Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Strategie řešení úloh o obsahu rovinných obrazců na základní škole

Startegies of solving problems focusing on area of plane figures in elementary school

Bc. Věra Patočková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Učitelství pro střední školy (N7504)

Studijní obor: N M (7504T221)

2017

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Strategie řešení úloh o obsahu rovinných obrazců na ZŠ vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne ....

Bc. Věra Patočková

Poděkování:

Ráda bych na tomto místě vyjádřila poděkování všem, kteří mi s přípravou mé diplomové práce pomáhali a podporovali mě.

Především bych chtěla poděkovat své vedoucí práce prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za cenné rady, připomínky a čas, který mi věnovala. Také žákům a učitelům, kteří se zúčastnili mého experimentu, za jejich čas a ochotu. A v neposlední řadě bych ráda poděkovala své rodině, která mě při psaní této práce podporovala.

Abstrakt:

Tématem diplomové práce jsou žákovské strategie řešení vybraných úloh o obsahu rovinných obrazců. Součástí teoretické části je vymezení základních pojmů - úloha, obsah, úlohy o obsahu, řešení úloh, strategie řešení. Rovinné obrazce jsou rozděleny do jednotlivých školních ročníků. U každého rovinného obrazce jsou ukázky typů úloh, které se nejčastěji objevují na základních školách. Praktická část práce začíná přípravou experimentu, kde je uveden cíl experimentu, výběr úloh pro tento experiment, popis testované skupiny a způsob získávání dat. Následuje popis provedení experimentu. Jeho součástí jsou tři úlohy na obsah rovinných obrazců, které řešili žáci osmých a devátých ročníků. Uvedeny jsou předpokládané strategie, očekávané chyby a analýza žákovských řešení. Pro každou úlohu jsou porovnány očekávané řešitelské strategie a strategie, které žáci použili ve skutečnosti. Výsledek experimentu je shrnut v závěru.

Klíčová slova:

úloha, obsah, úlohy o obsahu, řešení úloh, strategie řešení, heuristické strategie

Abstract:

The theme of the diploma work are pupil's strategies of solving selected problems focusing on area of plane figures. The theoretical part includes definitions of basic ideas – problem, area, problems of area, solving problems, solving strategies. Plane figures are classified into particular school classes. Every plane figure is presented by examples of types of the problems, which are most common in elementary schools. The practical part of the work begins with the preparation of an experiment, where the objektive of the experiment is introduced, selection of problems for this experiment, description of tested group and the way of getting data. Follows the description of realization of the experiment. It contains three problems of the area of plane figures which were solved by pupils of the eighth and the ninth class. Supposed strategies, expected mistakes and analysis of pupil's solutions are presented. Expected and obtained solving strategies are compared for every problems. The result of the experiment is summarised in the conclusion.

Keywords:

problem, area, problems of area, solving problems, solving strategies, heuristic strategy

Obsah

1. Úvod

Proč věnovat tolik času řešením úloh o obsahu a jejich rozboru? Na to je jednoduchá odpověď: nejen ti, kdo studují matematiku, potřebují znát obsah určité plochy. Úlohy o obsahu jsou ve značné míře brány z reálného života. Počítání obsahu využijeme například při výměře pozemku, při stavbě domu, při výpočtu daně z nemovitosti, navrhování bazénu na zahradu, rozložení nábytku v pokoji, při zjišťování, zda se nám pračka nebo vana vejdou do prostoru v koupelně, zda si můžeme koupit velikou úhlopříčnou televizi, když na ni je vyhrazený určitý prostor, a při spoustě dalších případů. Je to věc praktická do života, a proto se jí musí věnovat dostatečná pozornost.

Celá diplomová práce je věnována úlohám o obsahu rovinných obrazců, které se probírají na základních školách. Také řešitele pro můj experiment jsem vybrala z řad žáků základních škol.

Co v této práci čtenář nalezne? Nejprve shrnuji informace o pojmech, které v práci používám, jako např.: obsah, úloha, strategie řešení. Dále se v této diplomové práci zabývám rovinnými obrazci probíranými na základní škole. V této části zařazuji rovinné obrazce do ročníků, ve kterých jsou obvykle zaváděny, a u každého obrazce uvádím typy úloh, které se na základní škole objevují nejčastěji. Následuje příprava experimentu. Zde uvádím cíle experimentu, jaké úlohy jsem vybrala pro experiment a důvod jejich volby, které ročníky jsem pro jejich řešení vybrala a jak jsem získávala data potřebná pro vyhodnocení. Na tuto část navazuje popis provedení experimentu, ve kterém u jednotlivých úloh nejprve ukazuji předpokládané strategie. Dále u těchto úloh uvádím očekávané chyby a mé odhady, zakládající se na vlastních zkušenostech, jaká strategie bude nejčastěji použita. Nakonec rozebírám strategie řešení, které se objevily v žákovských řešeních. Na závěr této práce porovnávám jednotlivé úlohy nejen na počty strategií, které se v žákovských řešeních objevily, ale také na jejich náročnost z pohledu žáků osmých a devátých ročníků základních škol.

Od výzkumu jsem očekávala, že získám přehled o tom, jaké strategie řešení mohou spontánně použít a použijí žáci osmých a devátých ročníků u vybraných úloh na obsah rovinného obrazce. Současně jsem zjišťovala, zda se jejich strategie řešení budou lišit od strategií řešení učitelů, kteří tyto úlohy také řešili. V neposlední řadě mě zajímalo, zda jsou takovéto typy úlohy o obsahu rovinných obrazců pro žáky osmých a devátých ročníků náročné a které jsou nejnáročnější.

2. Přehled pojmů používaných v této diplomové práci

2.1. Úloha

Pod názvem úloha se skrývá více významů, například funkce, postavení, úkol, role, atd. V této práci se nezabývám úlohou člověka ve společnosti, ani žádnou hereckou rolí, ale úloha je zde zadání či úkol, otázka, na kterou hledáme odpověď. Tento pojem se objevuje nejen v matematice, ale i v jiných předmětech, kde dostává řešitel jistý úkol a hledá cestu k jeho splnění. Ve slovenském slovníku se můžeme dočíst, že slovo úloha znamená například: „*čo treba vykonať; určená, vymedzená činnosť smerujúca k istému cieľu.*“ (slovník.sk, 2017) V této práci rozumím úlohou požadavek splnit nějaký úkol, k jehož vyřešení použijí řešitelé dříve nabyté znalosti a zkušenosti.

Protože tato práce je z oblasti didaktiky matematiky, vymezuji pojem matematická úloha. Stejně jako úloha je i matematická úloha zadání nebo situace, která podněcuje řešitele k činnosti, směřující k dosažení stanoveného cíle. U matematické úlohy řešitel během této činnosti objevuje nové matematické poznatky, opakuje si matematické učivo nebo prověřuje jeho zvládnutí.

<u>Obvyklá klasifikace matematických úloh:</u>

„*1. Úlohy, jež nevyžadují tvořivost řešitele a řeší se použitím algoritmů, mechanismů; nazýváme je cvičné úlohy.*

2. Úlohy, které vyžadují tvořivost řešitele v nejširším rozsahu (od přizpůsobení jemu známých mechanismů až po vytvoření nových schémat); nazýváme je problémy.

Uvedené třídění je relativní podle osoby řešitele (jeho matematické vzdělanosti).“ (Kopka, 1977, s. 289)

V některých publikacích (Kalhous & Obst, 2009; Průcha et al., 2001; Holoušová, 1983; ...) se před slovem úloha objevuje přívlastek učební. Co je učební úloha a má něco společného s matematickou úlohou?

Kalhous & Obst (2009, s. 329) charakterizují učební úlohu: „*jako širokou škálu všech učebních zadání, a to od nejjednodušších úkolů, vyžadujících pouhou pamětní reprodukci poznatků, až po složité úkoly, vyžadující tvořivé myšlení.*“

Pedagogický slovník tento pojem vymezuje takto: „*Učební úloha je každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle.*“ (Průcha et al., 2001, s. 258)

Zormanová (2014, s. 176) tento termín vymezuje pomocí jiných formulací než pedagogický slovník, a to takto: *„Učební úlohy ověřují naplňování výukového cíle a představují nástroj sloužící k řízení učení. Při řešení úloh mají žáci získávat nové znalosti a dovednosti, k čemuž dochází především při řešení problémových úloh. Řešení učebních úkolů slouží k fixaci osvojeného učiva a ke kontrole, do jaké míry si žáci osvojili učivo."* Základ v obou vymezeních zůstává stejný a to, že učební úlohy nám slouží ve výuce a dosahujeme pomocí nich učebního (výukového) cíle.

Učební úlohy jsou tedy nástroje v pedagogických situacích, sloužící nejen k upevňování osvojeného učiva, ale také k dosahování a ověřování naplňování stanovených výukových cílů. Tato vymezení říkají, k čemu učební úlohy slouží a v jakých situacích. Neurčují však cílový předmět, protože je můžeme použít jak v matematice, tak i ve fyzice, chemii atd. Používáme-li učební úlohy v matematice, pojmenováváme je většinou matematické úlohy. Proto učební úlohy zařazuji jako podsoubor úloh matematických. V této práci se zabývám výhradně úlohami matematickými, proto budu dále používat pouze termín úloha.

2.2. Obsah

Mluví-li se v matematice o obsahu, člověku se většinou vybaví čtverec či jiný geometrický útvar, který chceme něčím zakrýt, obarvit, či vyplnit.

Wikipedie zavádí pro tento pojem následující definici: *„Obsah je v geometrii veličina, která vyjadřuje velikost plochy. Jiné názvy jsou plocha, výměra, rozloha. Obsah je mírou (tedy charakteristikou velikosti) dané dvourozměrné části prostoru."* (Wikipedie, 6.12.2016) V anglické wikipedii (Wikipedia, 9.2.2017) se dočteme, že obsah můžeme chápat například jako množství barvy nezbytné pro pokrytí povrchu určitého materiálu.

Obsah je také název, kterým se pomocí číselné hodnoty popisuje, jak veliká je určitá ohraničená část roviny (rovinného obrazce).

Obsah rovinného obrazce je důležitou součástí matematického poznání jak na základních školách, tak i na školách středních. V učebnici (Pomykalová, 1997, s. 65) je obsah rovinného obrazce popisován jako: *„kladné číslo, přiřazené geometrickému obrazci tak, že platí:*

1. Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.

2. Skládá-li se obrazec z několika obrazců, které se navzájem nepřekrývají, rovná se jeho obsah součtu jejich obsahů.

3. Obsah čtverce, jehož strana má délku 1 (mm, cm, ...), je 1 (mm^2, cm^2, ...)."

Další vymezení tohoto pojmu nabízí slovník školské matematiky (1981, s. 127), který obsah rovinného obrazce definuje takto: *„Obsah obrazce (útvaru) v rovině – v matematice číslo přiřazené obrazci (útvaru) některou mírou m definovanou na určité množině rovinných útvarů. Zvolenému čtverci E přísluší míra m(E) = 1, dalším útvarům přiřazujeme míry tak, že využíváme vlastnosti funkcí, nazývaných míra útvaru.“*

Ve slovníku školské matematiky (1981, s. 108) je také vymezen termín míra útvaru: *„Míra útvaru – společný název pro délku útvaru na přímce či křivce, pro obsah útvaru v rovině či na ploše, pro objem útvaru v prostoru. Pojem míra vyjadřuje společné vlastnosti funkcí, které přiřazují útvarům nezáporná reálná čísla jako jejich délky (obsahy, objemy).“*

Pod pojmem obsah budu rozumět obsah rovinného obrazce, tudíž kladné číslo přiřazené geometrickému obrazci tak, že definuje velikost plochy tohoto obrazce, kterou je možno vyplnit, či zabarvit.

2.3. Úlohy o obsahu

Pod pojmem úloha o obsahu můžeme rozumět požadavek určit obsah vyplněné, či zabarvené plochy daného geometrického obrazce. Je to zadání nebo situace, která podněcuje řešitele k určení velikosti plochy tohoto obrazce. Tyto úlohy jsou důležitou součástí matematického poznání, neboť mají často praktické využití v reálném životě. Příkladem může být malování stěn pokoje, kdy potřebujeme vědět, kolik barvy koupit.

Úlohy o obsahu mají *„praktické aplikace, s nimiž se žáci i v dospělosti budou setkávat na každém kroku.“* (Vondrová et al., 2013, s. 198)

V této diplomové práci se budu zabývat úlohami o obsahu rovinných obrazců. Zaměřím se na čtverec, obdélník, trojúhelník, lichoběžník, kruh a další obrazce, které vznikají jejich složením (spojením dvou a více rovinných obrazců v jeden).

Úloha o obsahu může být zadána různě, např. jako slovní úloha, úloha s obrázkem, čistě početní nebo problémová úloha. Tyto typy úloh charakterizuji takto:

Slovní úlohy - zadány delším textem, ve kterém jsou zakomponovány rozměry, které řešitel potřebuje znát. Obvykle je v nich popsaná určitá reálná situace. Za slovní úlohu nepovažuji text: „Vypočítej obsah obrazce s rozměry ____.“ Naopak za slovní úlohu považuji např.: *„Na obdélníkovém poli o rozměrech 95 a 42 metrů jsou tři kruhové postřikovače, dva* *s dostřikem 12 m a jeden s dostřikem 10 m. Zavlažované kruhy se nepřekrývají. Kolik procent výměry pole je zavlažováno?"* (Cihlář, 1994, s. 44)

Úlohy s obrázkem – hlavní roli zde hraje obrázek, ze kterého řešitel vyčte rozměry potřebné pro počítání. Takováto úloha může být zadána také ve formě slovní úlohy, ze které řešitel musí vyčíst, jak obrázek bude vypadat. Např.: *„Po stranách čtvercové podlahy podél zdi přibil parketář bukovou lištu mimo těch úseků, kde byly dvoje dveře široké 90 cm. Vypočítejte délku použité lišty, jestliže strana podlahy byla dlouhá 5,2 metru."* (Trejbal, 1997, s. 50)

U ***čistě početních úloh*** může znít zadání například takto: „Vypočítej obsah obrazce s rozměry____." Pro tento typ úloh postačí znát správný vzoreček (popř. více vzorců), do kterých dosadíme rozměry ze zadání.

Problémové úlohy jsou ty, pro které nemá řešitel v daném okamžiku nástroje k řešení. Je to úloha, u které pro její vyřešení nestačí znát pouze vzorce, je zapotřebí umět převést vědomosti/dovednosti z teoretické roviny do praktické situace. Do jaké míry je úloha problémová, závisí na osobě, která je vyzvána k jejímu řešení, nezávisí to pouze na otázce.

Pro experiment jsem vybrala úlohy s obrázkem, jelikož je osobně vnímám jako úlohy, u kterých může být řešitel tvořivější a použít méně obvyklé strategie řešení.

2.4. Řešení úloh

Co znamená **řešit úlohu**? „*Podle Polya: Řešit úlohu znamená hledat vědomě vhodný postup k dosažení cíle; …"* (Ištvánková, 2013, s. 17) Tohoto cíle nemusíme dosáhnout okamžitě. Někdy stačí dosáhnout jen částečného výsledku, abychom následně dospěli k toužebnému cíli.

„*Řešení úlohy je praktická dovednost, při které musí žák přemýšlet, dokonale porozumět zadání, najít vztahy a závislosti v něm ukryté."* (Ištvánková, 2013, s. 17) Může se stát, že žák zvolí nesprávnou strategii, která nevede ke správnému výsledku. *„Žák by měl navazovat na znalosti z předcházejících zkušeností, vyhledat důležité informace a propojit je se vztahy."* (Ištvánková, 2013, s. 17) Pokud je úloha založena na učivu, které žák (řešitel) neovládá, měl by se pokusit nalézt takovou strategii, pomocí které dospěje k výsledku i přes neznalost učiva (ne vždy je to možné, například u úloh, kde je zapotřebí znát konkrétní vzorec, se bez této znalosti řešitel neobejde). „*Řešení úloh spočívá v řadě rozhodnutí užít při řešení posloupnost metod, o které se domnívám, že povede k nalezení výsledku*" (Hošpesová & Tichá, 2014, s. 9). Každá posloupnost metod, o které předpokládám, že povede k nalezení výsledku, k němu nemusí vést. Pokud posloupnost metod, které jsem si zvolil/a, nepovede k nalezení výsledku, je možné vždy úlohu začít řešit od začátku a jinak.

Pod pojmem řešit úlohu budu v této práci rozumět nejen hledání vhodného postupu k vyřešení úlohy, ale také jeho použití.

Každý, kdo řeší úlohu libovolného zaměření, se musí nejprve rozhodnout, jak bude postupovat. Každou úlohu je nutno analyzovat, zvážit všechny možnosti přístupu k řešení, zdůvodnit jednotlivé postupy řešení úlohy, určit strategii řešení. Jakým způsobem při řešení úlohy postupovat, jak si rozdělit práci, vymezují fáze řešení úlohy.

Fáze řešení úlohy

V literatuře se touto problematikou zabývala a zabývá řada autorů. Z českých autorů jsou to například Jarmila Novotná, František Kuřina, Jan Kopka, Marie Tichá, Alena Hošpesová a další. Při studiu literatury věnované řešení úloh jsem se nejčastěji setkávala se jmény George Polya a Terence Tao. Terence Tao je jeden ze současných autorů, který se věnuje řešení matematických úloh. V případě George Polya připomenu především klasické dílo How to Solve It (1957). V následujících odstavcích ukážu, jak mohou vypadat jednotlivé fáze řešení úlohy podle dvou zmíněných autorů.

Kopka (2010) pracuje s rozdělením do fází, které formuloval Polya (1957). Polya popisuje čtyři fáze, na které se dělí proces řešení problému, stejné fáze má řešení úloh (jak ústních, tak písemných). Rozdělení je následující:

- **Pochopení úlohy:** Máme-li řešit úlohu, pak ji nejprve musíme pochopit. Pochopit úlohu znamená uvědomit si, na co jsme tázáni, jaké informace jsou známy, které informace nepotřebujeme a které informace chybí nebo nejsou známé. Na pochopení úlohy potřebujeme dostatek času.
- **Vytvoření plánu:** Součástí vytvoření plánu je nalezení strategie, která by nám mohla pomoci úlohu vyřešit. Tento krok považuje Polya za klíčový k úspěšnému řešení problému. Častou otázkou řešitelů je: „Jakou strategii máme použít pro tuto úlohu?“ Obecně se na tuto otázku nedá odpovědět. K určování strategií vhodných pro konkrétní úlohy je užitečná znalost a procvičovaní obecných strategií.
- **Uskutečnění plánu**: Pomocí zvolené strategie se pokoušíme úlohu vyřešit. Jestliže se ukáže, že tato strategie není vhodná, snažíme se využít jinou strategii.
- **Ohlédnutí zpět**: Na závěr bychom měli překontrolovat, zda odpověď má smysl a výsledek vyhovuje zadání úlohy. Polya se ještě v této části zamýšlí nad podobnými problémy a i nad jinými cestami, jak problém řešit. (Kopka, 2010)

Ukázali jsme, jak lze rozfázovat řešení úlohy podle Polyi. Tao (In Mazurek, 2011/2012) dělí řešení úloh takto:

(1) **Pochopit typ úlohy**: O jakou úlohu se jedná? Typ úlohy rozhoduje o výběru strategie řešení. Zde jsou úlohy rozděleny podle obtížnosti do tří kategorií:
   - Úlohy, kde je cíl v zadání jasně formulován a jde jen o to, jakou cestu k němu zvolíme. Jsou to úlohy začínající například slovem: „Vypočtěte..."
   - Úlohy, u kterých musíme výsledek hledat či uhádnout. Tyto začínají například slovem: „Najděte...".
   - Úlohy, u kterých je nutné nejdříve rozhodnout, zda daný objekt existuje, a pak se snažit nalézt důkaz. Začínají slovem: „Existuje...?"

(2) **Pochopit údaje ze zadání**: Jaké informace jsou v zadání formulovány? Hledáme známé údaje, podmínky, které musí objekty splňovat. Principem je najít propojení mezi známými a neznámými objekty či podmínkami.

(3) **Pochopit cíl**: Co chceme najít? Znalost cíle pomáhá zvolit vhodnou strategii k řešení úlohy.

(4) **Zvolit vhodné označení veličin**: Pro údaje, podmínky či objekty ze zadání volíme co nejjednodušší označení. Nevhodné označení může zkomplikovat řešení úlohy.

(5) **Zapsat, co je známo:** Ve zvoleném označení zapsat známé údaje, nakreslit diagram. Tímto bodem začíná samotné řešení úlohy. Zápisky slouží jako podklad pro přemýšlení.

Při řešení snadných úloh následuje po tomto bodu přímo bod (9). Je-li úloha pro řešitele příliš obtížná, představují body (6) až (8) možnosti dalšího postupu.

(6) **Částečně pozměnit úlohu**: Máme-li problém s vyřešením úlohy, můžeme vyřešit podobnou (jednodušší) úlohu, např. speciální případ dané úlohy.

(7) **Výrazně pozměnit úlohu**: Úlohu je možno pozměnit pomocí vypuštění části vstupních dat, negací cíle apod., zaměříme se na klíčová místa úlohy.

(8) **Dosáhnout částečného cíle:** Zkusit získat částečný výsledek, který je možno uplatnit při dosahování hlavního cíle.

(9) **Dosáhnout cíle:** Za využití vztahů zapsaných v bodě (5), vybrat vhodnou strategii k vyřešení úlohy a dopracovat se ke správnému výsledku. (Mazurek, 2011/2012)

Přístupy Polyi a Taa jsou si podobné. První bod Polyi, porozumění úloze, odpovídá bodům (1) – (4) u Taa. Stejně tak druhý bod Polyi, vytvoření plánu, koresponduje s body (5) – (8) Taa. Nakonec uskutečnění plánu podle Polyi odpovídá bodu (9) Taa. Polya navíc zmiňuje kontrolu výsledku.

Ač jsou některé fáze u obou autorů rozděleny jinak, je základ stejný a to: pochopit úlohu, vytvořit si plán řešení a tento plán uskutečnit. Neméně významnou roli v řešení hraje i zpětná kontrola, kterou zmiňuje Polya.

Fáze podle Polyi i Taa lze dobře využít pro řešení konstrukčních úloh, které je obvykle rozděleno do těchto fází:

- Rozbor (pochopení úlohy a vytvoření plánu řešení)
- Konstrukce (uskutečnění plánu)
- Důkaz (zpětná kontrola)
- Diskuze

Ačkoliv mohou být fáze řešení úlohy jinak pojmenovány nebo rozděleny, přesto jsou tyto fáze stejné. Proto za základní fáze řešení úlohy považuji: pochopení úlohy, vytvoření plánu řešení a jeho uskutečnění, popř. zpětnou kontrolu.

2.5. Strategie řešení

Pro vymezení termínu strategie řešení vycházím v této práci z (Příhonská, 2009, s. 49): *„Strategií budeme v souladu s vymezením tohoto pojmu podle Polyi rozumět plán řešitele o tom, jak bude zadaný problém řešit. Proces tvorby strategie obsahuje přinejmenším dvě složky:*

- *První je mobilizace možností – uvědomění si, jaké strategie přicházejí v daném případě v úvahu.*
- *Druhou je volba konkrétní strategie.*

Volba strategie nemusí být konečná. V průběhu řešení může dojít k její změně. Jaké jsou příčiny změny strategie?

- *Použitá strategie nevede k výsledku – vede do slepé uličky. Řešitel začíná téměř od začátku.*
- *Objevení efektivnější strategie, než je ta, kterou žák právě používá.*
- *Objevitelská zvědavost.*
- *Jistá sympatie či antipatie k určitým pojmům, oblastem matematiky či algoritmům řešení.“*

Tudíž strategii řešení vnímám jako plán řešitele, jakým způsobem bude zadaný problém řešit. Strategii vybíráme tak, aby pomocí ní bylo možno konkrétní úlohu vyřešit. Přesto není jisté, že během řešení nebude potřeba strategii změnit.

Strategie jsou nástroje, které pomáhají při hledání cesty k cíli. Jaké strategie, jaké cestičky k cíli, mohou žáci na druhém stupni základní školy použít? Zaměřím se na strategie, které lze podle mých zkušeností použít u úloh o obsahu rovinných obrazců.

- **Geometrická cesta** neboli **strategie grafického znázornění.**
  „Je to velmi používaná cesta, neboť obvykle dovoluje vytvořit si velmi názornou geometrickou představu. Říká se, že vhodný obrázek je mnohdy lepší než tisíc slov." (Kopka, 2010, s. 23)
- **Postup od známého k neznámému**
  V tomto postupu řešitel vychází ze zadaných hodnot a na základě známých vztahů propojuje známé hodnoty s neznámými – vyjadřováno příslušnými vzorci. S úpravami pokračuje do té doby, dokud není na levé straně upravovaného vztahu pouze neznámá a na pravé straně jen známé údaje. (Svoboda, cit. 2017-03-07)
- **Použití vhodného vzorce**
  Řešení úlohy začíná nalezením zákonitosti (závislosti), pomocí které lze úlohu vyřešit. Takovéto zákonitosti se vyjadřují vzorcem. (Svoboda, cit. 2017-03-07)
- **Rozdělení na jednodušší případy**
  Při této metodě rozložíme zadanou úlohu na několik jednodušších úloh, které vyřešíme. Spojením řešení všech jednodušších úloh dostaneme řešení zadané úlohy.

V souladu s pojmem strategie a vymezováním konkrétních strategií zavedu pojem heuristické strategie.

Heuristické strategie

Nejprve vymezím pojem heuristika. Ve slovníku cizích slov (ABZ.cz, cit. 2017-03-01) nalezneme, že tento pojem má např. význam: *„teorie řešení problémů"* a *„neobvyklé řešení*." Podle Kopky (1977, s. 291): *„Je to „hledání pravdy" (... zřejmě řešení úlohy), ale asi také kritické hodnocení různých cest, což předpokládá zpravidla experimentální aktivitu řešitelovu."*

Na internetové stránce nazývané Everesta (což je poradenská společnost zabývající se nejen vzděláváním), se objevuje i původ slova heuristika. „*Slovo původně z řečtiny (heuriskó = nalézt, objevit). Jedná se o nepřesný a naučený způsob myšlení, vytváření úsudku a rozhodnutí. Heuristika nahrazuje algoritmus, který je kognitivně náročnější. Algoritmické myšlení totiž musí zahrnout všechny možnosti, aby s velkou pravděpodobností dosáhlo správného výsledku. Heuristika je pak kognitivní zkratkou, která umožňuje rozhodnout se rychleji a energeticky úsporněji, ale s vyšší pravděpodobností chyby. Jde tedy o kompromis mezi jednoduchostí a možností chyby na jedné straně a složitostí a přesností na straně druhé."* (Everesta, 2013)

V této práci budu pod pojmem heuristika rozumět řešení problémů, které není postaveno na řešiteli známých algoritmech řešení, je spíše založeno na „zdravém rozumu“. I překlad z řeckého slova „*heuriskó*“ říká, že máme něco „nalézt“, či „objevit“, proto hledáme vhodný postup k nalezení řešení. V této strategii můžeme dosáhnout i nepřesného výsledku, neboť je založena často na odhadu, který se může postupně zpřesňovat.

Jádrem heuristiky je, že řešitel má zadánu úlohu, kterou nemůže vyřešit přímým způsobem, zkouší ji upravovat, snaží se konstruovat blízké úlohy nebo vybírá podúlohy atd. Veškeré jeho snahy směřují k tomu, aby nalezl úlohy, které by vyřešil snadněji než tu zadanou a které by mu současně pomohly při jejím řešení.

Co rozumíme pod spojením heuristická strategie? „*Heuristickou strategií rozumíme prostředek procesu řešení úlohy, kdy řešitel (žák) nemá k dispozici nezbytné znalosti a dovednosti k vyřešení úlohy, avšak úlohu chce vyřešit.*“ (Novotná et al., 2015, s. 234) Základem heuristické strategie je, že se řešení při použití této strategie stává pro řešitele snadněji dosažitelné.

Podle Kopky (In Příhonská, 2006, s. 2) „*patří k nejběžněji používaným heuristickým strategiím*

- *Přeformulování úlohy*
- *Analogie*
- *Zevšeobecňování*
- *Specializace*
- *Cesta zpět*
- *Systematické experimentování*
- *Konkretizace*
- *Zavedení pomocných prvků*“

<u>Přeformulování úlohy</u> – Úlohu zapíšeme pomocí jiných formulací: např. jednodušší slova, kratší věty, vypustíme nadbytečné informace.

<u>Analogie</u> – Jinak řečeno obdoba nebo podobnost. Jedná se o strategii využívající úloh podobných dané úloze.

<u>Zevšeobecňování</u> – Přechod od jedinečného k obecnému, od méně obecného k obecnějšímu poznatku.

Specializace – Přechod od obecného k jedinečnému, od obecnějšího k méně obecnému poznatku

Cesta zpět – Vycházíme při ní z předpokladu, že daný problém má řešení, a odvozujeme něco, co už víme. Jakmile dojdeme k tomu, co už známe nebo co je dáno, své úvahy obrátíme, čímž dospějeme k hledanému záměru. (Kopka, 1977)

Systematické experimentování – Postup řešení, při kterém *„lze k výsledku dojít pomocí určitého systému v provádění pokusů. Každý následující pokus bude o „malinko" pozměněný oproti předchozímu. Princip je založen na tom, že od základní hodnoty, kterou řešitel zvolí, se blíží postupně k danému řešení."* (Eisenmann & Přibyl, 2013, s. 85)

Konkretizace – Jedná se o postup řešení, při kterém provedeme volbu konkrétní hodnoty, popř. volíme speciální případ. V některých případech je třeba provést tuto volbu vícekrát, buď proto, že řešitel není přesvědčen o nezávislosti na volbě konkrétních hodnot, nebo proto, že po jedné volbě nenahlédne ideu řešení. Druhým krokem při použití této strategie je návrat k původní úloze, kdy provedeme zobecnění konkrétních výsledků. Nezobecňujeme úlohu, ale získané výsledky.

Zavedení pomocných prvků – Přibyl & Ondrušová (2014, s. 96) vymezují *„pomocný prvek jako objekt, který se na první pohled v úloze nevyskytuje, a my jej do úlohy vpravíme s nadějí, že nám usnadní přístup k řešení. ... Při zavedení pomocného prvku u geometrických úloh se obvykle jedná o doplnění přímek, úseček, kružnicových oblouků či dalších různých obrazců, v případě algebraických úloh přičítáme vhodné číslo k oběma stranám rovnice ..."*

3. Typy úloh o obsahu

Jelikož v celé diplomové práci se zabývám úlohami o obsahu rovinných obrazců, budu rozebírat, jaké rovinné obrazce se učí na druhém stupni základních škol a jak se postupuje při jejich řešení. Sama neučím, a proto budu čerpat ze zkušeností několika učitelek matematiky, z ŠVP škol, ve kterých bude proveden experiment, a také z učebnic matematiky pro základní školy (Odvárko & Kadleček, 1999, 2007a, 2007b, 2007c, 2008).

Posloupnost rovinných obrazců v této části diplomové práce je inspirována ročníky, ve kterých jsou konkrétní typy zaváděny (vyučovány). Rozmístění do ročníků je orientační (v některých případech jsou zaváděny obsahy rovinných obrazců v jiných ročnících, než mám uvedeno, protože každá škola má vlastní ŠVP a rozložení učiva do ročníků se v nich nemusí vždy shodovat).

6. ročník

Obsah obdélníku a čtverce

- Obsah obdélníku (čtverce) o délkách stran a, b (délce strany a) se rovná součinu ab (a^2).

Při počítání obsahů těchto obrazců se mohou na základních školách vyskytovat následující typy úloh:

- Slovní úlohy (s obrázkem, bez obrázku)

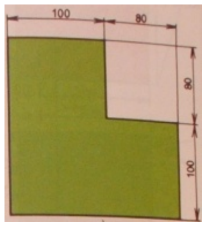
  Např.: „*Pepa to zase nějak plete. „Obsah obdélníku, který má délku 3 m a šířku 20 cm, spočítám zpaměti. Je to 60 cm^2.“*
  a) Jaký je správný výsledek?
  b) Jakou chybu Pepa udělal?“ (Odvárko & Kadleček, 2007a, s. 59)

- Čistě početní úlohy

  Např.: Vypočítej obsah obdélníku s délkami stran $a = 3$ dm, $b = 17$ dm.

- Úlohy s obrázkem

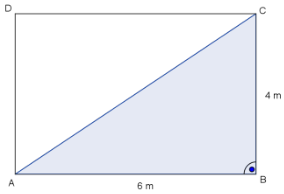
  Např.: Vypočítejte obsah mnohoúhelníku uvedeného na obrázku 1.



Obr. 1
(Trejbal & Komárková, 1997, s. 6)

- Problémové úlohy (úloha s obrazcem, který není součástí učiva 6. ročníku)

  Např.: *„Vypočítat obsah obdélníku ABCD je snadné. Umíš ale vypočítat i obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC?“*



Obr. 2

(Odvárko & Kadleček, 2007a, s. 57)

7. ročník

<u>Obsah rovnoběžníku</u>

- Obsah rovnoběžníku je součin délky strany a výšky k této straně.

Rovnoběžníky, které se vyučují na základních školách, jsou podle (Odvárko & Kadleček, 1999): kosodélník, obdélník, kosočtverec, čtverec. Jelikož jsem již úlohy týkající se obdélníku a čtverce rozebrala, budu se nyní zabývat pouze kosodélníkem a kosočtvercem.

Při počítání obsahů těchto obrazců se mohou na základních školách vyskytovat následující typy úloh:

- Slovní úlohy (s obrázkem, bez obrázku)

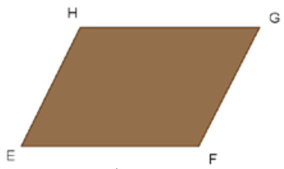
  Např.: *„Vodácký oddíl se nečekaně rozrostl, proto při letním putování musí použít i čtyři staré vojenské stany bez podlážky. Každý stan se skládá ze dvou dílů ve tvaru kosočtverce o délce strany 1,5 m a výšce přibližně 1,3 m. Mirek stany znovu naimpregnuje proti dešti. Kolik má koupit sprejů, když jeden sprej vystačí na 4 m² látky?“* (Odvárko & Kadleček, 2007b, s. 53)

- Čistě početní úlohy

  Např.: Vypočítej obsah rovnoběžníku $ABCD$, pro který platí: $a = 2$ m, $v_a = 4$ m.

- Úlohy s obrázkem

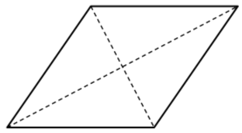
  Např.: Vypočítej obsah rovnoběžníku $EFGH$, rozměry změř z obrázku 3.



Obr. 3

- Problémové úlohy (úloha, ve které není na první pohled vidět výsledek)

  Např.: Mají všechny trojúhelníky, na které je pomocí úhlopříček rozdělen obrazec na obr. 4, stejné obsahy?



Obr. 4

❖ Nejčastěji používané způsoby počítání obsahu rovnoběžníku, které lze podle mých zkušeností použít při řešení takovýchto úloh:
  - podle vzorce,
  - převedením rovnoběžníku na obdélník (čtverec) o stejném obsahu.

<u>Obsah trojúhelníku</u>

▫ Obsah trojúhelníku se stranami délek a, b, c je roven polovině součinu délky libovolné strany a výšky k této straně (výška je délka úsečky kolmé k této straně z protilehlého vrcholu). Není-li známa příslušná výška, je možné obsah trojúhelníku vypočítat pomocí Heronova vzorce $S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, kde $s = \frac{1}{2}\ (a + b + $ $+c)$ (Pomykalová, 1993, s. 65).

  Další možností, jak spočítat obsah trojúhelníku, je pomocí poloměru kružnice vepsané (ρ): $S = \rho \cdot s$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$, pomocí poloměru kružnice opsané (r): $S = \frac{abc}{4r}$. Protože $r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} =, = \frac{c}{2\sin\gamma}$, kde α, β, γ jsou vnitřní úhly trojúhelníku ležící proti stranám a, b, c, lze S vypočítat pomocí dvou stran a úhlu jimi sevřeném: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$. (Krynický, 18.4.2015)

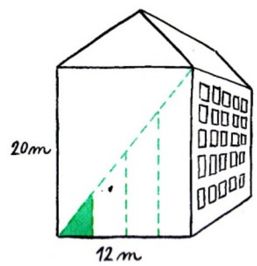
Při počítání obsahů těchto obrazců se mohou na základních školách vyskytovat následující typy úloh:

- Slovní úlohy (s obrázkem, bez obrázku)

  Např.: *„Stěna domu má výšku 20 metrů a šířku 12 metrů. Stěna bude nad úhlopříčkou bílá, pod úhlopříčkou zelená. Bílá část je hotova, fasádníci dělají nátěr zelenou barvou. Na obrázku vidíš, že dokončili první pruh. „Ještě tři stejně široké pruhy a budeme hotovi. Čtvrtinu zeleného nátěru už máme.“*

  a) Je to pravda?

  b) Vypočítej a zapiš zlomkem, jakou část zeleného nátěru mají opravdu hotovou.“ (Odvárko & Kadleček, 2007b, s. 57)



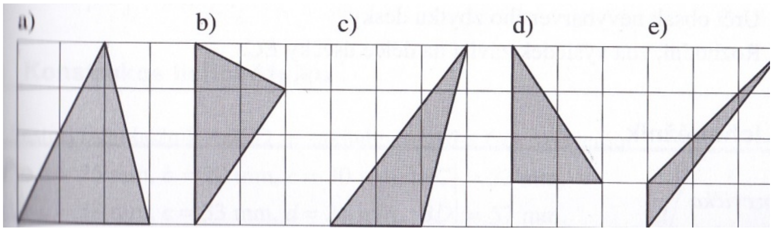
Obr. 5

- Čistě početní úlohy

  Např.: Vypočítej obsah trojúhelníku ABC, ve kterém platí: $a = 6$ cm, $v_a = 4$ cm.

- Úlohy s obrázkem

  Např.: „*Vypočítej obsah trojúhelníku nakresleného ve čtvercové síti; délka strany čtverce je ve skutečnosti 1 cm.*“ (Odvárko & Kadleček, 2007c, s. 139)



Obr. 6

- Problémové úlohy (úloha s obrazcem, pro jehož obsah neexistuje vzorec)
  Např.: Vypočítej obsah pravidelného šestiúhelníku, je-li poloměr kružnice jemu opsané 5,6 cm.

❖ Nejčastěji používané způsoby počítání obsahu trojúhelníku, které lze podle mých zkušeností použít při řešení takovýchto úloh:
  - pomocí vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$,
  - doplnění trojúhelníku na rovnoběžník,
  - Heronův vzorec,
  - pomocí kružnice opsané,
  - pomocí kružnice vepsané,
  - pomocí vnitřních úhlů.

❖ Některé hodnoty potřebné pro počítání můžeme získat pomocí:
  - Sinové věty ($\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$). (Krynický, 2010a)
  - Kosinové věty ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta, c^2 = = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$). (Krynický, 2010b)
  - Pythagorovy věty ($c^2 = a^2 + b^2,$ kde c je přepona, a, b jsou odvěsny). (Krynický, 2010c)
  - Euklidovy věty o výšce ($v_c^2 = c_a \cdot c_b$, „kde c_a a c_b jsou pravoúhlé průměty odvěsen a, b na přeponu c“). (Slovník školské matematiky, s. 42)

- Euklidovy věty o odvěsně ($a^2 = c \cdot c_a, b^2 = c \cdot c_b$). (Slovník školské matematiky, s. 41)
- Goniometrických funkcí ($\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, kde a je odvěsna protilehlá k úhlu α, b je odvěsna přilehlá k úhlu α a c je přepona).

<u>Obsah lichoběžníku</u>

- Obsah lichoběžníku, kde a a c jsou základny a v je výška, lze vypočítat: $S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$.

Při počítání obsahů těchto obrazců se mohou na základních školách vyskytovat následující typy úloh:

- Slovní úlohy (s obrázkem, bez obrázku)

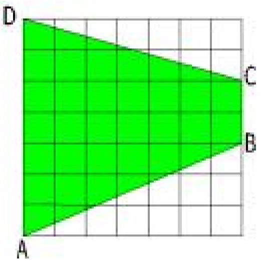
  Např.: „*Terasa má tvar rovnoramenného lichoběžníku, delší základna má délku 10,4 m, délka ramene je 5,7 m a velikost úhlu mezi ramenem a základnou je 65°.*
  a) Urči přibližně, kolik čtverečných metrů dlaždic bude třeba na vydláždění terasy.
  b) Podél obou „ramen" a kratší „základny" lichoběžníkové terasy bude zábradlí. Urči jeho délky." (Odvárko & Kadleček, 2007b, s. 64)

- Čistě početní úlohy

  Např.: Vypočítej obsah lichoběžníku $ABCD$, pro který platí: $a = 7$ m, $c = 5$ m, $v = 1$ m.

- Úlohy s obrázkem

  Např.: Vypočítej obsah lichoběžníku nakresleného ve čtvercové síti; délka strany čtverce je ve skutečnosti 1 cm.



Obr. 7
(HackMath.net, 2017)

- Problémové úlohy (úloha, u které na základě zadané hodnoty hledáme rovinný obrazec)

  Např.: Zjistěte, který rovinný obrazec má obsah roven $10{,}5\ \mathrm{cm}^2$, mají-li délky stran celočíselné hodnoty.

❖ Nejčastěji používané způsoby počítání obsahu lichoběžníku, které lze podle mých zkušeností použít při řešení takovýchto úloh:

  - pomocí vzorce,
  - rozdělením lichoběžníku na menší útvary (dva trojúhelníky a jeden obdélník; rovnoběžník a trojúhelník; dva trojúhelníky),
  - u rovnoramenných lichoběžníků – rozdělení na dva pravoúhlé lichoběžníky.

8. ročník

Obsah kruhu

- Obsah kruhu o poloměru *r* se spočítá: $S = \pi r^2$.

Při počítání obsahů těchto obrazců se mohou na základních školách vyskytovat následující typy úloh:

- Slovní úlohy (s obrázkem, bez obrázku)

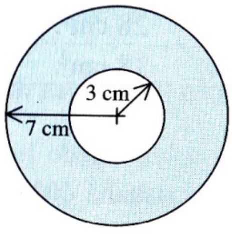
  Např.: *„Ke stromu na pastvě je přivázána kráva provazem 3,5 m dlouhým; jak velká plocha pastvy jest jí vykázána?“* (Odvárko & Kadleček, 2008, s. 30)

- Čistě početní úlohy

  Např.: Vypočítej obsah kruhu, který má poloměr 3 dm.

- Úlohy s obrázkem

  Např.: „*Určí obsah vybarveného obrazce, výsledek zaokrouhli na čtverečné centimetry.*“

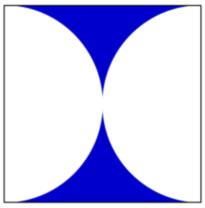


Obr. 8

(Odvárko & Kadleček, 2008, s. 32)

- Problémové úlohy (úloha, kde obsah hledaného obrazce závisí na obsahu jiného obrazce)

  Např.: Ve čtverci o obsahu $25\ \mathrm{m}^2$ je pomocí kruhových oblouků vyznačen obrazec (modrou barvou). Vypočítej jeho obsah.



Obr. 9

❖ Nejčastěji používaný způsob počítání obsahu kruhu, který lze podle mých zkušeností použít při řešení takovýchto úloh:

  - pomocí vzorce

4. Příprava experimentu

4.1. Cíl experimentu

Cílem experimentu je získat přehled o tom, jaké strategie řešení použijí spontánně žáci osmých a devátých ročníků u tří vybraných úloh na obsah rovinného obrazce. Tyto úlohy jsou vybrány tak, aby byly řešitelné nejen pomocí vzorců, které se vyučují na základních školách, ale také pomocí heuristických strategií. Současně mne zajímá, zda budou strategie, které si zvolí žáci, podobné strategiím voleným jejich vyučujícími.

Výzkumné otázky:

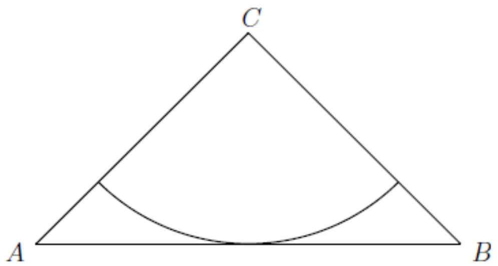
- Jaké strategie řešení se objeví v pracích žáků osmých a devátých ročníků?
- Která strategie bude nejvíce zastoupena v pracích žáků osmých a devátých ročníků?
- Zvolí žáci bez předchozí domluvy s učiteli stejné strategie řešení jako oni?
- Jsou tyto úlohy pro žáky náročné? Která je pro žáky osmých a devátých ročníků nejnáročnější?[1]

4.2. Výběr úloh do experimentu

Úlohy byly vybrány tak, aby pokryly všechny rovinné obrazce, probírané na druhém stupni základní školy. Současně byly úlohy zvoleny tak, aby měli řešitelé možnost rozmanitého výběru různých strategií řešení. U vybraných úloh musí řešitel v prvé řadě zapojit „zdravý rozum" a popřemýšlet, jakým způsobem bude postupovat.

Na výběr úloh měla také vliv skutečnost, že v obměněné podobě se tyto úlohy o obsahu rovinných obrazců vyskytují v zadání při přijímacích zkouškách na střední školu (samouk.cz, 2017).

Úloha 1. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnice tak, jak je znázorněno na obrázku.



Obr. 10

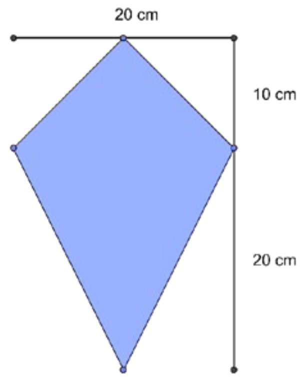
Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníku je $|AB| = 8$ cm.

(Novoveský et al., 1968, citováno z Novotná, 2015)

[1] Náročností úlohy rozumím, do jaké míry je úloha pro řešitele řešitelná. Zda je zadaná úloha pro řešitele moc jednoduchá, nebo naopak neřešitelná. Jakým způsobem hodnotím náročnost úlohy, uvádím na str. 28, viz otázka „náročnost úlohy".

Tuto úlohu jsem zařadila do experimentu, protože pro její správné vyřešení nestačí znát správný vzorec pro obsah kruhu. Existuje více možností, jak získat velikost poloměru kruhu, které mohou řešitelé použít k vyřešení úlohy. Protože je potřeba znát vzorec pro obsah kruhu, je možné zadat tuto úlohu až v osmém ročníku, kde se toto téma vyučuje. K vyřešení této úlohy může řešitel využít znalost obsahu kruhu, obsahu čtverce, Pythagorovy věty, Euklidovy věty, Thaletovy kružnice a goniometrických funkcí.

Úloha 2. Zjistěte, kolik papíru je potřeba pro stavbu draka, odpovídají-li jeho rozměry těm, které jsou na obrázku.[2]

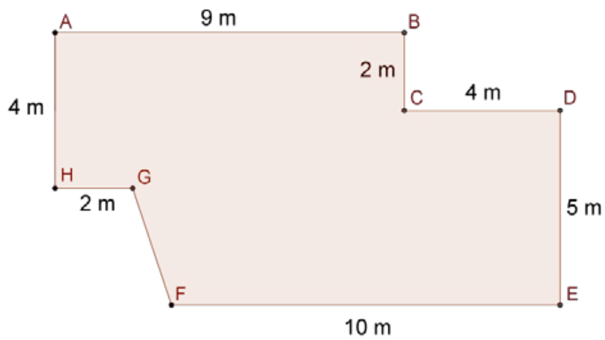


Obr. 11

(Novotná, 2015)

Tuto úlohu jsem vybrala, protože je jednoduchá a při použití zdravého rozumu ji lze snadno vyřešit. Podobný typ úlohy lze nalézt i v učebnici (Cihlář, 1994, s. 43). K jejímu vyřešení je třeba znát obsah trojúhelníku, obdélníku a čtverce, a to je látka, kterou by žáci osmých a devátých ročníků již měli mít zvládnutou ze sedmého ročníku.

Úloha 3. Je třeba vydláždit dvůr tvaru uvedeného na obrázku. Urči obsah vydlážděné plochy.



Obr. 12

(Kočová, 2011)

[2] Od řešitelů očekávám přesné výpočty obsahu obrazce uvedeného na obrázku. Protože tato úloha je však z reálného života, lze očekávat i odpověď odvíjející se od velikosti papíru, ze kterého můžeme draka vystřihnout. Ve skutečnosti je totiž na výrobu draka potřeba více papíru, protože se většinou vystříhává z papíru obdélníkového tvaru, tedy z papíru o obsahu dvakrát tak velkém. Objeví-li se zde i odpověď odvíjející se od velikosti papíru, ze kterého můžeme draka vystřihnout, přidám ji do správných strategií.

Tuto úlohu jsem vybrala do experimentu, protože existuje mnoho možností, jak tento útvar rozdělit, či naopak doplnit. Řešitel zde může využít znalosti obsahu obdélníku, čtverce, trojúhelníku a lichoběžníku. Pro vyřešení úlohy je zapotřebí znalost základních vzorců a rovinná představivost. K nalezení obsahu obrazce na obr. 12 je zapotřebí nejprve vypočítat obsahy obrazců, na které řešitel „dvůr" rozdělí (doplní). Součtem (rozdílem) obsahů těchto obrazců dostává řešitel výsledný obsah „dvora".

K zadání každé úlohy jsem připojila tři otázky. Tyto otázky jsem do řešení přidala pro lepší orientaci v pracích řešitelů. Dalším důvodem bylo získání představy, zda si řešitelé uvědomují, co počítají.

Otázky:

***Náročnost úlohy:* 1 2 3 4 5**

Před započetím experimentu byli řešitelé seznámeni s hodnocením náročnosti úlohy. Byla jim předána informace, že hodnocení je následující: 1 – „naprosto jednoduchá úloha, která mi nedělá žádný problém"; 5 – „neřešitelná úloha, nevím si rady". Další odstupňování jsem nechala čistě na řešiteli a na jeho vnímání náročnosti úlohy.

Od této otázky jsem očekávala, že mi napomůže spolu s výsledky šetření ukázat, která úloha je pro řešitele nejnáročnější. Zjišťovala jsem, zda úloha, kterou řešitelé považovali za nejnáročnější, byla řešena méně než ostatní, nebo zda byla vícekrát dopočítána s chybným výsledkem.

Jaké znalosti jsem v úloze využil/a:

U této otázky jsem očekávala jednoduché odpovědi, jako například „obsah kruhu". Takováto odpověď, spojená se vzorcem v řešení úlohy, ukázala, zda řešitel (v případě správného vzorce) ví, co počítá – umí správně použít vzorec tam, kde je potřeba, anebo (v případě chybného vzorce) neví, co počítá – neumí použít správný vzorec nebo neví, který vzorec je správný.

Proč jsem počítal/a takto (popř. proč jsem provedl/a škrt a změnu taktiky):

Tuto otázku jsem k úlohám přidala především pro moji lepší orientaci v textu. Předpokládala jsem, že se objeví řešitelé, kteří budou svá řešení měnit či doplňovat, čímž by se mohla jejich řešení stát nepřehlednými.

4.3. Testovaná skupina

Typy škol, počty žáků, charakteristika, výběr ročníků

Experimentu se zúčastnily osmé a deváté ročníky tří základních škol. Všechny tři školy jsou v témže okrese a volila jsem je náhodně. Do výzkumu jsem nezahrnula gymnaziální třídy odpovídající třídám na základních školách, jelikož se v této práci soustředím na srovnání strategií řešení žáků základních škol.

V této práci neuvádím názvy škol, ani jména konkrétních žáků, kteří se experimentu zúčastnili. Z tohoto důvodu volím tyto pracovní názvy: Kapradinová základní škola, Fialková základní škola a Třezalková základní škola.

Školy vybrané pro můj experiment jsou školy úplné, tzn. je zde 1. – 9. ročník. V těchto školách nejsou třídy nijak zaměřené.

Kapradinová základní škola je spádovou školou pro okolní obce. Jedná se o venkovskou školu, kde se v současnosti počet žáků pohybuje kolem sto třiceti. Z této školy se experimentu zúčastnilo patnáct žáků z osmého ročníku. Vyučující matematiky na této škole zadává žákům podobné typy úloh, které se objevily v experimentu, velice zřídka. V ročníku, který se zúčastnil experimentu, se žáci učí podle učebnice (Coufalová et al., 2000).

Fialková základní škola je škola městská, v současné době se počet žáků pohybuje kolem dvě stě třiceti. Z této školy se experimentu zúčastnilo dvacet šest žáků z osmého ročníku a dvacet tři žáků z devátého ročníku. Vyučující matematiky zadává žákům často podobné úlohy, které se objevily v experimentu. V ročnících, které se zúčastnily experimentu, se žáci učí podle učebnic (Odvárko & Kadleček, 1999b, 1999c, 2000a, 2000b, 2000c, 2000d, 2001a, 2001b).

Třezalková základní škola je jednou ze dvou základních škol ve městě. V současné době má kolem 360 žáků. Z této školy se experimentu zúčastnilo dvacet čtyři žáků z osmého ročníku, čtrnáct žáků z jednoho devátého ročníku a šestnáct žáků z druhého devátého ročníku. Na této škole učí matematiku několik učitelů. V ročnících, kde jsem úlohu zadávala, učí tři učitelé matematiky. Dva učitelé zadávají tento typ úloh žákům často, jeden učitel pouze zřídka. Všichni žáci se učí podle učebnic (Odvárko & Kadleček, 1999b, 1999c, 2000a, 2000b, 2000c, 2000d, 2001a, 2001b).

Jednotlivé ročníky jsem volila na základě látky probírané v daných ročnících. V první úloze je podmínkou k úspěšnému dokončení znalost obsahu kruhu. Toto téma je vyučováno v 8. ročníku ZŠ (čerpám z ŠVP škol vybraných pro experiment). Devátý ročník jsem vybrala, jelikož je na stránkách www.samouk.cz zabývajících se přípravou žáků k přijímacím zkouškám napsáno, že úloha na výpočet obsahu vybarvené části obrazce je jednou z nejneoblíbenějších, avšak nejčastějších úloh u přijímacích zkoušek. „*Tento typ úlohy je zahrnut snad pokaždé do přijímací zkoušky, neboť na něm lze zjistit mnoho z dovedností studenta. V této úloze jde totiž jak o matematické vědomosti studenta – znalost vzorců, vztahů a definic, tak o kreativitu, selský rozum a smysl řešit úlohu co nejefektivněji. V tom spočívá hlavní smysl těchto úloh.*“ (samouk.cz, cit. 2017-03-27). Úlohy jsem zadávala až na konci druhého pololetí, v době, kdy měli žáci devátých ročníků těsně po přijímacích zkouškách. S úlohami vybranými do experimentu by tudíž mohli mít větší zkušenosti.

Celkem se experimentu zúčastnilo šedesát pět žáků osmých ročníků, padesát tři žáků devátých ročníků a pět učitelů matematiky.

4.4. Způsob získávání dat

Úlohy, které jsem vybrala pro experiment, jsem zadala žákům osmých a devátých ročníků na třech základních školách. K získání dat potřebných k vyhodnocení šetření jsem použila test se třemi úlohami, viz příloha. Zadání testu mělo formu pracovního listu. Ten byl vytištěn na jednom listu formátu A4, přičemž na jedné straně byla zadání úloh 1 a 2, na druhé straně zadání úlohy 3. Stejný test jsem současně zadala i učitelům, kteří vyučují matematiku ve třídách vybraných pro tento experiment (pěti učitelům). Učitele jsem požádala o vyřešení způsobem, kterým by řešení těchto úloh ukazovali žákům.

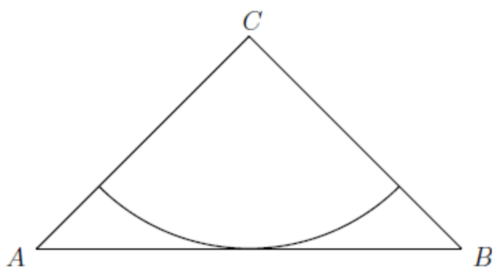
5. Provedení experimentu – žákovské strategie řešení

Tuto část diplomové práce jsem rozdělila podle úloh, které jsem zadávala žákům osmých a devátých ročníků. U každé úlohy zvlášť nejprve rozebírám předpokládané strategie, které by žák mohl použít pro vyřešení úlohy. Jelikož nemohu odhalit všechny možné strategie řešení, které by mohl použít, zamýšlím se tedy nad těmi, které lze podle mé zkušenosti očekávat. Následně odhaduji, jakých chyb se mohou žáci dopustit. Vyslovuji hypotézu, která strategie se podle mého názoru objeví v žákovských řešeních nejčastěji. Rozebírám strategie, které žáci osmých a devátých ročníků použili. Uvádím zde, jaké strategie použili učitelé ve vybraných ročnících. Zjišťuji, zda žáci volí stejné či podobné strategie jako učitelé. Na závěr vše vyhodnocuji.

Při rozboru strategií nerozlišuji mezi chlapci a dívkami, oslovuji je společným názvem řešitel.

5.1. Úloha 1

Úloha 1. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnice tak, jak je znázorněno na obrázku.



Obr. 13

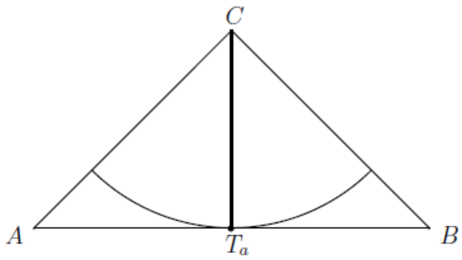
Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníku je $|AB| = 8$ cm.

(Novoveský et al., 1968, citováno z Novotná, 2015)

5.1.1. Předpokládané strategie řešení

Většinu strategií, které zde uvádím, jsem převzala z přednášky (Novotná, 2015), kde byla prezentována část výsledků z projektu GAČR P407/12/1939. U každé převzaté strategie uvádím na jejím konci zdroj. Strategie, které převzaté nejsou, jsou bez označení zdroje a znamená to, že jsou navrženy mnou.

Pro správné vyřešení úlohy je třeba zjistit velikost poloměru kružnice vepsané. Na obr. 14 je tento poloměr vyznačen jako úsečka CT_a.



Obr. 14

Poté je to záležitost použití vzorce pro obsah kruhu $S = \pi r^2$, kde $r = |CT_a|$, a uvědomění si faktu, že vyznačená část kruhu je její čtvrtina. Tedy pro určení požadovaného obsahu vypadá vztah takto:

$$S = \frac{1}{4}\pi|CT_a|^2. \qquad \text{(Novotná, 2015)}$$

<u>Předpokládané znalosti:</u> vlastnosti trojúhelníku; obsah kruhu; dosazení do vzorce; násobení
<u>Možné obtíže:</u> chybná znalost vzorce pro obsah kruhu; chybné dosazení do vzorce; neuvědomění si faktu, že vyznačená část kruhu je její čtvrtina

U této úlohy ukazujeme různé strategie pro určení poloměru r.

1. Přímý způsob

a) pomocí Pythagorovy věty

Pomocí Pythagorovy věty spočítáme velikost strany AC. Protože trojúhelník ABC je rovnoramenný, platí $|AC| = |BC|$, tedy

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 8^2\ (\text{cm}^2),$$
$$2|AC|^2 = 8^2\ (\text{cm}^2),$$
$$|AC| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ (\text{cm}).$$

Podruhé aplikujeme Pythagorovu větu, tentokrát na trojúhelník ACT_a, který je také rovnoramenný (jelikož trojúhelník ABC je rovnoramenný, má u vrcholu C úhel velikosti $90°$ a u zbylých dvou vrcholů úhly velikosti $45°$; úhel $90°$ rozdělíme pomocí výšky CT_a na dva shodné úhly, tzn. úhly velikosti $45°$, rozdělením vzniknou dva rovnoramenné trojúhelníky).

Tedy $|AT_a| = |CT_a|$.

$$2|CT_a|^2 = |AC|^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\ (\mathrm{cm}^2),$$
$$|CT_a|^2 = 16\ (\mathrm{cm}^2),$$
$$|CT_a\ | = 4\ (\mathrm{cm}).$$

Po dosazení do vzorce pro S získáme:

$$S = \frac{1}{4}\pi|CT_a|^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 16 = 4\pi\ (\mathrm{cm}^2). \qquad \textbf{(1)}\ \text{(Novotná, 2015)}$$

Výsledek: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je $4\pi\ \mathrm{cm}^2$.

Předpokládané znalosti: vlastnosti pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku; Pythagorova věta; úpravy rovnic; obsah kruhu; násobení
Možné obtíže: chybné čtení zadání – následné nepovšimnutí, že $|AC| = |BC|$; chybná aplikace Pythagorovy věty; numerické chyby

b) pomocí Euklidovy věty o výšce

Zde využíváme Euklidovu větu o výšce: *„V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony.“* (Pomykalová, 1993, s. 74) Protože v trojúhelníku ABC jsou splněny její předpoklady, platí:

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b,$$

kde v_c je výška na přeponu c (na obr. 14 označena jako CT_a); c_a, c_b jsou délky úseček AT_a a BT_a. Protože trojúhelník ABC je rovnoramenný, výška CT_a rozděluje stranu AB bodem T_a na dvě úsečky stejné délky.
Aplikujme Euklidovu větu o výšce na trojúhelník ABC: $|CT_a| = v_c$, $c_a = c_b = |AT_a|$,

$$|CT_a|^2 = |AT_a|^2,$$
$$|CT_a| = |AT_a|,$$

a protože $|AT_a| = \frac{1}{2}|AB|$ a $|CT_a| = |AT_a|$, tudíž $|CT_a| = 4\ (\mathrm{cm})$.
Nyní opět použijeme vztah **(1).** (Novotná, 2015)

Výsledek: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je $4\pi\ \mathrm{cm}^2$.

Předpokládané znalosti: vlastnosti pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku; Euklidova věta o výšce; dosazení do vzorce; obsah kruhu; násobení

Možné obtíže: chybné dosazení do vzorce; chybná formulace Euklidovy věty; neuvědomění si faktu, že výška CT_a rozděluje stranu AB bodem T_a na dvě stejně dlouhé úsečky

c) překládáním papíru

Ze čtverce o straně délky 8 cm snadno vyrobíme požadovaný trojúhelník. Dále použiji označení na obr. 14. Přeložením papíru tak, aby bod A splynul s bodem B, dostáváme výšku CT_a trojúhelníku ABC a navíc dva nové trojúhelníky T_aBC a T_aCA, které jsou shodné. Pokud následně přeložíme trojúhelník T_aBC tak, aby bod B splynul s bodem C, můžeme při přesném skládání vidět, že výška CT_a splyne se stranou T_aB, a tedy výška je stejně dlouhá jako polovina strany AB, o které víme, že měří 4 cm. Tedy $|CT_a| = 4$ cm. Opět použijeme vztah **(1).** (Novotná, 2015)

Výsledek: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm^2.

Předpokládané znalosti: vlastnosti čtverce a pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku; obsah kruhu; násobení
Možné obtíže: nezvládnutí ze čtverce vyrobit požadovaný trojúhelník; nepřesné překládání papíru

d) rýsováním - měřením

Sestrojíme trojúhelník ABC pomocí kolmice, která prochází středem úsečky AB, a Thaletovy kružnice nad úsečkou AB. Sestrojíme úsečku CT_a a změříme ji. Dále opět použijeme vztah **(1).** (Novotná, 2015)

Výsledek: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm^2.

Předpokládané znalosti: základy rýsování; znalost konstrukce trojúhelníku; Thaletova kružnice; obsah kruhu; dosazení do vzorce; násobení
Možné obtíže: nepřesné rýsování; chybné měření; chybná znalost konstrukce trojúhelníku; chybná znalost Thaletovy kružnice

e) logický úsudek

Po doplnění výšky CT_a v trojúhelníku ABC (obr. 14) si uvědomíme, že trojúhelník T_aCA je také rovnoramenný, tedy velikost úsečky CT_a je rovna velikosti polovině strany AB. Dále opět použijeme vztah **(1).** (Novotná, 2015)

<u>Výsledek:</u> Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm^2.

<u>Předpokládané znalosti:</u> vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku; logický úsudek; obsah kruhu; dosazení do vzorce; násobení
<u>Možné obtíže:</u> špatná rovinná představivost

f) pomocí goniometrických funkcí

$|\sphericalangle CAB| = 45^0$ (trojúhelník ABC je pravoúhlý, rovnoramenný), po jednoduché úvaze přicházíme na to, že hledaná výška trojúhelníku ABC dělí úsečku AB na dvě stejné části o délce 4 cm. Nyní použijeme funkci tangens:

$$\mathrm{tg}\, 45^0 = \frac{|CT_a|}{4},$$

$$|CT_a| = 4 \cdot \mathrm{tg}\, 45^0 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ (cm)}.$$

Opět použijeme vztah **(1)**.

<u>Výsledek:</u> Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm^2.

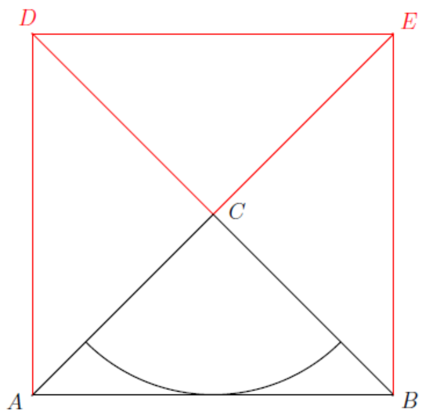
Podobně můžeme využít i funkce sinus, kosinus.

<u>Předpokládané znalosti:</u> vlastnosti pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku; znalost goniometrických funkcí a počítání s nimi; obsah kruhu; dosazení do vzorce; násobení
<u>Možné obtíže:</u> chybné použití goniometrických funkcí (např. chybné dosazení stran do vzorce); neuvědomění si velikosti úhlů v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku

2. Zavedení pomocného prvku

a) čtverec

Do obr. 13 přikreslíme pomocný prvek. Na obr. 15 je vyznačen červeně.



Obr. 15

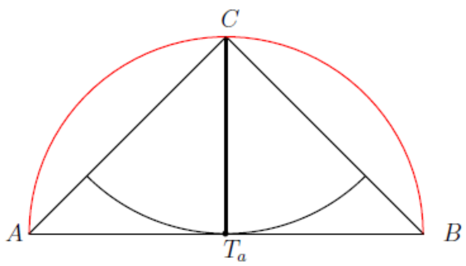
Získali jsme čtverec $ABED$, strany AD, BE, DE jsou stejně dlouhé jako strana AB. Jelikož se úhlopříčky AE a BD ve čtverci $ABED$ půlí, je bod C jeho středem, a tedy velikost CT_a je rovna velikosti poloviny strany AB. Dále opět použijeme vztah **(1).** (Novotná, 2015)

<u>Výsledek:</u> Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je $4\pi\ \mathrm{cm}^2$.

<u>Předpokládané znalosti:</u> vlastnosti čtverce; obsah kruhu; dosazení do vzorce; násobení
<u>Možné obtíže:</u> nepřesný náčrtek

b) Thaletova kružnice

Do obr. 13 přikreslíme pomocný prvek. Na obr. 16 je vyznačen červeně.



Obr. 16

Narýsovali jsme Thaletovu (půl)kružnici se středem v bodě T_a a poloměrem $|CT_a|$.

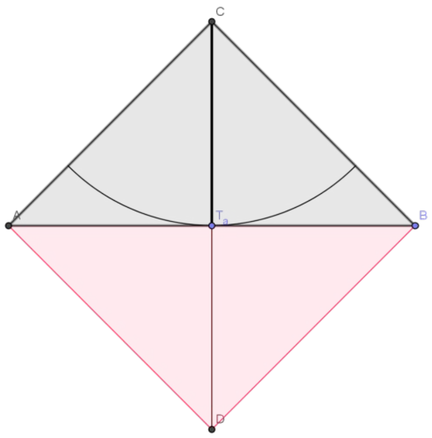
Z Thaletovy kružnice je patrno, že $|CT_a| = |AT_a|$, a proto je velikost úsečky CT_a rovna velikosti poloviny strany AB. Dále opět použijeme vztah **(1).** (Novotná, 2015)

Výsledek: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm^2.

Předpokládané znalosti: vlastnosti pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku; Thaletova kružnice; obsah kruhu; dosazení do vzorce; násobení
Možné obtíže: nepropojení souvislostí mezi Thaletovou kružnicí a hledaným poloměrem

c) čtverec pootočený o 90°

Do obr. 13 přikreslíme pomocný prvek. Na obr. 17 je vyznačen červeně.



Obr. 17

Trojúhelník ABC doplníme na čtverec $ABCD$. Úhlopříčky AB a CD mají stejnou velikost, proto hledaná velikost poloměru CT_a je rovna velikosti poloviny úhlopříčky AB čtverce $ABCD$. Dále opět použijeme vztah **(1).**

Výsledek: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm^2.

Předpokládané znalosti: vlastnosti čtverce; obsah kruhu; dosazení do vzorce; násobení
Možné obtíže: nepřesný náčrtek

5.1.2. Očekávané chyby

Vycházím zde ze svých zkušeností a uvádím chyby, které od řešitelů osmých a devátých ročníků očekávám. Chybou může být například zvolení strategie, nevedoucí ke správnému výsledku. Též použití nesprávných vzorců, či nepřesné výpočty, které mohou být zapříčiněny například nepozorností řešitele, mohou vést k chybným výsledkům.

První konkrétní očekávanou chybou u úlohy 1 je nerozlišení mezi rovnoramenným a rovnostranným trojúhelníkem, kdy řešitel vychází při výpočtech z faktu, že všechny strany jsou stejně dlouhé. Druhou očekávanou chybou je dosazení za velikost poloměru celou délku strany AB, tj. $8\,\mathrm{cm}$ (chybné porozumění zadání). Poslední očekávanou chybou je slabá znalost vzorce pro obsah kruhu (zaměnění vzorce pro obsah kruhu za vzorec pro obvod kruhu).

5.1.3. Hypotéza

Hypotéza je můj odhad o tom, která strategie se v žákovských řešeních objeví nejčastěji. Jelikož se domnívám, že žáci na základních školách, pokud mohou, použijí jim známý vzoreček, předpokládám, že nejčastější strategií řešení bude způsob nazvaný „přímý způsob“, konkrétně „pomocí Pythagorovy věty“ $[1.a)]$.

Ne každý zná vzorce (Pythagorova věta atp.) a umí je použít, proto mohou žáci využít jinou strategii. Podle mého názoru bude další nejčastější volbou heuristická strategie nazvaná „zavedení pomocného prvku – čtverce“ $[2.a)]$. Tato strategie vyžaduje, aby řešitel takovýto vhodný prvek nalezl.

5.1.4. Rozbor žákovských řešení

Nejprve zde uvedu, jak experiment probíhal. V každé třídě, kde jsem test zadávala, jsem byla přítomna osobně a se mnou učitel/ka matematiky. Test (viz Příloha 1), vytištěný na papíru velikosti A4, do kterého řešitelé doplňovali výsledky i mezivýsledky, jsem zadávala osobně a dohlížela na jeho vypracování. K dispozici byl papír navíc – tuto možnost nikdo nevyužil. Řešitelé, vybraní pro můj experiment, byli předem informováni, že mohou používat rýsovací potřeby i kalkulačku. Před zahájením řešení jsem řešitelům vysvětlila otázky, které následovaly po vyřešení každé úlohy. Na vyřešení tří úloh měli celou vyučovací hodinu, kterou někteří řešitelé nevyužili (skončili dříve). Během testu jsem mohla nahlížet, jak úlohy řeší konkrétní řešitelé. Popřípadě se dotazovat, jakým způsobem postupovali, nebo připomenout, ať doplní odpovědi na otázky. Mezitím, co řešitelé pracovali, požádala jsem jejich učitele matematiky, aby také úlohy vyřešil způsobem, kterým by řešení těchto úloh ukazoval žákům.

V rozboru žákovských řešení jsem nerozlišovala jednotlivé školy, nýbrž jednotlivé ročníky. Rozdělení na ročníky jsem zvolila na základě látky probírané v daných ročnících. Například řešení s použitím goniometrických funkcí jsem neočekávala, že by se mohlo objevit v řešení žáků osmých ročníků, protože se tato látka probírá až v ročnících devátých. Toto rozdělení mi umožnilo vyhodnotit, do jaké míry budou řešitelé z devátých ročníků úspěšnější (nebo naopak méně úspěšní) než řešitelé z osmých ročníků. V této práci jsem se nezabývala rozdíly mezi dívkami a chlapci při volbě strategie či úspěšnosti v řešení, ale soustředila jsem se na volby strategií na druhém stupni základních škol v jednotlivých ročnících.

Rozbor řešení probíhal následujícím způsobem:

Nejprve jsem rozebrala strategie vedoucí ke správnému výsledku, jejichž uspořádání je určeno podle zastoupení v jednotlivých ročnících a počtu řešitelů, kteří si určenou strategii zvolili. Za strategie vedoucí ke správnému výsledku považuji postupy řešení, které při přesnosti ve výpočtech vedou ke správnému výsledku. Jako první uvádím strategie objevující se v obou ročnících, následně strategie zastoupené pouze v osmých ročnících. Kapitolu strategií vedoucích ke správnému výsledku uzavírají strategie, které jsou dílem pouze řešitelů z devátých ročníků.

Po strategiích vedoucích ke správnému výsledku přichází na řadu strategie, které nevedou ke správnému výsledku ani při přesných výpočtech. Ke správnému výsledku mohou vést jedině při použití nesprávných vzorců a chybné volbě hodnot potřebných pro počítání. Uspořádání těchto strategií je stejné jako u strategií vedoucích ke správnému výsledku.

Jelikož se v této práci objevuje značné množství žákovských řešení, označuji je postupně pomocí velkých písmen české abecedy.

Před rozborem jednotlivých strategií řešení, které použili řešitelé z osmých a devátých ročníků u úlohy 1, uvádím tabulku použitých žákovských strategií u této úlohy. Tabulku jsem rozdělila podle jednotlivých strategií a podle ročníků, ve kterých byl experiment uskutečněn. Z tabulky je patrné, kolik řešitelů z uvedených ročníků použilo jednotlivé strategie. Také je v tabulce uvedeno, kolik řešitelů u konkrétních strategií dospělo ke správnému (chybnému) výsledku.

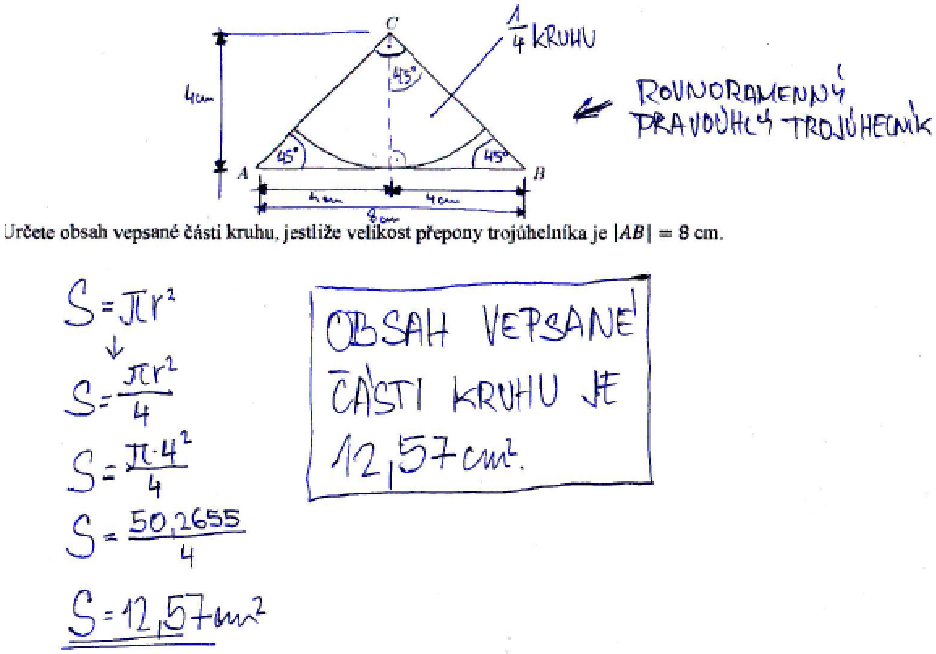
Tabulka 1

strategie vedoucí ke správnému výsledku							
	8. ročník			9. ročník			**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**
	počet řešitelů	správný výsledek	chybný výsledek	**počet řešitelů**	správný výsledek	chybný výsledek	
Strategie A	**6**	2	4	**9**	4	5	**15**
Strategie B	**10**	2	8	**4**	3	1	**14**
Strategie C	**4**	4	—	**8**	5	3	**12**
Strategie D	**2**	1	1	**2**	—	2	**4**
Strategie E	**1**	—	1	**2**	—	2	**3**
Strategie F	**4**	3	1	**—**	—	—	**4**
Strategie G	**—**	—	—	**13**	6	7	**13**
strategie, které nevedou ke správnému výsledku							
Strategie H	**7**	—	7	**2**	—	2	**9**
Strategie I	**5**	—	5	**3**	1	2	**8**
další chybná řešení	**4**	—	4	—	—	—	**4**
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**22**	—	—	**10**	—	—	**32**
						celkem	**118**

Strategie vedoucí ke správnému výsledku:

Strategie A

Tato strategie odpovídá strategii nazvané „logický úsudek“ $[1.e)]$, která vychází ze znalosti pojmu „rovnoramenný, pravoúhlý trojúhelník“. Na obr. 18 je ukázka jednoho řešení se správným výsledkem.



Obr. 18

Na tomto řešení (obr. 18) je vidět, jak řešitel postupoval, že využil znalosti vlastností rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku. Použil správný vzorec pro obsah kruhu a nezapomněl tento obsah vydělit čtyřmi tak, aby dostal hodnotu pouze pro čtvrtinu kruhu.

Tento způsob vypracování úlohy byl nejvíce zastoupen, zvolilo si ho nejvíce řešitelů (patnáct). V osmých ročnících byl zastoupen šesti řešiteli, avšak ke správnému výsledku se dobrali pouze dva. Zbylí řešitelé z osmých ročníků, kteří si zvolili tuto strategii, nedospěli ke správnému výsledku. Tito řešitelé dělali chyby ve vzorcích (dva řešitelé), kdy zaměnili vzorec pro obsah kruhu se vzorcem pro obvod. $o = \pi r 2 = 25{,}1327$ cm A také zapomínali vydělit obsah kruhu čtyřmi (dva řešitelé). V devátých ročnících touto strategií řešilo úlohu 1 devět řešitelů. Čtyři řešitelé byli úspěšní a dokončili se správným výsledkem. Zbylých pět řešitelů nedospělo ke správnému výsledku, protože neznali vzorec pro obsah kruhu. Jeden řešitel například za vzorec pro obsah kruhu použil vzorec: $\frac{1}{3}\pi r$ anebo stejně jako dva řešitelé v osmých ročnících zapomněli vydělit obsah kruhu čtyřmi (čtyři řešitelé). V devátých ročnících v této strategii se neobjevila záměna vzorce pro obsah kruhu za vzorec pro obvod kruhu.

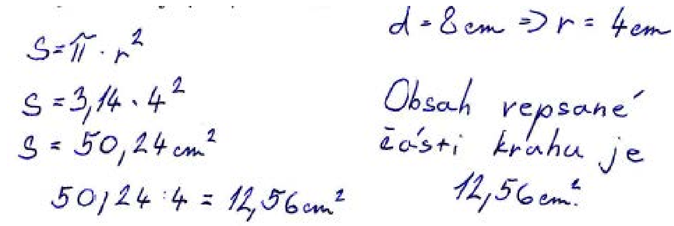
Strategie B

Tato strategie se neobjevila v předpokládaných strategiích. Zařazuji ji mezi strategie nazvané „Zavedení pomocného prvku“ a nazývám ji „kružnice“. V této strategii řešitelé doplňují do obrázku celou kružnici. Z dokreslené kružnice určí průměr a následně poloměr. Viz obr. 19.

Obr. 19

Takto úlohu 1 řešilo celkem čtrnáct řešitelů, z toho deset řešitelů z osmých ročníků a čtyři řešitelé z ročníků devátých. V devátých ročnících byli řešitelé úspěšní až na jednoho, který zapomněl vydělit obsah kruhu čtyřmi. V osmých ročnících už řešitelé tak úspěšní nebyli, pouze dva dokončili úlohu se správným výsledkem.

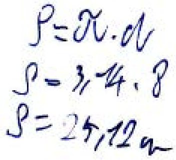
Ukázka dokončení úlohy se správným výsledkem (obr. 20):



Obr. 20

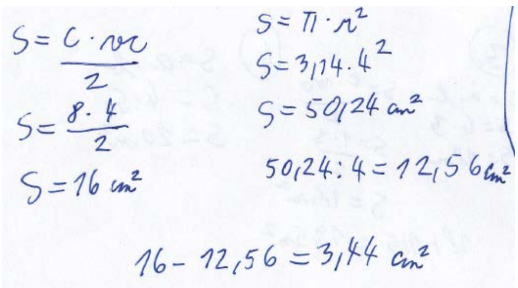
V ostatních řešeních se objevily následující chyby:

a) Chybný vzorec (pět řešitelů) – místo vzorce pro obsah kruhu použit vzorec pro obvod kruhu (obr. 21).



Obr. 21

b) Řešitelé (tři) odečítají obsah čtvrtkruhu, který vypočítali správně, od obsahu trojúhelníku (obr. 22).

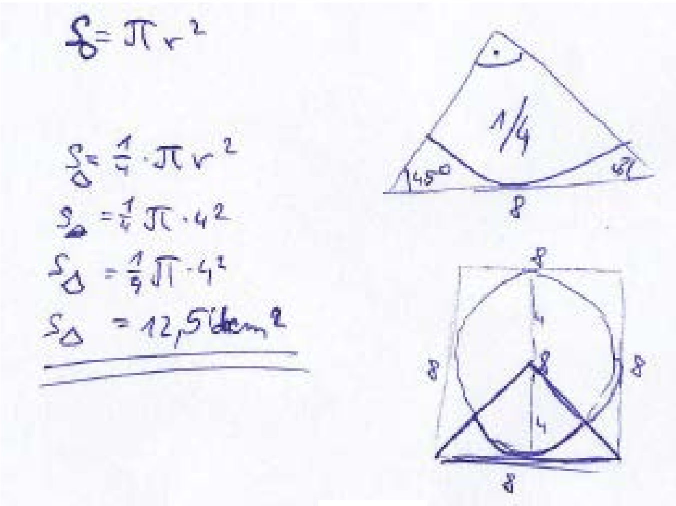


Obr. 22

Strategie C

Jedná se o strategii odpovídající předpokládané strategii nazvané „zavedení pomocného prvku – čtverec“ $[2.\,a)]$. Doplněním trojúhelníku na čtverec zjišťujeme, že hledaný poloměr je polovina strany AB, kterou známe.

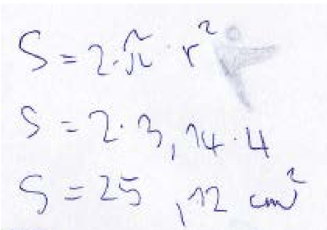
<u>Ukázka řešení (obr. 23):</u>



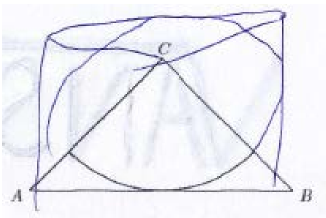
Obr. 23

Úlohu 1 řešilo tímto způsobem dvanáct řešitelů, čtyři řešitelé z osmých ročníků a osm z devátých ročníků. Řešení z osmých ročníků byla všechna úspěšně zakončena správným výsledkem, zatímco v devátých ročnících se našli tři řešitelé, kteří udělali nějakou chybu. Chybný výsledek byl způsoben těmito důvody:

- záměnou vzorců pro obsah a obvod kruhu (obr. 24),
- nevydělením obsahu kruhu čtyřmi,
- nepřesným náčrtkem (obr. 25).



Obr. 24 Zaměněné vzorce



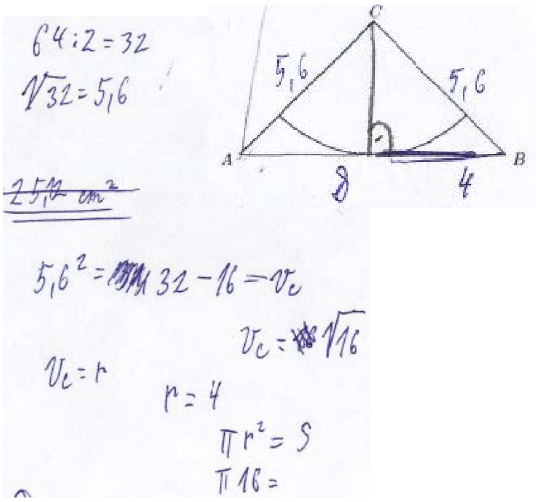
Obr. 25 Nepřesný náčrtek

Strategie D typnul jsem si

Zde žáci správně odhadovali, že velikost poloměru je 4 cm. Takto odhadovali poloměr čtyři řešitelé, dva z osmých ročníků a dva z devátých ročníků. I přestože poloměr otipovali správně, ke správnému výsledku dospěl pouze jeden řešitel z osmého ročníku. Chybu ve vzorci (zaměnění vzorce pro obsah kruhu za vzorec pro obvod kruhu) udělal jeden řešitel z osmého ročníku, zbylí dva řešitelé z devátých ročníků zapomněli vydělit obsah kruhu čtyřmi.

Strategie E

Tato strategie odpovídá předpokládané strategii nazvané „Pythagorova věta“ $[1. a)]$.



Obr. 26 Ukázka nedokončené úlohy

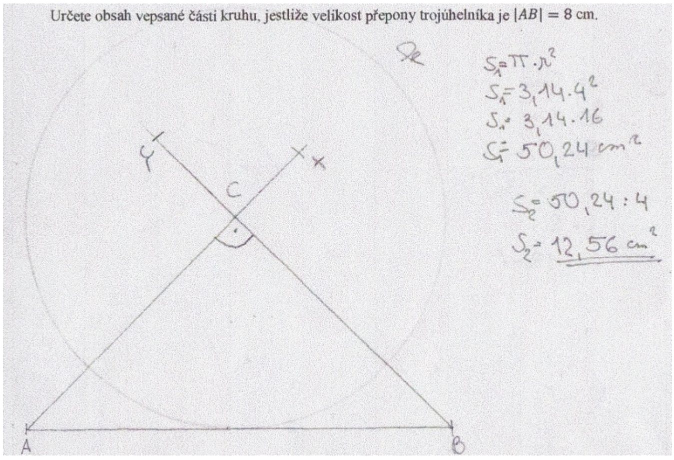
Znalost Pythagorovy věty využili k řešení úlohy 1 pouze tři řešitelé, jeden z osmého ročníku a dva z ročníků devátých. Ani jeden však nedokončil úlohu se správným výsledkem. Řešitel z osmého ročníku nedokončil (z neznámého důvodu) řešení vedoucí správným směrem (obr. 26). Jeden řešitel z devátého ročníku pomocí Pythagorovy věty správně spočítal hledaný poloměr. Následně však udělal chybu nejen ve vzorci pro obsah kruhu ($S = \pi \cdot r$), ale také tento obsah vydělil třemi místo čtyř. Druhý řešitel z devátého ročníku vypočítal pomocí Pythagorovy věty pouze velikost odvěsny $|BC|$. Dále již nepočítal, přestože vzorec pro obsah kruhu měl nadepsán správně.

Následující strategie se již objevily buď pouze v osmých ročnících (strategie F), nebo pouze v ročnících devátých (strategie G).

Strategie F

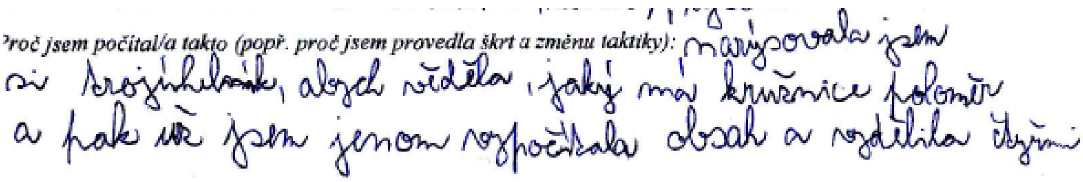
Používat rýsovací potřeby se učí už na prvním stupni základní školy. Řešitelé v této strategii využili znalost rýsování a pomocí rýsovacích potřeb si příslušný trojúhelník narýsovali ve skutečné velikosti a v něm změřili rozměr potřebný pro spočítání obsahu kruhu. Jedná se o předpokládanou strategii nazvanou „rýsováním - měřením“ $[1. d)]$.

<u>Ukázka jednoho řešení (obr. 27):</u>



Obr. 27

Jeden řešitel k této strategii napsal (obr. 28):


Proč jsem počítal/a takto (popř. proč jsem provedla škrt a změnu taktiky): narýsovala jsem si trojúhelník, abych viděla, jaký má kružnice poloměr a pak už jsem jenom rozpočítala obsah a rozdělila čtyřmi

Obr. 28

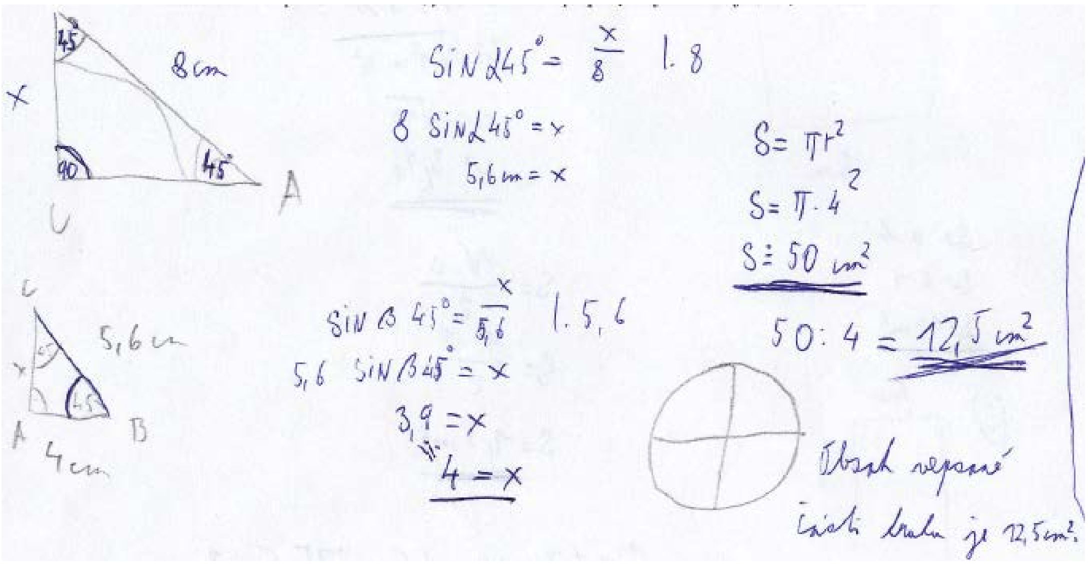
Takto postupovali čtyři řešitelé, a to pouze z osmých ročníků. Až na jednoho, který zvolil špatný vzorec pro obsah kruhu, dospěli všichni ke správnému výsledku.

Strategie G

Řešitelé z devátých ročníků volili nejvíce tuto strategii, která je v předpokládaných strategiích nazvána „pomocí goniometrických funkcí“ $[1. f)]$. Název okamžitě napoví, že k řešení úlohy 1 řešitel využije znalost goniometrických funkcí. Strategie G se objevuje pouze v devátých ročnících, jelikož je toto téma probíráno až v devátém ročníku. Úloha 1 byla pomocí goniometrických funkcí řešena třinácti řešiteli, častá volba této strategie může být způsobena dobou, kdy se toto téma probírá (řešitelé z devátých ročníků mají goniometrické funkce v živé paměti).

Které goniometrické funkce řešitelé použili a k jakým to vedlo výsledkům? Tuto strategii rozděluji podle použitých goniometrických funkcí.

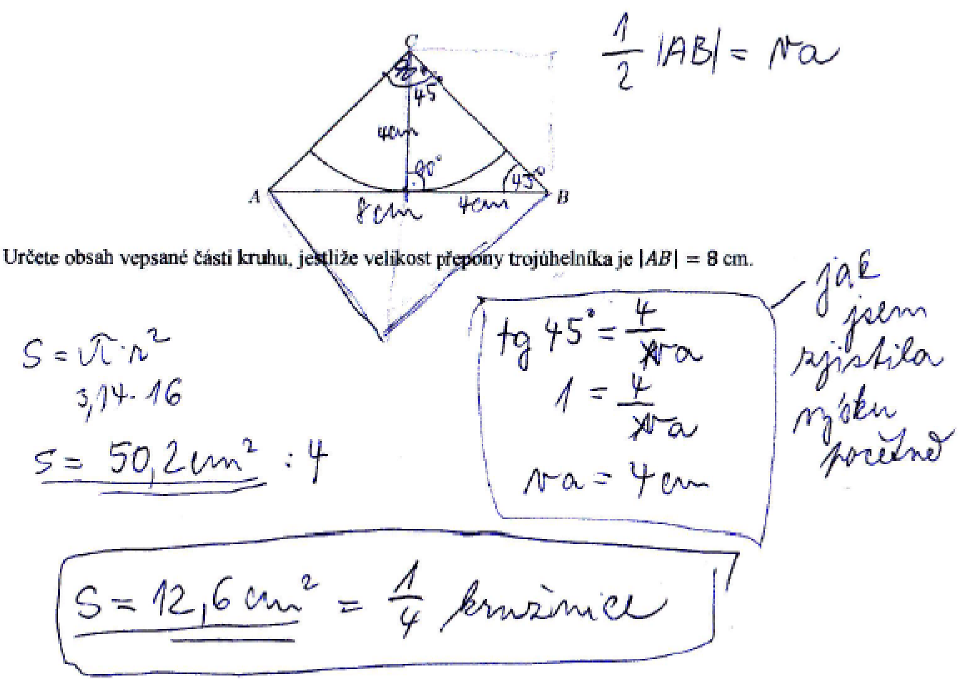
- Strategie využívající funkci **sinus**.



Obr. 29

Tuto strategii použili tři řešitelé, ale pouze jeden řešitel dospěl ke správnému výsledku. Na obr. 29 můžeme vidět ukázku správného řešení, kdy funkce sinus byla nejprve použita k výpočtu délky jedné odvěsny pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku, která spolu s druhým použitím funkce sinus vedla k výpočtu hledaného rozměru. Zbylí dva řešitelé nedospěli ke správnému výsledku. Jeden z nich vypočítal pomocí funkce sinus pouze velikost odvěsny trojúhelníku ABC, druhý řešitel obsah kruhu vydělil třemi místo čtyř.

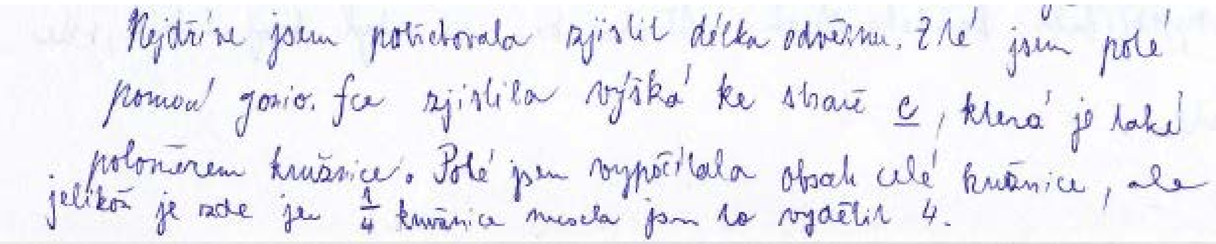
- Strategie využívající funkci **tangens.**



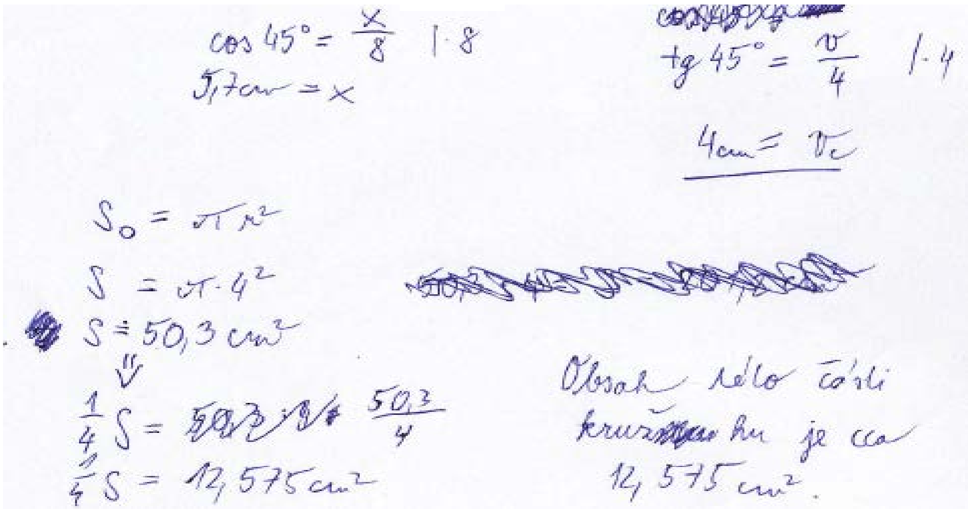
Obr. 30

Strategii využívající funkci tangens použilo pět řešitelů. Pouze tři z nich dokončili řešení úlohy 1 se správným výsledkem. V ukázce na obr. 30 byla funkce tangens použita k výpočtu velikosti výšky trojúhelníku (hledaného rozměru). Na závěr výpočtů řešitel píše $S = \ldots = \frac{1}{4}$ kružnice, což je chybná formulace, ale řešitel měl zřejmě na mysli $\frac{1}{4}$ obsahu kruhu. Jeden z řešitelů, kteří nedokončili úlohu 1 se správným výsledkem, chybně vypočítal, pomocí funkce tangens, velikost hledaného poloměru. Pomocí této funkce vypočítal druhý řešitel velikost odvěsny trojúhelníku *ABC*. Z neznámého důvodu dále počítal obsah trojúhelníku *ABC*.

- Strategie využívající funkcí **kosinus** a **tangens**.


Nejdříve jsem potřebovala zjistit délku odvěsny, z ní jsem poté pomocí gonio. fce zjistila výšku ke straně c, která je taky poloměrem kružnice. Poté jsem vypočítala obsah celé kružnice, ale jelikož je zde je $\frac{1}{4}$ kružnice musela jsem to vydělit 4.

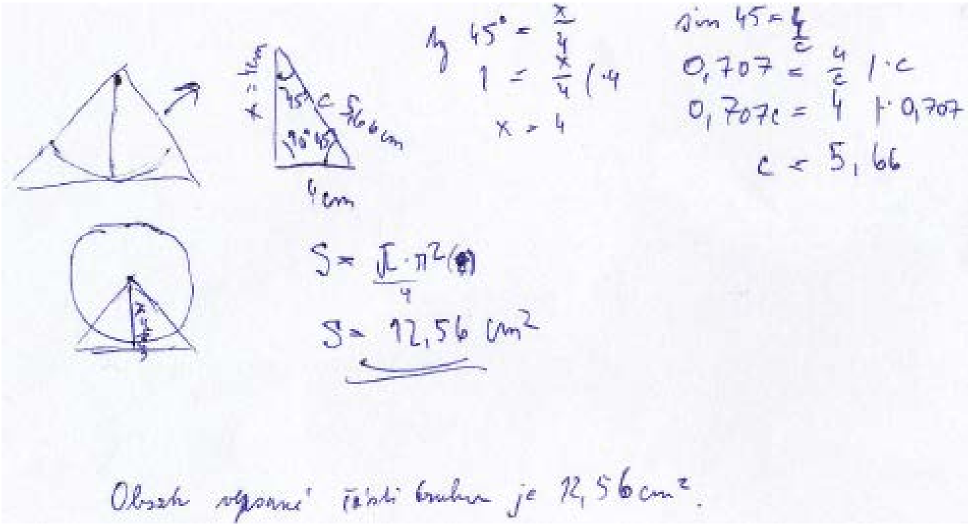
Obr. 31a



Obr. 31b

Tato strategie se objevila pouze jednou. Na obr. 31b můžeme vidět, že řešitel nejprve použil funkci kosinus, aby zjistil délku odvěsny, kterou i přesto, že psal něco jiného (obr. 31a), nevyužil pro počítání výšky. Výšku (poloměr kružnice) spočítal pomocí funkce tangens. Jakmile znal poloměr, počítal obsah kruhu, který následně vydělil čtyřmi.

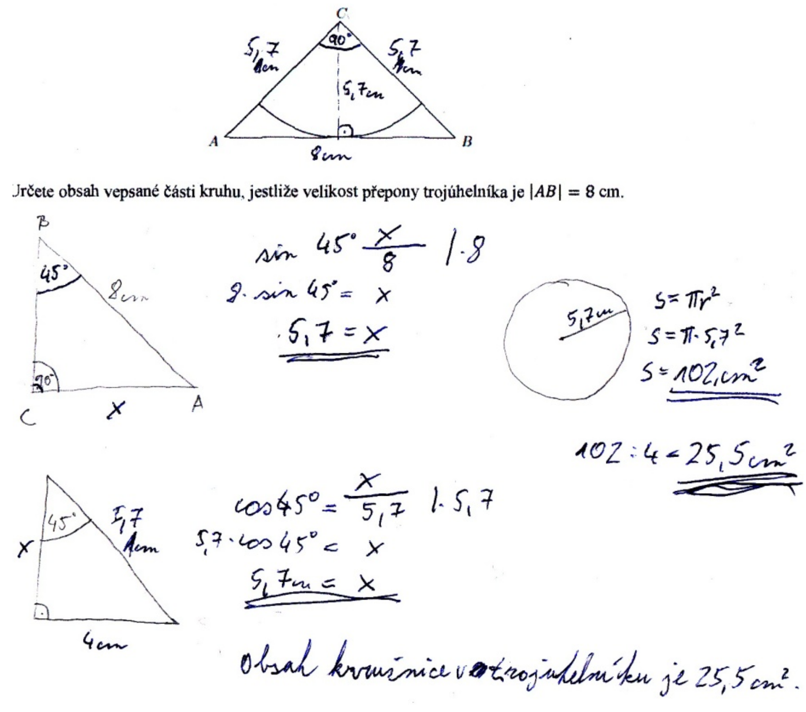
- Strategie, která využívá funkce **tangens** a **sinus**.



Obr. 32

Strategie využívající funkce tangens a sinus byla použita pouze dvakrát, jeden řešitel spočítal úlohu správně a jeden chybně. K chybnému výsledku řešitel dospěl, protože pomocí funkcí tangens a sinus vypočítal chybně poloměr kruhu (r = 7 cm). Ukázka řešení řešitele, který počítal správně, je na (obr. 32). Při použití této strategie nejprve řešitel použil funkci tangens k výpočtu velikosti výšky trojúhelníku a následně funkci sinus k výpočtu velikosti odvěsny trojúhelníku. Použití funkce sinus v tomto pořadí je bezúčelné. Řešitel si nejprve myslel, že potřebuje znát přeponu trojúhelníku, až poté si uvědomil, který rozměr je zapotřebí.

- Strategii využívající funkce **sinus** a **kosinus**.



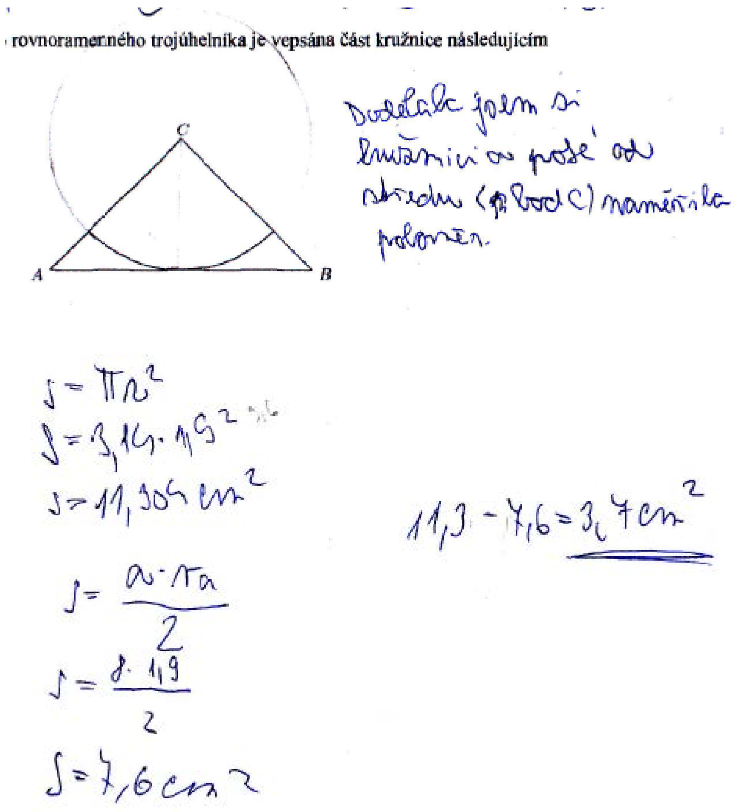
Obr. 33

Tyto funkce použili dva řešitelé. Ani jeden z těchto řešitelů nedospěl ke správnému výsledku. Na obr. 33 je možné vidět ukázku řešení jednoho řešitele, který nejprve použil funkci sinus, pomocí ní vypočítal velikost odvěsny. Pomocí funkce kosinus vypočítal velikost výšky trojúhelníku ABC. Pro nepřesnosti ve výpočtech nedospěl ke správnému výsledku. Druhý řešitel počítal stejným způsobem a dospěl ke stejnému (chybnému) výsledku.

Strategie, které nevedou ke správnému výsledku:

Strategie H

Tato strategie využívá pravítka a kružítka. Řešitel si narýsuje kružnici a poté změří poloměr této kružnice. Problém byl v tom, že řešitelé rýsovali kružnici do obrázku v zadání, který neodpovídá skutečnosti, a proto poloměr, který naměřili, byl chybný. Ukázka takového řešení je na obr. 34.



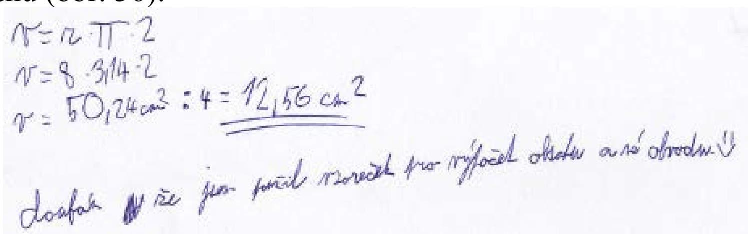
Obr. 34

Takto úlohu 1 řešilo sedm řešitelů z osmých ročníků a dva z ročníků devátých. Protože chybně určili poloměru kružnice, nedospěl žádný ke správnému výsledku.

Strategie I

Další strategií nevedoucí ke správnému výsledku je strategie, ve které řešitelé místo poloměru počítají s celým průměrem, tedy stranou *AB* (obr. 35). Jedná se o chybně volený poloměr, a tedy strategii, která může vést ke správnému výsledku, pouze pokud řešitel zvolí chybný vzorec pro počítání obsahu kruhu (obr. 36).

Obr. 35



Obr. 36

Takto počítalo osm řešitelů (pět z osmých ročníků a tři z ročníků devátých). Jeden řešitel z devátého ročníku dospěl ke správnému výsledku (obr. 36), protože zvolil chybný vzorec pro obsah kruhu. Zbylých sedm řešitelů počítalo se správným vzorcem pro obsah kruhu, ale pro chybnou volbu poloměru nedospěli ke správnému výsledku.

Další chybná řešení

K řešitelům, kteří použili strategii nevedoucí ke správnému výsledku, patří ještě čtyři řešitelé z osmých ročníků. Dva řešitelé zvolili za poloměr nesprávnou hodnotu (6,88 cm; 5,6 cm), a proto jim vyšel chybný výsledek. Další dva řešitelé vypočítali obsah trojúhelníku uvedeného na obr. 13, dál už nepokračovali.

Třicet dva řešitelů si s touto úlohou vůbec nevědělo rady (dvacet dva řešitelů osmých ročníků a deset řešitelů devátých ročníků). Většina řešitelů žádný důvod neuvedla. Našli se ale také řešitelé, kteří mi do této úlohy napsali vzkaz. Např.: *„Omlouvám se, ale nějak mi tohle nejde.“* nebo *„Hlava to nepobírá...“*.

5.1.5. Srovnání s řešením vyučujících

Jak bylo již zmíněno v podkapitole 4.4. Způsob získávání dat, zadávala jsem tyto úlohy též učitelům matematiky odpovídajících tříd. Strategie, které použili učitelé, odpovídají prvním třem nejvíce voleným žákovským strategiím, které jsem nazvala strategie A, strategie B a strategie C. Strategie A vycházela ze znalosti pojmu „rovnoramenný, pravoúhlý trojúhelník“. Strategie B využívala pomocného prvku, konkrétně doplnění na kružnici. Strategie C využívala také pomocného prvku, tentokrát doplnění na čtverec.

Volené strategie ukazují, že většina žáků řešila úlohu 1 jako učitelé. Zda je to způsobeno vlivem učitelů, lze předpokládat, nikoliv doložit.

5.1.6. Závěr

Rozličnost v přístupech při řešení úlohy 1 je značná. Řešitelé tuto úlohu řešili deseti způsoby, z toho sedm strategií vedlo ke správnému výsledku. Ostatní strategie ke správnému výsledku nevedly.

Tabulka 2

strategie vedoucí ke správnému výsledku			
	8. ročník **počet řešitelů**	9. ročník **počet řešitelů**	**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**
Strategie A	**6**	**9**	**15**
Strategie B	**10**	**4**	**14**
Strategie C	**4**	**8**	**12**
Strategie D	**2**	**2**	**4**
Strategie E	**1**	**2**	**3**
Strategie F	**4**	**—**	**4**
Strategie G	**—**	**13**	**13**
strategie, které nevedou ke správnému výsledku			
Strategie H	**7**	**2**	**9**
Strategie I	**5**	**3**	**8**
další chybná řešení	**4**	**—**	**4**
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**22**	**10**	**32**
		celkem	**118**

V tabulce 2 je ukázáno, které strategie vedly ke správnému výsledku, které nevedly ke správnému výsledku, a četnost jejich použití v žákovských řešeních. V tabulce nejsou rozlišeni řešitelé, kteří dospěli ke správnému výsledku, a řešitelé, kteří dospěli k chybnému výsledku. Řešitelé jsou v tabulce rozděleni podle ročníku, do kterého patří. Tabulka tak ukazuje rozdíly v použitých strategiích řešení žáků osmých a devátých ročníků. Můžeme zde vidět, že nejčastěji volenou strategií vedoucí ke správnému výsledku byla strategie A, kde řešitelé využili znalost vlastností rovnoramenného, pravoúhlého trojúhelníku, a strategie B, kde řešitelé zavedli jako pomocný prvek kruh. Další často použitou strategií byla strategie G, která byla specifická tím, že si ji zvolili pouze řešitelé z devátých ročníků, což bylo nejspíše způsobeno obdobím probírání této látky – jedná se o použití goniometrických funkcí. Nepotvrdila se má hypotéza, kde jsem předpokládala, že nejvíce řešitelů bude úlohu 1 řešit pomocí Pythagorovy věty, což je strategie E. Jak můžeme v tabulce vidět, tímto způsobem řešili úlohu pouze tři řešitelé. Další mojí hypotézou bylo, že druhou nejčastější volbou bude „zavedení pomocného prvku – čtverce“, což odpovídá strategii C, kterou si zvolilo dvanáct řešitelů. Mé odhady nebyly správné. V tabulce je také uvedeno, kolik řešitelů neřešilo úlohu vůbec. Můžeme vidět, že tento počet řešitelů je největší.

Tabulka 3

strategie vedoucí ke správnému výsledku						
	8. ročník		9. ročník		**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**	**počet řešitelů 8. a 9. ročníků, kteří dospěli ke správnému výsledku**
	počet řešitelů	správný výsledek	**počet řešitelů**	správný výsledek		
Strategie A	**6**	2	**9**	4	**15**	6
Strategie B	**10**	2	**4**	3	**14**	5
Strategie C	**4**	4	**8**	5	**12**	9
Strategie D	**2**	1	**2**	—	**4**	1
Strategie E	**1**	—	**2**	—	**3**	0
Strategie F	**4**	3	**—**	—	**4**	3
Strategie G	**—**	—	**13**	6	**13**	6
strategie, které nevedou ke správnému výsledku						
Strategie H	**7**	—	**2**	—	**9**	0
Strategie I	**5**	—	**3**	1	**8**	1
další chybná řešení	**4**	—	**—**	—	**4**	0
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**22**	—	**10**	—	**32**	0
				celkem	**118**	31

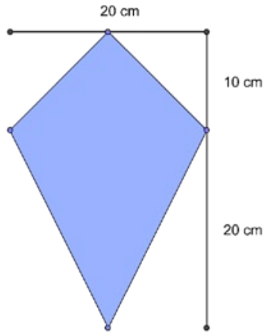
V tabulce 3 jsou uvedeny počty řešitelů, kteří řešili úlohu 1 pomocí určité strategie, a počty řešitelů, kteří úlohu 1 vyřešili se správným výsledkem, tudíž s výsledkem 12,56 cm^2 (v důsledku zaokrouhlování se objevily drobné rozdíly ve výsledcích). Můžeme zde vidět rozdíly v počtech řešitelů, kteří si danou strategii zvolili, a v počtech řešitelů, kteří pomocí vybrané strategie úlohu 1 dokončili se správným výsledkem. V tabulce je vidět, že přestože nejvíce volenou strategií byla strategie A, počet řešitelů, kteří při jejím použití dospěli ke správnému řešení, není největší. Strategií s největším počtem správných řešení byla strategie C, což je strategie využívající zavedení pomocného prvku – čtverce. Jestliže řešitel použil tuto strategii a správně si nakreslil obrázek, v devíti případech z dvanácti, chybu neudělal. V tabulce můžeme také vidět, že i u strategií, které nevedou ke správnému výsledku, se objevilo jedno řešení se správným výsledkem. Tento výsledek byl způsoben chybnou volbou velikosti poloměru kruhu a následně chybnou volbou vzorce pro obsah kruhu. Na konci tabulky mám uveden počet řešitelů, kteří se zúčastnili experimentu, a celkový počet řešitelů, kteří u úlohy 1 dospěli ke správnému výsledku. Z tabulky je zřejmé, že ze sto osmnácti řešitelů dospělo ke správnému výsledku pouze třicet jedna řešitelů (což je o jednoho řešitele méně, než počet řešitelů, kteří úlohu neřešili vůbec).

Z šedesáti pěti řešitelů z osmých ročníků a padesáti tří řešitelů z devátých ročníků postupovalo správným směrem (počítalo úlohu pomocí strategie vedoucí ke správnému výsledku) pouze šedesát pět řešitelů (dvacet sedm z osmých ročníků, třicet osm z devátých ročníků). Zbylých padesát tři řešitelů postupovalo buď pomocí strategie, která nevedla ke správnému výsledku, anebo na papír s touto úlohou nenapsali nic (třicet dva řešitelů).

Z počtu šedesát pět řešitelů, kteří si zvolili strategii vedoucí ke správnému výsledku, vypočítalo správný výsledek pouze třicet řešitelů, tedy méně než polovina. Jelikož správný výsledek vypočítalo dvanáct z šedesáti pěti řešitelů osmých ročníků a osmnáct z padesáti tří řešitelů devátých ročníků, můžeme říci, že řešitelé z devátých ročníků byli v této úloze úspěšnější.

5.2. Úloha 2

<u>*Úloha 2.*</u> Zjistěte, kolik papíru je potřeba pro stavbu draka, odpovídají-li jeho rozměry těm, které jsou na obrázku.



Obr. 37

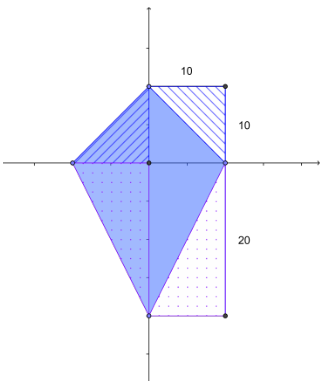
(Novotná, 2015)

5.2.1. Předpokládané strategie řešení

Polovinu strategií, které zde uvádím, jsem převzala z přednášky (Novotná, 2015), kde byla prezentována část výsledků z projektu GAČR P407/12/1939. U každé převzaté strategie uvádím na jejím konci zdroj. Strategie, které převzaté nejsou, jsou bez označení zdroje a znamená to, že jsou navrženy mnou.

1. Přímý způsob

a) grafická cesta



Obr. 38

Obrazec na obr. 37 je souměrný podle svislé úhlopříčky. Levou část obrazce přesuneme doprava tak, že vytvoříme obdélník s rozměry 10 cm a 30 cm (viz obr. 38).

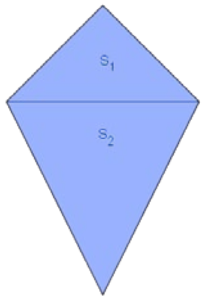
$$S = 10 \cdot 30 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

<u>Výsledek</u>: Na stavbu draka je potřeba 300 cm^2 papíru.

Předpokládané znalosti: osová souměrnost; osově souměrné obrazce; obsah obdélníku; násobení

Možné obtíže: špatná rovinná představivost (Novotná, 2015)

b) početní – rozdělení na dva, tři nebo čtyři trojúhelníky



Obr. 39

Rozdělení pomocí vodorovné úhlopříčky na dva trojúhelníky (obr. 39), jejich obsah vypočítáme pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku:

$$S_1 = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100\ (\mathrm{cm}^2), S_2 = \frac{20 \cdot 20}{2} = 200(\mathrm{cm}^2),$$

$$S_1 + S_2 = 300\ (\mathrm{cm}^2).$$

Další možností je rozdělit ještě trojúhelník s obsahem S_2 na dva shodné trojúhelníky (S_{2a}, S_{2b}), čímž dostáváme tři trojúhelníky se shodným obsahem (rozměry potřebné k výpočtu obsahu jsou u všech tří trojúhelníků stejné, a to 20 cm a 10 cm):

$$S_1 = S_{2a} = S_{2b} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100\ (\mathrm{cm}^2) \Longrightarrow 3 \cdot 100 = 300\ (\mathrm{cm}^2).$$

Pomocí obou úhlopříček je možno obrazec rozdělit na čtyři trojúhelníky (vždy dva shodné trojúhelníky, které nazývám $S_{1a}, S_{1b}, S_{2a}, S_{2b}$):

$$S_{1a} = S_{1b} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50\ (\mathrm{cm}^2) \Rightarrow 2 \cdot 50 = 100\ (\mathrm{cm}^2),$$

$$S_{2a} = S_{2b} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100\ (\mathrm{cm}^2) \Rightarrow 2 \cdot 100 = 200(\mathrm{cm}^2),$$

$$S_{1a} + S_{1b} + S_{2a} + S_{2b} = 300\ (\mathrm{cm}^2).$$

Výsledek: Na stavbu draka je potřeba 300 cm^2 papíru.

Předpokládané znalosti: trojúhelník a jeho vlastnosti; obsah trojúhelníku; obsah pravoúhlého trojúhelníku; násobení

Možné obtíže: chybná vizualizace situace; chybný výběr rozměrů a jejich násobení; chybné doplnění obsahů (Novotná, 2015)

c) pomocí osové souměrnosti

Hlavní úhlopříčka dělí obrazec na obr. 37 na dva shodné trojúhelníky. Stačí tedy vypočítat obsah jednoho trojúhelníku, a poté vynásobit dvěma.

$$S = \frac{10 \cdot 30}{2} \cdot 2 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

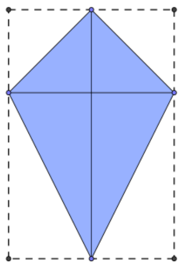
Výsledek: Na stavbu draka je potřeba 300 cm^2 papíru.

Předpokládané znalosti: osová souměrnost; shodnost trojúhelníků; obsah trojúhelníku; násobení

Možné obtíže: výběr chybné osy souměrnosti; zapomenutí zdvojnásobit obsah jednoho trojúhelníku

2. Zavedení pomocného prvku

a) obdélník



Obr. 40

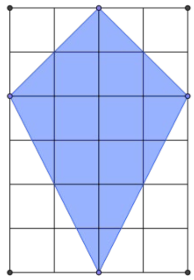
Opíšeme-li obrazci na obr. 37 obdélník a doplníme obě úhlopříčky (obr. 40), můžeme vidět, že jeho obsah je jedna polovina obsahu obdélníku, jehož strany mají délky 20 cm a 30 cm. Tedy:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Výsledek: Na stavbu draka je potřeba 300 cm^2 papíru.

Předpokládané znalosti: obdélník; čtverec; vlastnosti úhlopříček; násobení

Možné obtíže: neuvědomění si, jaká část obdélníku je trojúhelník (Novotná, 2015) *b) čtvercová síť*



Obr. 41

Opíšeme-li obrazci na obr. 37 obdélník a rozdělíme ho pomocí čtvercové sítě tak, že jeden čtvereček má stranu délky 5 cm, získáváme celkem 24 čtverečků (obr. 41). Z obrázku je patrné, že šest čtverečků je zcela zabarvených a šest je zcela prázdných. Další čtyři čtverečky jsou zabarvené pouze z poloviny (součet zabarvených částí čtverečků se rovná dvěma čtverečkům). Zbylých osm čtverečků je zabarvených pouze částečně. Rozdělíme-li těchto osm čtverečků na čtyři obdélníky (jeden obdélník tvoří dva částečně zabarvené čtverečky nacházející se nad sebou), je na první pohled zřejmé, že zabarvená je přesně polovina těchto obdélníků (polovina čtyř obdélníků se rovná čtyřem čtverečkům). Součet zabarvených a částečně zabarvených částí čtverečků dává dvanáct, tedy polovinu všech čtverečků.

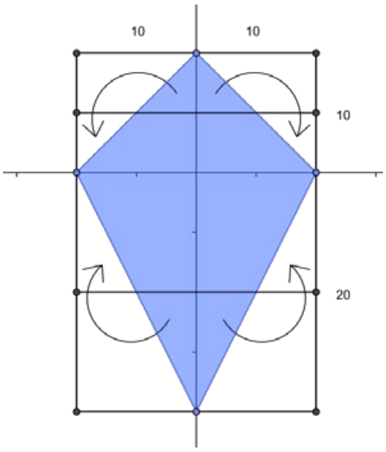
Obsah zabarvené části je roven jedné polovině obsahu obdélníku opsanému obrazci na obr. 37.

$$S = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300\ (\mathrm{cm}^2).$$

Výsledek: Na stavbu draka je potřeba 300 cm^2 papíru.

Předpokládané znalosti: čtvercová síť; obsah obdélníku; rýsování; násobení;
Možné obtíže: nepřesné narýsování sítě; chybné spočítání vybarvených a nevybarvených čtverečků a jejich částí

c) pomocné úsečky



Obr. 42

Opíšeme obrazci na obr. 37 obdélník, který rozdělíme pomocí vodorovné osy na obdélník a čtverec, u kterých zavedeme pomocné vodorovné úsečky, viz obr. 42. Pomocí těchto úseček doplníme obrazec na obdélník o délkách stran 20 cm a 15 cm, tedy

$$S = 20 \cdot 15\ (\mathrm{cm}^2).$$

Výsledek: Na stavbu draka je potřeba 300 cm^2 papíru.

Předpokládané znalosti: vlastnosti obdélníku, čtverce; násobení
Možné obtíže: správná vizualizace problému; správnost výběru rozměrů pro počítání obsahu vzniklého obdélníku

5.2.2. Očekávané chyby

Stejně jako u úlohy 1 vycházím v této části ze svých zkušeností a uvádím chyby, které od řešitelů osmých a devátých ročníků očekávám. Chybou může být zvolení strategie, nevedoucí ke správnému výsledku. Také použití nesprávných vzorců, či nepřesné výpočty, které mohou být zapříčiněny například nepozorností řešitele, vedou k chybnému výsledku.

První chybou, kterou očekávám u úlohy 2, je chybné dosazení rozměrů do vzorců pro obsahy trojúhelníků, popřípadě obdélníků (podle toho, na jaké části řešitel obrazec rozdělí, nebo kam určité části přesune, viz $[1.a),\ 1.b)]$). Další očekávanou chybou je, že řešitel, který si do obrázku doplní obdélník nad vrcholy obrazce na obr. 36, zapomene vydělit obsah tohoto obdélníku dvěma.

5.2.3. Hypotéza

Očekávám, že nejčastěji použitou strategií u úlohy 2 bude grafická cesta – přesun do obdélníku $[1.a)]$, jelikož tuto strategii považuji za snadno viditelnou v zadání.

Každý nemusí mít rovinnou představivost, ale obsah trojúhelníku je učivo většinou v osmém ročníku již zažité, proto předpokládám, že druhou nejčastěji volenou strategií bude $[1.b)]$, což je rozdělení na dva, tři nebo čtyři trojúhelníky.

5.2.4. Rozbor žákovských řešení

Rozbor žákovských řešení u úlohy 2 je proveden stejným způsobem jako u úlohy 1. Nejprve tedy ukážu tabulku použitých strategií u této úlohy, ve které je uveden počet řešitelů z jednotlivých ročníků, kteří počítali pomocí určitých strategií a zda dospěli ke správnému (chybnému) výsledku. Následně rozeberu strategie vedoucí ke správnému výsledku, které se objevily v obou ročnících, strategie použité pouze v osmých nebo devátých ročnících a nakonec strategie, které nevedou ke správnému výsledku.

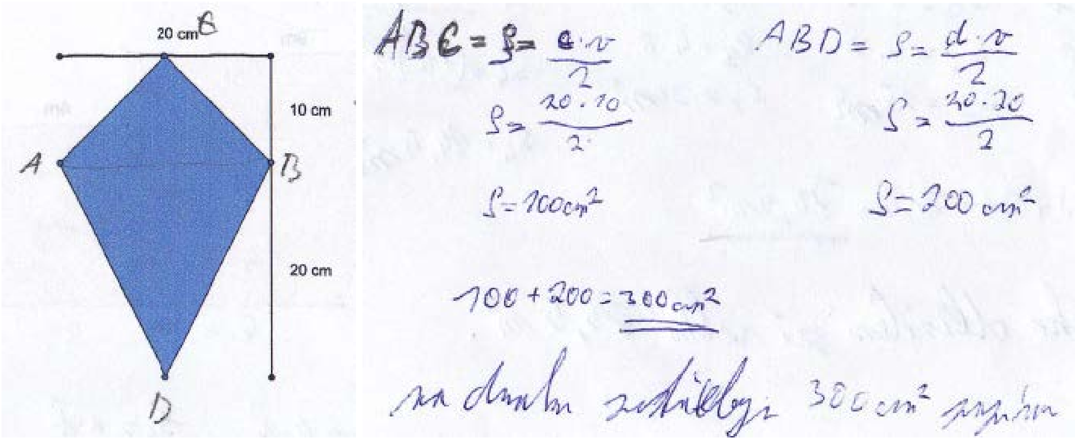
Tabulka 4

	strategie vedoucí ke správnému výsledku						
	8. ročník			9. ročník			**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**
	počet řešitelů	správný výsledek	chybný výsledek	**počet řešitelů**	správný výsledek	chybný výsledek	
Strategie J	**9**	7	2	**20**	10	10	**29**
Strategie K	**10**	4	6	**4**	4	—	**14**
Strategie L	**6**	6	—	**6**	5	1	**12**
Strategie M	**3**	3	—	**6**	5	1	**9**
Strategie N	**1**	1	—	—	—	—	**1**
Strategie O	**8**	2	6	—	—	—	**8**
Strategie P	—	—	—	**3**	3	—	**3**
Strategie Q	—	—	—	**1**	1	—	**1**
	strategie, které nevedou ke správnému výsledku						
Strategie R	**6**	—	6	**10**	—	10	**16**
Strategie S	**2**	—	2	**1**	—	1	**3**
Strategie T	**6**	—	6	—	—	—	**6**
Strategie U	**1**	—	1	—	—	—	**1**
strategie V	**1**	—	1	—	—	—	**1**
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**12**	—	—	**2**	—	—	**14**
						celkem	**118**

Strategie vedoucí ke správnému výsledku:

Strategie J

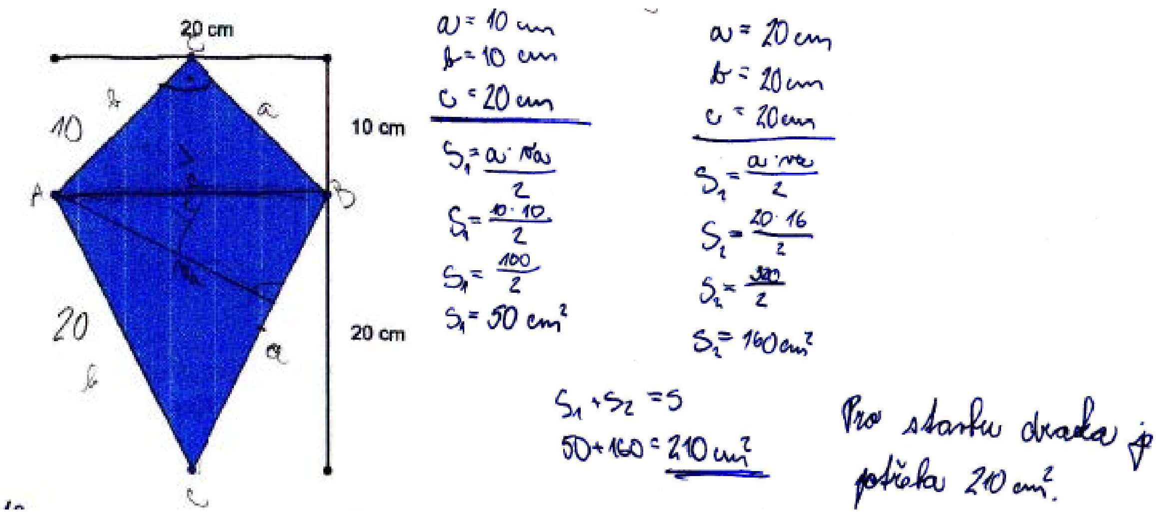
První volená strategie u úlohy 2 odpovídá předpokládané strategii nazvané „ početní“ $[1.b)]$, kde je „drak“ rozdělen na určitý počet trojúhelníků, jejichž obsahy vypočítáme pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku. Konkrétně v této strategii je „drak“ rozdělen na dva trojúhelníky. Rozdělení na dva trojúhelníky je u všech řešitelů, kteří si zvolili tuto strategii, stejné, a to pomocí vodorovné úhlopříčky. Ukázka řešení se správným výsledkem (obr. 43).



Obr. 43 Řešení se správným výsledkem

Tímto způsobem počítalo v osmých ročnících devět řešitelů a v devátých ročnících dvacet řešitelů. Na obr. 43 je ukázka řešení řešitele z osmého ročníku, kde si řešitel označil vrcholy „draka“ velkými písmeny, díky čemuž má označeny trojúhelníky, u kterých počítá obsahy.

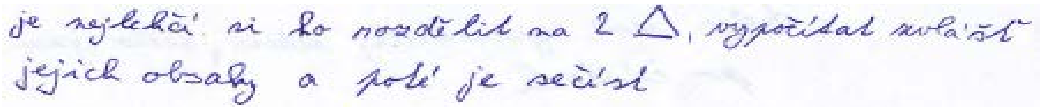
V osmých ročnících dokončilo úlohu 2 se správným výsledkem při použití strategie J sedm řešitelů. Dva řešitelé nedokončili úlohu se správným výsledkem, protože si zvolili za velikosti výšek v trojúhelnících chybné hodnoty. Ukázka jedno řešení s chybným výsledkem (obr. 44):



Obr. 44 Řešení s chybným výsledkem

U řešení s chybným výsledkem (obr. 44) můžeme vidět, že si řešitel pro počítání zvolil nesprávné hodnoty. Horní trojúhelník ABC je pravoúhlý, ale strana a nemá délku 10 cm. Pokud by si řešitel spočítal správnou velikost strany a, b, mohl by tímto postupem spočítat obsah horního trojúhelníku. U dolního trojúhelníku ABC, stejně jako u horního trojúhelníku volí chybnou velikost strany a (20 cm) a počítá výšku na tuto stranu.

Nejvíce řešitelů (dvacet) z devátých ročníků řešilo úlohu 2 právě tímto způsobem. Jeden řešitel napsal (obr. 45):

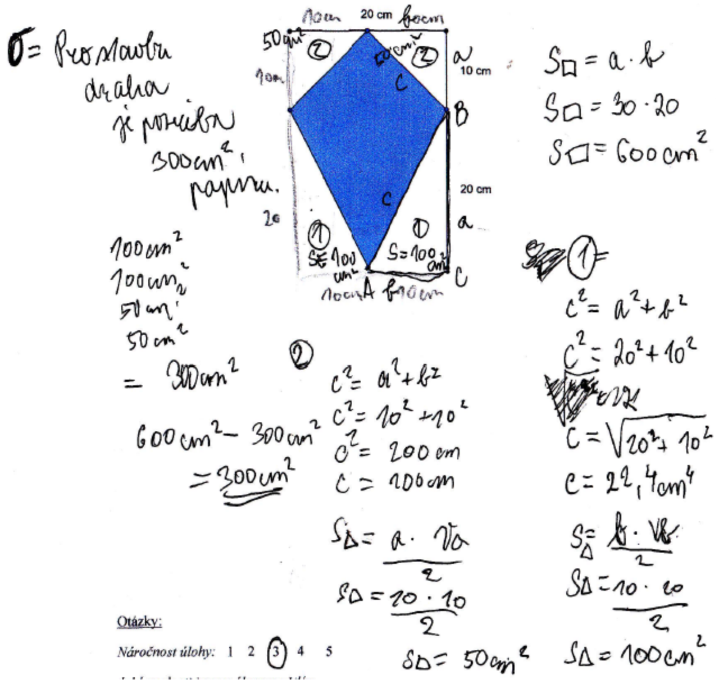


Obr. 45

Z dvaceti řešitelů z devátých ročníků, kteří si zvolili tuto strategii, dospělo ke správnému výsledku deset řešitelů a deset řešitelů udělalo někde chybu. K chybnému výsledku většinou dospěli tím, že si nejdříve vypočítali stranu „draka“ a z té dopočítávali výšku, čímž ve výsledku docházelo k několikacentimetrovým nepřesnostem (osm řešitelů). Další důvod chybného výsledku byl, že řešitelé práci vůbec nedokončili a tím vlastně k žádnému výsledku ani nedospěli (dva řešitelé).

Strategie K

Strategie příbuzná strategiím „početním“, jelikož se pracuje s obsahy trojúhelníků. Zatímco v „početní“ strategii řešitelé počítají obsahy určitého počtu trojúhelníků, které sečtou, zde nejprve počítají obsah obdélníku vzniklého nad vrcholy „draka“, od kterého odečítají obsahy čtyř trojúhelníků, které vzniknou doplněním do obdélníku. Výsledek je obsah „draka“. Na obr. 46 je ukázka řešení se správným výsledkem:

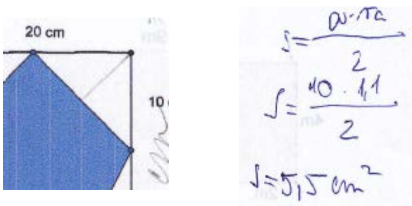


Obr. 46

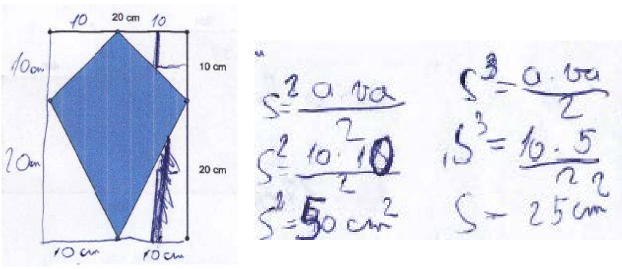
Tento postup počítání si zvolilo čtrnáct řešitelů. V osmých ročnících tímto způsobem počítalo deset řešitelů, ale ke správnému výsledku dospěli pouze čtyři. V devátých ročnících takto řešili úlohu 2 čtyři řešitelé a všichni dokončili úlohu se správným výsledkem. Ve všech případech, kdy řešitelé počítali správně, jim stačilo spočítat pouze obsahy dvou trojúhelníků a pouhou úvahou dospěli k závěru, že „drak“ je symetrický, a proto mohou obsahy obou trojúhelníků znásobit dvěma.

Ti, kteří nedospěli ke správnému výsledku, dělali následující chyby:

- Tři řešitelé určili nesprávně délky stran obdélníku, čímž dostali obsah obdélníku 400 cm^2, a proto jim obsah „draka“ vyšel chybně 100 cm^2.
- Zbylí tři řešitelé spočítali obsah obdélníku správně, ale udělali chybu v počítání obsahu trojúhelníků, které od obdélníku odečítali. Chyby byly hlavně v chybném dosazení výšky, za kterou považovali buď výšku na stranu „draka“ (dva řešitelé), kterou si změřili z obrázku v zadání (obr. 47), nebo si výšku řešitel načrtl do poloviny strany „draka“ (obr. 48), a proto zvolil k dalšímu počítání za výšku velikost 5 cm (jeden řešitel).



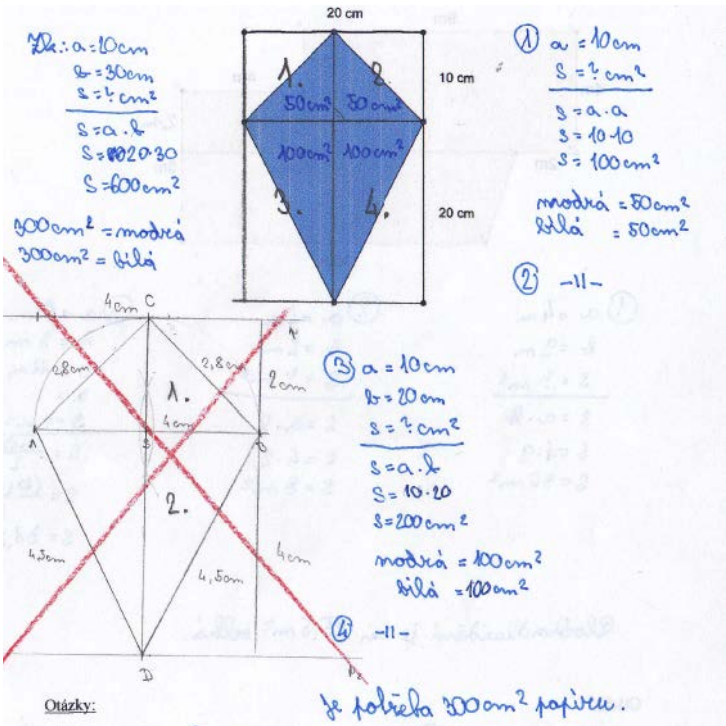
Obr. 47 Výška změřená z obrázku v zadání.



Obr. 48 Náčrt výšky do poloviny strany draka.

Strategie L

Jedná se o další strategii odpovídající předpokládané strategii nazvané „početní“ $[1.b)]$. Je to strategie podobná strategii J, pouze s rozdílem, že „drak“ je rozdělen na čtyři trojúhelníky. Na obr. 49 je ukázka jednoho řešení:



Obr. 49

V tomto řešení si navíc řešitel uvědomil,

že když z toho udělám obdélník, tak drak zabírá 50% toho obdélníku.

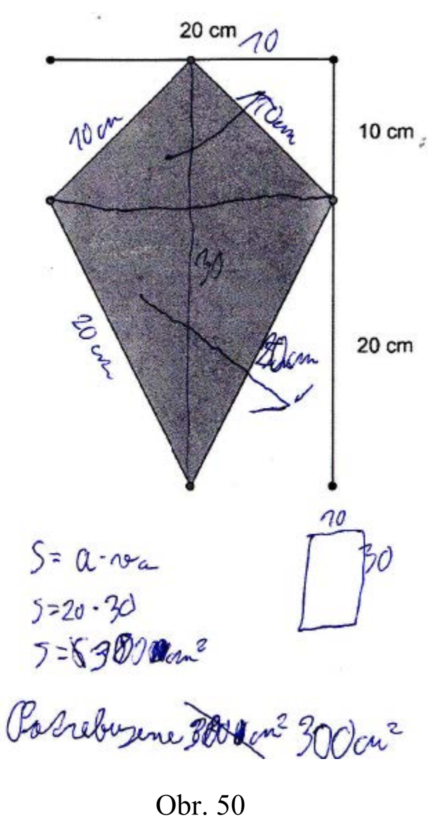
Proto provedl navíc zkoušku.

Tímto způsobem počítalo celkem dvanáct řešitelů, v osmých i devátých ročnících po šesti řešitelích. Tato strategie byla velice úspěšná, z dvanácti řešitelů pouze jeden řešitel nedospěl ke správnému výsledku (úlohu nedokončil), a to řešitel z devátého ročníku.

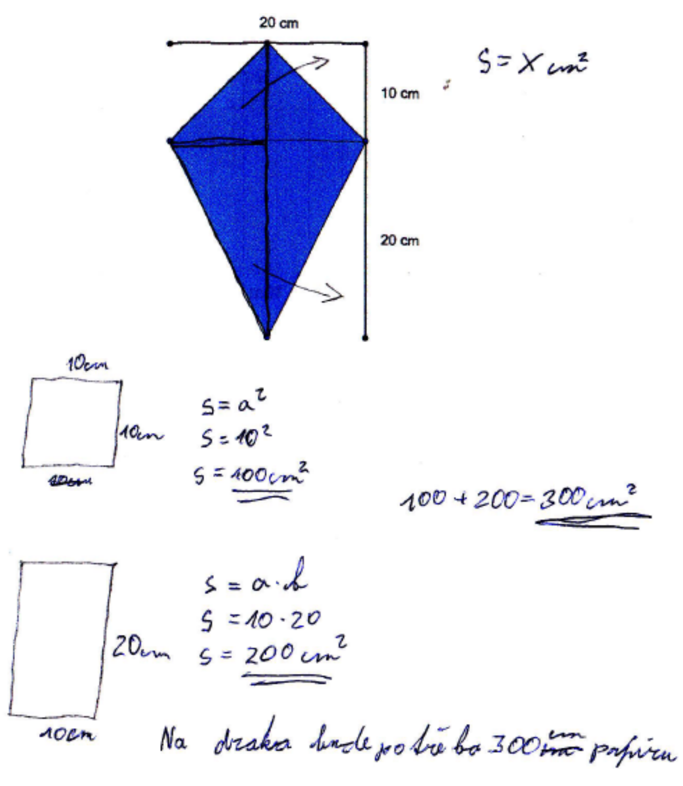
Strategie M

Strategie odpovídá předpokládané strategii, která je nazvaná „grafická cesta“ $[1. a)]$. Řešitelé využívají symetrie obrazce na obr. 37 a přesunují levou část obrazce doprava tak, že vytvoří obdélník s rozměry 10 cm a 30 cm.

<u>Ukázky řešení se správným výsledkem (obr. 50, obr. 51):</u>



Obr. 50



Obr. 51

Tento způsob řešení si zvolili v osmých ročnících tři řešitelé – všichni dokončili úlohu se správným výsledkem. V devátých ročnících takto řešilo šest řešitelů, z toho pouze jeden nedospěl ke správnému výsledku. Můžeme tedy říci, že tato strategie byla velice úspěšná.

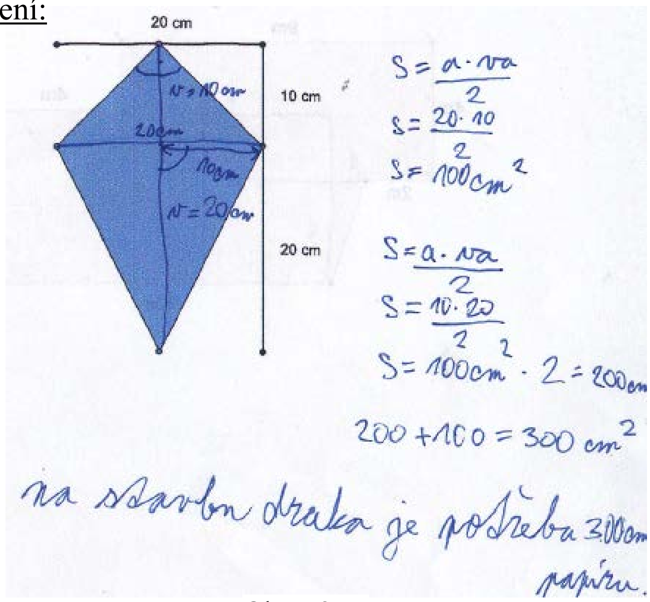
V žákovských řešeních můžeme vidět, jak řešitelé přesouvají levé části doprava. Dále řeší úlohu dvěma různými způsoby. Na obr. 50 řešitel vytváří obdélník o rozměrech 10 cm a 30 cm (takto řešili úlohu 2 tři řešitelé z osmých ročníků a dva řešitelé z devátých ročníků). Na obr. 51 řešitel vytvořil čtverec o rozměrech 10 cm a 10 cm a obdélník s rozměry 10 cm a 20 cm (takto řešili úlohu 2 tři řešitelé z devátých ročníků). Všichni řešitelé dospěli ke stejnému, správnému výsledku. Řešitel, který nedospěl ke správnému výsledku, volil rozdělení ukázané na obr. 51. Zde udělal chybu ve výpočtu obsahu obdélníku, kdy za a dosadil 20 cm místo 10 cm.

Další strategie, které zde uvádím, se vyskytly buď pouze v osmých ročnících, nebo pouze v devátých ročnících.

Strategie N

Tato strategie se objevila pouze v osmém ročníku u jediného řešitele. Řadím ji mezi strategie, které v předpokládaných strategiích nazýváme „početní“ $[1.b)]$ – je podobná strategii J, pouze místo dvou trojúhelníků jsou zde tři trojúhelníky, kde dva ze tří trojúhelníků jsou shodné.

Na obr. 52 je ukázka řešení:



Obr. 52

Strategie O

Strategie O, je strategie objevující se pouze v osmých ročnících. Tato strategie je jiná než ostatní. Zatímco v jiných případech se pokoušeli řešitelé vypočítat obsah „draka“, zde nepočítali, ale uvažovali: „Kolik papírů budu na tohoto draka potřebovat?“ Odpovědi byly následovné:

- „*Na stavbu papírového draka budeme potřebovat jednu A3.*“ Tato odpověď se objevila dvakrát. Považuji ji za správnou, protože papír velikosti A3 má rozměry

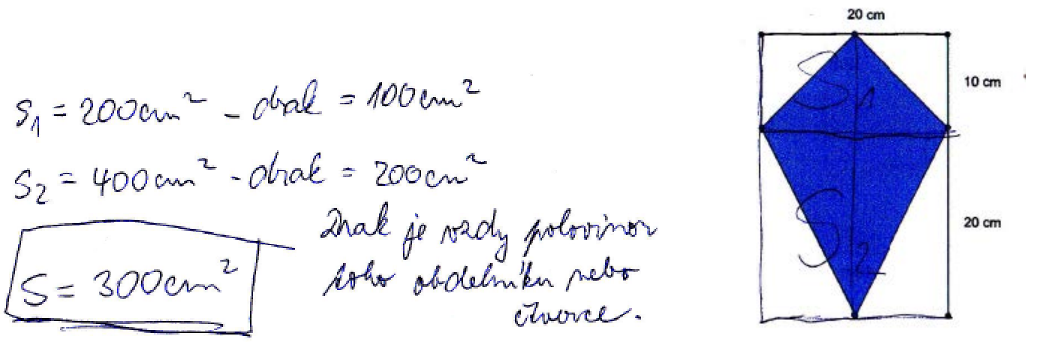
297 mm a 420 mm.[3] Z papíru o velikosti A3 můžeme vystřihnout „draka“ s rozměry uvedenými na obr. 37.

- „*Bude nám stačit A4*“. Takováto odpověď se objevila také dvakrát, jen pokaždé v jiné formulaci. Jednu formulaci odpovědi jsem již uvedla a napíši zde i druhou, jelikož v té druhé nám řešitel vysvětluje, proč stačí A4: „*Potřebujeme pouze jeden papír na draka a kousek zbyde, protože normální papír A4 – délka je 30 cm a šířka 21 cm.*“ K tomuto ještě doplňuje: *„ Změřil jsem si tenhle papír a hned mne to napadlo.*“ Tuto odpověď nepovažuji za správnou, protože rozměry papíru A4 jsou 210 mm a 297 mm.[4] Z papíru o velikosti A4 nemohu vystřihnout „draka“ o rozměrech uvedených na obr. 37.
- „*Na stavbu draka jsou potřeba 4 papíry.*“ V tomto případě si řešitelé dokreslili do obrázku obdélník a ten pomocí úhlopříček rozdělili na dva čtverce a dva obdélníky. Takto úlohu vyřešili dva řešitelé. Toto řešení nepovažuji za správné, protože nebyly uvedeny rozměry papírů, ze kterých vystřihujeme.
- Jeden řešitel napsal: „*1 papír nebo 3 papíry*“. Tento řešitel si, stejně jako řešitelé v předchozím případě, dokreslil do obrázku obdélník, který rozdělil na tři části. Pomocí vodorovné úhlopříčky oddělil horní obdélník s rozměry 20 cm a 10 cm od dolního čtverce s rozměry 20 cm a 20 cm. Dolní čtverec také rozdělil pomocí svislé úhlopříčky na dva stejné obdélníky s rozměry 20 cm a 10 cm, čímž získal tři obdélníky o stejném obsahu. Stejně jako v předchozím případě řešitel neuvedl rozměry papírů, ze kterých draka bude vystřihovat, proto toto řešení nepovažuji za správné.
- Jeden řešitel napsal: „*V této době není takový problém koupit si větší papír. Papírový drak by se hnedka roztrhal, takže bych vůbec nepočítal kolik je na něj potřeba papírů. Použil bych igelit.*“ Tuto odpověď nepovažuji za správnou, protože mě nezajímá, co by řešitel použil za materiál, ale kolik potřebuje papíru pro stavbu „draka“ uvedeného na obr. 37.

Strategie P

Strategie, při které se nejprve počítá obsah obdélníku (čtverce), od nějž se následně odečte obsah „draka“, a řešitel dochází k závěru, že: *„Drak je vždy polovinou tohoto obdélníku nebo čtverce.*“ (obr. 53)

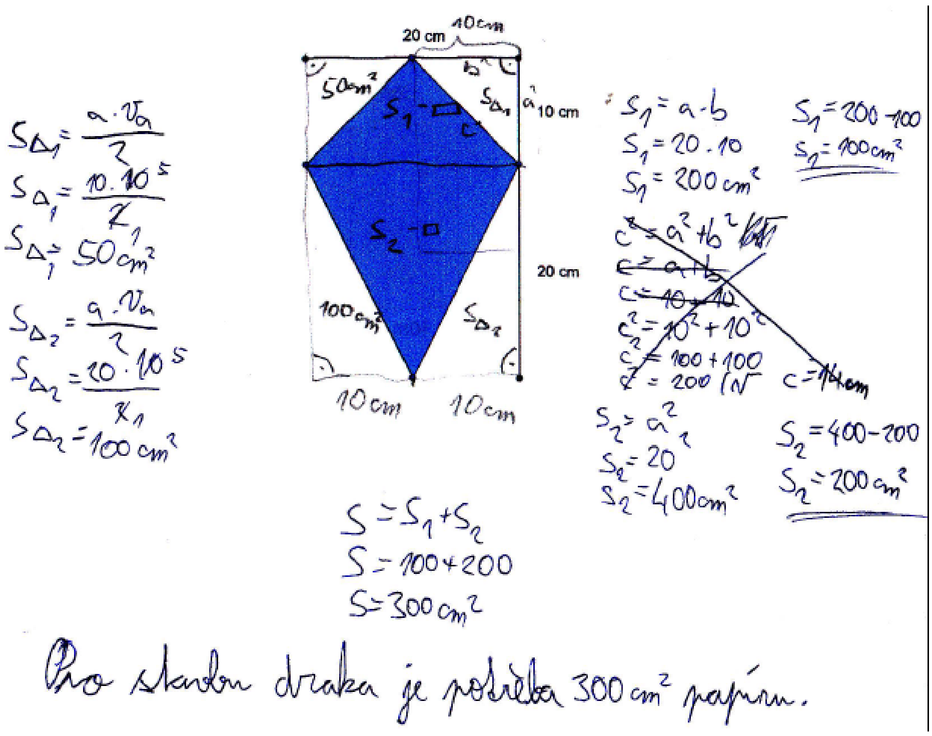
[3] Standardní formáty papíru podle ISO 216, řada A.
[4] Standardní formáty papíru podle ISO 216, řada A.



Obr. 53

Tímto způsobem počítal jeden řešitel z devátého ročníku.

Tato strategie se dá také pojmout jinak, a to pomocí postupného odečítání obsahů trojúhelníků od obsahů obdélníku a čtverce (obr. 54).

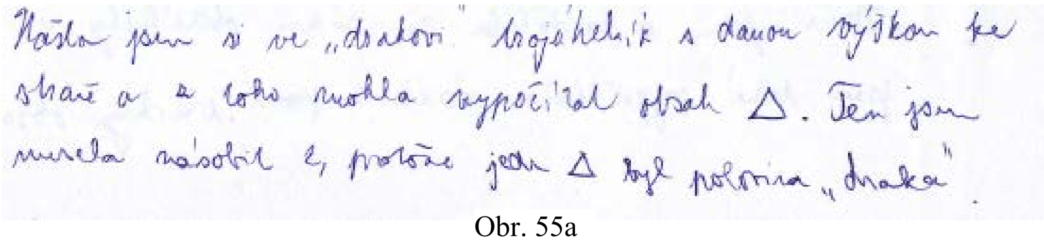


Obr. 54

Tento způsob řešení se mezi řešiteli devátých ročníků objevil dvakrát a vždy se správným výsledkem. Na obr. 54 můžeme vidět, že řešitel nejprve spočítal obsahy trojúhelníků, které vzniknou doplněním na obdélník. Obdélník rozdělil pomocí vodorovné úhlopříčky „draka“, spočítal obsahy vzniklého čtverce a obdélníku, od nichž odečetl obsahy příslušných trojúhelníků. Získané obsahy dvou trojúhelníků, vzniklých rozdělením „draka“ pomocí vodorovné úhlopříčky, sečetl a dostal tak výsledný obsah „draka“.

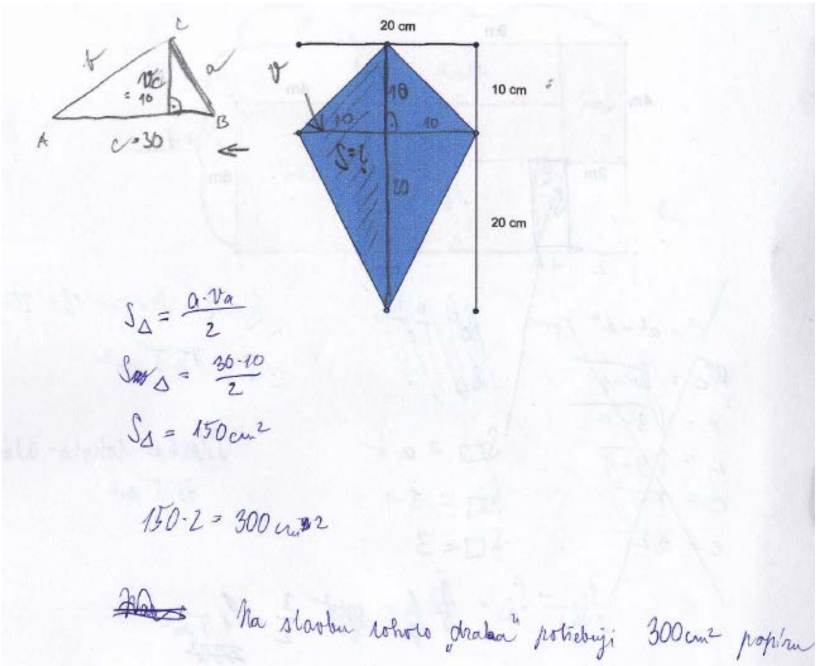
Strategie Q

Využívá osové souměrnosti a shoduje se s předpokládanou strategií nazvanou „pomocí osové souměrnosti“ [1. c)]. Řešitel z devátého ročníku v „drakovi“ určil trojúhelník, u kterého spočítal obsah, a poté jeho obsah znásobil dvěma. Takto řešil pouze jeden řešitel z devátého ročníku (obr. 55a,b).



Našla jsem si ve „drakovi“ trojúhelník s danou výškou ke straně a z toho mohla vypočítat obsah Δ. Ten jsem musela násobit 2, protože jeden Δ byl polovina „draka“.

Obr. 55a

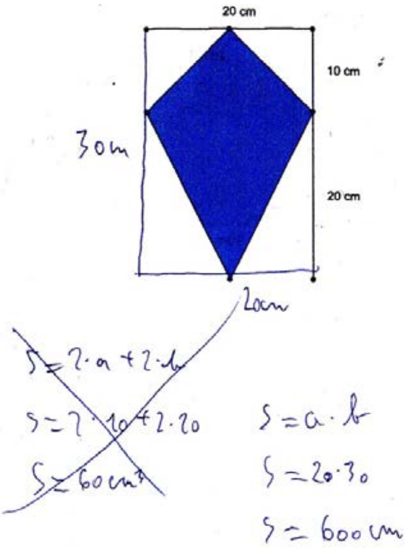


Obr. 55b

<u>Strategie, které nevedou ke správnému výsledku:</u>

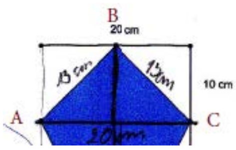
V žákovských strategiích se vyskytlo šest strategií, které nevedly k správnému výsledku.

Nejčastěji volenou strategií nevedoucí ke správnému výsledku je ***strategie R***. V této strategii řešitelé počítají pouze obsah obdélníku vzniklého nad vrcholy „draka“ (obr. 56). Takto řešilo úlohu patnáct řešitelů, v osmých ročnících šest řešitelů a v devátých ročnících devět řešitelů. Do této strategie jsem zařadila i jedno řešení z devátého ročníku, a to je spočítání pouze obsahu jednoho trojúhelníku ze čtyř vyznačených v „drakovi“.



Obr. 56

Při použití ***strategie S*** řešitel zaměňuje obsah trojúhelníku s obsahem lichoběžníku.

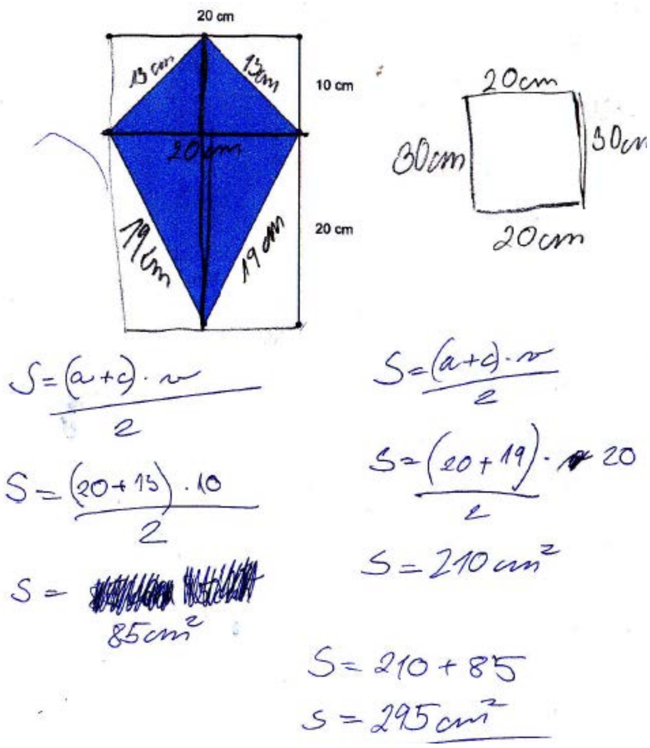


Obr. 57a

Na obr. 57a je výřez z ukázky jednoho žákovského řešení (obr. 57), do kterého jsem pro lepší orientaci doplnila písmena A, B, C, označující vrcholy trojúhelníku. Řešitel trojúhelník ABC zaměnil za lichoběžník, kde za rozměry dvou protějších stran jsou brány délky stran AC a $BC(AB)$, za výšku je brán rozměr 10 cm. Stejným způsobem postupoval i u dolní části „draka“.

Tuto strategii řešení využili dva řešitelé z osmých ročníků a jeden z ročníku devátého.

Na obr. 57 je ukázka řešení jednoho řešitele:



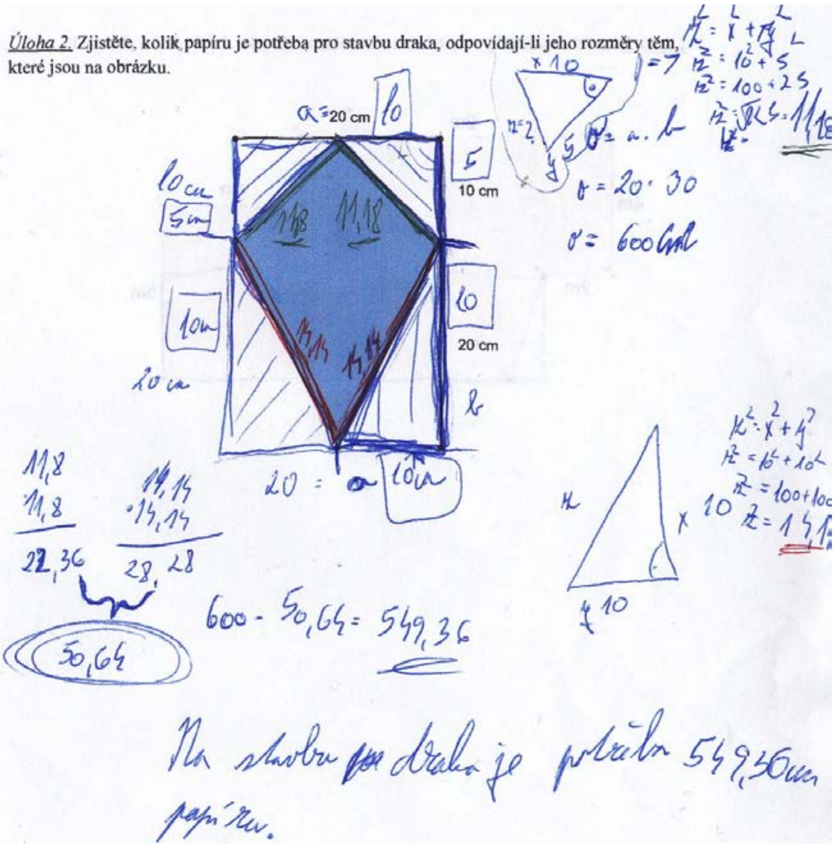
Obr. 57

Další strategie, nevedoucí ke správnému výsledku, se objevily pouze v osmých ročnících.

Následující chybný postup nazývám ***strategie T***. Zde místo obsahu „draka“ počítali řešitelé obvod obdélníku vzniklého nad „drakem“. Tento obvod počítali dvěma způsoby. První způsob je: $o = a + a + b + b + c + c$, kde $a = 20\text{ cm}, b = 10\text{ cm}, c = 20\text{ cm}$ (dva řešitelé). Druhý způsob: $S = 2(a + b)$, kde $a = 20\text{ cm}, b = 30\text{ cm}$ (čtyři řešitelé).

Další strategie se objevila pouze u jednoho řešitele, nazývám ji ***strategie U***. Řešitel pro zjištění obsahu „draka“ mezi sebou vynásobil všechny hodnoty, které viděl na obrázku, čímž získal hodnotu 4 000 cm^2.

Pomocí ***strategie V*** počítal jeden řešitel. V této strategii uvedené na obr. 58 řešitel nejprve spočítal obsah obdélníku vytvořeného nad vrcholy „draka“. Následně pomocí Pythagorovy věty spočítal délky stran „draka“. Tyto délky stran mezi sebou vynásobil – vždy strany o stejné délce[5] ($11{,}8 \cdot 11{,}8 = 22{,}36$; $14{,}14 \cdot 14{,}14 = 28{,}28$). Výsledky z těchto dvou součinů sečetl ($50{,}64$). Tuto hodnotu odečetl od obsahu obdélníku a získal výsledek ($549{,}36$), o kterém se domníval, že je obsah „draka“.



Obr. 58

[5] Délky stran „draka“ by měly být uváděny v cm. Řešitel však žádné jednotky neuváděl, z toho důvodu je nebudu uvádět ani já, neboť bych tím upravila jeho řešení.

Stejně jako u úlohy 1 i zde se objevila nevyplněná řešení, tj. řešení, kde se řešitelé ani nepokusili začít počítat. Celkem čtrnáct řešitelů si s touto úlohou nevědělo rady (dvanáct z osmých ročníků a dva z devátých ročníků).

5.2.5. Srovnání s řešením vyučujících

Učitelské strategie opět odpovídají třem žákovským strategiím. První strategií je strategie M, která odpovídá předpokládané strategii nazvané „grafická cesta“ $[1. a)]$. Druhou strategií, kterou použili učitelé, je strategie L, ve které je „drak“ rozdělen na čtyři trojúhelníky. Poslední strategií je strategie Q, odpovídající předpokládané strategii nazývané „pomocí osové souměrnosti“ $[1. c)]$.

Strategie volené učiteli nebyli těmi nejvíce volenými strategiemi u žáků. Většina řešitelů volila jinak než učitelé.

5.2.6. Závěr

Strategií, které se objevily v žákovských řešeních u úlohy 2, bylo třináct. Z tohoto počtu osm strategií vedlo ke správnému výsledku. Ostatní strategie ke správnému výsledku nevedly.

Tabulka 5

strategie vedoucí ke správnému výsledku			
	8. ročník	9. ročník	**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**
	počet řešitelů	**počet řešitelů**	
Strategie J	**9**	**20**	**29**
Strategie K	**10**	**4**	**14**
Strategie L	**6**	**6**	**12**
Strategie M	**3**	**6**	**9**
Strategie N	**1**	—	**1**
Strategie O	**8**	—	**8**
Strategie P	—	**3**	**3**
Strategie Q	—	**1**	**1**
strategie, které nevedou ke správnému výsledku			
Strategie R	**6**	**10**	**16**
Strategie S	**2**	**1**	**3**
Strategie T	**6**	—	**6**
Strategie U	**1**	—	**1**
strategie V	**1**	—	**1**
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**12**	**2**	**14**
		celkem	**118**

V tabulce 5 je ukázáno, které strategie vedly ke správnému výsledku, které strategie nevedly ke správnému výsledku, a četnost jejich použití v žákovských řešeních. V tabulce nejsou rozlišeni řešitelé, kteří dospěli ke správnému výsledku, a řešitelé, kteří dospěli k chybnému výsledku. Řešitelé jsou v tabulce rozděleni podle ročníku, do kterého patří. Tabulka tak ukazuje rozdíly v použitých strategiích řešení žáků osmých a devátých ročníků. Můžeme zde vidět, že nejčastěji volenou strategií vedoucí ke správnému výsledku byla strategie J, kde řešitelé rozdělili „draka“ na dva trojúhelníky, a strategie K, kde nejdříve vypočítali obsah obdélníku vzniklého nad „drakem“ a následně odečetli obsahy čtyř trojúhelníků vzniklých při doplnění na obdélník. Velice časté bylo rozdělení na určitý počet trojúhelníků, které se vyskytlo ve třech strategiích. Tyto strategie jsem rozdělila podle počtu trojúhelníků (strategie J – dva trojúhelníky, strategie L – čtyři trojúhelníky, strategie N – tři trojúhelníky). Nepotvrdila se má hypotéza, že nejvíce řešitelů bude úlohu 2 řešit grafickou cestou, což je strategie M. Jak můžeme vidět v tabulce, tímto způsobem řešilo úlohu pouze devět řešitelů. Mé odhady nebyly správné. V tabulce je také ukázáno, kolik řešitelů neřešilo úlohu vůbec (pouhých čtrnáct ze sto osmnácti řešitelů).

Tabulka 6

strategie vedoucí ke správnému výsledku						
	8. ročník		9. ročník		**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**	**počet řešitelů 8. a 9. ročníků, kteří dospěli ke správnému výsledku**
	počet řešitelů	správný výsledek	**počet řešitelů**	správný výsledek		
Strategie J	**9**	7	**20**	10	**29**	17
Strategie K	**10**	4	**4**	4	**14**	8
Strategie L	**6**	6	**6**	5	**12**	11
Strategie M	**3**	3	**6**	5	**9**	8
Strategie N	**1**	1	—	—	**1**	1
Strategie O	**8**	2	—	—	**8**	2
Strategie P	—	—	**3**	3	**3**	3
Strategie Q	—	—	**1**	1	**1**	1
strategie, které nevedou ke správnému výsledku						
Strategie R	**6**	—	**10**	—	**16**	0
Strategie S	**2**	—	**1**	—	**3**	0
Strategie T	**6**	—	—	—	**6**	0
Strategie U	**1**	—	—	—	**1**	0
strategie V	**1**	—	—	—	**1**	0
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**12**	—	**2**	—	**14**	0
				celkem	**118**	51

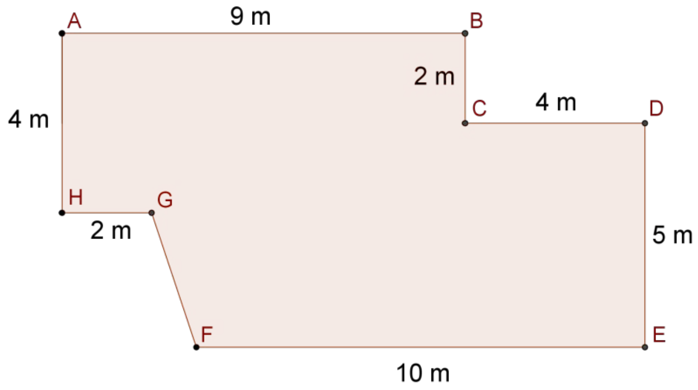
V tabulce 6 jsou uvedeny počty řešitelů, kteří řešili úlohu 2 pomocí určité strategie a počty řešitelů, kteří úlohu 2 vyřešili se správným výsledkem, tudíž s výsledkem $300\ \text{cm}^2$. Můžeme zde vidět rozdíly v počtech řešitelů, kteří si danou strategii zvolili, a v počtech řešitelů, kteří pomocí vybrané strategie úlohu 2 dokončili se správným výsledkem. V tabulce můžeme vidět, že strategie s největším počtem správných řešení byla strategie J, která byla i nejvíce volenou strategií; jedná se o strategii početní, kdy „drak“ je rozdělen na dva trojúhelníky. Strategie, kde je stoprocentní úspěšnost (všichni řešitelé, kteří použili tuto strategii, vyřešili úlohu se správným výsledkem), jsou tři (strategie N – rozdělení na tři trojúhelníky, strategie P – „$obsah\ obdélníku - obsah\ draka$“ a strategie Q – využívající osové souměrnosti). Na konci tabulky mám uveden počet řešitelů, kteří se zúčastnili experimentu a celkový počet řešitelů, kteří u úlohy 2 dospěli ke správnému výsledku. Z tabulky je zřejmé, že ze sto osmnácti řešitelů dospělo ke správnému výsledku padesát jedna řešitelů (méně než polovina).

Z šedesáti pěti řešitelů z osmých ročníků a padesáti tří řešitelů z devátých ročníků postupovalo správným směrem (počítalo úlohu pomocí strategie vedoucí ke správnému výsledku) pouze sedmdesát sedm řešitelů (třicet sedm z osmých ročníků, čtyřicet z devátých ročníků). Zbylých čtyřicet jedna řešitelů postupovalo buď pomocí strategie, která nevedla ke správnému výsledku, anebo na papír s touto úlohou nenapsali nic (čtrnáct řešitelů).

Z počtu sedmdesát sedm řešitelů, kteří si zvolili strategii vedoucí ke správnému výsledku, dospělo k tomuto výsledku padesát jedna řešitelů. Ke správnému výsledku dospělo dvacet tři z šedesáti pěti řešitelů osmých ročníků a dvacet osm z padesáti tří řešitelů devátých ročníků. Tudíž můžeme říci, že i v této úloze byli úspěšnější řešitelé z devátých ročníků.

5.3. Úloha 3

Úloha 3. Je třeba vydláždit dvůr tvaru uvedeného na obrázku. Urči obsah vydlážděné plochy.



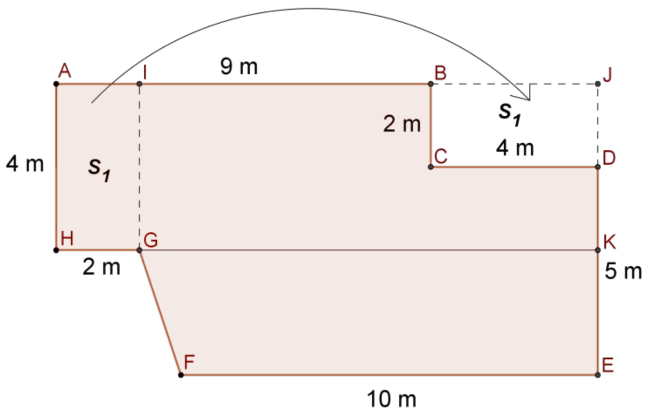
Obr. 59

(Kočová, 2011)

5.3.1. Předpokládané strategie řešení

1. Přímý způsob

a) grafické řešení



Obr. 60

Obdélník $AIGH$ s obsahem S_1 přesuneme podle obr. 60. Dostaneme obrazec, který lze rozdělit na obdélník $IJKG$ (jeho obsah nazveme S_2) a lichoběžník $GKEF$ (jeho obsah nazveme S_3).

$$S = S_2 + S_3 = (11 \cdot 4) + \frac{(10+11)\cdot 3}{2} = 44 + 31{,}5 = 75{,}5\ (\mathrm{m}^2).$$

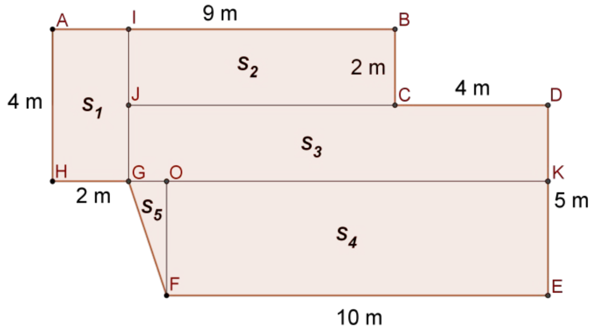
Výsledek: Obsah vydlážděné plochy dvora tvaru uvedeného na obr. 59 je $75{,}5\ \mathrm{m}^2$.

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku; obsah lichoběžníku

Možné obtíže: nepřesná vizualizace problému; numerické chyby *b) rozdělení na menší obrazce*

Principem těchto strategií je rozdělení obrazce na obr. 59 na menší obrazce, u kterých dokážeme spočítat obsah.

B1)



Obr. 61

Plochu dvora rozdělíme na pět menších obrazců, čtyři obdélníky a jeden trojúhelník (obr. 61). Obdélník $AIGH$ má obsah S_1, obdélník $IBCJ$ má obsah S_2, obdélník $JDKG$ má obsah S_3, obdélník $OKEF$ má obsah S_4 a trojúhelník GOF má obsah S_5.

$$S_1 = 2 \cdot 4 = 8\ (\mathrm{m}^2),\ S_2 = 2 \cdot 7 = 14\ (\mathrm{m}^2),\ S_3 = 2 \cdot 11 = 22\ (\mathrm{m}^2),\ S_4 = 3 \cdot 10 = 30\ (\mathrm{m}^2),$$

$$S_5 = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5\ (\mathrm{m}^2),$$

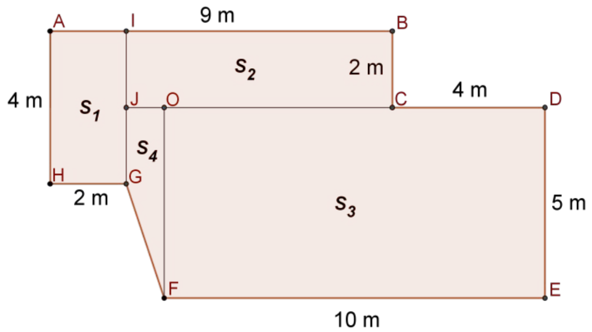
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 8 + 14 + 22 + 30 + 1{,}5 = 75{,}5\ (\mathrm{m}^2).$$

Výsledek: Obsah vydlážděné plochy dvora tvaru uvedeného na obr. 59 je $75{,}5\ \mathrm{m}^2$.

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku; obsah trojúhelníku

Možné obtíže: numerické chyby; zapomenutí některého z výpočtů; nesprávné dosazení rozměrů

B2)



Obr. 62

Plochu dvora rozdělíme na čtyři menší obrazce, tři obdélníky a jeden lichoběžník (obr. 62). Obdélník $AIGH$ má obsah S_1, obdélník $IBCJ$ má obsah S_2, obdélník $ODEF$ má obsah S_3 a lichoběžník $JOFG$ má obsah S_4.

$$S_1 = 2 \cdot 4 = 8\ (\mathrm{m}^2), S_2 = 2 \cdot 7 = 14\ (\mathrm{m}^2), S_3 = 5 \cdot 10 = 50\ (\mathrm{m}^2),$$

$$S_4 = \frac{(2+5) \cdot 1}{2} = 3{,}5\ (\mathrm{m}^2),$$

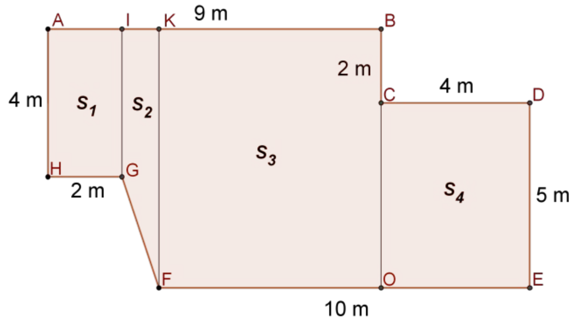
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 8 + 14 + 50 + 3{,}5 = 75{,}5\ (\mathrm{m}^2).$$

<u>Výsledek:</u> Obsah vydlážděné plochy dvora tvaru uvedeného na obr. 59 je $75{,}5\ \mathrm{m}^2$.

<u>Předpokládané znalosti:</u> obsah obdélníku; obsah lichoběžníku

<u>Možné obtíže:</u> numerické chyby; zapomenutí některého z výpočtů; nesprávné dosazení rozměrů

B3)



Obr. 63

Plochu dvora rozdělíme na čtyři menší obrazce, tři obdélníky a jeden lichoběžník (obr. 63). Obdélník $AIGH$ má obsah S_1, obdélník $KBOF$ má obsah S_3, obdélník $CDEO$ má obsah S_4 a lichoběžník $IKFG$ má obsah S_2.

$$S_1 = 2 \cdot 4 = 8\ (\mathrm{m}^2), S_3 = 6 \cdot 7 = 42\ (\mathrm{m}^2), S_4 = 4 \cdot 5 = 20\ (\mathrm{m}^2),$$

$$S_2 = \frac{(4+7) \cdot 1}{2} = 5{,}5\ (\mathrm{m}^2),$$

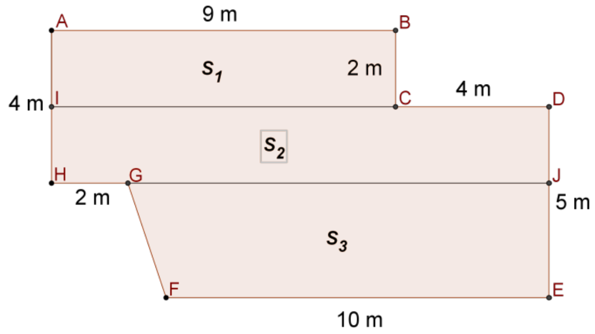
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 8 + 5{,}5 + 42 + 20 = 75{,}5\ (\mathrm{m}^2).$$

<u>Výsledek:</u> Obsah vydlážděné plochy dvora tvaru uvedeného na obr. 59 je $75{,}5\ \mathrm{m}^2$.

<u>Předpokládané znalosti:</u> obsah obdélníku; obsah lichoběžníku

<u>Možné obtíže:</u> numerické chyby; zapomenutí některého z výpočtů; nesprávné dosazení rozměrů

B4)



Obr. 64

Plochu dvora rozdělíme na tři menší obrazce, dva obdélníky a jeden lichoběžník (obr. 64). Obdélník $ABCI$ má obsah S_1, obdélník $IDJH$ má obsah S_2 a lichoběžník $GJEF$ má obsah S_3.

$$S_1 = 2 \cdot 9 = 18\ (\mathrm{m}^2), S_2 = 2 \cdot 13 = 26\ (\mathrm{m}^2), S_3 = \frac{(10 + 11) \cdot 3}{2} = 31{,}5\ (\mathrm{m}^2),$$

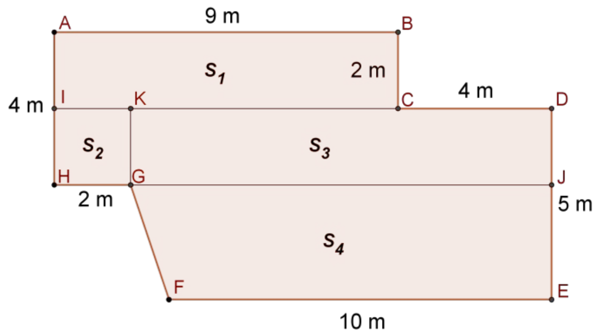
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 18 + 26 + 31{,}5 = 75{,}5\ (\mathrm{m}^2).$$

<u>Výsledek:</u> Obsah vydlážděné plochy dvora tvaru uvedeného na obr. 59 je $75{,}5\ \mathrm{m}^2$.

<u>Předpokládané znalosti:</u> obsah obdélníku; obsah lichoběžníku

<u>Možné obtíže:</u> numerické chyby; zapomenutí některého z výpočtů; nesprávné dosazení rozměrů

B5)



Obr. 65

Plochu dvora rozdělíme na čtyři menší obrazce, dva obdélníky, jeden čtverec a jeden lichoběžník (obr. 65). Obdélník $ABCI$ má obsah S_1, čtverec $IKGH$ má obsah S_2, obdélník $KDJG$ má obsah S_3 a lichoběžník $GJEF$ má obsah S_4.

$$S_1 = 2 \cdot 9 = 18\ (\mathrm{m}^2), S_2 = 2 \cdot 2 = 4\ (\mathrm{m}^2), S_3 = 2 \cdot 11 = 22\ (\mathrm{m}^2),$$

$$S_4 = \frac{(10 + 11) \cdot 3}{2} = 31{,}5\ (\mathrm{m}^2),$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 18 + 4 + 22 + 31{,}5 = 75{,}5\ (\mathrm{m}^2).$$

Výsledek: Obsah vydlážděné plochy dvora tvaru uvedeného na obr. 59 je $75{,}5\ \mathrm{m}^2$.

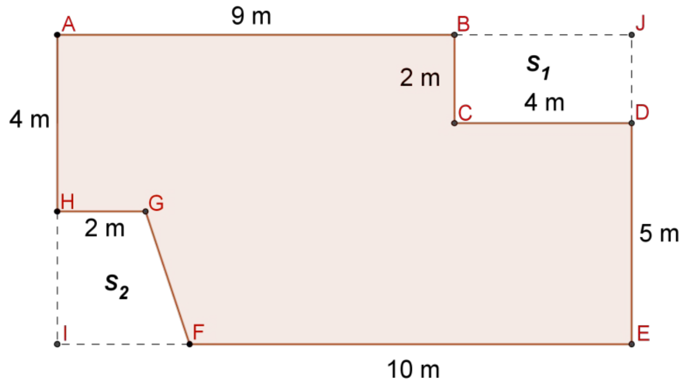
Předpokládané znalosti: obsah obdélníku; obsah čtverce; obsah lichoběžníku

Možné obtíže: numerické chyby; zapomenutí některého z výpočtů; nesprávné dosazení rozměrů

B6) Další možnosti rozdělení na menší obrazce.

Protože zde nemohu uvést všechny možnosti, jak obrazec na obr. 59 rozdělit na menší obrazce, přidala jsem tuto možnost, do které řadím všechna ostatní rozdělení obrazce.

2. Zavedení pomocného prvku



Obr. 66

Obrazec na obr. 59 doplníme na obdélník $AJEI$ (obr. 66). Od obsahu obdélníku $AJEI$ odečteme obsahy vzniklých dvou obrazců (S_1 a S_2). Obrazec s obsahem S_1 je obdélník $BJDC$ o rozměrech 2 m a 4 m. Obrazec s obsahem S_2 je lichoběžník $HGFI$, kde základna HG má velikost 2 m, základna JF má velikost 3 m, a výška HJ má velikost 3 m. Obsah obdélníku $AJEI$, který dostaneme po zavedení pomocných prvků, nazveme S_3. Dostáváme:

$$S_3 = 13 \cdot 7 = 91\ (\mathrm{m}^2), \qquad S_1 = 2 \cdot 4 = 8\ (\mathrm{m}^2), \qquad S_2 = \frac{(2+3)\cdot 3}{2} = 7{,}5\ (\mathrm{m}^2),$$

$$S = S_3 - (S_1 + S_2) = 91 - (8 + 7{,}5) = 75{,}5\ (\mathrm{m}^2).$$

Výsledek: Obsah vydlážděné plochy dvora tvaru uvedeného na obr. 59 je $75{,}5\ (\mathrm{m}^2)$.

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku, obsah lichoběžníku

Možné obtíže: numerické chyby; zapomenutí odečtení obsahů pomocných útvarů; nesprávné dosazení rozměrů

5.3.2. Očekávané chyby

Stejně jako u úlohy 1 a úlohy 2 vycházím v této části ze svých zkušeností a uvádím chyby, které od řešitelů osmých a devátých ročníků očekávám. Chybou může být zvolení strategie, nevedoucí ke správnému výsledku. Také použití nesprávných vzorců, či nepřesné výpočty, které mohou být zapříčiněny například nepozorností řešitele, vedou k chybnému výsledku.

V úloze 3 se jedná o obrazec složený z více jiných obrazců a řešitel si tento obrazec musí rozdělit na menší nebo naopak doplnit na větší a odečíst přebývající části. Předpokládám, že chyby mohou nastat při rozdělování útvaru (nepřesný náčrtek, chybné přiřazení rozměrů). Tato úloha je náročná na množství početních úkonů. Proto očekávám, že nejvíce chyb bude numerických.

5.3.3. Hypotéza

U úlohy 3 nejvíce možností, jak spočítat obsah tohoto obrazce, nabízí rozdělení na menší obrazce $[1.b)]$. Proto je tato strategie i mojí předpokládanou strategií, jak budou žáci osmých a devátých ročníků úlohu řešit.

5.3.4. Rozbor žákovských řešení

Rozbor žákovských řešení u úlohy 3 je prováděn stejně jako u úlohy 1 a úlohy 2. Nejprve tedy ukážu tabulku použitých strategií u této úlohy, ve které je uveden počet řešitelů z jednotlivých ročníků, kteří počítali pomocí určitých strategií, a zda dospěli ke správnému (chybnému) výsledku. Následně rozeberu strategie vedoucí ke správnému výsledku, které se objevily v obou ročnících, strategie použité pouze v osmých nebo devátých ročnících, a nakonec strategie, které nevedou ke správnému výsledku.

Protože není na všechny strategie dostatek písmen abecedy, budu následující strategie označovat dvojicí písmen, kde první písmeno bude pokaždé X a druhé budu řadit podle abecedy.

Tabulka 7

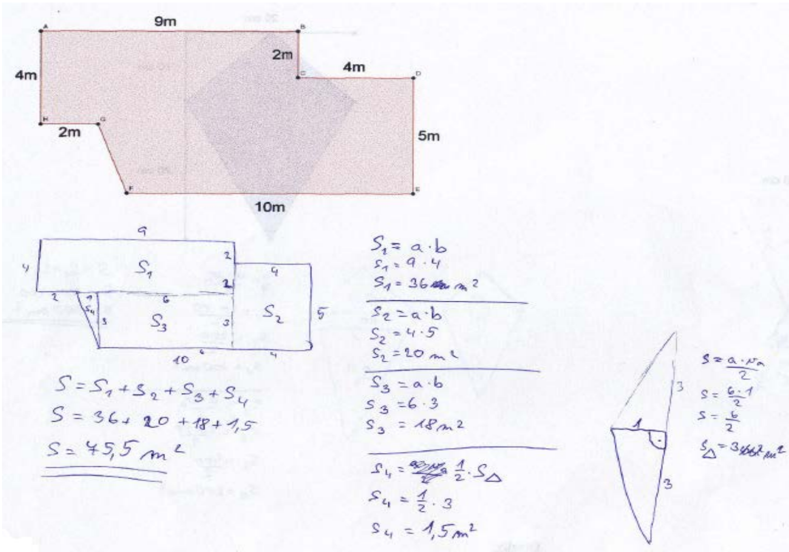
strategie vedoucí ke správnému výsledku							
	8. ročník			9. ročník			**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**
	počet řešitelů	správný výsledek	chybný výsledek	**počet řešitelů**	správný výsledek	chybný výsledek	
Strategie XA	**5**	—	5	**20**	12	8	**25**
Strategie XB	**11**	3	8	**8**	4	4	**19**
Strategie XC	**5**	3	2	**5**	3	2	**10**
Strategie XD	**1**	—	1	**1**	—	1	**2**
Strategie XE	**8**	3	5	**5**	2	3	**13**
Strategie XF	**2**	2	—	**1**	1	—	**3**
Strategie XG	—	—	—	**2**	1	1	**2**
Strategie XH	—	—	—	**2**	2	—	**2**
Strategie XI	3	1	2	—	—	—	**3**
strategie, které nevedou ke správnému výsledku							
Strategie XJ	**4**	—	4	**1**	—	1	**5**
Strategie XK	**1**	—	1	—	—	—	**1**
další chybná řešení	**3**	—	3	**2**	—	2	**5**
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**21**	—	—	**7**	—	—	**28**
						celkem	**118**

Strategie vedoucí ke správnému výsledku:

Nejvíce použitou strategií je ***Strategie XA***

Jedná se o strategii, kdy řešitelé obrazec na obr. 59 rozdělili na menší obrazce, a to konkrétně na tři obdélníky a jeden trojúhelník. Tato strategie odpovídá předpokládané strategii $[1. b)\ B6)]$, kterou jsem nazvala „další možnosti rozdělení na menší obrazce“. Tuto strategii využili jak řešitelé z osmých ročníků (pět řešitelů), tak i řešitelé z devátých ročníků (dvacet řešitelů). Do této strategie jsem zahrnula tři různé způsoby rozdělení:

- Ukázka prvního způsobu rozdělení (obr. 67):



Obr. 67

Tato strategie je v žákovských řešeních silně zastoupena, takto úlohu řešilo devatenáct řešitelů. V osmých ročnících si tuto strategii zvolilo pět řešitelů (ke správnému výsledku se nedopočítal žádný řešitel, dva řešitelé úlohu nedokončili). V devátých ročnících si toto rozdělení zvolilo čtrnáct řešitelů (osm řešitelů dokončilo úlohu se správným výsledkem, ostatní s chybným výsledkem).

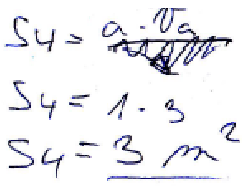
Dokončení úlohy s chybným výsledkem bylo způsobeno:

a) chybně spočítaným obsahem trojúhelníku, kde řešitelé zapomněli vydělit obsah obdélníku (s rozměry $3\ \mathrm{m}$ a $1\ \mathrm{m}$) dvěma (obr. 68), takto počítali jeden řešitel z osmého ročníku a jeden řešitel z devátého ročníku;

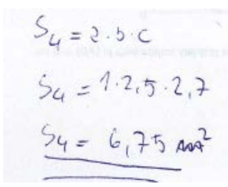
b) spočítáním délky strany, kterou nepotřebují, a vynásobení mezi sebou délky všech tří stran trojúhelníku (obr. 69), takto počítali tři řešitelé z devátých ročníků;

c) nesprávným náčrtkem, ve kterém chybně označili rozměry (obr. 70), takto počítali jeden řešitel z osmého ročníku a dva řešitelé z devátých ročníků;

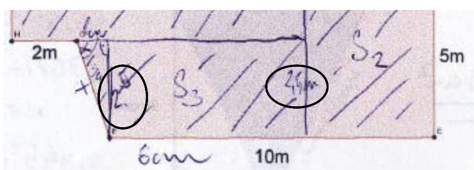
d) chybami v početních operacích jako například $9 \cdot 4 = 26$, takto počítal jeden řešitel z osmého ročníku.



Obr. 68

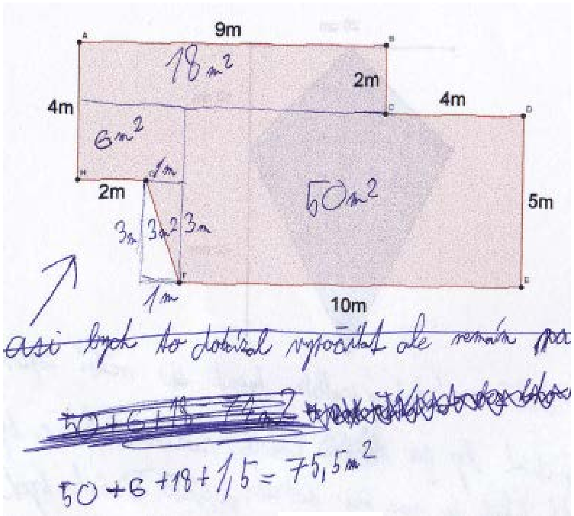


Obr. 69



Obr. 70

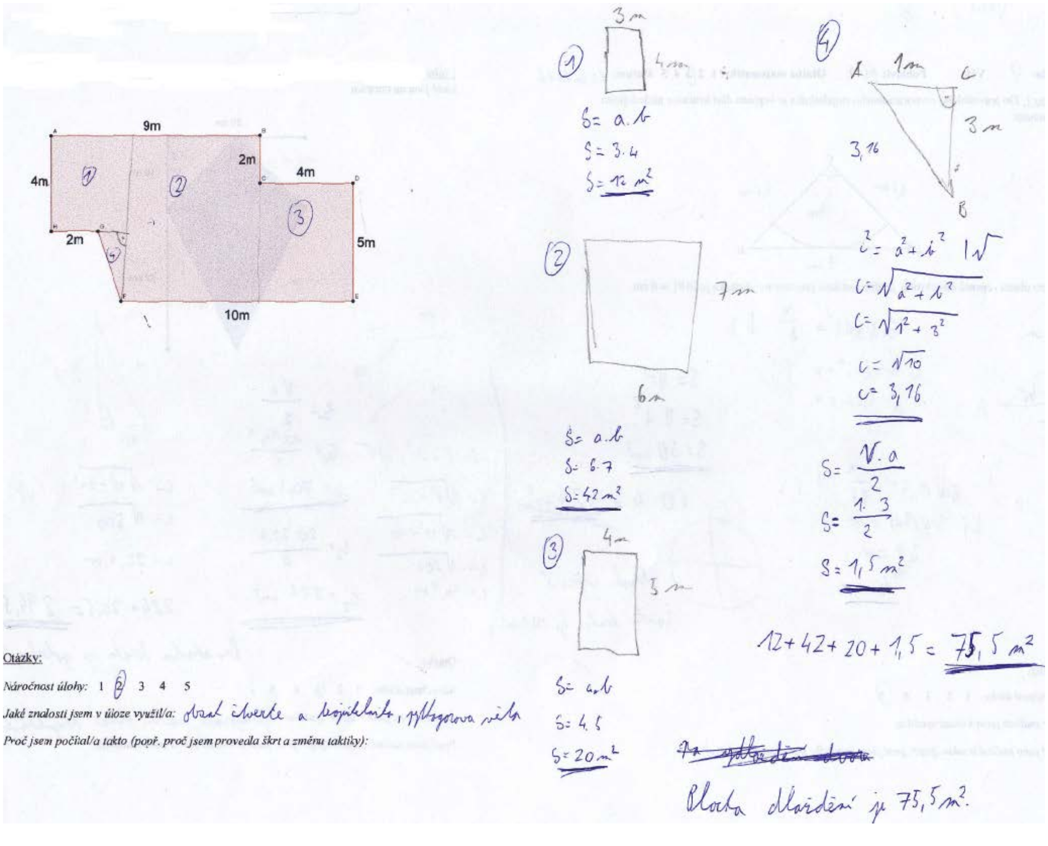
- Ukázka druhého způsobu rozdělení (obr. 71):



Obr. 71

Takovýto způsob rozdělení si zvolil pouze jeden řešitel z devátého ročníku, který dospěl ke správnému výsledku

- Ukázka třetího způsobu rozdělení (obr. 72):



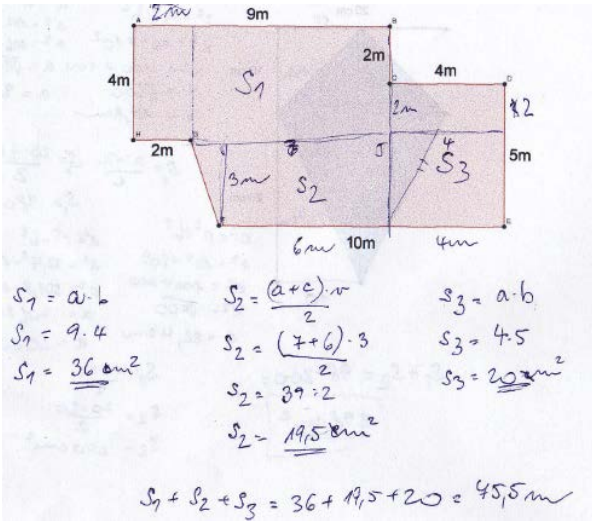
Obr. 72

Tento způsob rozdělení si zvolilo pět řešitelů z devátých ročníků, tři řešitelé úlohu dokončili se správným výsledkem, dva udělali početní chybu (jeden zapomněl dopočítat obsah trojúhelníku a druhý tento obsah spočítal špatně).

Strategie XB

Při použití této strategie řešitelé rozdělili obrazec na obr. 59 na menší obrazce, v tomto případě na dva obdélníky a jeden lichoběžník, což odpovídá předpokládané strategii $[1.b)\ B4)]$. Mezi žákovskými strategiemi se toto rozdělení objevilo ve třech obměnách.

- <u>První způsob rozdělení:</u>



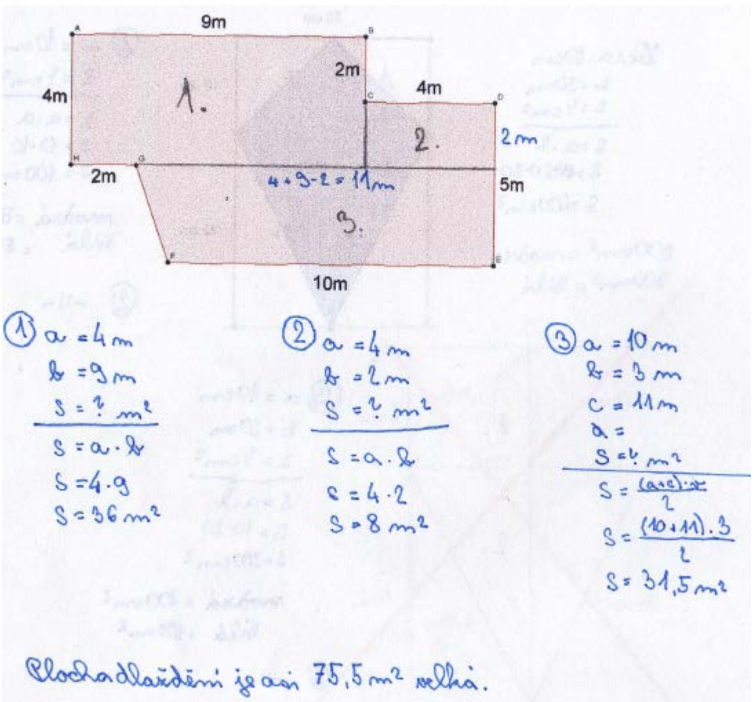
Obr. 73

Na obr. 73 je ukázka jednoho řešení se správným výsledkem. Tento postup si zvolilo jedenáct řešitelů, osm v osmých ročnících a tři v devátých ročnících. Všichni řešitelé z devátých ročníků dospěli ke správnému výsledku, zatímco v osmých ročnících se ke správnému výsledku dopočítal pouze jeden řešitel.

<u>Příčiny neúspěchu:</u>

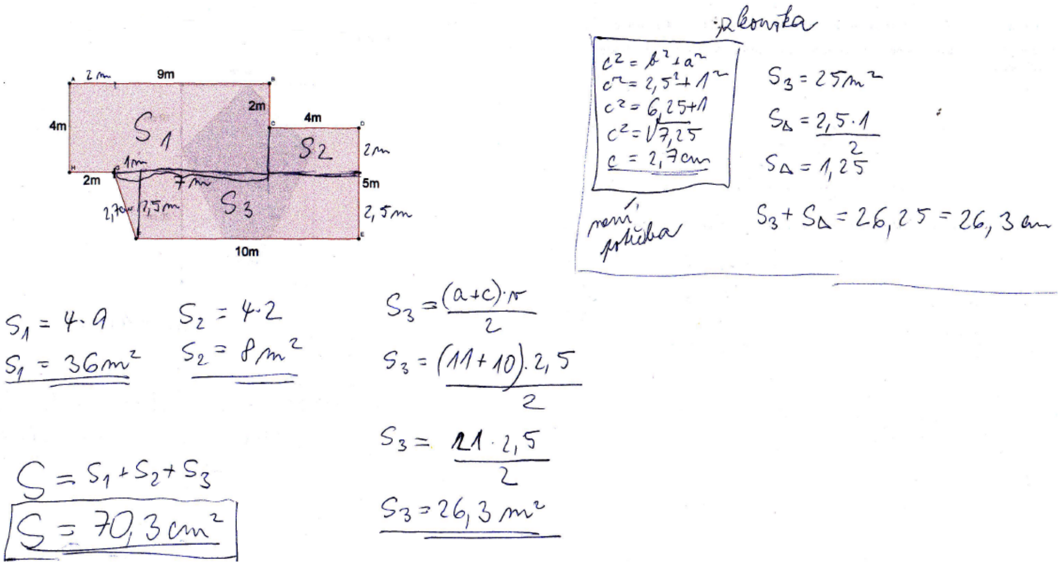
- Dosazení špatných rozměrů do vzorce pro obsah lichoběžníku (tři řešitelé).
- Zaměnění vzorce pro obsah lichoběžníku za vzorec pro obsah obdélníku (čtyři řešitelé).

- <u>Druhý způsob rozdělení:</u>



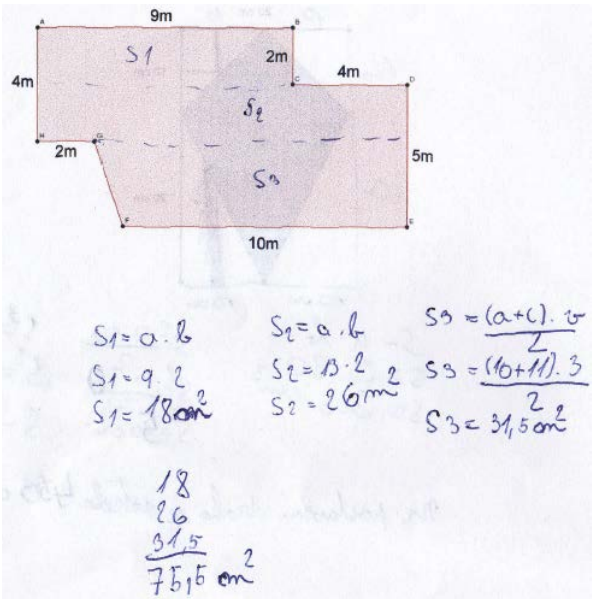
Obr. 74

Na obr. 74 vidíme ukázku řešení jednoho řešitele z osmého ročníku. Tento způsob rozdělení si zvolilo pět řešitelů. V osmých ročnících takto řešili úlohu dva řešitelé, jeden ji dokončil se správným výsledkem a druhý s chybným výsledkem (numerická chyba). V devátých ročnících takto řešili tři řešitelé (všichni dokončili úlohu s chybným výsledkem, chyby byli většinou numerické). Co stojí za povšimnutí, je jeden případ, kdy byl řešitel pečlivý a udělal si ještě zkoušku. Jelikož však jeden rozměr označil chybnou hodnotou, zkouška ho nasměrovala také k chybné hodnotě, i když mu vyšla (obr. 75).



Obr. 75

- Třetí způsob rozdělení:



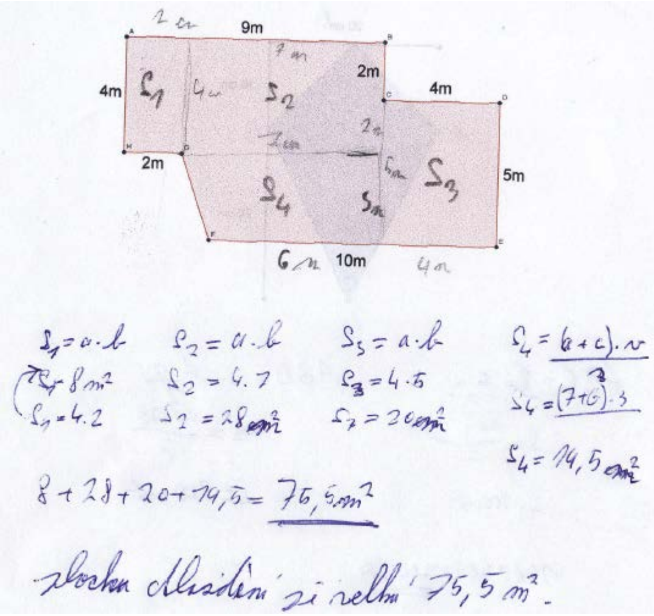
Obr. 76

Při tomto způsobu rozdělení na dva obdélníky a jeden lichoběžník řešitel využívá k rozdělení vodorovných přímek (obr. 76). Takto úlohu řešili pouze tři řešitelé. Jeden řešitel z osmého ročníku a jeden řešitel z devátého ročníku dokončili úlohu se správným výsledkem, třetí řešitel (z devátého ročníku) úlohu nedořešil do konce.

Strategie XC

Jedná se o strategii, kdy řešitel rozděluje obrazec na obr. 59 na menší obrazce, a to konkrétně na tři obdélníky a jeden lichoběžník. Tato strategie odpovídá předpokládané strategii $[1.b)\ B2)]$. Mezi žákovskými řešeními se tato strategie objevila ve dvou variantách:

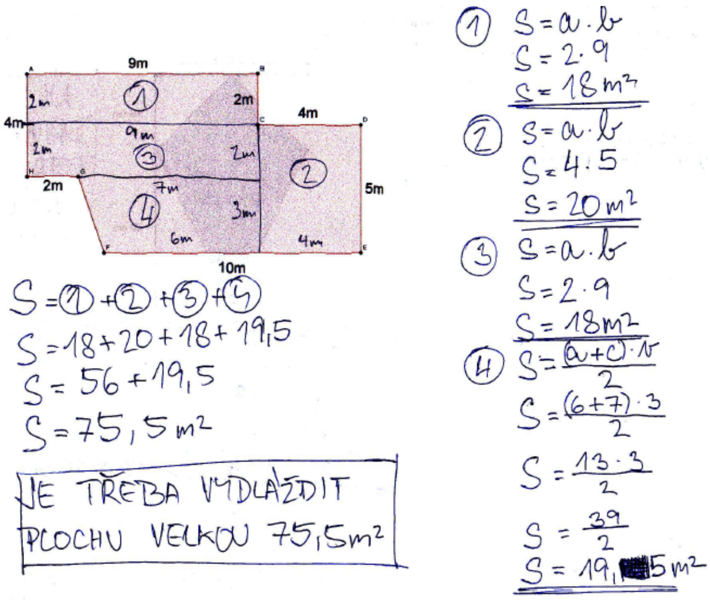
- První varianta:



Obr. 77

Způsob řešení z obr. 77 nebyl tak častý, celkem se objevil čtyřikrát. V osmých ročnících tuto strategii použili tři řešitelé a v devátých ročnících pouze jeden řešitel. U řešitelů z osmých ročníků byla úspěšnost v této strategii stoprocentní a řešitel z devátého ročníku dospěl k chybnému výsledku, protože chybně určil rozměry.

- Druhá varianta:



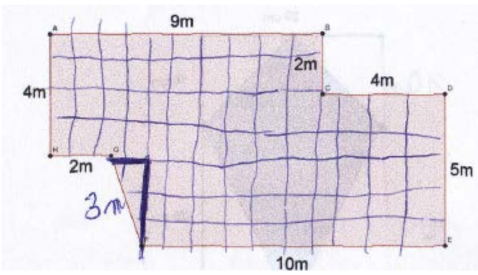
Obr. 78

Ukázka řešení řešitele z devátého ročníku, kterou vidíme na obr. 78, ukazuje druhou variantu rozdělení obrazce na tři obdélníky a jeden lichoběžník. Tuto strategii si zvolilo celkem šest řešitelů. V osmých ročnících tímto způsobem počítali dva řešitelé, kteří dokončili úlohu s chybným výsledkem. V devátých ročnících takto počítali čtyři řešitelé (tři dokončili se správným výsledkem, jeden s chybným). Chyba řešitelů z osmých ročníků spočívala v chybném spočítání obsahu lichoběžníku – dosazení nesprávných rozměrů do vzorce. Neúspěch řešitele z devátého ročníku nespočíval v chybném dosazení do vzorce, nýbrž v početní chybě při násobení.

Strategie XD

Tato strategie neodpovídá žádné předpokládané strategii řešení. Spočívá v rozdělení obrazce na malé čtverečky s rozměry 1 m a 1 m, kdy následně zjistíme jejich počet. Pomocí něj můžeme spočítat obsah obrazce na obr. 59. Pokud by si řešitel dvůr tvaru uvedeného na obr. 59 narýsoval tak, že 1 m = 1 cm a pomocí pravítka rozdělil na čtverečky s rozměry 1 cm a 1 cm, mohl by dospět ke správnému výsledku. Jelikož však řešitelé, konkrétně jeden z osmého ročníku a jeden z devátého ročníku, obrazec rozdělovali jen tak „od oka“ (obr. 79), nedospěli ke správnému výsledku, oba tak byli neúspěšní.

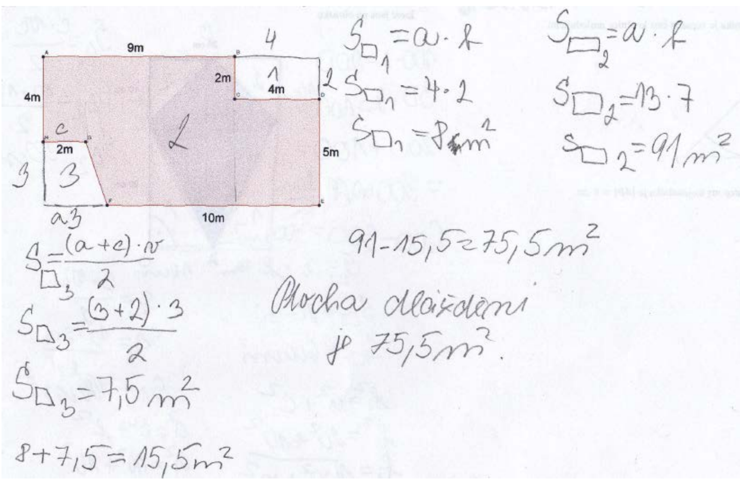
Ukázka jednoho řešení:



Obr. 79

Strategie XE

Tato strategie odpovídá předpokládané strategii nazvané: „Zavedení pomocného prvku“ [2]. Ukázka řešení se správným výsledkem (obr. 80):

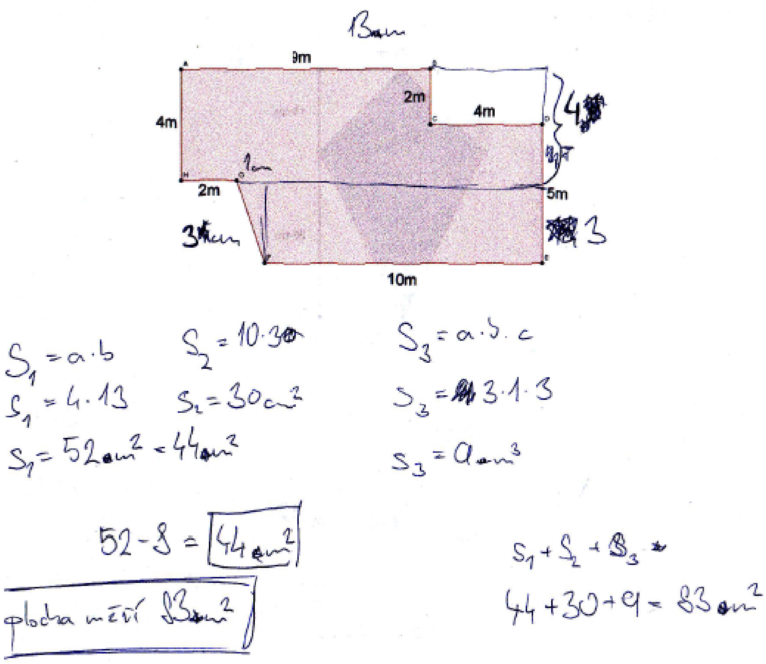


Obr. 80

Tento způsob počítání si zvolilo třináct řešitelů (v osmých ročnících osm řešitelů, v devátých ročnících pět řešitelů). Z osmých ročníků dospěli ke správnému výsledku pouze tři (ukázka řešení se správným výsledkem na obr. 80). V ostatních řešeních se objevily numerické chyby. Řešitelé většinou chybovali při výpočtu obsahu lichoběžníku, který rozdělili na obdélník a trojúhelník (tři řešitelé), nebo do vzorce nedosadili správné rozměry (dva řešitelé). V devátých ročnících správný výsledek vypočítali pouze dva řešitelé. <u>Objevily se následující chyby:</u>

1) Jeden řešitel chybně přepsal vypočítaný obsah obdélníku a dospěl k chybnému výsledku.
2) Jeden řešitel zapomněl, že pokud počítá obsah trojúhelníku, musí obsah obdélníku, z kterého počítá obsah trojúhelníku, vydělit dvěma.
3) Jeden řešitel použil jen částečné zavedení pomocného prvku na obdélník s rozměry 13 m a 4 m, zbytek rozdělil na obdélník s rozměry 10 m a 3 m a trojúhelník, jehož obsah spočítal chybně, a to pomocí násobení všech tří stran (obr. 81).

<u>Ukázka řešení s chybným výsledkem (obr. 81):</u>

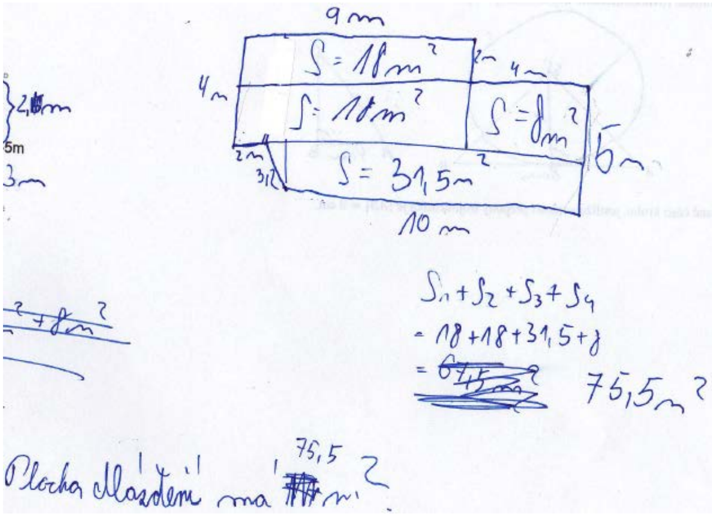


Obr. 81

Strategie XF

Rozdělení v této strategii odpovídá předpokládané strategii $[1.b)\ B1)]$, při které řešitel rozděluje obrazec na obr. 59 na čtyři obdélníky a jeden trojúhelník. Tato strategie se v řešeních objevila ve dvou variantách.

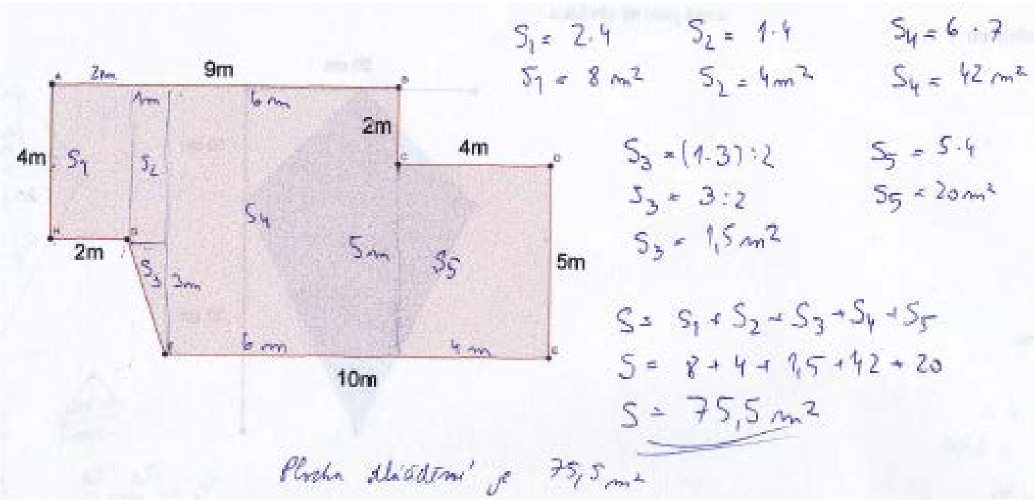
- <u>První varianta:</u>



Obr. 82

Tento způsob použili dva řešitelé z osmých ročníků, oba dokončili úlohu se správným výsledkem. Ukázka na obr. 82 je řešení jednoho z nich.

- <u>Druhá varianta:</u>



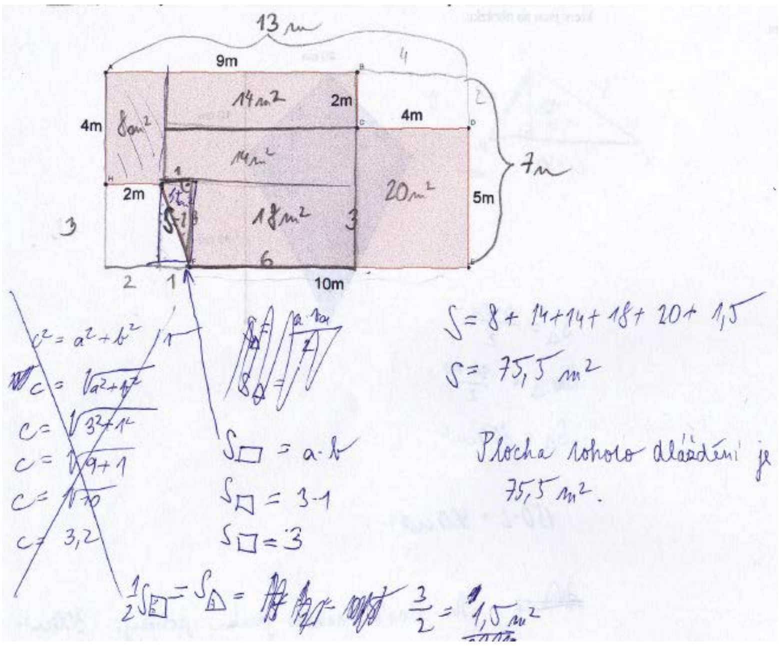
Obr. 83

Tímto způsobem počítal pouze jeden řešitel z devátého ročníku, na obr. 83 můžeme vidět jeho řešení. Tento řešitel doplnil řešení ještě o větu: *„Když se celý nákres rozdělí do několika částí (v tomto případě na obdélníky), tak se počítá mnohem lépe.“*

Další strategie se objevily buď jen v osmých ročnících, nebo pouze v devátých ročnících.

Strategie XG

Zde řešitelé rozdělili obrazec na obr. 59 (z rozdělení, která se objevila v řešení řešitelů, kteří se experimentu zúčastnili) na nejvíce menších obrazců (když nepočítám strategii, ve které řešitelé rozdělovali obrazec na čtverečky s rozměry 1 m a 1 m). Obrazec na obr. 59 řešitelé rozdělili na pět obdélníků a jeden trojúhelník, viz obr. 84. Tato strategie odpovídá předpokládané strategii $[1.b)\ B6)]$, kterou jsem nazvala „další možnosti rozdělení na menší obrazce“.



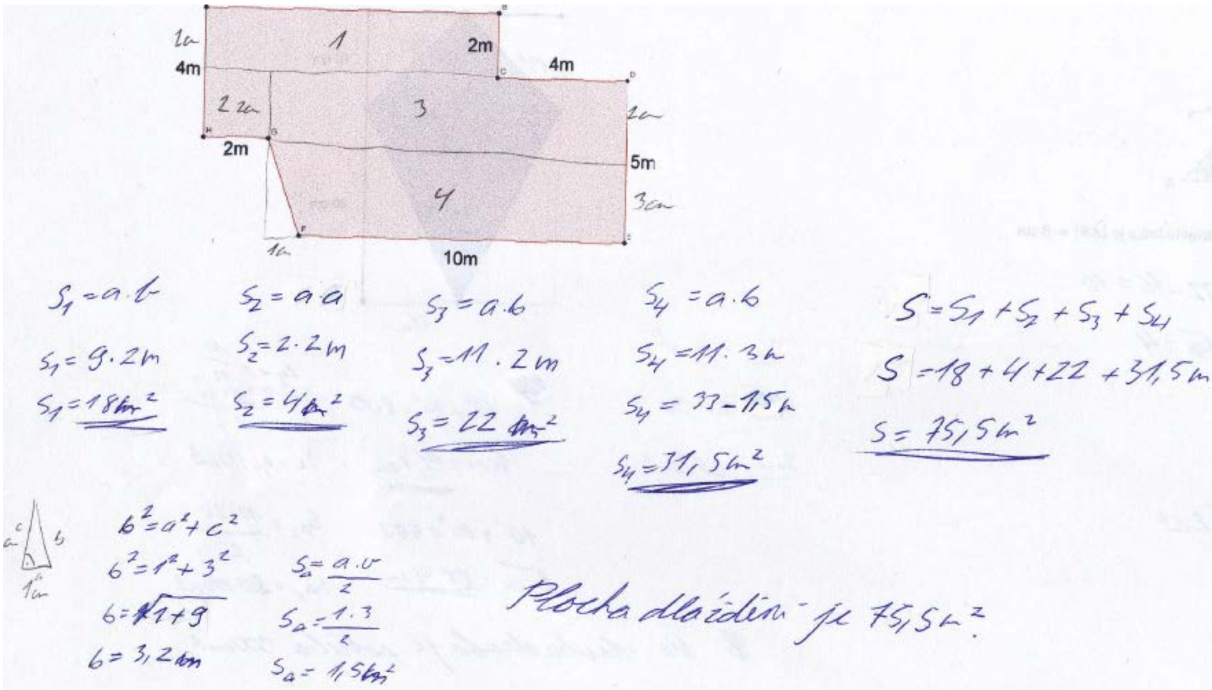
Obr. 84

K obr. 84 patřil ještě komentář řešitele (odpověď na otázku: „Proč jsem počítala takto.“): *„Dvůr jsem si rozdělila na různé obdélníky a poté vypočítala každého obsah. V obrázku mi zbyl trojúhelník, kde jsem také vypočítala obsah a poté všechny obsahy sečetla.“* Tuto strategii si zvolili dva řešitelé z devátých ročníků – jeden úspěšně dokončil a druhý udělal numerickou chybu.

Strategie XH

Při použití této strategie řešitelé rozdělili obrazec na obr. 59 na menší obrazce, v tomto případě na dva obdélníky, jeden čtverec a jeden lichoběžník, což odpovídá předpokládané strategii $[1.b)\ B5)]$. Oba řešitelé z devátých ročníků byli úspěšní.

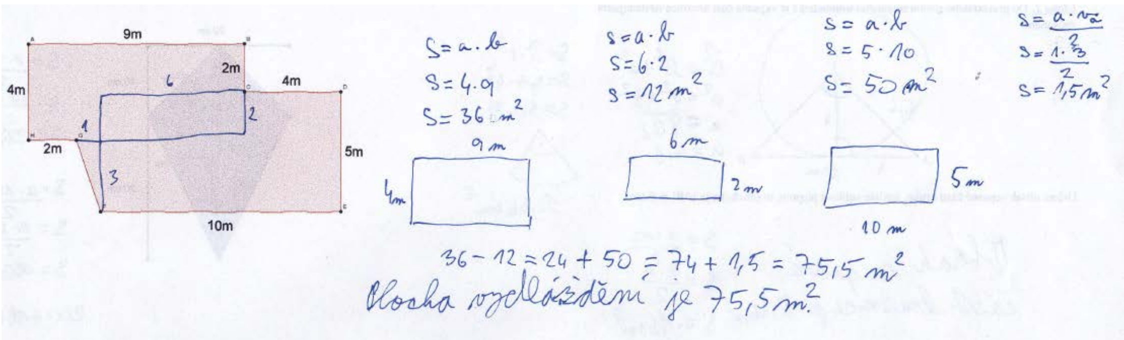
Na obr. 85 je ukázka jednoho řešení:



Obr. 85

Strategie XI

Tato strategie neodpovídá žádné předpokládané strategii. Jedná se o strategii, kdy řešitel spočítal obsahy dvou větších obdélníků. Tyto obsahy sečetl a od nich odečetl jejich průnik. Nakonec přičetl obsah trojúhelníku, jehož obsah ještě nezapočítal (viz obr. 86).

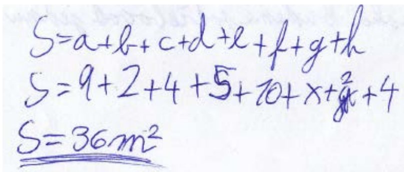


Obr. 86

Tato strategie nebyla moc úspěšná, pouze jeden ze tří řešitelů dospěl ke správnému výsledku. Další dva řešitelé udělali takovéto chyby: jeden místo, aby obsah obdélníku vzniklého průnikem dvou větších obdélníků odečetl, přičetl ho; druhý zapomněl přičíst obsah trojúhelníku. Tato strategie se objevila pouze v osmých ročnících.

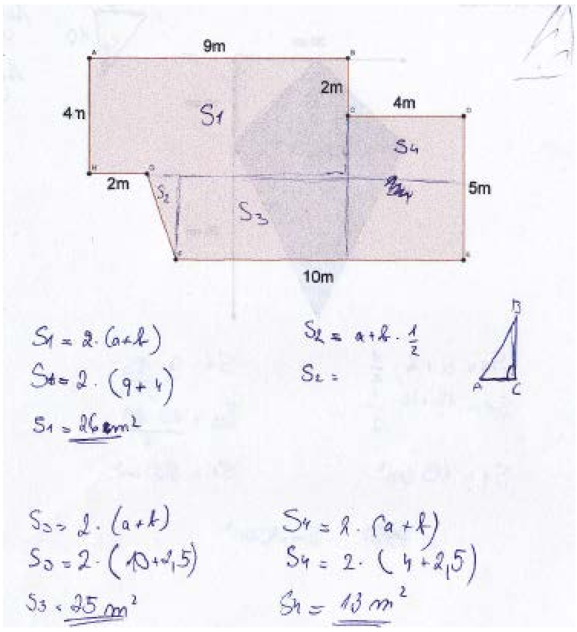
Strategie, které nevedou ke správnému výsledku:

Strategií nevedoucí ke správnému výsledku je ***Strategie XJ***. Zde řešitelé počítali místo obsahu obrazce uvedeného na obr. 59 jeho obvod (viz obr. 87).



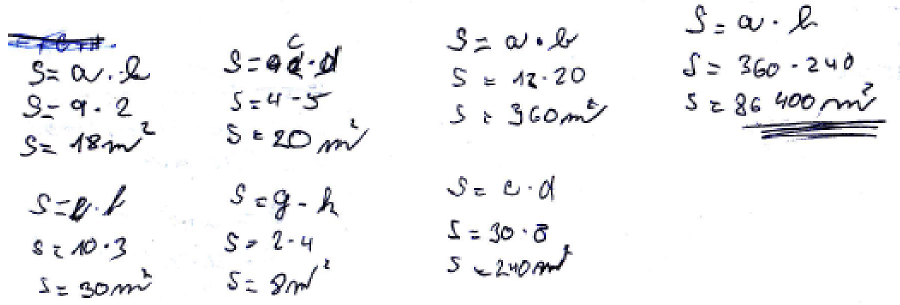
Obr. 87

Tuto strategii si zvolilo pět řešitelů (čtyři z osmých ročníků a jeden z devátého ročníku). Řešitel z devátého ročníku si rozdělil obrazec na menší, ale i přesto obsahy těchto vzniklých obrazců počítá pomocí vzorce pro obvod (obr. 88).



Obr. 88

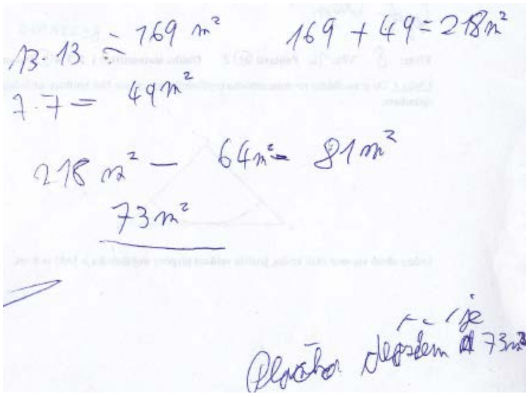
Strategie XK je strategie, kdy řešitel nejdříve počítal obsahy čtyř obdélníků, které nalezl na obr. 59. Tyto obsahy po dvou vynásobil, a potom vynásobil jejich součiny, čímž dostal obrovské číslo (obr. 89). Takto počítal pouze jeden řešitel z osmého ročníku.



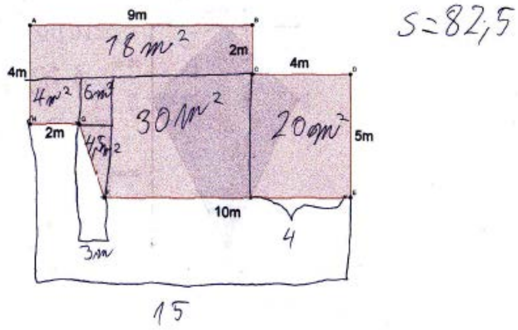
Obr. 89

Na závěr ukázky řešení, která nevedou ke správnému výsledku a objevila se pouze jednou:

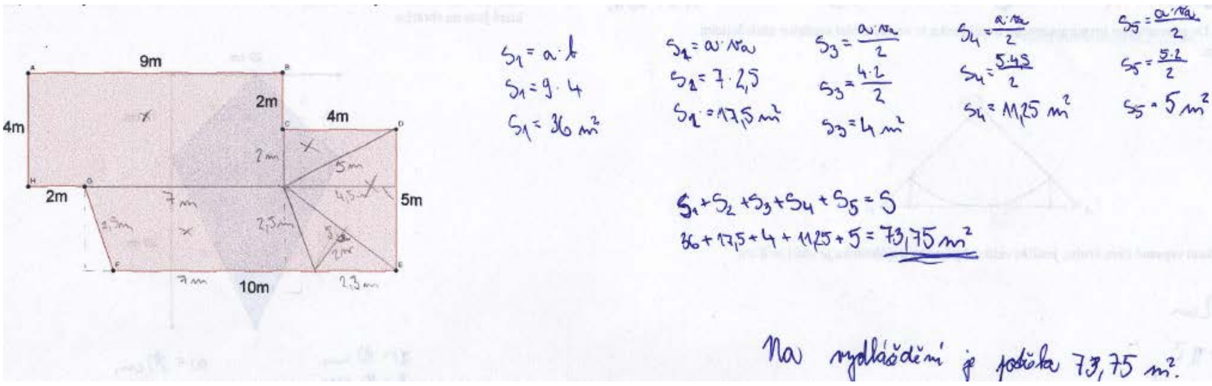
8. třída



Obr. 90

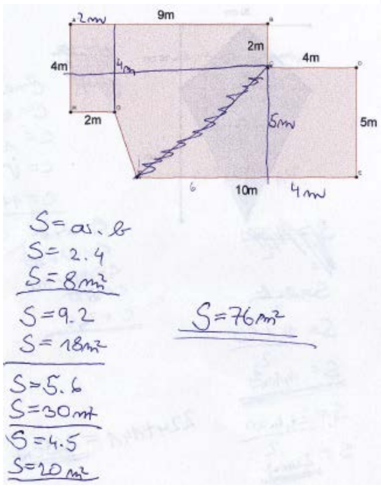


Obr. 91

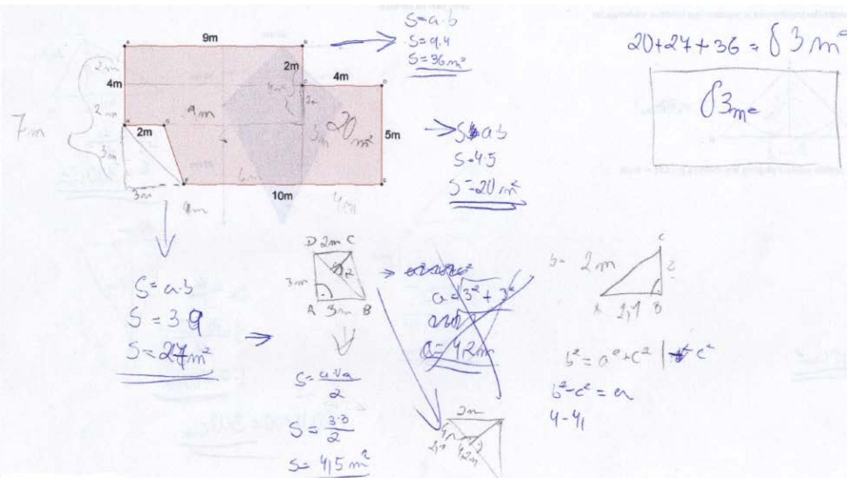


Obr. 92

9. třída



Obr. 93



Obr. 94

Z celkového počtu sto osmnácti řešitelů úlohu vůbec neřešilo dvacet osm řešitelů (dvacet jedna řešitelů z osmých ročníků a sedm řešitelů z devátých ročníků). Mezi těmito řešiteli se objevili řešitelé, kteří nevěděli jak začít, nebo řešitelé, kteří počítali úlohu 1 a úlohu 2 déle a k této úloze se již nedostali.

5.2.5. Srovnání s řešením vyučujících

Strategie, které použili učitelé, odpovídají třem nejvíce voleným strategiím použitým žáky, které jsem nazvala strategie XA (rozdělení obrazce na tři obdélníky a jeden trojúhelník), strategie XB (rozdělení na dva obdélníky a jeden lichoběžník) a strategie XE (v předpokládaných strategiích nazvaná „Zavedení pomocného prvku“).

Volené strategie ukazují, že většina žáků řešila úlohu 3 jako učitelé. Zda je to způsobeno vlivem učitelů, lze předpokládat, nikoliv doložit.

5.2.6. Závěr

Strategií, které se objevily v žákovských řešeních u úlohy 3, bylo celkem šestnáct. Z tohoto počtu devět strategií vedlo ke správnému výsledku. Ostatní strategie ke správnému výsledku nevedly.

Tabulka 8

strategie vedoucí ke správnému výsledku			
	8. ročník **počet řešitelů**	9. ročník **počet řešitelů**	**počet řešitelů 8. a 9. ročníků**
Strategie XA	**5**	**20**	**25**
Strategie XB	**11**	**8**	**19**
Strategie XC	**5**	**5**	**10**
Strategie XD	**1**	**1**	**2**
Strategie XE	**8**	**5**	**13**
Strategie XF	**2**	**1**	**3**
Strategie XG	—	**2**	**2**
Strategie XH	—	**2**	**2**
Strategie XI	3	—	**3**
strategie, které nevedou ke správnému výsledku			
Strategie XJ	**4**	**1**	**5**
Strategie XK	**1**	—	**1**
další nesprávná řešení	**3**	**2**	**5**
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**21**	**7**	**28**
		celkem	**118**

V tabulce 8 je ukázáno, které strategie vedly ke správnému výsledku, které strategie nevedly ke správnému výsledku, a četnost jejich použití v žákovských řešeních. V tabulce nejsou rozlišeni řešitelé, kteří dospěli ke správnému výsledku, a řešitelé, kteří dospěli k chybnému výsledku. Řešitelé jsou v tabulce rozděleni podle ročníku, do kterého patří. Tabulka tak ukazuje rozdíly v použitých strategiích řešení žáků osmých a devátých ročníků. Můžeme zde vidět, že nejčastěji volenou strategií vedoucí ke správnému výsledku byla strategie XA, kde řešitelé rozdělili zadaný obrazec na tři obdélníky a jeden trojúhelník, a strategie XB, kde řešitelé rozdělili zadaný obrazec na dva obdélníky a jeden lichoběžník. Má hypotéza se tentokrát potvrdila, jelikož strategií, které rozdělují zadaný obrazec na menší obrazce, je osm z devíti strategií vedoucích ke správnému výsledku. Na menší obrazce rozdělovalo zadaný obrazec šedesát šest řešitelů, což je více než polovina všech řešitelů. V tabulce je také uvedeno, kolik řešitelů neřešilo úlohu vůbec. Tento počet řešitelů je o tři řešitele větší než u strategie XA.

Tabulka 9

	8. ročník		9. ročník		počet řešitelů 8. a 9. ročníků	počet řešitelů 8. a 9. ročníků, kteří dospěli ke správnému výsledku
	počet řešitelů	správný výsledek	**počet řešitelů**	správný výsledek		
strategie vedoucí ke správnému výsledku						
Strategie XA	**5**	—	**20**	12	**25**	12
Strategie XB	**11**	3	**8**	4	**19**	7
Strategie XC	**5**	3	**5**	3	**10**	6
Strategie XD	**1**	—	**1**	—	**2**	0
Strategie XE	**8**	3	**5**	2	**13**	5
Strategie XF	**2**	2	**1**	1	**3**	3
Strategie XG	—	—	**2**	1	**2**	1
Strategie XH	—	—	**2**	2	**2**	2
Strategie XI	3	1	—	—	**3**	1
strategie, které nevedou ke správnému výsledku						
Strategie XJ	**4**	—	**1**	—	**5**	0
Strategie XK	**1**	—	—	—	**1**	0
další nesprávná řešení	**3**	—	**2**	—	**5**	0
řešitelé, kteří neřešili úlohu vůbec	**21**	—	**7**	—	**28**	0
				celkem	**118**	37

V tabulce 9 jsou uvedeny počty řešitelů, kteří řešili úlohu 3 pomocí určité strategie, a počty řešitelů, kteří úlohu 3 vyřešili se správným výsledkem, tudíž s výsledkem 75,5 m^2. Můžeme zde vidět rozdíly v počtech řešitelů, kteří si danou strategii zvolili, a v počtech řešitelů, kteří pomocí vybrané strategie úlohu 3 dokončili se správným výsledkem. Z tabulky vyplývá, že strategií s největším počtem správných řešení je strategie XA. Strategie, kde je stoprocentní úspěšnost, jsou dvě (strategie XF – rozdělení na čtyři obdélníky a jeden trojúhelník; strategie XH – rozdělení na dva obdélníky, jeden čtverec a jeden lichoběžník). Na konci tabulky je uveden počet řešitelů, kteří se zúčastnili experimentu, a celkový počet řešitelů, kteří u úlohy 3 dospěli ke správnému výsledku. Z tabulky je zřejmé, že ze sto osmnácti řešitelů dospělo ke správnému výsledku pouze třicet sedm řešitelů.

Z šedesáti pěti řešitelů z osmých ročníků a padesáti tří řešitelů z devátých ročníků postupovalo správným směrem (počítalo úlohu pomocí strategie vedoucí ke správnému výsledku) sedmdesát devět řešitelů (třicet pět řešitelů z osmých ročníků, čtyřicet čtyři řešitelů z devátých ročníků). Zbylých třicet devět řešitelů postupovalo buď pomocí strategie, která nevedla ke správnému výsledku, anebo na papír s touto úlohou nenapsali nic (takto učinilo dvacet osm řešitelů).

Z počtu sedmdesát devět řešitelů, kteří si zvolili strategii vedoucí ke správnému výsledku, vypočítalo správný výsledek pouze třicet sedm řešitelů, tedy méně než polovina. Jelikož správný výsledek vypočítalo dvanáct z šedesáti pěti řešitelů osmých ročníků a dvacet pět z padesáti tří řešitelů devátých ročníků, můžeme říci, že řešitelé z devátých ročníků byli i v této úloze úspěšnější.

6. Závěrečné porovnání úloh

Úlohy, které jsem použila do experimentu, porovnávám:

- podle počtu strategií, které se u jednotlivých úloh objevily,
- podle počtu strategií, které vedly ke správnému výsledku,
- podle počtu strategií, které nevedly ke správnému výsledku,
- podle počtu řešitelů, kteří si zvolili strategie, které vedly ke správnému výsledku,
- podle počtu řešitelů, kteří si zvolili strategie, které nevedly ke správnému výsledku,
- podle počtu řešitelů, kteří úlohu vyřešili se správným (chybným) výsledkem,
- podle počtu řešitelů, kteří úlohu neřešili vůbec.

K porovnání jednotlivých úloh používám tabulku 10.

Tabulka 10

<table>
<tr><td></td><td colspan="7">žákovské strategie řešení</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="3">strategie vedoucí ke správnému výsledku</td><td colspan="3">strategie, které nevedou ke správnému výsledku</td><td rowspan="2">počet strategií celkem</td><td rowspan="2">počet řešitelů, kteří neřešili úlohu vůbec</td></tr>
<tr><td colspan="2">počet řešitelů</td><td>počet strategií</td><td colspan="2">počet řešitelů</td><td>počet strategií</td></tr>
<tr><td rowspan="3">úloha 1</td><td colspan="2">65</td><td rowspan="3">7</td><td colspan="2">21</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">32</td></tr>
<tr><td>správný výsledek</td><td>chybný výsledek</td><td>správný výsledek</td><td>chybný výsledek</td></tr>
<tr><td>30</td><td>35</td><td>1</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="3">úloha 2</td><td colspan="2">77</td><td rowspan="3">8</td><td colspan="2">41</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">13</td><td rowspan="3">14</td></tr>
<tr><td>správný výsledek</td><td>chybný výsledek</td><td>správný výsledek</td><td>chybný výsledek</td></tr>
<tr><td>51</td><td>26</td><td>—</td><td>24</td></tr>
<tr><td rowspan="3">úloha 3</td><td colspan="2">79</td><td rowspan="3">9</td><td colspan="2">11</td><td rowspan="3">7</td><td rowspan="3">16</td><td rowspan="3">28</td></tr>
<tr><td>správný výsledek</td><td>chybný výsledek</td><td>správný výsledek</td><td>chybný výsledek</td></tr>
<tr><td>37</td><td>42</td><td>—</td><td>11</td></tr>
</table>

Z tabulky 10 je patrné, že u úlohy 3 se objevilo nejvíce žákovských strategií řešení i nejvíce řešitelů, kteří počítali pomocí strategie, která vedla ke správnému výsledku. Přestože nejvíce strategií a řešitelů, kteří počítali pomocí strategie vedoucí ke správnému výsledku, bylo u úlohy 3, úspěšnější (co do počtu správných výsledků) byla úloha 2. U této úlohy se ke správnému výsledku dopočítalo padesát jedna řešitelů, což je nejvíce ze všech tří úloh. Porovnám-li počty řešitelů, kteří úlohy neřešili vůbec, nejvíce takovýchto řešitelů bylo u úlohy 1. Tedy:

Úloha 3 - žáci osmých a devátých ročníků zde použili spontánně nejvíce strategií řešení, pomocí strategie vedoucí ke správnému výsledku tuto úlohy řešilo nejvíce žáků osmých a devátých ročníků.

Úloha 2 – žáci osmých a devátých ročníků nejčastěji dospěli ke správnému výsledku v této úloze.

Úloha 1 – tato úloha oproti ostatním dvěma nevynikala ani v počtu strategií, ani v počtu řešitelů, kteří úlohy vyřešili se správným výsledkem, ale objevilo se zde nejvíce řešitelů, kteří úlohu vůbec neřešili.

6.1. Náročnost úloh

Při vyhodnocování náročnosti úlohy vycházím spolu s výsledky šetření ještě z vyplněných testů, kde řešitelé zakroužkovali, za jak náročnou konkrétní úlohu považují. Řešitelé byli seznámeni s hodnocením náročnosti úlohy, kde jednička je „naprosto jednoduchá úloha, která mi nedělá žádný problém“; pětka je „neřešitelná úloha, nevím si rady“. Další odstupňování jsem nechala čistě na řešiteli a na jeho vnímání náročnosti úlohy.

Tabulka 11

Tabulka srovnání náročnosti úloh					
	náročnost úloh			řešení úloh	
	označeno "1" a "2"	označeno "3"	označeno "4" a "5"	správný výsledek	úlohu neřešili vůbec
úloha 1	8	38	72	31	32
úloha 2	45	42	31	51	14
úloha 3	34	21	63	37	28

V tabulce 11 je ukázáno, kolik řešitelů označilo jednotlivé úlohy „1“ a „2“, „3“, „4“ a „5“. Dále jsem zde uvedla počty řešitelů, kteří jednotlivé úlohy vyřešili se správným výsledkem a počty řešitelů, kteří jednotlivé úlohy neřešili vůbec.

Úlohu 1 považovalo za velice náročnou až neřešitelnou sedmdesát dva řešitelů (do tohoto počtu řešitelů jsem započítávala řešitele, kteří úlohu označili čtyřkou a pětkou; řešitele, kteří označili úlohu trojkou, jsem nepočítala, protože toto označení považuji za „průměrnou úlohu“ a ne náročnou). Pouze dva řešitelé z osmých ročníků a šest řešitelů z devátých ročníků považovalo tuto úlohu za naprosto jednoduchou (označena jednička).

Jelikož správný výsledek vypočítalo jen třicet jedna řešitelů ze sto osmnácti, třicet dva řešitelů úlohu neřešilo vůbec a většina řešitelů označila úlohu čísly čtyři a pět, dospěla jsem k závěru, že úloha 1 byla pro řešitele velice náročná.

Úlohu 2 nebyla řešiteli považována za tak náročnou jako úloha 1. Čtyřkou a pětkou označilo úlohu třicet jedna řešitelů (o čtyřicet jedna řešitelů méně než u úlohy 1). Jedničkou a dvojkou označilo úlohu čtyřicet pět řešitelů (o dvacet šest řešitelů více než u úlohy 1).

Vezmu-li v potaz počty řešitelů, kteří označili úlohu 2 čtyřkou a pětkou (třicet jedna), jedničkou a dvojkou (čtyřicet pět), dále počty řešitelů, kteří úlohu vůbec neřešili (čtrnáct - o osmnáct méně než u úlohy 1), a počty řešitelů, kteří dospěli ke správnému výsledku (padesát jedna - o dvacet jedna více než u úlohy 1), dospěla jsem k závěru, že úloha 2 je pro žáky osmých a devátých ročníků méně náročná než úloha 1.

Úlohu 3 nebyla považována za tak náročnou, jako úloha 1, ale určitě byla považována za náročnější než úloha 2. Čtyřkou a pětkou označilo úlohu šedesát tři řešitelů. Jedničkou a dvojkou označilo úlohu třicet čtyři řešitelů. Když tyto výsledky srovnáme s výsledky předchozích úloh, můžeme vidět, že zatímco u úlohy 1 označilo úlohu za neřešitelnou sedmdesát dva řešitelů, u úlohy 2 třicet jedna řešitelů, tak úloha 3 byla označena šedesáti třemi řešiteli. A naopak za snadnou úlohu byla úloha 1 označena devatenácti řešiteli, úloha 2 čtyřiceti pěti řešiteli a úloha 3 třiceti čtyřmi řešiteli.

Úlohu neřešilo vůbec dvacet osm řešitelů (dvakrát více než úlohu 2, o čtyři méně než úlohu 1) a ke správnému výsledku dospělo třicet sedm řešitelů (o čtrnáct méně než u úlohy 2, o šest více než u úlohy 1).

Závěrečné zhodnocení úloh:

- Úloha považovaná za nejtěžší – úloha 1
- Úloha považovaná za nejjednodušší – úloha 2

7. Závěr

Od výzkumu jsem očekávala získání přehledu o tom, jaké strategie řešení mohou spontánně použít a použijí žáci osmých a devátých ročníků u vybraných úloh na obsah rovinného obrazce. Výsledky experimentu ukázaly, jak veliká škála strategií řešení se může objevit. Ve všech třech úlohách se objevily jak strategie využívající znalosti nabyté ve škole (např. Pythagorova věta, obsahy rovinných obrazců), tak strategie založené na „zdravém rozumu“ (např. Zavedení pomocného prvku).

Jedním z cílů této práce bylo zjistit, která strategie v porovnání všech tří úloh bude nejvíce zastoupenou strategií v pracích žáků. Touto strategií byla strategie využívající rozdělení obrazce uvedeného na obrázku na menší obrazce (strategie J – rozdělení „draka“ na dva trojúhelníky). Celkem ji použilo dvacet devět řešitelů. Tato strategie nebyla jediná, která využívá podobný způsob rozdělení. Rozdělení obrazce, který je uveden na obrázku, na menší obrazce (jejichž obsahy umí žáci osmých a devátých ročníků počítat) bylo velice časté. U úlohy 2 a úlohy 3 se objevilo dvacet jedna z dvaceti devíti strategií využívajících takovéto rozdělení. Úloha 1 obsahovala obrazec, jehož rozdělením řešitel nedospěje k výsledku, proto zde žáci osmých a devátých ročníků obrazec nerozdělovali. Z těchto hodnot vyvozuji, že mají-li řešitelé úloh na obsah rovinných obrazců možnost obrazec na obrázku rozdělit, a kde rozdělení na menší obrazce také dává smysl, většinou tak učiní.

Současně mě zajímalo, zda se žákovské strategie řešení budou lišit od řešení učitelů, kteří učili matematiku ve třídách, které jsem vybrala pro experiment. Strategie, které použili učitelé, odpovídaly u úlohy 1 a 3 třem nejvíce zvoleným žákovským strategiím. V úloze 2 se sice neshodovaly strategie použité učiteli s prvními třemi nejvíce volenými strategiemi žáků, ale odpovídaly strategiím, které mezi strategiemi použitými žáky byly. Výsledky experimentu ukazují, že většina žáků řeší úlohy na obsah rovinných obrazců stejně jako učitelé. Nelze však doložit, zda je to způsobeno vlivem učitelů, lze to pouze předpokládat.

V úvodu jsem si dala také za cíl zjistit, zda jsou takovéto typy úloh o obsahu pro žáky náročné a které jsou nejnáročnější. Při vyhodnocování jsem si pomohla jednou otázkou v testu nazvanou „náročnost úlohy“, kde žáci označili, ve škále od jedničky do pětky, jak je úloha pro ně obtížná, a tyto odpovědi jsem srovnala s výsledky experimentu. Zjistila jsem, že úlohy na obsah rovinných obrazců nelze „zaškatulkovat“. Je možné pouze říci, které by mohly být jednodušší a které složitější. Výsledky experimentu ukázaly, že z vybraných úloh byla pro žáky nejnáročnější úloha 1. V této úloze nebyly zadány všechny rozměry postačující k vyřešení úlohy, žáci museli vypočítat další rozměr potřebný k jejímu vyřešení. Naopak za nejjednodušší považovali žáci úlohu 2. V této úloze měli zadány všechny rozměry postačující k vyřešení úlohy, nebyla potřeba hledat další rozměr. Z výsledků experimentu vyvozuji, že úlohy na obsah rovinných obrazců doplněné obrázkem, ve kterém mají řešitelé zadány všechny rozměry potřebné pro počítání, nejsou pro žáky osmých a devátých ročníků náročné. Naopak ale úlohy s rovinnými obrazci, kde musí vypočítat další rozměry potřebné pro získání výsledku, jsou pro ně náročnější.

Při tvorbě této diplomové práce jsem získala zkušenosti se zpracováváním a vyhodnocováním žákovských strategií řešení. Také přehled o tom, jaké strategie řešení použili žáci osmých a devátých ročníků u vybraných úloh a jak odpovídaly strategiím zvoleným jejich učiteli. Cíle, které jsem si v úvodu své práce vytyčila, považuji za splněné.

Seznam použitých informačních zdrojů:

CIHLÁŘ, J.; ZELENKA, M. (1994). *Matematika pro 7. ročník ZŠ: pracovní učebnice*. Díl 2. Praha: Fortuna. ISBN 80-716-8186-5.

COUFALOVÁ, J.; PĚCHOUČKOVÁ, Š.; HEJL, J.; LÁVIČKA, M. (2000). *Matematika pro osmý ročník základní školy*. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-722-7.

HOŠPESOVÁ, A.; TICHÁ M. (2014). Řešení a tvoření úloh. In: *Dva dny s didaktikou matematiky*: sborník příspěvků. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 13. – 14. 2. 2014. s. 9-17. ISBN 978-80-7290-801-1.

IŠTVÁNKOVÁ, H. (2013). *Analýza žákovských řešení nestandardních aplikačních úloh a problémů v matematice*. Diplomová práce. Olomouc. Palackého univerzita, Fakulta pedagogická. 80s. Vedoucí práce Mgr. Eva Bártková, Ph.D.

KALHOUS, Z.; OBST O. (2009). *Školní didaktika*. Vyd. 2. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-571-4.

KOPKA, J.; TAKÁČ, Z. (2010). *Ako riešiť matematické problémy*. Rožomberk: VERBUM - vydavatel´stvo Katolíckej univerzity v Rožomberku. ISBN 978-80-8084-563-6.

MAZUREK, J. (2011/2012). Dva pohledy na řešení problémů. In: *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách.* Vol 21, No 5. Praha: Prometheus. ISSN 1210-1761.

NOVOVESKÝ, Š.; KRIŽALKOVIČ, K.; LEČKO, I. (1968). 777 matematických zábaviek a hračiek z učiva 6.-9. ročníka zákl. devätročnej školy. Bratislava: SPN.

NOVOTNÁ, J. (2015). Využití heuristických strategií pro řešení úloh v matematice na 2. a 3. stupni. Přednáška na 21. ročníku Semináře matematiky pro středoškolské profesory a učitele základních škol, Ostrava, Ostravská univerzita – Pedagogická fakulta, 30.1.2015.

NOVOTNÁ, J.; EISENMANN, P.; PŘIBYL, J. (2015). The heuristic strategy Introduction of an auxiliary element. In: Szarková, D., Richtáriková, D. & Balko, Ľ. (Eds.), *Conference on Applied Mathematics Aplimat 2015*, pp. 232-245. Bratislava: STU Bratislava. ISBN 978-80-227-4143-3.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2007a). *Matematika pro 6. ročník základní školy, 1. díl*. Praha: Prometheus. 80s. ISBN 978-80-7196-142-0.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2007b). Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl. Praha: Prometheus. 87s. ISBN 978-80-7196-286-1.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2007c). Pracovní sešit z matematiky. Soubor úloh pro 7. ročník základní školy. Praha: Prometheus. 180s. ISBN 978-80-7196-287-8.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (1999a). *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 7. ročník základní školy.* Praha: Prometheus. 107s. ISBN 80-7196-145-0.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (1999b). *Matematika pro 8. ročník základní školy. 1, Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, výrazy.* Praha: Prometheus. 96s. ISBN 978-80-7196-148-2.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (1999c). *Matematika pro 8. ročník základní školy. 2, Lineární rovnice, základy statistiky*. Praha: Prometheus. 71s. ISBN 80-7196-167-1.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2000a). *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 8. ročník základní školy*. Praha: Prometheus. 187s. ISBN 978-80-7196-347-9.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2000b). *Matematika pro 8. ročník základní školy: 3, Kruh, kružnice, válec, konstrukční úlohy*. Praha: Prometheus. 80. ISBN 978-80-7196-183-3.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2000c). *Matematika pro 9. ročník základní školy. 1, Lomené výrazy: Rovnice ; Soustavy rovnic*. Praha: Prometheus. 87s. ISBN 978-80-7196-281-6.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2000d). *Matematika pro 9. ročník základní školy. 2, Funkce: Podobnost ; Goniometrické funkce*. Praha: Prometheus. 90s. ISBN 80-7196-282-1.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2001a). *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 9. ročník základní školy*. Praha: Prometheus. 183s. ISBN 978-80-7196-227-4.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. (2001b). *Matematika pro 9. ročník základní školy. 3, Jehlan, kužel, koule: Finanční matematika*. Praha: Prometheus. 80s. ISBN 978-80-7196-283-0.

PÓLYA, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. 2d ed. Princeton, N.J.: Princeton University Press. ISBN 06-910-2356-5.

POMYKALOVÁ, E. (1997). *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. Dot. 2. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy. 207s. ISBN 80-858-4907-0.

PRŮCHA, J.; WALTEROVÁ, E.; MAREŠ, J. (2001). *Pedagogický slovník*. 3., rozš. a aktualiz. vyd. Praha: Portál. ISBN 80-717-8579-2.

PŘÍHONSKÁ, J. (2006). Separované modely Pascalova trojúhelníka. In: *Učitel matematiky*. Praha: JČMF, **15**(1), s. 1-8. ISSN 1210-9037.

PŘÍHONSKÁ, J. (2009). Rozvoj tvořivých projevů žáka. In: *Usta ad Albim BOHEMICA*. Roč. XI, č. 2. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, s. 48-61. ISSN 1802-825X.

PŘIBYL, J.; ONDRUŠOVÁ, J. (2014). Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie. In: *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách.* Vol 23, No 2. Praha: Prometheus. ISSN 1805-7705.

Slovník školské matematiky. (1981). Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Odborná literatura pro učitele. ISBN 14-614-81.

TREJBAL, J.; KOMÁRKOVÁ, V. (1997). *Matematika 5: učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu Základní škola. 2. díl*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 80-859-3750-6.

VONDROVÁ, N.; RENDL, M. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-723-6.

ZORMANOVÁ, L. (2014). *Obecná didaktika: pro studium a praxi*. Praha: Grada. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-4590-9.

Elektronické informační zdroje:

ABZ.cz: slovník cizích slov [online]. Heuristika. [cit. 2017-03-01]. Dostupné z: http://slovnik-cizich-slov.abz.cz/web.php/slovo/heuristika

EISENMAN, P.; PŘIBYL, J. (2013). Systematické experimentování ve výuce matematiky. In: *Sborník příspěvků 6. Konference*: sborník příspěvků. Katedra matematiky PřF UJEP v Ústí nad Labem [cit. 2017-03-07]. 7. - 9. Listopadu 2013, České Budějovice. s. 85–93. ISBN 978-

80-7394-448-3. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2013/sbornik/clanky/10_UPVM2013_Eisenmann_Pribyl.pdf.

Everesta [online]. Heuristika. (2013) [cit. 2017-03-07]. Dostupné z: http://www.everesta.cz/slovnik/heuristika

KOČOVÁ, K. (2011). Obvod a obsah čtyřúhelníků a trojúhelníků. In: *Metodický portál RVP* [online]. [cit. 2017-03-27]. Dostupné z: http://dum.rvp.cz/materialy/obvod-a-obsah-ctyruhelniku-a-trojuhelniku.html

KOPKA, J. (1977). Strategie v heuristice. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. **22**(5), s. 286-292. Dostupné také z: http://dml.cz/dmlcz/138480

KRYNICKÝ, M. (2010a). Další trigonometrické věty: Trigonometrie. *Matematika SŠ.realisticky.cz: elektronické učebnice matematiky* [online]. 18. 4. 2015 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=1162

KRYNICKÝ, M. (2010b). Kosinová věta: Trigonometrie. *Matematika SŠ.realisticky.cz: elektronické učebnice matematiky* [online]. 9. 5. 2016 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=1164

KRYNICKÝ, M. (2010c). Pythagorova věta, Euklidovy věty I: Planimetrie. *Matematika SŠ.realisticky.cz: elektronické učebnice matematiky* [online]. 18. 4. 2015 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=995

Samouk.cz. (2017). Základní rovinné obrazce 2: Matematika na střední. [online]. [Telč] [cit. 2017-03-27]. Dostupné z: http://www.samouk.cz/moodle/mod/presenter/view.php?open=1&id=454&chapterid=4848

Slovník.sk [online]. Synonymický slovník: úloha. 2017. Ringier Axel Springer Slovakia, a.s. a Jazykovedný ústav Ľudovíta Štúra Slovenskej akadémie vied [cit. 2017-02-13]. Dostupné z: http://slovnik.azet.sk/synonyma/?q=%C3%BAloha

SVOBODA, E. *DF - Metodika řešení fyzikálních úloh* [online prezentace]. [cit. 2017-03-07]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/didaktika/DF_RES_ULOH.pdf.

Wikipedia [online]. Area. 9 February 2017, at 20:33 [cit. 2017-02-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Area

Wikipedie [online]. Obsah. 6. 12. 2016 v 18:19 [cit. 2017-02-13]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Obsah

Obrázky:

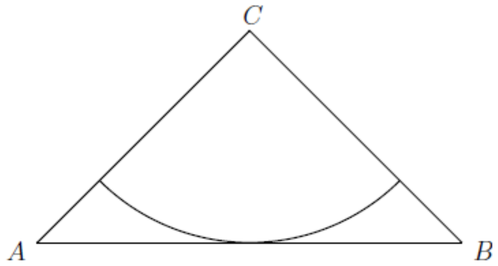
Obr. 1: TREJBAL, J.; KOMÁRKOVÁ, V. (1997). *Matematika 5: učebnice zpracovaná podle osnov vzdělávacího programu Základní škola, 2. díl.* Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 80-859-3750-6.

Obr. 7: Lichoběžník. In: *HackMath.net* [online]. (2017) [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: https://www.hackmath.net/i/rr_licho.gif

Příloha 1

Třída: **Věk:** **Pohlaví: M / Ž** **Obliba matematiky: 1 2 3 4 5** **Datum:**

<u>*Úloha 1.*</u> Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka je vepsána část kružnice tak, jak je znázorněno na obrázku.



Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníka je $|AB| = 8$ cm.

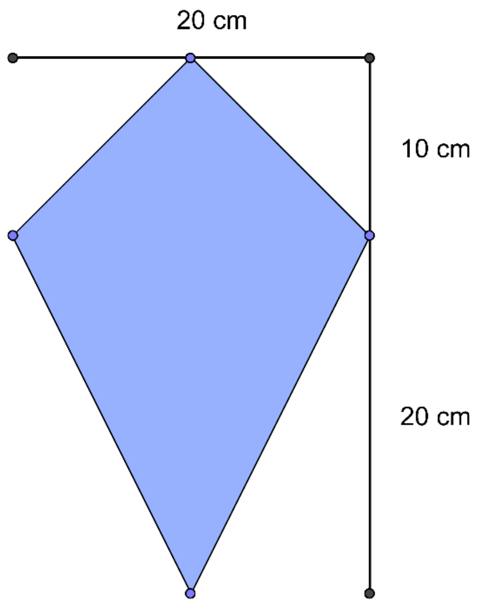
<u>Otázky:</u>

Náročnost úlohy: 1 2 3 4 5

Jaké znalosti jsem v úloze využil/a:

Proč jsem počítal/a takto (popř. proč jsem provedl/a škrt a změnu taktiky):

<u>*Úloha 2.*</u> Zjistěte, kolik papíru je potřeba pro stavbu draka, odpovídají-li jeho rozměry těm, které jsou na obrázku.



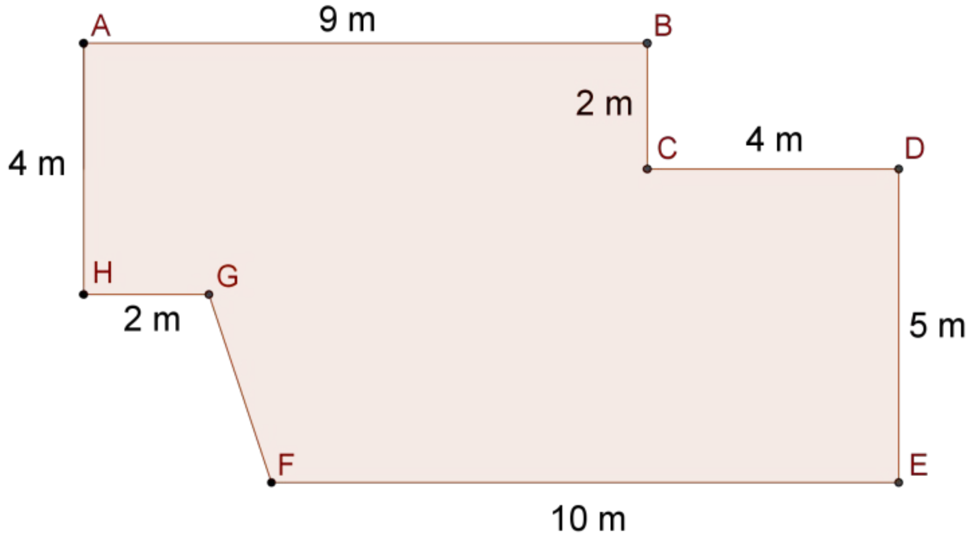
<u>Otázky:</u>

Náročnost úlohy: 1 2 3 4 5

Jaké znalosti jsem v úloze využil/a:

Proč jsem počítal/a takto (popř. proč jsem provedl/a škrt a změnu taktiky):

Úloha 3. Je třeba vydláždit dvůr tvaru uvedeného na obrázku. Urči obsah vydlážděné plochy.



Otázky:

Náročnost úlohy: 1 2 3 4 5

Jaké znalosti jsem v úloze využil/a:

Proč jsem počítal/a takto (popř. proč jsem provedl/a škrt a změnu taktiky):