Posudek bakalářské práce "Sigma-idál sigma-pórovitých množin" studenta Radka Hronka

V bakalářská práce se dokazují dvě základní vlastnosti σ-pórovitých množin:

- σ-pórovité podmnožiny metrického prostoru jsou první kategorie (Věta 1);

- σ-pórovité podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jsou lebesgueovsky nulové (Věta 4).

Dále jsou uvedena a dokazována dvě tvrzení o σ-pórovitosti konkrétních množin:

- Věta 6 říká, že množina těch spojitých funkcí na kompaktním intervalu $[0, 1]$, které mají vlastní derivaci zprava ve všech bodech intervalu $[0, 1)$, je σ-pórovitá;

- Věta 7 říká, že množina neprázdných konečných podmnožin $\mathbb{R}^n$ je σ-pórovitá v prostoru neprázdných kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$.

První dvě věty jsou známé, je uveden odkaz na přehledový článek L. Zajíčka, Věta 6 je převzata z citovaného článku od A. Valeriu a Věta 7 je ilustrativním příkladem, který je pěkným cvičením na studovaný pojem. (Mohl by být různými způsoby zesílen.)

Podle mého názoru nejsou důkazy několika tvrzení napsány dostatečně podrobně a přesně. Považuji to vzhledem k převážně kompilační povaze práce, která není příliš rozsáhlá, za nedostatek. Za nedostatek považuji i to, že v úvodu je uvedena řada pojmů, které v práci nejsou použity.

Domnívám se, že se student seznámil s pojmem, který je v některých částech analýzy velmi užitečný. Převzaté výsledky mohl napsat podrobněji, resp. přesněji. Ilustrativní příklad (Věta 7) je zdá se vlastním řešením (není uvedena žádná citace), které svědčí o pochopení pojmu, i když provedení by opět mohlo být podrobnější a nenechávat na čtenáři potřebu si některá formulovaná pozorování domyslet.

Téma práce považuji za dobře zvolené. Rozsah práce na dolní přijatelné hranici. Práce obsahuje drobný vlastní výsledek. Provedení práce považuji za průměrné, a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Připomínky a dotazy k práci:

1. V jednoduchém důkazu Věty 1 bych vzhledem k typu práce očekával, že všechny kroky budou co nejpřesněji zdůvodněny. Na straně 1 dole se tvrdí, že veličina $\psi(x, h, M)$ je kladná pro všechna $x \in G \cap M_n$ a h kladná dosti malá. To je klíčové místo a mělo by být z definice pórovitosti vyvozeno?

2. Věta 2 je jednoduchým pomocným tvrzením, které plyne okamžitě z definice. Odhad v důkazu není potřebný, platí snadno dokonce rovnost. Stačí volit h, z, r pro ε stejně pro uzávěr množiny jako pro množinu původní?

3. Důkaz druhého tvrzení (Věta 4) je o něco komplikovanější a obsahuje též ne zcela vysvětlené kroky:

(a) Konstatování inkluze $P_k \subset \overline{M_k}$ pro množiny P_k, M_k tak, jak jsou definovány, z Věty 2 neplyne? Užívá se v dalším? (Nejsem si jist, zda definice pojmu "bod pórovistosti"je explicitně uvedena, ale snad je jasné, jak je to myšleno, zejména, že se týká všech bodů prostoru.)

(b) Není jasně vysvětleno, jak nalézt z a $r > 0$ k x, h z pórovitosti množiny $\overline{M_K}$ v bodě x?

(c) Nevím, proč se v nerovnosti na straně 6 dole objevuje ve jmenovateli n^n, do rovnosti, která tomu předchází určitě nepatří?

(d) Na straně 7 nerozumím tomu, co se myslí "přechodem k lim sup"?

(e) Proč je $P_k \subset A_k$? Lépe bych rozuměl důkazu, kdybychom Lebesgueovu větu použili pro námi pevně zvolené k, dostali nulovost $M_k \subset A_k$ a pak to použili pro všechna k.

4. V důkazu pomocného tvrzení Věta 5 by mohly být nerovnosti pro případy $t \in [3a/4, a]$ a $t \in [7a/4, 2a]$ dokázány podrobněji.

5. Platí tvrzení Věty 6 i s lim inf v definici pórovitosti?

6. Věta 7:

(a) (2) je označení, ale zároveň i tvrzení, tedy "Položme"není úplně na místě.

(b) Domnívám se, že to, jak plyne $|F| \geq k + 2$ z (3) by mělo být vysvětleno podrobněji? (Není mi z uvedeného jasné, jaký argument má autor na mysli.)

(c) Důkaz je psán stručně s tím, že není explicitně jasné, jak se volby násobků ε, resp. δ, použily.

(d) Platí tvrzení Věty 7 i s lim inf v definici pórovitosti?

7. V části značení jsou v Definicích 1,2,3 (a silná pórovitost v Definici 6) definovány pojmy, které se v dalším nepoužívají.

Několik zcela formálních připomínek:

Abstrakt. Namísto "několik zajímavých příkladů"by bylo vhodnější "dva příklady".

Abstrakt. Místo "kompaktů na $\mathbb{R}^n$"je asi vhodnější "kompaktů v $\mathbb{R}^n$"(v anglické verzi to tak přeloženo je).

Užívá se několikrát (Definice 4,5,6,8, Věta 1,2) P bez uvedení toho, že je tím míněn metrický prostor (zřejmě včetně dané metriky). Domnívám se, že věta "Dvojicí (P, ρ) budeme rozumět obecný metrický prostor.", uvedená ve Značení, to neimplikuje.

V Praze dne 9. 6. 2017

Petr Holický

oponent bakalářské práce