Posudek diplomové práce

FOURIER-GALERKIN METHOD FOR STOCHASTIC HOMOGENIZATION OF ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Eva Vidličková

Téma
Práce se zabývá výpočtem homogenizovaných parametrů okrajové úlohy pro skalární eliptickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu s Dirichletovými okrajovými podmínkami a s náhodnými parametry (říkejme jim materiálové).

Obsah
Po úvodu shrnujícím motivaci práce, témata jednotlivých kapitol a hlavní zdroje z odborné literatury jsou v první kapitole představeny základní pojmy a výsledky týkající se slabé* konvergence, skalárních a vektorových funkcí periodických v $\mathbb{R}^m$, prostorů potenciálních a solenoidálních funkcí aj. Zavádí se $\square$-periodická okrajová úloha ($\square$ značí periodickou buňku) s periodickými funkcemi na místě materiálových parametrů a její slabé řešení, z ní odvozený systém úloh závislých na parametru $\varepsilon \to 0$ vystupujícím v transformaci proměnné x/ε. Definuje se homogenizovaná (tj. s konstantními prvky) matice parametrů diferenciální rovnice daná limitním přechodem $\varepsilon \to 0$. Jsou zavedeny pomocné okrajové úlohy s periodickými koeficienty a formulována věta o existenci a výpočtu homogenizované (též zvané efektivní) matice.

Druhá kapitola je věnována stochastické homogenizaci, kdy jsou materiálové parametry náhodné. Cílem je náhodné parametry zhomogenizovat, tj. odvodit takové konstantní materiálové parametry, že při jejich použití bude řešení okrajové úlohy blízké řešením odpovídajícím náhodným parametrům. K tomu se zavádějí nové pojmy, nejdůležitější je míru zachovávající dynamický systém, pomocí něhož se pak například definují realizace náhodných funkcí. Opět se zavádí potenciální i solenoidální vektorové pole a pomocná okrajová úloha, vše tentokrát na prostoru s pravděpodobnostní mírou. Je uvedena existenční věta o homogenizované matici materiálových parametrů. Její podstatnou ingrediencí je dynamický systém parametrizovaný prostřednictvím $x \in \mathbb{R}^m$, což je z praktického hlediska nutné nahradit periodickým modelem omezeným na buňku S_ρ, jíž je m-dimenzionální krychle s těžištěm v počátku souřadnic a se stranami délky ρ rovnoběžnými se souřadnými osami. Ukazuje se, že homogenizované matice získané z periodického modelu konvergují při $\rho \to \infty$ k původní homogenizované matici náhodných materiálových parametrů.

Na základě předchozích kapitol je v třetí kapitole vzata referenční buňka $\square \equiv S_\rho$ a jsou zavedeny slabě formulované diskretizované úlohy pro přibližné řešení deterministického problému (tj. pro pevně dané materiálové parametry) na referenční buňce. Aproximační prostory jsou založeny na Fourierově transformaci, prakticky však na částečných Fourierových rozvojích, tj. konečných lineárních kombinacích goniometrických funkcí. Jako bázové funkce však nejsou použity funkce přímo z Fourierova rozvoje, nýbrž jejich speciální lineární kombinace získané pomocí diskrétní Fourierovy transformace. Výsledný systém bázových funkcí má výhodné ortogonální vlastnosti. Jsou uvedeny odhady chyb interpolace a aproximace přesného řešení přibližným, a to i s uvážením numerické integrace. Závěr kapitoly je zaměřen na popis odpovídajícího systému lineárních algebraických rovnic a jeho vlastností.

Čtvrtá kapitola se zaměřuje na přibližné řešení stochastické úlohy v periodické variantě (viz výše), kde opět $\square \equiv S_\rho$. Cílem je vypočítat střední hodnotu homogenizovaných materiálových parametrů. Za zjednodušujících předpokladů, mj. že matice náhodných parametrů $A(x,\omega)$ závisí jen na konečném počtu náhodných veličin Y_i, tj. $A(x,\omega) = A(x, Y_1(\omega), \ldots, Y_M(\omega))$, je úloha převedena na deterministický problém, ale (o M) zvýšené dimenze, kde vyvstává nesnáz s integrací funkcí přes oblasti velké dimenze. Jsou představeny dvě metody: metoda Monte Carlo a kolokační metoda ve dvou variantách — s plnou a s řídkou sítí kolokačních bodů, u řídké sítě ve dvou modifikacích (s Clenshawovými-Curtisovými a Gaussovými integračními body). Pozornost je věnována konvergenci těchto metod a odhadům chyby přibližných efektivních matic.

Závěrečná kapitola je zaměřena na numerické řešení testovacích úloh, v nichž jsou na jednotkovém čtverci náhodné materiálové parametry reprezentovány šachovnicí $N \times N$ konstantních hodnot z intervalu $[1, 10]$, kde N je až 30. Část testů se zabývá situací, kdy náhodné parametry jsou korelované.

Práce je ukončena jednostránkovými závěry, přehledem literatury s 16 položkami, seznamem obrázků a tabulek. Jako doplněk je přiložen výpis některých částí autorčina programu v jazyce `Python` použitého k výpočtům.

Jazyk
Diplomová práce je napsána angličtinou na srozumitelné, dobré úrovni s nemnoha chybami.[1]

Grafická úprava a sazba
Práce je vysázena velmi úhledně, pravděpodobně v LaTeXu. Vzhledem k množství jak pojmů s definovaným označením, tak složitějších výrazů je obdivuhodné, jak zřídka se vyskytne drobná chyba.[2]

Styl
Jsem si vědom toho, že názory v této části posudku jsou částečně subjektivní. Možná svým postojem stojím mimo současné trendy na MFF UK, ale přikláním se k tradičnímu pojetí diplomových a disertačních prací, v němž se předpokládalo, že práce čtenáři poskytne dostatek (až nadbytek) podrobností. Předložená práce je však protipólem tohoto pojetí.

V žádném případě tím nechci říci, že autorka nemá strukturu a jednotlivé kroky textu promyšlené, čtenáři však neusnadňuje porozumění bohatého obsahu

[1] Poměrně systematické přidávání určitého členu *the Definition XY* nebo *the Theorem XY* (strana 17, 22, 25, 26, 27, 30, 37, 39). Nestandardní termíny *symmetrical* (strana 9), *trigonometrical* (strana 8, 34). Nadbytečný neurčitý člen *a realizations* (strana 21). Slovosled *can be also very* (strana 34) a několik málo dalších zaškobrtnutí.

[2] Pro ilustraci: Font operátoru *curl* a funkce *exp* a *cov* (strana 6, 29 a 68), dále $\mathcal{C}^m$ a $\mathbb{N}_m$ na straně 33; dvojité $\rfloor$ (strana 8); chybějící exponent ε v (1.13). Funkce q místo správné funkce g ve slabé konvergenci na straně 21. Ve (4.5) asi něco chybí za a_{min}. Ve (4.10) má asi být $\| \ \|_{V_\mu}$. Nejasný odkaz *in 4.3* (strana 47). Někdy odkazování na sekce čísly v závorkách, tedy jako na číslované výrazy (na více místech). Výraz $x^2 + y^2$, když $x, y \in \mathbb{R}^2$ (strana 68).

textu. Mlčky předpokládá, že čtenář zná význam některých symbolů[3] (L^2, H^1, H^{-1}, $\mathcal{C}_0^\infty$), povšimne si používání Einsteinovy sčítací konvence (strana 9, 10 a 20) nebo si doplní standardní předpoklady (lipschitzovská hranice). Symbol *a.s.* (almost surely) je použit na straně 27, ale vysvětlen až na straně 44. To jsou drobnosti, čtenář však více zápasí s občas delším krokem v řetězci dedukcí. Přitom by stačilo málo — vložit mezikrok, připomenout použitou vlastnost, uvést odkaz atd.

V úvodní kapitolce i na začátcích jednotlivých kapitol jsou zmíněny hlavní zdroje k jednotlivým tématům, ale ve vlastním textu jsou konkrétní odkazy na větu, lemma či důkaz nepříliš časté. Není pak jasné, co je převzato z literatury a co je autorčiným příspěvkem. Někde tím autorka zamlčuje vlastní zásluhy. Srovnáním s literaturou jsem například zjistil, že dokázané tvrzení Lemma 1.2 je převzato z [Jikov et al., 1994], kde je uvedeno bez důkazu, ten je dílem autorčiným. Užívání odkazů je nejen sporadické, ale občas i neurčité.[4]

Dalším rysem, který neusnadňuje čtení, je zjednodušený zápis, v němž se nečiní rozdíl mezi skalárními a vektorovými veličinami, ačkoli [Jikov et al., 1994], jeden z podstatných zdrojů práce, značí vektorové funkce tučně a vyznačuje i počet složek odpovídajícího prostoru — například $(L^2(Q))^m$.

Na druhé straně chápu, že se autorka snaží o úsporný výklad, neboť i tak má práce přes 80 stran.

Pochvalu zaslouží, že většina podkapitol začíná krátkými odstavečky, které čtenáře seznamují s tématem a cílem daného oddílu.

Matematická úroveň

Jak již ukázal obsah, práce pokrývá řadu obtížných témat. Přestože hlavním samostatným výsledkem se zdají být numerické výpočty, než k nim autorka mohla přistoupit, musela zvládnout teorii homogenizace periodických úloh i stochastických úloh. Nadto jak přeformulování stochastické úlohy v úlohu deterministickou, ale podstatně vyšší dimenze, tak vhodné speciální numerické metody. Ačkoli čerpala z různých zdrojů, témata jsou podána v souhrnu uceleném logicky i značením.

Vzhledem k objemu a hloubce zpracované látky je neuvěřitelné, že téma diplomové práce bylo zadáno až 30. 8. 2016, a že tedy práce vznikla během osmi měsíců.

Otázky k práci

1. V oddíle 2.1.2 je zaveden dynamický systém T a zobrazení $T(x)$ stochastické proměnné ω, které závisí na prostorové proměnné x. Vysvětlete prosím jasněji smysl dynamického systému ve stochastické homogenizaci a zda se vlastně dynamický systém nějak uplatní v její praktické výpočetní realizaci.

2. Ke kapitole 5. Jako referenční řešení je vzat výsledek získaný metodou Monte Carlo s velkým počtem vzorků (100 000, 1 350 000). S tímto výsledkem

[3] Pak čtenář neví, zda Ł značí nějaký nový prostor nebo jde jen o tiskovou chybu (strana 23).

[4] Například k Theorem 2.1 *Proof can be found in [Dunford and Schwartz, 1988]*, když monografie má dokonce tři díly.

se srovnávají výsledky kolokační metody. Jak je třeba rozumět poslednímu sloupci tabulek 5.2, 5.3 a 5.4, kde je také zmíněna metoda Monte Carlo?

Vzorky parametrů pro metodu Monte Carlo byly generovány přímo pomocí standardního generátoru pseudonáhodných čísel nebo nějakým specializovaným algoritmem, například Latin Hypercube či algoritmy optimálního návrhu experimentů?

Závěr
Práci navrhuji uznat jako diplomovou.

V Praze dne 31. května 2017

Jan Chleboun
Katedra matematiky FSv ČVUT v Praze