Posudek vedoucího práce Dominika Lachmana

Vítězslav Kala

31. května 2017

Bruhatovy-Titsovy budovy, kterým se diplomová práce Dominika Lachmana věnuje, jsou základním kombinatoricko-geometrickým nástrojem ke studiu reduktivních maticových grup zejména s koeficienty v tělese p-adických čísel $\mathbb{Q}_p$, např. grup $GL_d(\mathbb{Q}_p)$ a $SL_d(\mathbb{Q}_p)$. Budova $\mathcal{B}(G)$ dané grupy G (mimo jiné) umožňuje popsat strukturu jistých podgrup a (nekonečně-rozměrných) reprezentací G. Definovat a explicitně popsat $\mathcal{B}(G)$ ale není úplně jednoduché: budova je sjednocením nekonečně mnoha bytů, z nichž každý je izomorfní $\mathbb{R}^{d-1}$ (kde d je hodnost grupy G) a jež se od sebe „oddělují" podle jisté stromovité struktury. Tomuto dělení bytů také odpovídá jistý graf (přesněji řečeno, simpliciální komplex), jehož vrcholy jsou dané speciálními normami.

Cílem posuzované práce bylo právě vytvořit nástroje k porozumění struktuře budovy $\mathcal{B}(SL_d(\mathbb{Q}_p))$. Za tímto účelem autor zvolil definici budovy pro $SL_d(\mathbb{Q}_p)$ jako množiny všech rozkladových bází norem vektorového prostoru $\mathbb{Q}_p^d$, čemuž pak odpovídá reprezentace prvků budovy a bytů jako jistých $d \times d$-matic s prvky z $\mathbb{Q}_p$. V tomto jazyce pak detailně popsal celou budovu, její vrcholy a byty, ale navíc také samostatně objevil řadu velmi pěkných vzorců například pro určení vzdálenosti mezi dvěma vrcholy nebo pro délku nejkratšího stromu, který spojuje tři vrcholy.

Kromě úvodu a 1. kapitoly, která shrnuje základní definice, jsou téměř všechny výsledky v práci originální. I když jde například v kapitole 2, jež se věnuje budově pro $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, často o známá tvrzení, diplomant samostatně zavedl explicitní popis založený na maticových reprezentantech, pomocí nějž potom tato tvrzení dokázal. Počínaje sekcí 2.3 se pak ve zbytku práce věnuje dokazování výsledků o metrické struktuře budovy, které jsou v této explicitní podobě dle mého názoru nové a velmi zajímavé.

3. kapitola představuje zásadní část práce. V sekci 3.2 je dokázaný obecný vzorec pro vzdálenost dvou vrcholů budovy poté, co nejprve sekce 3.1 vybuduje aparát potřebný k důkazu, že tyto (a jiné vzorce) nezávisí na volbě maticových reprezentantů. Sekce 3.3 pak určuje relativní souřadnice dvou vrcholů a sekce 3.4 zavádí obarvení celé budovy. Tyto výsledky jsou dále v 6. kapitole částečně rozšířeny na zkoumání vzájemné polohy 3 vrcholů. Kapitola 4 je zaměřena na náročný problém porozumění rozložení jednotlivých bytů a kapitola 5 na strukturu komor a jejich vzdálenosti ve smyslu počtu potřebných překlopení. Tato kapitola je v jistém smyslu protějškem nebo variací kapitoly 3 – ovšem v případě komor je situace ještě náročnější než u vrcholů.

Práce je poměrně přehledně napsaná; porozumění značně napomáhají četné neformální komentáře, které vysvětlují a ilustrují, o co zrovna jde, a často zdůrazňují důležité geometrické myšlenky důkazů. Práce je psaná anglicky a její jazyková úroveň sice není úplně dokonalá, ale je zcela adekvátní úrovni a rozsahu práce. Stejně tak jisté množství drobných (převážně formálních) nedodělků jí neubírá na kvalitě a pochopitelnosti.

Přestože jsou budovy v posledních cca. 40 letech hojně studovaným tématem, domnívám se, že v této podobě jsou uvedené výsledky nové, a proto by měly být publikované. Bruhatovy-Titsovy budovy v dimenzi vyšší než 1 jsou velmi obtížně přímo vizualizovatelné, i přesto, že jde „pouze“ o sjednocení nespočetně mnoha Euklidovských prostorů. Metrické výsledky Dominika Lachmana jsou cenné právě tím, že nabízejí poněkud jiný přístup k uchopení geometrie budovy a tím i k přímější práci s ní. Kromě toho je zde poměrně velký prostor k pokračování v dalším výzkumu, například uvažováním budov jiných grup než $SL_d(\mathbb{Q}_p)$. Zejména u nerozštěpených grup by mohlo jít o velmi zajímavé náročnější problémy.

Jak je vidět z tohoto stručného popisu, jde o práci na velmi náročné téma, už jen množstvím materiálu, se kterým se bylo potřeba seznámit. Autor se toho zhostil výborně a poměrně rychle se mohl pustit do vlastní výzkumné práce, během níž také samostatně vymýšlel potřebné definice a věty, často za použití nemalého množství invence a geometrického vhledu do tématu; tomu také odpovídá to, že důkazy v práci jsou často dosti náročné. Všeobecně tuto práci považuji za velmi zdařilou a originální, a proto ji vřele doporučuji uznat jako diplomovou a hodnotit ji stupněm *výborně*.

Vítězslav Kala
Katedra algebry