MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radek Hronek

Sigma-ideál sigma-pórovitých množin

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval doc. RNDr. Miroslavu Zelenému, Ph.D., za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Název práce: Sigma-ideál sigma-pórovitých množin

Autor: Radek Hronek

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tato práce se zabývá pojmy pórovité a σ-pórovité množiny, u kterých dokazujeme některé základní vlastnosti. Nejdříve definujeme pojmy na reálné ose, v dalších kapitolách provádíme zobecnění do metrických prostorů. V závěru práce je sestrojeno několik zajímavých příkladů. V první kapitole konkrétně dokážeme, že σ-pórovité množiny jsou první kategorie. Hlavním výsledkem kapitoly je, že Lebesgueova míra σ-pórovitých množin na prostoru $\mathbb{R}^n$ je 0. V další kapitole se zabýváme σ-pórovitostí určitých množin a to v prostoru spojitých funkci, v druhém případě v prostoru neprázdných kompaktů na $\mathbb{R}^n$. V obou případech ukážeme, že dané množiny jsou σ-pórovité.

Klíčová slova: pórovitá množina, σ-ideál, sigma-pórovitost

Title: Sigma-ideal of sigma-porous sets

Author: Radek Hronek

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: This bachelor thesis deals with concepts of porous and σ-porous sets, where we prove some basic properties. First, we define terms on the real axis, in other chapters we generalize them into metric spaces. At the end of the thesis there are several interesting examples. In the first chapter we focus on demonstration that σ-porous sets are sets of the first category. The main result of the chapter is that the Lebesgue measure of the σ-porous sets in the space $\mathbb{R}^n$ is 0. In the following chapter we deal with the construction of certain sets in the space of continuous functions, in the second case in the space of the nonempty compact sets in $\mathbb{R}^n$. In both cases we show that given sets are σ-porous.

Keywords: porous set, σ-ideal, sigma-porosity

Obsah

Úvod

Jak již napovídá titul, předmětem práce budou σ-pórovité množiny, u kterých se seznámíme se základními vlastnostmi. Tento úvod si však klade za cíl stručně seznámit s pojmem pórovitost a σ-pórovitost, podrobnější komentáře ohledně obsahu lze najít v úvodech na začátku kapitol.

První zmínka o pórovitých množinách pochází od francouzského matematika A. Denjoye, který se ale zabýval pouze případem reálné osy a ve svém výzkumu používal jiné značení. Systematické studium σ-pórovitých množin podnítil Dolženko v roce 1967 svou prací (Dolženko, 1967), kde jako první použil pojem pórovitá množina (rusky „poristoe množestvo“). Ve své studii poukázal na to, že třída σ-pórovitých množin je podtřídou množin první kategorie a tvoří jejich vlastní podtřídu. V současnosti se okruhem těchto pojmů zabývá řada teorií, a to zejména v oblastech výjimečných množin, teorie derivace a teorie Banachových prostorů. Pro další seznámení lze doporučit přehledový článek (Zajíček, 1987/88), který sloužil jako základ této bakalářské práce.

Značení

Nejdříve zavedeme symboly, které se v práci často vyskytují a jejich význam by nemusel být intuitivně pochopen.

- Symbolem $\mathbb{R}^+$ budeme rozumět všechna kladná reálná čísla.
- Dvojicí (P, ρ) budeme rozumět obecný metrický prostor.
- Symbolem $B(x, r)$ budeme rozumět otevřenou kouli se středem x a poloměrem r v daném metrickém prostoru.
- Symbolem λ^n budeme rozumět Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$.

Definice 1. *Nechť $E \subseteq \mathbb{R}$ a I je interval. Poté označme $\psi(E, I)$ délku nejdelšího otevřeného podintervalu I, který neprotíná E. Pokud žádný takový podinterval neexistuje, klademe $\psi(E, I) = 0$.*

Definice 2. *Nechť $E \subseteq \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Poté definujeme*

- pórovitost *E v x jako*
  $p(E, x) = \limsup\limits_{h \to 0^+} \frac{\psi(E,(x-h,x+h))}{h}$,
- pórovitost zprava *E v x jako*
  $p^+(E, x) = \limsup\limits_{h \to 0^+} \frac{\psi(E,(x,x+h))}{h}$,
- pórovitost zleva *E v x jako*
  $p^-(E, x) = \limsup\limits_{h \to 0^+} \frac{\psi(E,(x-h,x))}{h}$.

Snadno nahlédneme, že pro $x \in E$ platí

$$0 \leq p(E,x) \leq 1,$$
$$p(E,x) = \max\{p^-(E,x), p^+(E,x)\}.$$

Definice 3. *Nechť $E \subseteq \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Poté řekneme, že*

- *E je* pórovitá *v x, pokud $p(E,x) > 0$,*
- *E je* pórovitá zprava *v x, pokud $p^+(E,x) > 0$,*
- *E je* pórovitá zleva *v x, pokud $p^-(E,x) > 0$,*
- *E je* silně pórovitá *v x, pokud $p(E,x) \geq 1$,*
- *E je* silně pórovitá zprava *v x, pokud $p^+(E,x) \geq 1$,*
- *E je* silně pórovitá zleva *v x, pokud $p^-(E,x) \geq 1$.*

Základní vlastnosti

V této kapitole provedeme zobecnění pórovitosti do obecných metrických prostorů, zavedeme pojem σ-pórovitost a dokážeme některé zakladní vlastnosti.

Definice 4. *Nechť $M \subseteq P$, $x \in P$. Poté položme*

$$\psi(x,h,M) = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ | B(z,r) \subseteq B(x,h) \setminus M \textit{ pro nějaké } z \in P\}.$$

Definice 5. *Nechť $M \subseteq P$, $x \in P$. Poté definujeme* pórovitost *M v x jako*

$$p(M,x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{2\psi(x,h,M)}{h}.$$

Definice 6. *Nechť $M \subseteq P$ a $x \in P$. Poté řekneme, že*

- *M je* pórovitá *v x, pokud $p(M,x) > 0$,*
- *M je* silně pórovitá *v x, pokud $p(M,x) \geq 1$,*

Definice 7. *Nechť X je množina, $\mathcal{A} \subseteq P(X)$. Poté řekneme, že $\mathcal{A}$ tvoří* σ-ideál, *pokud*

- *$\emptyset \in \mathcal{A}$,*
- *pokud $A \in \mathcal{A}, B \in P(X), B \subseteq A \implies B \in \mathcal{A}$,*
- *$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Definice 8. *Nechť $M \subseteq P$. Poté řekneme*

- *M je* pórovitá, *jestli je pórovitá ve všech svých bodech,*
- *M je* σ-pórovitá, *pokud je spočetným sjednocením pórovitých množin.*

Poznámka. Není těžké si rozmyslet, že systém σ-pórovitých množin v daném metrickém prostoru tvoří σ-ideál.

Věta 1. *Nechť $M \subseteq P$ je σ-pórovitá množina. Poté je první kategorie.*

Důkaz. Protože je M σ-pórovitá množina, můžeme ji zapsat jako $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou pórovité množiny. Ukážeme, že M_n jsou řídké, tím bude tvrzení dokázáno. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Z ekvivalentní charakterizace řídkých množin plyne, že M_n je řídká právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou $G \subseteq P$ existuje neprázdná otevřená množina $H \subseteq G$ taková, že $H \cap M_n = \emptyset$.

Zvolme libovolně G neprázdnou otevřenou. Pokud $G \cap M_n = \emptyset$, volme $H = G$ a jsme hotovi. Pokud $G \cap M_n \neq \emptyset$, poté existuje $x \in P$ a $h \in \mathbb{R}^+$ taková, že $x \in G \cap M_n$ a $B(x,h) \subseteq G$. Protože je M_n pórovitá v x, je $\psi(x,h,M) > 0$ a můžeme nalézt $z \in P$ a $r \in \mathbb{R}^+$, pro která platí

$$B(z,r) \subseteq B(x,h),$$
$$B(z,r) \cap M_n = \emptyset.$$

Položme $H = B(z,r)$. Poté zřejmě platí $H \neq \emptyset$, $H \subseteq B(x,h) \subseteq G$ a $H \cap M_n = \emptyset$. Čímž je věta dokázána.

□

Poznámka. Nechť $X \neq \emptyset$. Potom z Baireovy věty víme, že pokud (X, ρ) je úplný metrický prostor, pak je druhé kategorie. Tudíž z Věty 1 ihned dostáváme, že úplný metrický prostor X není σ-pórovitý.

Věta 2. *Nechť $A \subseteq P$, $x \in A$. Poté $p(x, \overline{A}) > 0$, pokud $p(x, A) > 0$.*

Poznámka. Z této věty plyne, že body pórovitosti množiny A jsou body pórovitosti množiny $\overline{A}$.

Důkaz. Nechť x je bod pórovitosti množiny A. Tudíž

$$p(A, x) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2\psi(x, \varepsilon, A)}{\varepsilon} = c > 0.$$

Z definice lim sup a $\psi(x, \varepsilon, A)$ dostáváme

$$\begin{aligned}(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists h_\varepsilon < \varepsilon)(\exists z_\varepsilon \in P)(\exists r_\varepsilon \in \mathbb{R}^+),\\ B(z_\varepsilon, r_\varepsilon) \subseteq B(x, h_\varepsilon),\\ B(z_\varepsilon, r_\varepsilon) \cap A = \emptyset,\\ \frac{2r_\varepsilon}{h_\varepsilon} > \frac{1}{2}c.\end{aligned} \tag{1}$$

Množina $D = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} B(z_\varepsilon, r_\varepsilon)$ je otevřená. Pro $\overline{A}$ platí

$$\overline{A} = \overline{A \setminus D} \subseteq \overline{P \setminus D} = P \setminus D.$$

Tudíž $D \cap \overline{A} = \emptyset$. Z této vlastnosti a (1) obdržíme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \sup_{h \in (0, \varepsilon)} \frac{2\psi(x, h, \overline{A})}{h} \geq \frac{2r_\varepsilon}{h_\varepsilon} > \frac{1}{2}c.$$

Celkově tedy máme

$$p(\overline{A}, x) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2\psi(x, \varepsilon, \overline{A})}{\varepsilon} \geq \frac{1}{2}c > 0.$$

□

Definice 9. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Poté definujeme* hustotu v ε-okolí *bodu $x \in \mathbb{R}^n$ jako*

$$d(x, A, \varepsilon) = \frac{\lambda^n(A \cap B(x, \varepsilon))}{\lambda^n(B(x, \varepsilon))}.$$

Věta 3 (Lebesque)**.** *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Poté pro skoro všechny body A platí*

$$d(x, A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} d(x, A, \varepsilon) = 1.$$

Důkaz věty lze najít v Lukeš (2005). Můžeme si všimnout, že při počítání Lebesgueovy míry množiny A se můžeme omezit pouze na míru její podmnožiny B, která je definována jako

$$B = \{x \in A : d(x, A) = 1\}.$$

Této vlastnosti využijeme při důkazu následující věty.

Věta 4. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je σ-pórovitá množina. Poté $\lambda^n(M) = 0$.*

Důkaz. Protože je M σ-pórovitá množina, můžeme ji zapsat jako $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, kde M_k jsou pórovité množiny. Nejdříve ukážeme, že

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lambda^n(M_k) = 0.$$

Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Poté je množina $\overline{M_k}$ uzavřená, tudíž měřitelná. Označme P_k body pórovitosti množiny $\overline{M_k}$. Protože je M_k pórovitá, platí dle Věty 2

$$M_k \subseteq P_k \subseteq \overline{M_k}.$$

Označme

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in \overline{M_k} : \neg(d(x, \overline{M_k}) = 1)\}, \\ B_k &= \{x \in \overline{M_k} : d(x, \overline{M_k}) = 1\}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že $B_k \cap P_k = \emptyset$. Nechť pro spor $B_k \cap P_k \neq \emptyset$. Zvolme $x \in B_k \cap P_k, h \in \mathbb{R}^+$ libovolně. Protože je $\overline{M_k}$ pórovitá v x, nalezneme $z \in \mathbb{R}^n$ a $r \in \mathbb{R}^+$ z definice $\psi(x, h, \overline{M_k})$ takové, že

$$\begin{aligned} B(z, r) &\subseteq B(x,h), \\ B(z, r) \cap \overline{M_k} &= \emptyset, \\ 2r &\geq \psi(x, h, \overline{M_k}). \end{aligned}$$

Následovně můžeme provést odhad

$$\begin{aligned} d(x, \overline{M_k}, h) &= \frac{\lambda^n(\overline{M_k} \cap B(x, h))}{\lambda^n(B(x, h))} \\ &= 1 - \frac{\lambda^n(\overline{M_k}^C \cap B(x, h))}{\lambda^n(B(x, h))} \\ &\leq 1 - \frac{\lambda^n(B(z,r) \cap B(x, h))}{\lambda^n(B(x, h))} \\ &= 1 - \frac{\lambda^n(B(z, r))}{\lambda^n(B(x, h))} \\ &= 1 - \frac{r^n}{h^n} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4n}\right)^n \left(\frac{4r}{h}\right)^n \\ &\leq 1 - \frac{1}{(4n)^n} \left(\frac{2\psi(x, h, \overline{M_k})}{h}\right)^n. \end{aligned}$$

Celkově tudíž máme

$$0 \leq d(x, \overline{M_k}, h) \leq 1 - \frac{1}{(4n)^n} \left(\frac{2\psi(x, h, \overline{M_k})}{h} \right)^n.$$

Přechodem lim sup pro $h \to 0_+$ dostáváme

$$0 \leq d(x, \overline{M_k}) \leq 1 - \frac{1}{(4n)^n} (p(\overline{M_k}, x))^n < 1.$$

Což je spor s předpokladem, že $d(x, \overline{M_k}) = 1$. Tudíž jsme obdrželi

$$\begin{aligned} B_k \cap P_k &= \emptyset, \\ P_k &\subseteq A_k. \end{aligned}$$

Navíc z Lebesgueovy věty dostáváme

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lambda^n(M_k) \leq \lambda^n(A_k) = 0.$$

Z vlastností Lebesqueovy míry máme

$$\lambda^n(M) \leq \lambda^n(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k) \leq \bigcup_{k=1}^{\infty} \lambda^n(M_k) = 0.$$

Čímž je věta dokázána.

$\square$

Příklady σ-porovitých množin

Nyní přejdeme k σ-pórovitosti některých zajímavých množin. Prvním příkladem bude podmnožina prostoru spojitých funkcí, pro které neexistuje vlastní pravostranná derivace v žádném její bodě. Důkaz bude vycházet ze (Valeriu, 1993). Dalším příkladem bude systém neprázdných kompaktních podmnožin prostoru $\mathbb{R}^n$, které mají konečně mnoho prvků.

Definice 10. *Nechť $[a, b]$ je uzavřený interval, $a, b \in \mathbb{R}$. Poté symbolem $C([a, b])$ označme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ s metrikou ρ definovanou předpisem*

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Věta 5. *Pro každé $a \in \mathbb{R}^+$ existuje funkce $u_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je 1/a-lipschitzovská s periodou $2a$ splňující*

- $0 \leq u_a(t) \leq 1 = u_a(a), t \in \mathbb{R},$
- *pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje interval $I_a(t) \subseteq [a/8, a]$ s délkou $a/8$ takový, že pro $h \in I_a(t)$ platí*

$$|u_a(t + h) - u_a(t)| \geq \frac{h}{3a}.$$

Důkaz. Zvolme $a \in \mathbb{R}^+$ pevné. Zadefinujme funkci

$$u_a(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & \text{pro } t \in [0, a), \\ \frac{2a-t}{a}, & \text{pro } t \in [a, 2a), \end{cases}$$

a

$$u_a(t + 2ka) = u_a(t), \text{pro } t \in [0, 2a), k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce $u_a(t)$ je zřejmě $1/a$-lipschitzovská s periodou $2a$ a splňuje první vlastnost. Nyní ověříme druhou vlastnost.

Pro $t \in [0, 3a/4)$ volme $I_a(t) = [a/8, a/4]$, poté máme

$$|u_a(t + h) - u_a(t)| = u_a(t + h) - u_a(t) = \\ \frac{t + h}{a} - \frac{t}{a} = \frac{h}{a} \geq \frac{h}{3a}.$$

Pro $t \in [3a/4, a)$ volme $I_a(t) = [7a/8, a]$, poté máme

$$|u_a(t + h) - u_a(t)| = u_a(t) - u_a(t + h) = \\ \frac{t}{a} - \frac{2a - t - h}{a} = \frac{h - 2a + 2t}{a} \geq \frac{h}{3a}.$$

Pro $t \in [a, 7a/4)$ volme $I_a(t) = [a/8, a/4]$, poté máme

$$|u_a(t + h) - u_a(t)| = u_a(t) - u_a(t + h) = \\ \frac{2a - t}{a} - \frac{2a - t - h}{a} = \frac{h}{a} \geq \frac{h}{3a}.$$

Pro $t \in [7a/4, 2a)$ volme $I_a(t) = [7a/8, a]$, poté máme

$$|u_a(t+h) - u_a(t)| = u_a(t+h) - u_a(t) =$$
$$\frac{t+h-2a}{a} - \frac{2a-t}{a} = \frac{h-4a+2t}{a} \geq \frac{h}{3a}.$$

Pro $t \in \mathbb{R} \setminus [0, 2a)$ nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $t = s + 2ka$ pro $s \in [0, 2a)$. Z periodicity u_a pak volíme

$$\begin{aligned} I_a(t) &= [a/8, a/4], \qquad && s \in [0, 3a/4) \cup [a, 7a/4). \\ I_a(t) &= [7a/8, a], \qquad && s \in [3a/4, a) \cup [7a/4, 2a). \end{aligned}$$

□

Věta 6. *Zadefinujme $M \subseteq C([0,1])$ jako*

$$M = \{x \in C([0,1]) \mid \exists t \in [0,1) : x'_+(t) \in \mathbb{R}\}.$$

Poté je množina M σ-pórovitá.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, položme

$$A_n = \{x \in C([0,1]) \mid \exists t \in [0, 1 - \frac{1}{n}], \forall h \in (0, \frac{1}{n}] : |x(t+h) - x(t)| \leq hn\}.$$

Je zřejmé, že $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ obsahuje ty funkce $x \in C([0,1])$, pro které existuje $t \in [0,1)$, že

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{|x(t+h) - x(t)|}{h} < +\infty.$$

Konkrétně, pokud má x v nějakém bodě $t \in [0,1)$ vlastní pravostrannou derivaci, poté $x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Tudíž $M \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Ukážeme, že A_n jsou pórovité množiny, tím bude tvrzení dokázáno.

Zvolme $n \geq 2$ pevné. Nechť $x \in A_n$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Díky stejnoměrné spojitosti x na intervalu $[0,1]$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro $t_1, t_2 \in [0,1], |t_1 - t_2| < \delta$, máme

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Nechť $a \in \mathbb{R}^+$ takové, že $a < 1/n, a < \delta, a < \varepsilon/n$. Pro toto a vezmeme funkci u_a z Věty 5 zúženou na interval $[0,1]$. Poté máme $u_a \in C([0,1])$, a

$$|u_a(t+h) - u_a(t)| \geq \frac{h}{3a}, \text{pro } t \in [0, 1 - \frac{1}{n}], h \in I_a(t),$$

kde $I_a(t) \subseteq [a/8, a]$.

Položme $u = 75\varepsilon u_a, z = x + u$. Ukážeme, že $B(z, \varepsilon) \cap A_n = \emptyset$. Pro $y \in B(z, \varepsilon), t \in [0, 1 - 1/n]$ a $h \in I_a(t)$ máme

$$\begin{aligned} |y(t+h) - y(t)| &\geq |u(t+h) - u(t)| - |(z-u)(t+h) - (z-u)(t)| - \\ &\quad |(y-z)(t+h) - (y-z)(t)| \\ &\geq 75\varepsilon \frac{h}{3a} - \varepsilon - 2\rho(y,z). \end{aligned}$$

Protože platí

$$\begin{aligned} -\varepsilon - 2\rho(y,z) &\geq -3\varepsilon, \\ -3\varepsilon &\geq -24h\varepsilon/a, \end{aligned}$$

obdržíme

$$|y(t+h) - y(t)| \geq h(\frac{25\varepsilon}{a} - \frac{24\varepsilon}{a}) = h\frac{\varepsilon}{a} > nh.$$

Takže $y \notin A_n$. Protože $\rho(x,z) = 75\varepsilon$, máme

$$B(z,\varepsilon) \subseteq B(x{,}76\varepsilon) \setminus A_n.$$

Číslo ε bylo voleno libovolné kladné, čímž dostáváme

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{2\psi(x,\varepsilon,A_n)}{\varepsilon} \geq \frac{2}{76} > 0.$$

Tudíž je A_n pórovitá v x. Protože x bylo z A_n voleno libovolně, je tím tvrzení dokázáno.

□

Poznámka. Podobně lze provést důkaz pro podmnožinu funkcí $C([0,1])$, pro které neexistuje vlastní levostranná derivace na intervalu $(0,1]$.

Definice 11. *Nechť A je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$, kde je zavedena standardní euklidovská metrika ρ. Pro $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme* vzdálenost bodu x od množiny A *jako*

$$dist(x,A) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in A\}.$$

Definice 12. *Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, A je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$, kde je zavedena standardní euklidovská metrika ρ. Poté definujeme* ε-okolí množiny A *jako*

$$A^\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n \mid dist(A,z) < \varepsilon\}.$$

Poznámka. Pojem ε-okolí množiny A lze ekvivalentně zadefinovat pomocí otevřených koulí, a to jako $A^\varepsilon = \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon)$.

Definice 13. *Nechť A, B jsou neprázdné podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Poté definujeme jejich* Hausdorffovu vzdálenost *jako*

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid A \subseteq B^\varepsilon \wedge B \subseteq A^\varepsilon\}.$$

Poznámka. Lze dokázat, že d_H je metrika na prostoru neprázdných kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$.

Definice 14. *Dvojicí $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ budeme rozumět prostor neprázdných kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ s metrikou d_H.*

Definice 15. *Nechť A je konečná množina. Poté symbolem $|A|$ značíme počet jejích prvků.*

Věta 7. *Zadefinujme $M \subseteq K(\mathbb{R}^n)$ jako*

$$M = \{A \in K(\mathbb{R}^n) \mid A \textit{ je neprázdná konečná množina}\}.$$

Poté je množina M σ-pórovitá.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme

$$M_k = \{A \in M \mid |A| = k\}.$$

Je zřejmé, že $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Ukážeme, že M_k jsou pórovité množiny. Tím bude tvrzení dokázáno.

Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Nechť $A \in M_k$. Pokud $k = 1$, volme $\delta = 1$, v ostatních případech položme $\delta = \min_{x,y \in A, x \neq y} \rho(x, y)$. Zvolme pevné $y \in A$. Pro $r \in \mathbb{R}^+$ zadefinujeme

$$C_r = \bigcup_{j=1}^{2} \{x_{j,r}\}, \text{ kde } x_{j,r} = [y_1 + (-1)^j r, y_2, \dots, y_n].$$

Zvolme $\varepsilon \in (0, \delta/2)$. Nechť $D_\varepsilon = A \cup C_{\varepsilon/2}$. Položme

$$L_\varepsilon = \min_{x,y \in D_\varepsilon, x \neq y} \rho(x, y) = \varepsilon/2. \tag{2}$$

Zřejmě $D_\varepsilon \in M$. Zvolme $F \in B(D_\varepsilon, L_\varepsilon/8)$. Nechť $z \in F$, poté díky (2) máme, že

$$|B(z, L_\varepsilon/4) \cap D_\varepsilon| \leq 1. \tag{3}$$

Protože $D_\varepsilon \subseteq F^{L_\varepsilon/4}$, platí ze vztahu (3) nerovnost $|F| \geq |D_\varepsilon| = k + 2$. Tudíž $F \notin M_k$. Protože $d_H(A, D_\varepsilon) = \varepsilon/2$, dostáváme

$$\begin{gathered} D_\varepsilon \in B(A, \varepsilon), \\ B(D_\varepsilon, L_\varepsilon/8) \cap M_k = \emptyset, \\ B(D_\varepsilon, L_\varepsilon/8) \subseteq B(A, \varepsilon) \setminus M_k. \end{gathered}$$

Celkově obdržíme

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2\psi(A, \varepsilon, M_k)}{\varepsilon} \geq \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2L_\varepsilon}{8\varepsilon} = 1/8 > 0.$$

Tudíž je M_k pórovitá v A. Protože A bylo z M_k voleno libovolně, je tím tvrzení dokázáno.

$\square$

Seznam použité literatury

DOLŽENKO, E. P. (1967). Boundary properties of arbitary functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **31**(1), 3–14.

LUKEŠ, J. A MALÝ, J. (2005). *Míra a integrál.* 2. vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-86732-68-1.

VALERIU, A. (1993). Porosity and continuous, nowhere differentiable functions. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **2**(1), 5–14.

ZAJÍČEK, L. (1987/88). Porosity and σ-porosity. *Real Anal. Exchange*, **13**(2), 314–350.