbf{g}'(c).$$

Máme tedy ověřeno návazání se spojitostí \mathcal{G}^1 .

Dokažme nyní (ii). Předpokládejme nejprve návazání se spojitostí \mathcal{G}^2 , tedy

$$(\mathbf{f} \circ \phi)^{(l)}(\beta) = \mathbf{g}^{(l)}(c), l = 1, 2, \phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b],$$

z čehož podle věty 2 dostáváme (pro zkrácení zápisu vynecháme proměnnou)

$$\dot{\phi}\mathbf{f}' = \mathbf{g}', \dot{\phi}^2\mathbf{f}'' + \ddot{\phi}\mathbf{f}' = \mathbf{g}'' \Rightarrow \mathbf{f}'' = \frac{\mathbf{g}'' - \ddot{\phi}\mathbf{f}'}{\dot{\phi}^2}.$$

Spojitost \mathcal{G}^1 máme z definice, ověříme tedy rovnost znaménkových křivosti v bodě návazání s využitím vzorce (1.1). Platí

$$\begin{aligned} \kappa_{z\mathbf{f}} &= \frac{\det(\mathbf{f}', \mathbf{f}'')}{\|\mathbf{f}'\|^3} = \frac{\det(\frac{\mathbf{g}'}{\dot{\phi}}, \frac{\mathbf{g}'' - \ddot{\phi}\mathbf{f}'}{\dot{\phi}^2})}{\frac{\|\mathbf{g}'\|^3}{\dot{\phi}^3}} = \frac{\det(\mathbf{g}', \mathbf{g}'' - \ddot{\phi}\mathbf{f}')}{\|\mathbf{g}'\|^3} = \\ &= \frac{\det(\mathbf{g}', \mathbf{g}'')}{\|\mathbf{g}'\|^3} - \frac{\det(\mathbf{g}', \ddot{\phi}\mathbf{f}')}{\|\mathbf{g}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{g}', \mathbf{g}'')}{\|\mathbf{g}'\|^3} = \kappa_{z\mathbf{g}}, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili $\det(\mathbf{g}', \ddot{\phi}\mathbf{f}') = 0$, neboť tečné vektory \mathbf{f}' a \mathbf{g}' jsou v bodě navázání lineárně závislé.

Pro obrácenou implikaci předpokládejme v bodě navázání

$$\mathbf{f}' = k\mathbf{g}' \text{ a } \frac{\det(\mathbf{f}', \mathbf{f}'')}{\|\mathbf{f}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{g}', \mathbf{g}'')}{\|\mathbf{g}'\|^3}, k > 0.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{\det(k\mathbf{g}', \mathbf{f}'')}{k^3\|\mathbf{g}'\|^3} &= \frac{\det(\mathbf{g}', \mathbf{g}'')}{\|\mathbf{g}'\|^3} \Leftrightarrow \det(\mathbf{g}', \mathbf{f}'' + l\mathbf{f}') = k^2 \det(\mathbf{g}', \mathbf{g}''), l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{f}'' + l\mathbf{f}' &= k^2\mathbf{g}'', l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{f}''}{k^2} + \frac{l\mathbf{f}'}{k^2} = \mathbf{g}'', l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zde využíváme lineární závislost tečných vektorů \mathbf{f}' a \mathbf{g}' .

S využitím věty 2 nalezneme vhodnou reparametrizační funkci $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$.

Po té požadujeme

$$\ddot{\phi}(\beta) = \frac{l}{k^2}, \dot{\phi}(\beta) = \frac{1}{k}, \phi(\beta) = b.$$

Tyto podmínky splňuje kupříkladu funkce

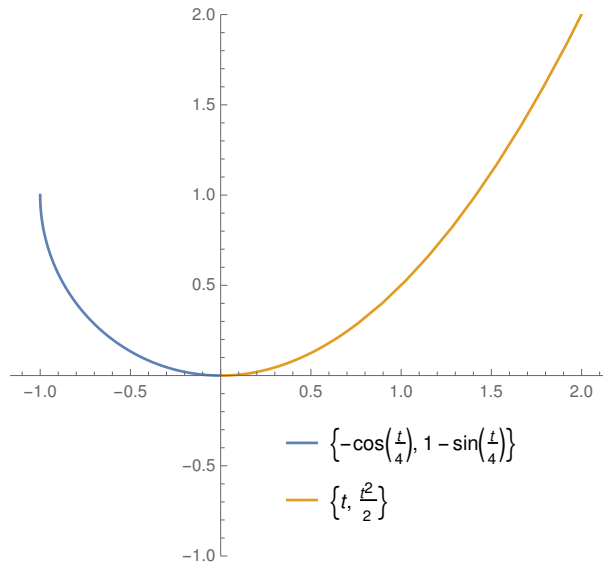
$$\phi(s) = \frac{l}{2k^2}s^2 + c_1s + c_2, c_1 = \frac{k - l\beta}{k^2}, c_2 = \frac{2bk^2 - 2k\beta + l\beta^2}{2k^2}.$$

Nyní platí

$$(\mathbf{f} \circ \ddot{\phi})(\beta) = \mathbf{g}''(c), (\mathbf{f} \circ \dot{\phi})(\beta) = \mathbf{g}'(c),$$

po reparametrizaci jsme dosáhli navázání se spojitostí \mathcal{C}^2 , máme tedy dokázané původní navázání se spojitostí \mathcal{G}^2 .

□



Obrázek 1.8: Křivky, které jsou v bodě $[0,0]$ navázány se spojitostí \mathcal{G}^2 , nikoliv však \mathcal{C}^1

Příklad 4. Mějme křivky $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisy

$$\mathbf{f}(t) = (-\cos(t/4), 1 - \sin(t/4)), \mathbf{g}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right).$$

Z obrázku 1.8 je vidět, že vizuálně na sebe tyto křivky navazují hladce, nicméně parametrickou spojitost v bodě $[0,0]$ máme pouze \mathcal{C}^0 , neboť

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(2\pi) &= \mathbf{g}(0) = [0,0], \\ \mathbf{f}'(2\pi) &= \left[\frac{1}{4}, 0\right] \neq [1,0] = \mathbf{g}'(0), \\ \mathbf{f}''(2\pi) &= \left[\frac{1}{16}, 0\right] \neq [0,1] = \mathbf{g}''(0). \end{aligned}$$

Změnou parametru ϕ danou předpisem $\phi(u) = 4u$ dostáváme křivku

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = (\mathbf{f} \circ \phi)(u) = (-\cos(u), 1 - \sin(u)).$$

Pro křivky $\tilde{\mathbf{f}} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{g}$ nyní dostáváme v bodě $[0,0]$ parametrickou spojitost \mathcal{C}^2 , neboť

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(\pi/2) &= \mathbf{g}(0) = [0,0], \\ \tilde{\mathbf{f}}'(\pi/2) &= [1,0] = \mathbf{g}'(0), \\ \tilde{\mathbf{f}}''(\pi/2) &= [0,1] = \mathbf{g}''(0). \end{aligned}$$

Dle definice 13 jsou tedy původní křivky \mathbf{f}, \mathbf{g} v bodě $[0,0]$ navázány se spojitostí \mathcal{G}^2 .

2. Vlastnosti PH křivek

V této kapitole se podíváme na různé vlastnosti PH křivek, přičemž hlavním cílem je formulovat a dokázat věty o spojitosti navázání dvou PH křivek v závislosti na tvaru preimage.

V celé kapitole se budeme zabývat PH křivkami stupně 3 (PH kubikami), jež mají lineární preimage a kvadratický hodograf.

2.1 Vlastnosti PH křivek v závislosti na preimage

V této části si ukážeme, že rotaci a škálování PH křivky jsme schopni realizovat pomocí změny preimage. Zároveň uvedeme a dokážeme vzorec pro výpočet znaménkové křivosti PH křivky.

Lemma 5 (regularita PH křivky). Mějme PH křivku $\mathbf{p} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a její preimage $\mathbf{q} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Potom PH křivka \mathbf{p} je regulární právě tehdy, když $\forall t \in I : \mathbf{q}(t) \neq \mathbf{0}$.

Důkaz. Nechť preimage je tvaru $\mathbf{q}(t) = a(t) + ib(t)$. Předpokládejme

$$\forall t \in I : \mathbf{q}(t) \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall t \in I : a(t) \neq 0 \vee b(t) \neq 0.$$

Tedy pro

$$\mathbf{h}(t) = q^2(t) = a^2(t) - b^2(t) + i2a(t)b(t)$$

platí $\forall t \in I : \mathbf{h}(t) \neq (0,0)$, neboť pokud pro nějaké $t_0 \in I : a(t_0) = b(t_0) \neq 0$, potom $a(t_0)b(t_0) \neq 0$ a obráceně, pokud pro nějaké $t_1 \in I : a(t_1)b(t_1) = 0$, potom $a^2(t_1) - b^2(t_1) \neq 0$. Jelikož $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{h}(t) \neq \mathbf{0}, t \in I$, máme splněnou podmínku regularity.

Pro obrácenou implikaci nechť křivka \mathbf{p} má hodograf tvaru

$$\mathbf{h}(t) = a^2(t) - b^2(t) + i2a(t)b(t),$$

který díky regularitě splňuje $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{0}, t \in I$. Potom

$$\forall t \in I : a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \vee 2a(t)b(t) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t \in I : a(t) \neq 0 \vee b(t) \neq 0.$$

Tím máme dokázanou obrácenou implikaci, neboť jsme dostali

$$\forall t \in I : \mathbf{q}(t) = a(t) + ib(t) \neq \mathbf{0}.$$

□

Lemma 6 (vliv otočení preimage). Při otočení preimage o orientovaný úhel α je výsledná křivka otočena o úhel 2α .

Důkaz. Otočení o úhel α můžeme reprezentovat násobením komplexní jednotkou tvaru $\cos \alpha + i \sin \alpha$. Pro původní preimage $\mathbf{q} = a + ib$ (pro zkrácení zápisu

nepíšeme parametr, nicméně mějme stále na paměti, že a, b jsou funkce) máme rotovaný preimage tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_r &= (a + ib)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= (a \cos \alpha - b \sin \alpha) + i(a \sin \alpha + b \cos \alpha) = c + id.\end{aligned}$$

Z něj umocněním (jako komplexního čísla) dostáváme rotovaný hodograf tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_r &= (c^2 - d^2) + i(2cd) = \\ &= a^2 \cos^2 \alpha - 2ab \cos \alpha \sin \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha \cos \alpha - \\ &\quad - b^2 \cos^2 \alpha + i2(a^2 \sin \alpha \cos \alpha + ab \cos^2 \alpha - ab \sin^2 \alpha - b^2 \sin \alpha \cos \alpha) = \\ &= a^2 \cos 2\alpha - 2ab \sin 2\alpha - b^2 \cos 2\alpha + i(a^2 \sin 2\alpha - b^2 \sin 2\alpha + 2ab \cos(2\alpha)) \\ &= ((a^2 - b^2) + i(2ab))(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) = \mathbf{h}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha),\end{aligned}$$

kde v předposlední rovnosti jsme využili identit pro dvojnásobný úhel

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha.$$

Dostáváme tedy původní hodograf otočený o úhel 2α , integrace komutuje s otočením – lineárním zobrazením, a proto jsme s důkazem hotovi, dostáváme PH křivku otočenou o úhel 2α . □

Důsledek. Úsečky svírající úhel α se souřadnicovou osou x jsou PH křivky s preimage tvaru úsečky svírající se souřadnicovou osou x úhel $\alpha/2$, která při prodloužení prochází počátkem (viz obrázek 2.1). Speciálně takové úsečky s konstantní derivací o velikosti a^2 mají za preimage bod $a \cos(\alpha/2) + ai \sin(\alpha/2)$, jak vidíme na obrázku 2.2.

Posunutí PH křivky jsme schopni realizovat pomocí volné integrační konstanty nezávisle na tvaru preimage. Výše jsme si ukázali jak pomocí preimage rotovat jemu odpovídající PH křivku. Následující lemma (lemma 6 v [5]) dává návod, jak PH křivku škálovat pomocí preimage.

Lemma 7 (vliv lineární reparametrizace preimage). Nechť PH křivka \mathbf{p} má preimage \mathbf{q} a $k \neq 0, l \in \mathbb{R}$. Potom lineárně reparametrizovaný preimage $\mathbf{q}(kt + l)$ je preimage k PH křivce $\frac{1}{k}\mathbf{p}(kt + l)$.

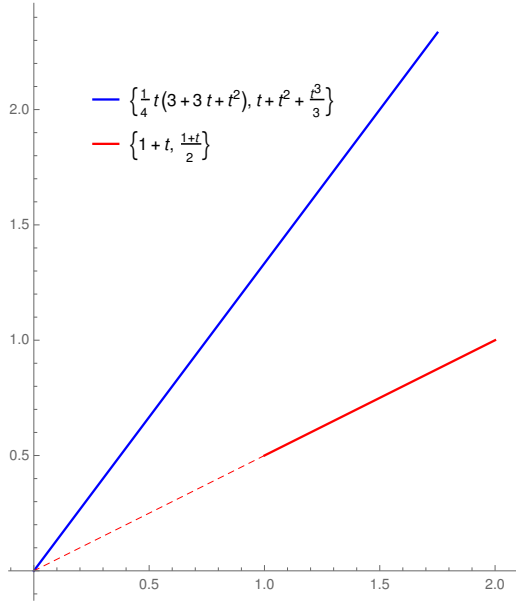
Důkaz. Lemma je přímým důsledkem věty o substituci při integraci. □

Uveďme nyní následující triviální pozorování.

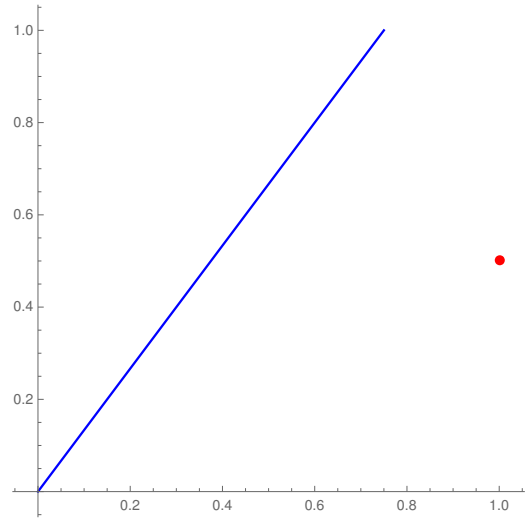
Pozorování. Nechť \mathbf{q} je preimage PH křivky \mathbf{p} . Potom $k\mathbf{q}, k \in \mathbb{R}$, je preimage křivky $k^2\mathbf{p}$.

Tvrzení 8 (reparametrizace pomocí preimage). Nechť $\mathbf{q}(t)$ je preimage PH křivky $\mathbf{p}(t)$ a $k, l \in \mathbb{R}, k > 0$. Potom $\sqrt{k} \cdot \mathbf{q}(kt + l)$ je preimage reparametrizované PH křivky $\mathbf{p}(kt + l)$.

Důkaz. Tvrzení je důsledkem výše uvedeného pozorování a lemmatu 7. □



Obrázek 2.1: PH křivka s nekonstantní rychlostí – úsečka svírající s osou x úhel $\pi/4$ a její preimage – červená úsečka



Obrázek 2.2: PH křivka $(3t/4, t)$ s konstantní rychlostí – úsečka svírající s osou x úhel $\pi/4$ a její preimage – bod $[1, 1/2]$

Věta 9 (výpočet znaménkové křivosti pomocí preimage). Nechť PH křivka $\mathbf{p} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ má preimage \mathbf{q} . Potom v bodě $t \in I$ má křivka \mathbf{p} znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = 2 \frac{\operatorname{Im}(\bar{\mathbf{q}}(t)\mathbf{q}'(t))}{|\mathbf{q}(t)|^4}, \quad (2.1)$$

kde na $\mathbf{q}(t)$ nahlížíme jako na prvek \mathbb{C} a $\bar{\mathbf{q}}$ značí komplexní sdružení.

Důkaz. Vzorec pro křivost nalezneme v podkapitole 19.7 knihy [1], je však uveden bez důkazu a proto si jej na tomto místě dokažme.

Pro přehlednost vynecháme proměnnou t . Označme $\mathbf{h} := \mathbf{p}' = (x', y')$, $\mathbf{h} = \mathbf{q}'^2$, tedy $\mathbf{h}' = 2\mathbf{q}\mathbf{q}' = (x'', y'')$. Užitím vzorce (1.1) pro znaménkovou křivost dostáváme

$$\kappa_z = \frac{\det(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{\|\mathbf{p}'\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} 2 \frac{\operatorname{Im}(\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}')}{|\mathbf{q}|^4} &= \frac{\operatorname{Im}(2\mathbf{q}\mathbf{q}'\bar{\mathbf{q}}^2)}{|\mathbf{q}|^6} = \frac{\operatorname{Im}(\mathbf{h}'\bar{\mathbf{h}})}{|\mathbf{h}|^3} = \\ &= \frac{\operatorname{Im}((x'' + iy'')(x' - iy'))}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \kappa_z. \end{aligned}$$

□

2.2 Spojité navázání PH křivek

V této podkapitole se podíváme na navázání dvou PH křivek. Konkrétně budeme zkoumat závislost spojitosti vzniklých PH křivek na tvaru jejich preimage. Předpokládejme vždy spojitost třídy \mathcal{C}^0 , které můžeme pokaždé dosáhnout díky volné integrační konstantě.

V celé podkapitole budeme používat následující systematické značení: PH kubiám $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ budou náležet preimage $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(t) &= \mathbf{w}_0(1-t) + \mathbf{w}_1t, \mathbf{q}_2(t) = \mathbf{z}_0(1-t) + \mathbf{z}_1t, \\ \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1 &\in \mathbb{C}, \mathbf{w}_0 = w_{01} + iw_{02}, \mathbf{w}_1 = w_{11} + iw_{12}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

tedy body $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$ jsou řídicí body lineárního preimage \mathbf{q}_1 PH křivky \mathbf{p}_1 a body $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1$ jsou řídicí body lineárního preimage \mathbf{q}_2 PH křivky \mathbf{p}_2 .

Následující tvrzení bude charakterizovat spojitost třídy \mathcal{G}^1 a její speciální případ – spojitost \mathcal{C}^1 .

Tvrzení 10 (spojitost \mathcal{G}^1 a \mathcal{C}^1). Nechť $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ jsou PH kubiky s preimage tvaru (2.2). Křivky $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ na navíc sebe navazují se spojitostí \mathcal{G}^1 právě tehdy, když $\mathbf{z}_0 = c\mathbf{w}_1$ pro $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Křivky na sebe navazují se spojitostí \mathcal{C}^1 právě tehdy, když $c = \pm 1$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{h}_1 = \mathbf{p}'_1, \mathbf{h}_2 = \mathbf{p}'_2$.

Předpokládejme nejprve $\mathbf{z}_0 = c\mathbf{w}_1, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(t) &= \mathbf{w}_0^2(1-t)^2 + \mathbf{w}_0\mathbf{w}_12t(1-t) + \mathbf{w}_1^2(1-t)^2, \\ \mathbf{h}_2(t) &= c^2\mathbf{w}_1^2(1-t)^2 + c\mathbf{w}_1\mathbf{z}_12t(1-t) + \mathbf{z}_1^2(1-t)^2. \end{aligned}$$

Tedy $\mathbf{p}'_1(1) = \mathbf{h}_1(1) = \mathbf{w}_1^2$ a $\mathbf{p}'_2(0) = \mathbf{h}_2(0) = c^2\mathbf{w}_1^2$. Dle věty 4 tedy dostáváme v bodě $\mathbf{p}_1(1)$ navázání se spojitostí \mathcal{G}^1 , neboť tečné vektory mají stejný směr. Budme však v tomto případě důslední a ověříme spojitost \mathcal{G}^1 z definice. To obnáší nalezení reparametrizace, po níž v bodě spoje dosáhneme spojitosti \mathcal{C}^1 .

Ověříme, že při lineární reparametrizaci křivky \mathbf{p}_2 funkcí $\phi(t) = t/c^2$ dosáhneme spojitosti \mathcal{C}^1 . Označme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \frac{\mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_1^2}{3}, \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{c^2\mathbf{w}_1^2}{3}, \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_1 + \frac{c\mathbf{w}_1\mathbf{z}_1}{3}, \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{\mathbf{z}_1^2}{3}. \end{aligned}$$

Platí $\mathbf{p}_2(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^3 + \mathbf{P}_13t(1-t)^2 + \mathbf{P}_23t^2(1-t) + \mathbf{P}_3t^3$, tedy

$$(\mathbf{p}_2 \circ \phi)(t) = \mathbf{P}_0 \left(1 - \frac{t}{c^2}\right)^3 + \mathbf{P}_1 \frac{3t}{c^2} \left(1 - \frac{t}{c^2}\right)^2 + \mathbf{P}_2 \frac{3t^2}{c^4} \left(1 - \frac{t}{c^2}\right) + \mathbf{P}_3 \frac{t^3}{c^6}.$$

Po úpravě a derivaci dostáváme

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_2 \circ \phi)'(t) &= \mathbf{P}_0 \left(-\frac{3}{c^2} + \frac{6t}{c^4} - \frac{3t^2}{c^6}\right) + 3\mathbf{P}_1 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{4t}{c^4} + \frac{3t^2}{c^6}\right) + \\ &+ 3\mathbf{P}_2 \left(\frac{2t}{c^4} - \frac{3t^2}{c^6}\right) + \mathbf{P}_3 \frac{3t^2}{c^6}, \end{aligned}$$

čili $(\mathbf{p}_2 \circ \phi)'(0) = -\frac{3\mathbf{P}_0}{c^2} + \frac{3\mathbf{P}_1}{c^2} = \mathbf{w}_1^2 = \mathbf{p}'_1(1)$.

Dosáhli jsme tedy po reparametrizaci spojitosti \mathcal{C}^1 , máme tedy ověřenu původní spojitost \mathcal{G}^1 .

Pro obrácenou implikaci nechť křivky na sebe navazují se spojitostí \mathcal{G}^1 . Dle věty 4 tedy $\mathbf{p}'_1(1) = k\mathbf{p}'_2(0)$, $k > 0$, tedy $\mathbf{h}_1(1) = \mathbf{w}_1^2 = k\mathbf{h}_2(0) = k\mathbf{z}_0^2$. Pokládaje $c = \pm\sqrt{k} \neq 0$ dostáváme požadované tvrzení.

Pro $c = \pm 1$ platí $\phi(t) = t/c^2 = t$, reparametrizace je tedy identitou a již původní navázání je se spojitostí \mathcal{C}^1 . □

Tvrzení 11 (spojitost \mathcal{G}^2 a \mathcal{C}^2). Nechť $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ jsou PH kubiky s preimage tvaru (2.2), $\mathbf{z}_0 = c\mathbf{w}_1$, $c \neq 0$. Křivky $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ na sebe navazují se spojitostí \mathcal{G}^2 právě tehdy, když \mathbf{z}_1 leží na přímce

$$w_{12}x - w_{11}y + c^3(w_{01}w_{12} - w_{11}w_{02}) = 0.$$

Křivky na sebe navíc navazují se spojitostí \mathcal{C}^2 právě tehdy, když $c = \pm 1$ a $c(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0) = c(\mathbf{z}_1 - c\mathbf{w}_1) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0$, tedy $\mathbf{z}_1 = c(2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0)$.

Důkaz. Důkaz provedeme s využitím věty 4 a vzorce pro znaménkovou křivost (2.1) z tvrzení 9. Spojitost třídy \mathcal{G}^1 máme zajištěnou, pro spojitost třídy \mathcal{G}^2 tedy musíme zajistit stejné znaménkové křivosti v bodě navázání.

Označme κ_1 (resp. κ_2) znaménkovou křivost křivky \mathbf{p}_1 (resp. křivky \mathbf{p}_2). Pro $\mathbf{q}_1 = \mathbf{w}_0(1-t) + \mathbf{w}_1t$ s využitím tvrzení 9 máme

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= 2 \frac{\text{Im}(\bar{\mathbf{q}}_1(t)\mathbf{q}'_1(t))}{|\mathbf{q}_1(t)|^4} = \\ &= \frac{2[(w_{01} + t(w_{11} - w_{01}))(w_{12} - w_{02}) - (w_{11} - w_{01})(w_{02} + t(w_{12} - w_{02}))]}{[(w_{01} + t(w_{11} - w_{01}))^2 + (w_{02} + t(w_{12} - w_{02}))^2]^2} \end{aligned}$$

a pro $\mathbf{q}_2 = c\mathbf{w}_1(1-t) + \mathbf{z}_1t$, $\mathbf{z}_1 = z_{11} + iz_{12}$ máme

$$\begin{aligned} \kappa_2(t) &= 2 \frac{\text{Im}(\bar{\mathbf{q}}_2(t)\mathbf{q}'_2(t))}{|\mathbf{q}_2(t)|^4} = \\ &= \frac{2[(cw_{11} + t(z_{11} - cw_{11}))(z_{12} - cw_{12}) - (z_{11} - cw_{11})(cw_{12} + t(z_{12} - cw_{12}))]}{[(cw_{11} + t(z_{11} - cw_{11}))^2 + (cw_{12} + t(z_{12} - cw_{12}))^2]^2}. \end{aligned}$$

Požadujeme $\kappa_1(1) = \kappa_2(0)$, z čehož jednoduchou úpravou dostáváme

$$\frac{2(w_{01}w_{12} - w_{11}w_{02})}{(w_{11}^2 + w_{12}^2)^2} = \frac{2c(w_{11}z_{12} - w_{12}z_{11})}{((cw_{11})^2 + (cw_{12})^2)^2},$$

což je ekvivalentní s požadavkem na řídicí bod \mathbf{z}_1 , totiž

$$c^3(w_{01}w_{12} - w_{11}w_{02}) = w_{11}z_{12} - w_{12}z_{11}.$$

Pro navázání se spojitostí \mathcal{C}^2 požadujeme $\mathbf{p}'_1(k)(1) = \mathbf{p}'_2(k)(0)$, $k = 1, 2$. Spojitost \mathcal{C}^1 máme díky $\mathbf{z}_0 = \pm\mathbf{w}_1$. Stačí tedy ukázat $\mathbf{p}''_1(1) = \mathbf{p}''_2(0)$. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{p}''_1(1) = \mathbf{p}''_2(0) &\Leftrightarrow \mathbf{h}'_1(1) = \mathbf{h}'_2(0) \Leftrightarrow 2\mathbf{w}_1(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0) = 2c\mathbf{w}_1(\mathbf{z}_1 - c\mathbf{w}_1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0) = c(\mathbf{z}_1 - c\mathbf{w}_1), c = \pm 1, \end{aligned}$$

kde v poslední ekvivalenci jsme dělili \mathbf{w}_1 , což můžeme, neboť předpokládáme $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$, aby výsledné křivky byly regulární. □

Poznámka. Reparametrizací preimage provádíme škálování PH křivky, vhodnou reparametrizací preimage jsme tedy vždy schopni dosáhnout výsledné spojitosti \mathcal{G}^2 , jestliže $\mathbf{z}_0 = c\mathbf{w}_1, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

3. Příklady

V této závěrečné kapitole budeme na názorných příkladech ilustrovat výsledky z 2. kapitoly. Budeme se tedy věnovat spojitosti navázání dvou PH kubik v závislosti na tvaru jejich preimage.

Opět budeme používat stejné značení jako v (2.2). V celé kapitole budou na obrázcích modrou barvou křivky \mathbf{p}_1 a \mathbf{q}_1 (PH křivka \mathbf{p}_1 a její preimage), oranžovou barvou křivky \mathbf{p}_2 a \mathbf{q}_2 (PH křivka \mathbf{p}_2 a její preimage).

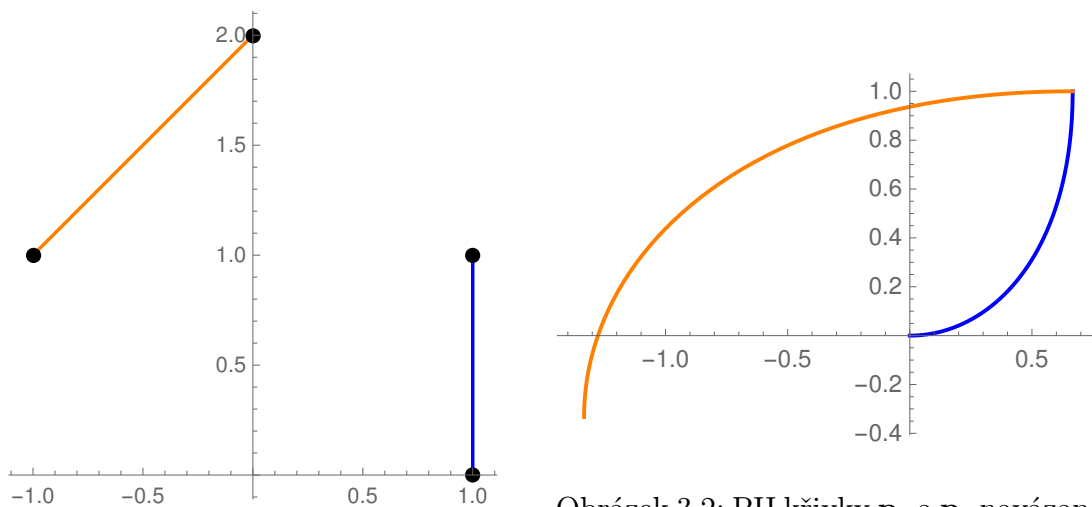
Nejprve se podívejme na zcela obecný příklad.

Příklad 5. Nechť

$$\mathbf{w}_0 = [1, 0], \mathbf{w}_1 = [1, 1], \mathbf{z}_0 = [0, 2], \mathbf{z}_1 = [-1, 1].$$

Řídící body nesplňují podmínky z tvrzení 11 ani 10 pro spojitosti vyšších řádů (parametrickou, ani geometrickou), nicméně díky volné integrační konstantě jsme schopni dosáhnout spojitosti \mathcal{C}^0 v bodě $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1(1) = \mathbf{p}_2(0)$.

Máme preimage tvaru $\mathbf{q}_1(t) = (1, t)$, $\mathbf{q}_2(t) = (-t, 2 - t)$ (viz obrázek 3.1). Z nich mocněním dle definice 10 dostáváme hodografy $\mathbf{h}_1(t) = (1 - t^2, t)$, $\mathbf{h}_2(t) = (-4 + 4t, -4t + 2t^2)$. Z těchto hodografů pak integrací, kterou však počítáme pouze pomocí úpravy řídicích bodů (viz příklad 3), dostáváme příslušné PH křivky $\mathbf{p}_1(t) = (t - t^3/3, t^2)$, $\mathbf{p}_2(t) = (2/3 - 4t + 2t^2, 1 - 2t^2 + 2t^3/3)$, které můžeme vidět na obrázku 3.2.



Obrázek 3.1: Lineární preimage \mathbf{q}_1 (modře) a \mathbf{q}_2 (žlutě)

Obrázek 3.2: PH křivky \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 navázané se spojitostí \mathcal{C}^0

V následujícím příkladu se podívejme na výsledky tvrzení 10.

Příklad 6. Nechť

$$\mathbf{w}_0 = [1, 1], \mathbf{w}_1 = [0, -1], \mathbf{z}_0 = c\mathbf{w}_1 = [0, -3/2], \mathbf{z}_1 = [-1, 0], c = 3/2.$$

Dle tvrzení 10 jsou vzniklé křivky navázané \mathcal{G}^1 . Skutečně platí

$$\mathbf{p}'_2(0) = (-9/4, 0) = c^2 \mathbf{p}'_1(1) = \frac{9}{4}(-1, 0).$$

Na obrázku 3.3 vidíme lineární preimage $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$, na obrázku 3.4 potom vzniklé PH křivky.

Navázání se spojitostí \mathcal{C}^1 je speciálním případem \mathcal{G}^1 volbou $c = \pm 1$. Pro $c = 1$ máme $\tilde{\mathbf{z}}_0 = [0, -1]$ a vskutku $\tilde{\mathbf{p}}_2'(0) = \mathbf{p}_1'(1) = (-1, 0)$. Situaci vidíme na obrázcích 3.5 a 3.6. Preimage $\tilde{\mathbf{q}}_2$ má řídicí body $\tilde{\mathbf{z}}_0, \mathbf{z}_1$ a $\tilde{\mathbf{p}}_2$ je příslušná PH křivka.

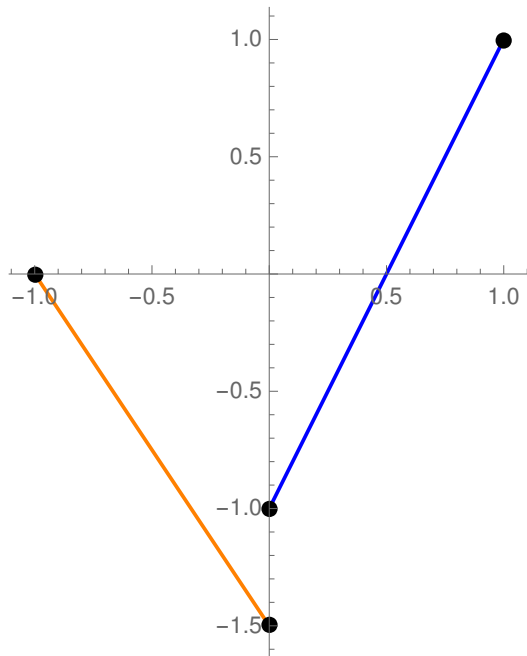
V následujícím příkladu ilustrujeme výsledky tvrzení 11.

Příklad 7. Necht

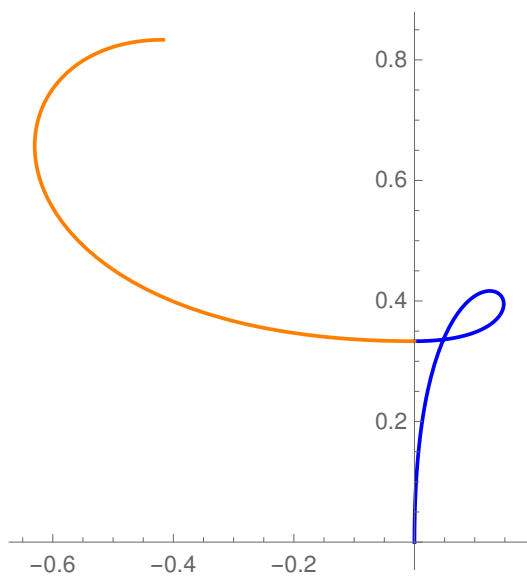
$$\mathbf{w}_0 = [1, 0], \mathbf{w}_1 = [2, 2], \mathbf{z}_0 = c\mathbf{w}_1 = [4, 4], \mathbf{z}_1 = [0, 8], c = 2.$$

Pro \mathbf{z}_1 ležící na přímce $x - y + 8 = 0$ dostáváme dle tvrzení 11 navázání se spojitostí \mathcal{G}^2 . Na obrázku 3.7 vidíme preimage výsledných PH křivek společně s červenou „vodící“ přímkou, na které když leží řídicí bod \mathbf{z}_1 , máme navázání se spojitostí \mathcal{G}^2 . Na obrázku 3.8 pak vidíme výsledné PH křivky mající v bodě navázání stejné znaménkové křivosti, totiž $\kappa_{z_1}(1) = \kappa_{z_2}(0) = 1/16$.

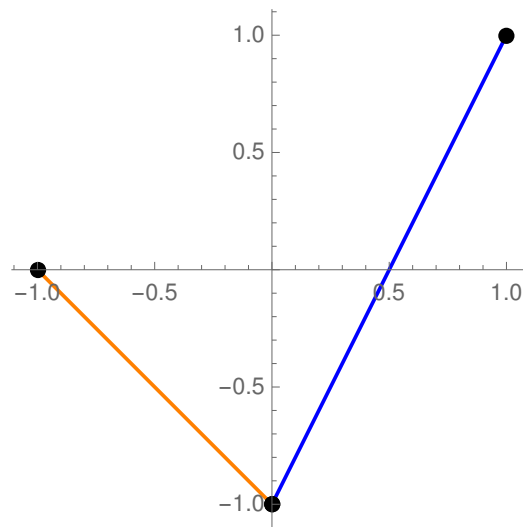
Pro zajištění spojitosti \mathcal{C}^1 volme $c = -1$, tedy $\tilde{\mathbf{z}}_0 = [-2, -2]$. Pro navázání se spojitostí \mathcal{G}^2 musí řídicí bod \mathbf{z}_1 ležet na přímce $x - y - 1 = 0$. Dle tvrzení 11 při volbě $\mathbf{z}_1 = -2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_0 = [-3, -4]$ dosáhneme dokonce spojitosti \mathcal{C}^2 , situaci můžeme vidět na obrázcích 3.9 a 3.10.



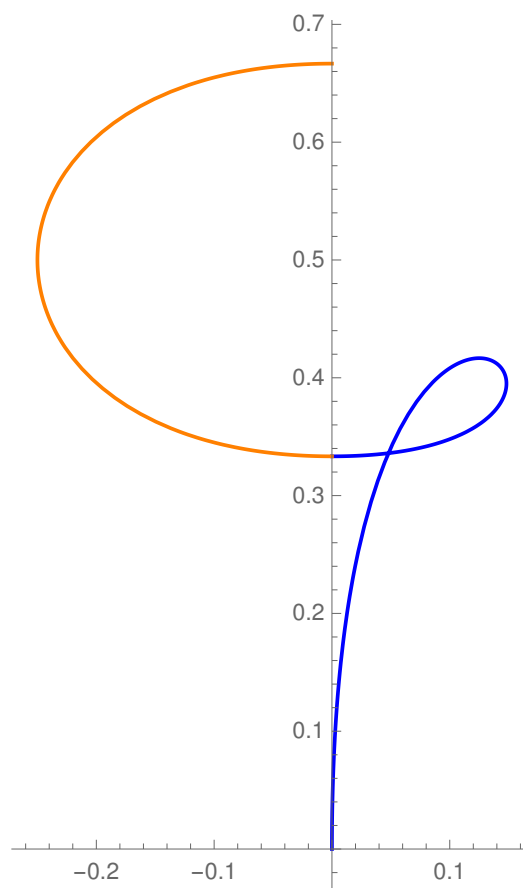
Obrázek 3.3: Lineární preimage \mathbf{q}_1 a \mathbf{q}_2



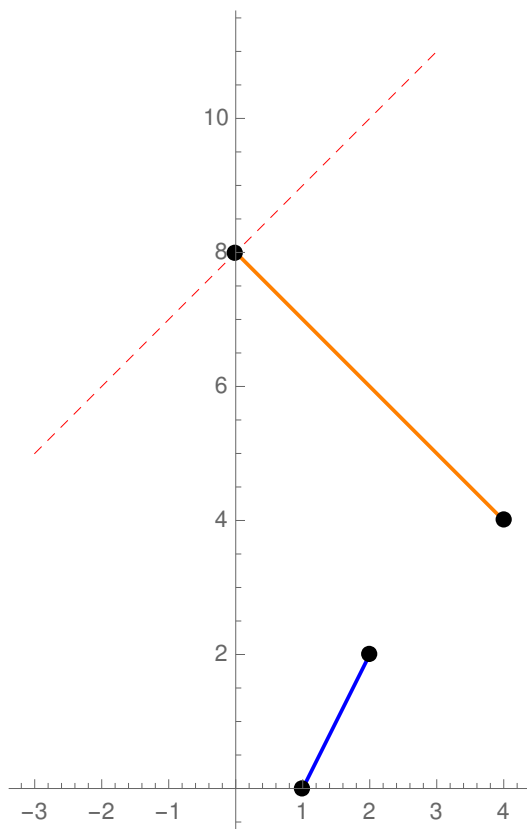
Obrázek 3.4: PH křivky \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 navázané se spojitostí \mathcal{G}^1



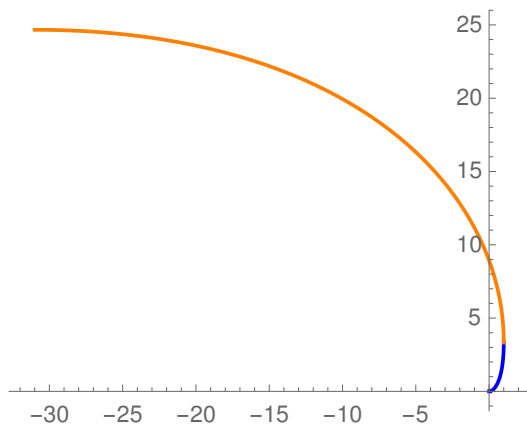
Obrázek 3.5: Lineární preimage \mathbf{q}_1 a $\tilde{\mathbf{q}}_2$



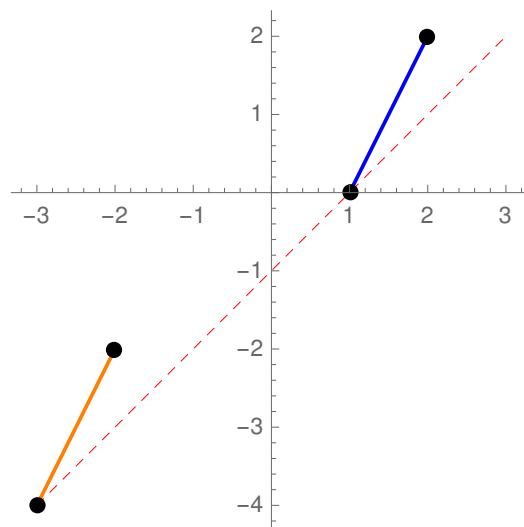
Obrázek 3.6: PH křivky \mathbf{p}_1 a $\tilde{\mathbf{p}}_2$ navázané se spojitostí \mathcal{C}^1



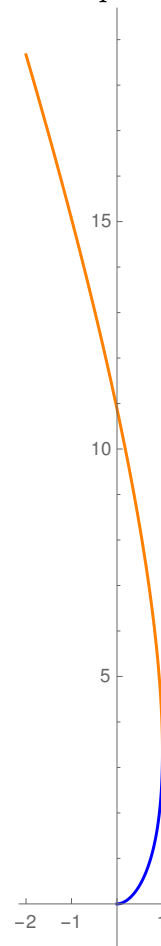
Obrázek 3.7: Lineární preimage \mathbf{q}_1 a \mathbf{q}_2 společně s „vodící“ přímkou (červeně)



Obrázek 3.8: PH křivky \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 navázané se spojitostí \mathcal{G}^2



Obrázek 3.9: Lineární preimage \mathbf{q}_1 a $\tilde{\mathbf{q}}_2$ společně s „vodící“ přímkou (červeně)



Obrázek 3.10: PH křivky \mathbf{p}_1 a $\tilde{\mathbf{p}}_2$ navázané se spojitostí \mathcal{C}^2

Závěr

Vyřešili jsme $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2$ navázání PH kubik v závislosti na tvaru jejich pre-image. Dále plánujeme podívat se na vyšší stupně PH křivek a výsledky vyjádřit ve formalismu B-spline křivek.

Seznam použité literatury

- [1] *Farouki, R.*: Pythagorean-hodograph curves: algebra and geometry inseparable, Geometry and Computing Vol. 1, Springer, Berlin, ISBN 978-3-540-73397-3, 2008
- [2] *Šír, Z., Feichtinger, R. and Jüttler, B.*: Approximating curves and their offsets using biarcs and Pythagorean hodograph quintics. In CAD Computer Aided Design, 38 (6): pp. 608–618, 2006
- [3] *Farouki, R., Moon H.P. and Choi, H.*: Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants, Computer Aided Geometric Design 18, pp. 93–115, 2001
- [4] *Farouki, R.T., Neff A.C.*: Hermite Interpolation by Pythagorean Hodograph Quintics, Mathematics of Computation, Volume 64, Number 212, October 1995, pp. 1589–1609
- [5] *Šír, Z., Kosinka, J.*: Low Degree Euclidean and Minkowski Pythagorean Hodograph Curves, M. Dæhlen et al. (Eds.): MMCS 2008, LNCS 5862, pp. 394–418, 2010
- [6] *Bernstein, S.J.*: Démonstration du théoreme de Weierstrass fondée, Communications of Kharkov Mathematical Society, vol. 13, pp. 1–2, 1912
- [7] *Kubota, K.K.*: Pythagorean Triples in Unique Factorization Domains. The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No. 5, May 1972, pp. 503–505
- [8] *Pressley, A.N.*: Elementary Differential Geometry, Springer, London, ISBN 978-1-84882-891-9, 2010
- [9] *Hoschek J., Lasser D.*: Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, Taylor & Francis, ISBN 9781568810072, 1996