

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

FYZIKÁLNÍ POLE
ROVNOMĚRNĚ URYCHLENÝCH ZDROJŮ

Pavel Krtouš

Diplomová práce

Obor: fyzika mezních oborů
Zaměření: matematická fyzika

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jiří Bičák, DrSc.
KMF MFF UK

Praha 1991

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury. Souhlasím se zapůjčováním své práce.

V Praze 18. dubna 1991

Děkuji

prof. RNDr. Jiřímu Bičákoví, DrSc.
za vybrání tohoto tématu, za trvalý zájem o moji práci, za
mnohé přínosné rady a připomínky a všechnen čas, který mi
věnoval.

Obsah

1. Úvod	4
1.1 Význam polí rovnoměrně urychlených zdrojů	5
1.2 Přehled práce	7
2. Obecný formalismus	10
2.1 Geometrie prostoročasu	11
2.2 Pole spinu 0,1,2	15
2.3 Kalibrační pole	18
3. Retardovaná pole urychlených zdrojů	26
3.1 Rindlerovské souřadnice	27
3.2 Skalární pole	33
3.3 Elektromagnetické pole	43
3.4 Gravitační pole v linearizované teorii	52
3.A Některé vztahy s delta-funkcemi	87
3.B Rozvoje některých funkcí	95
3.C Výpočet Riemannova tenzoru ${}^{ab}R$ a ${}^{mn}R$	101
3.D Distribuční limity některých funkcí	106
3.E Výpočty metrik ${}^{ab}h$ a ${}^{mn}h$	115
4. Gravitační pole urychlených zdrojů	121
4.1 Obecné boost-řotačně symetrické gravitační pole	122
4.2 Pole dvou urychlených částic	127
4.3 Retardované gravitační pole urychleného zdroje	132
5. Urychlené zdroje a konformní transformace	137
5.1 Konformní transformace	138
5.2 Bodová konformní transformace plochého prostoru	147
5.3 Skalární a elektromagnetické pole urychleného náboje	153
5.4 Kalibrační pole urychlených částic	158
5.A Sférická inverze	165
Literatura	180

1. ÚVOD

1.1 Význam polí rovnoměrně urychlených zdrojů

Jedním z ohnisek zájmu v obecné teorii relativity je zkoumání zářivých prostoročasů - přesných řešení Einsteinových rovnic, která reprezentují nestacionární pole zářivého charakteru. Během posledních let se objevily některé hluboké výsledky týkající se existence asymptoticky plochých zářivých prostoročasů (viz. [13], [20], [22]), dosud však není dokázána existence asymptoticky plochých vakuových prostoročasů vyhovujících všem požadavkům známé Penroseovy definice asymptotické plochosti. Není ovšem nalezeno ani žádné explicitní nevakuové zářivé asymptoticky ploché řešení Einsteinových rovnic. Nicméně je známá rozsáhlá třída zářivých řešení, která jsou asymptoticky plochá "skoro všude" - tzv. boost-rotačně symetrická řešení (viz. kapitola 4, jinak rozsáhlý rozbor v [5]) odpovídající rovnoměrně urychleným zdrojům. Gravitační pole reprezentovaná těmito řešeními lze interpretovat jako kombinaci retardovaných a advancovaných příspěvků od urychlených zdrojů. Vystává otázka, zda nelze nalézt zářivé řešení přesných Einsteinových rovnic, které by šlo interpretovat jako čistě retardované pole. Rovnoměrně urychlený zdroj je nejjednodušší zářivý systém a tak se přirozeně nabízí hledat retardované zářivé gravitační pole právě tohoto zdroje a to pomocí boost-rotačně symetrických řešení.

Na tuto myšlenku nás přivádí i širší analogie mezi různými fyzikálními zářivými poli. Obecně všechna zářivá pole nulové hmoty mají některé společné rysy - např. rychlost šíření čela vln je rovna rychlosti světla, algebraická struktura čistě zářivých polí je (v Penroseově-Petrovově klasifikaci) stejného typu, asymptotické vlastnosti zářivých polí ostrovních zdrojů jsou podobné atd.. A právě známé výsledky (viz. [11])

pro elektromagnetické pole rovnoměrně urychleného zdroje ukazují souvislost mezi boost-rotačně symetickým "retardovaným-advancovaným" polem a čistě retardovaným polem urychleného zdroje a dávají naději v nalezení podobné souvislosti pro gravitační pole.

Boost-rotačně symetrická "retardovaná-advancovaná" pole urychlených zdrojů jsou však zajímavá sama o sobě. Úzce souvisí s konformní strukturou prostoročasu. V plochém prostoročase jsou tato pole spojena konformní transformací se statickými poli, čehož lze využít (jak uvidíme v kapitola 5) k jejich generování z jednodušších známých statických řešení.

Boost-rotačně symetrická pole nacházejí své využití i v numerické relativitě (jako testy numerických kódů), v aproximačních metodách (jako testy jejich konvergence) a také v kvantové teorii pole - a to v interpretaci různých schémat kvantování v křivém prostoročase (Rindlerovské kvantování pomocí boostového Killingova vektoru - [7], [26]), či v kvantování ve vnějším homogenním poli (viz. [24]).

Naše práce se věnuje všem významnějším případům polí rovnoměrně urychlených zdrojů. Je zaměřena na zkoumání a srovnávání vlastností boost-rotačně symetrických polí - skalárního, elektromagnetického, gravitačního (linearizovaného i nelinearizovaného) a kalibračního (Yang-Millsova). Dále vyšetřuje čistě retardované pole rovnoměrně urychlených zdrojů - skalárního, elektromagnetického a gravitačního (linearizovaného i nelinearizovaného) a věnuje se jejich vzájemnému vztahu.

V následujícím nejprve krátce shrneme obsah práce a budeme specifikovat, které z uváděných výsledků mají původní a které rešeršní charakter.

1.2 Přehled práce

Nyní se dotkneme podrobněji obsahu této práce. V druhé kapitole je uveden formalismus používaný v dalším textu, jsou zavedeny některé konvence a notace. Za zmínku stojí paragraf 2.3, kde je poměrně podrobně provedena geometrická interpretace kalibračního pole jako konexe na bundle prostoru vnitřních stupňů volnosti. Z tohoto pojetí již přirozeně vyplývají transformační vlastnosti kalibračního pole vůči akci lokální kalibrační grupy i přirozený způsob interakce s kalibračně nabitými poli. Takovýto geometrický přístup vychází z výkladů uvedených možné nalézt např. v knize Penrose a Rindlera [13] či v [25].

Třetí kapitola obsahuje výpočet retardovaného skalárního, elektromagnetického a linearizovaného gravitačního pole jedné rovnoměrně urychlené částice v plochém prostoročase. Ukazuje se, že se vzrůstajícím spinem se zhoršuje chování pole podél hranice Σ_* oblasti příčinně spojené s částicí - světelné nadplochy oddělující prázdný prostoročas neovlivněný zdrojem od oblasti s retardovaným polem částice. Retardované skalární pole je na hranici Σ_* konečné, ale nespojitě. V případě elektromagnetického a linearizovaného gravitačního pole jsou na nadploše Σ_* lokalizované delta-funkce, a to jak v kalibračně závislém vektorovém potenciálu a linearizované metrice, tak i v kalibračně nezávislé elektromagnetické intenzitě a linearizovaném Riemannově tenzoru křivosti. Pro vektorový potenciál a linearizovanou metriku získané pomocí retardované Greenovy funkce navíc dostaneme divergenci na Σ_* , kterou bude nutno regularizovat. Členy lokalizované na Σ_* i potřebnou regularizaci dostaneme z regulárního pole částice, která se

pohybuje rovnoměrně urychleně až od nějakého okamžiku \mathcal{P} , limitní procedurou, při které okamžik \mathcal{P} oddálíme do minulosti.

V případě linearizovaného gravitačního pole se navíc ukázala nutnost započítat do tenzoru energie-hybnosti zdroje i příčinu urychlování částice. Zvolili jsme nejjednodušší způsob urychlování pomocí polonekonečné kosmické struny připevněné na částici. V krátkosti jsme uvedli odvození linearizované metriky nekonečné přímé struny, přehledné články týkající se kosmických strun jsou např. [27], [28].

Vedle monopólové částice by bylo možno zkoumat i urychlené zdroje složitější multipólové struktury (dipól, ...). Vzhledem k tomu, že všechna tři pole jsou lineární, je možné dostat pole složitějších zdrojů kombinací pole monopólové částice. Proto omezení na monopólový zdroj není na újmu obecnosti.

Hlavním výsledkem třetí kapitoly je ucelený, systematický pohled na retardovaná pole urychlené částice. Výsledky pro vektorový potenciál elektromagnetického pole a linearizované gravitační pole jsou původní, původní je diskuse čistě retardovaných řešení i v případě skalárního pole. Navíc přítomnost delta-funkcí na \sum_* v linearizovaném Riemannově tenzoru křivosti nám nabízí fyzikální interpretaci komplikací vzniklých v nelineární teorii gravitace.

Třetí kapitola obsahuje též rozsáhlé dodatky technického charakteru. Zmíníme se pouze o dodatku 3.A, v němž je přehled některých vlastností delta-funkcí v obecném prostoročase a je provedena diskuse způsobu regularizace některých nekonečných výrazů.

Kapitola 4 se zabývá problémem retardovaného gravitačního

pole rovnoměrně urychleného zdroje v rámci plné teorie gravitace. Je zde uvedeno a krátce diskutováno obecné boost-rotačně symetrické řešení Einsteinových rovnic reprezentující pole urychlených zdrojů a jeho speciální případ dvou urychlených objektů urychlovaných strunou. V paragrafu 4.3 je ukázáno, že nelze toto obecné řešení netriviálně spojitě navázat podél světelné nadplochy (obdoba Σ_*) s plochým prostoročasem, tj. nelze zkonstruovat spojitou čistě retardovanou boost-rotačně symetrickou metriku. Tento výsledek je původní. Jak jsme již nastínili v případě linearizovaného pole, fyzikální příčina zřejmě tkví v kumulaci gravitačního pole podél světelné nadplochy do takové míry, že ztrácí smysl požadavek spojitosti metriky, ba dokonce i souvislosti prostoročasu.

Poslední, pátá kapitola je věnována konformním vlastnostem plochého prostoročasu a souvislosti konformní transformace a světočar a polí rovnoměrně urychlených zdrojů. V paragrafu 5.1 je podán přehled chování různých veličin a rovnic při konformní transformaci metriky. V paragrafu 5.2 je provedena diskuse bodových konformních transformací plochého prostoročasu; ukáže se, že jisté konformní transformace převádějí světočáru stojící částice na světočáru dvou navzájem opačně urychlených symetricky umístěných částic. Tohoto se v paragrafu 4.3 využije pro nalezení skalárního, elektromagnetického a kalibračního (Yang-Millsova) pole dvou urychlených částic. Pro skalární a elektromagnetické pole dostaneme známé výsledky z třetí kapitoly, pro kalibrační pole se jedná o nové řešení Yang-Millsových rovnic.

V páté kapitole je také obsažen dodatek věnovaný sférické inverzi - speciální konformní transformaci. Je v něm provedena obsáhlá původní diskuse tohoto zobrazení v obecném afinním prostoru a jsou odvozeny transformační vlastnosti tzv. zobecněných kružnic při konformních transformacích.

2. OBECNÝ FORMALISMUS

V této kapitole uděláme stručný přehled používaného formalismu. Specifikujeme používané konvence a zavedeme některé notace. Uvedeme pohybové rovnice polí, která budeme zkoumat. Podrobněji se zastavíme u teorie kalibračního pole a jeho geometrické interpretace.

2.1 Geometrie prostoročasu

V tomto odstavci v krátkosti shrneme popis prostoročasu v rámci OTR. Prostoročas je reprezentován 4-dimensionální dostatečně hladkou diferenciální varietou M . Na této varietě máme tenzorový bundle prostor $T_q^p M$ 1). Jako abstraktní indexy 2) pro jeho prvky budeme používat malých latinských písmen. Konvence pro symetrizaci, antisymetrizaci a vnější algebru jsou

$$A_{(a_1 \dots a_m)} = \frac{1}{m!} \sum_G A_{a_{G_1} \dots a_{G_m}} \quad , \quad (2.1.1)$$

$$A_{[a_1 \dots a_m]} = \frac{1}{m!} \sum_G \text{sign } G A_{a_{G_1} \dots a_{G_m}} \quad ,$$

$$\varphi_{a_1 \dots a_p} \vee \psi_{b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p! q!} \varphi_{(a_1 \dots a_p} \psi_{b_1 \dots b_q)} \quad , \quad (2.1.2)$$

$$\omega_{a_1 \dots a_p} \wedge \theta_{b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p! q!} \omega_{[a_1 \dots a_p} \theta_{b_1 \dots b_q]} \quad ,$$

$$d_a \omega_{b_1 \dots b_p} = \nabla_a \wedge \omega_{b_1 \dots b_p} = (p+1) \nabla_{[a} \omega_{b_1 \dots b_p]} \quad , \quad (2.1.3)$$

kde ω, θ jsou antisymetrické formy a φ, ψ symetrické tenzory.

1) Zde

$$T_q^p M = \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p \times} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{q \times}$$

2) Prvky vektorových a tenzorových prostorů je výhodné označit pomocí tzv. abstraktních indexů. Jedná se pouze o formální vyznačení vektorového či tenzorového charakteru objektu, tyto indexy nenabývají žádných konkrétních hodnot (více viz. [1], [13]). Abstraktní indexy budou značeny podtržením (např. $\underline{a}^s, A_{\underline{a}\underline{b}}, \omega_{\underline{a}\underline{b}}$ atd.). Naproti tomu při volbě konkrétní báze můžeme používat souřadnicové indexy nabývající hodnot označujících prvky báze. Tyto indexy

Gravitační pole je popsáno Lorentzovou spojitou metrikou g_{ab} signatury $(-+++)$. Příslušná konexe, Riemannův tenzor, Ricciho tenzor a skalární křivost jsou dány vztahy

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad , \quad (2.1.4)$$

$$R_{abc}{}^d a_d = \nabla_a \nabla_b a_c - \nabla_b \nabla_a a_c \quad , \quad (2.1.5)$$

$$Ric_{ab} = R_{acb}{}^c \quad , \quad (2.1.6)$$

$$R = Ric_{ab} \vec{g}{}^{ab} \quad , \quad (2.1.7)$$

kde $\vec{g}{}^{ab}$ splňuje

$$\vec{g}{}^{ab} g_{bc} = \delta_c^a \quad . \quad (2.1.8)$$

Zvolíme-li souřadnice X^a ($a=0,1,2,3$) a příslušnou konexi ∂_c vztahem

$$\partial_c d_b X^a = 0 \quad , \quad a=0,1,2,3 \quad , \quad (2.1.9)$$

můžeme zavést Christoffelovy symboly

budou vždy nepodtržené. Opakování abstraktních indexů v jednom výrazu znamená zúžení, opakující se souřadnicový index znamená sčítání přes všechny hodnoty indexu. V případě, že pro nás bude nepodstatný konkrétní tenzorový charakter veličiny, budeme abstraktní indexy vynechávat. V tomto případě AB znamená tenzorový součin, $A \cdot B$ zúžení. Pokud budou použity symboly typu \vec{A} , jedná se čistě o rozšíření používané abecedy. Tenzory s různým položením indexů jsou v obecnosti různé, tj. B^a je jiný objekt než B_a . V případě, že je daná nedegenerovaná metrika g_{ab} pomocí níž lze zvedat a snižovat indexy, budeme, pokud nebude hrozit nedorozumění, označovat tenzory lišící se zvednutím a snížením indexu stejným písmenem, tj. např. $B_a = g_{ab} B^b$.

$$\nabla_a a^b = \partial_a a^b + \Gamma_{ac}^b a^c, \quad \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c d_c x^c \frac{\partial^c}{\partial x^a} \frac{\partial^b}{\partial x^c} \quad (2.1.10)$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} \bar{g}^{cd} (\partial_b g_{ad} + \partial_a g_{bd} - \partial_d g_{ab}) \quad (2.1.11)$$

$$R_{abc}^d = -\partial_a \Gamma_{bc}^d + \partial_b \Gamma_{ac}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d \quad (2.1.12)$$

Riemannův tenzor křivosti obecné (i nemetrické) konexe splňuje

$$R_{[ab]c}^d = R_{abc}^d, \quad R_{[abc]}^d = 0, \quad \nabla_a R_{bc}^d{}^e \quad (2.1.13)$$

jedná-li se o tenzor křivosti metrické konexe, platí navíc

$$R_{ab[cd]} = R_{abcd} \quad (2.1.14)$$

Hmota rozložená v prostoročase je charakterizována tenzorem energie-hybnosti T_{ab} . Geometrie prostoročasu je daná řešením Einsteinova gravitačního zákona

$$\text{Ric}_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (2.1.15)$$

Rychlost světla budeme vždy pokládat $c = 1$, Einsteinovu gravitační konstantu κ budeme považovat za bezrozměrnou. Jediným netriviálním rozměrem je tedy délka.

2.2 Pole spinu 0,1,2

Skalární pole nulové hmoty se zdrojem J_s v plochém prostoročase splňuje pohybovou rovnicí

$$\square \phi = J_s \quad , \quad (2.2.1)$$

kde $\square \equiv \vec{g}^{ab} \nabla_a \nabla_b$. Zobecněním této rovnice do křivého prostoročasu je

$$(\square + \xi R) \phi = J_s \quad , \quad (2.2.2)$$

kde ξ je číslo. Později uvidíme, že speciální volbou ξ může-
ne zajistit konformní invarianci této rovnice.

Vektorové pole nulové hmoty je pole elektromagnetické popsané standardními Maxwellovými rovnicemi

$$F_{ab} = d_a A_b \quad , \quad (2.2.3)$$

$$\nabla_a \vec{F}^{ab} = - J_r^b \quad . \quad (2.2.4)$$

Intenzita F_{ab} je invariantní vůči kalibrační transformaci

$$A_a \rightarrow \tilde{A}_a = A_a + d_a f \quad . \quad (2.2.5)$$

Důsledkem pohybových rovnic (jejich kalibrační invariance) je zachovávání se elektromagnetického toku J_r^a , tj.

$$\nabla_a J_r^a = 0 \quad . \quad (2.2.6)$$

Díky tomuto a kalibrační volnosti můžeme zvolit kalibrační

podmínku

$$\nabla_a A^a = 0 \quad (2.2.7)$$

Pro potenciál dostáváme v křivém prostoročase rovnici

$$\square A_a - Ric_{ab} A^b = -J_E^a \quad (2.2.8)$$

která se v plochem prostoročase redukuje na vlnovou rovnici

$$\square A_a = -J_{E a} \quad (2.2.9)$$

Pole spinu 2 \bar{g}_{ab} splňuje pohybovou rovnici

$$\square \bar{g}_{ab} = J_{ab} \quad (2.2.10)$$

K této rovnici vede i linearizovaná teorie gravitace. Předpokládejme, že metrika g_{ab} je dána malou poruchou od ploché metrikky η_{ab}

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \varepsilon h_{ab} + O[\varepsilon^2], \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.2.11)$$

Potom dostáváme Christoffelovy symboly konexe ∇_a vůči ploché konexi ∂_a (splňující $\partial_a \eta_{bc} = 0$)

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} \eta^{cd} (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) \varepsilon + O[\varepsilon^2] \quad (2.2.12)$$

a Riemannův tenzor, Ricciho tenzor a skalární křivost do prvního řádu v ε

$$R_{ab..d} = 2 \partial_{[a} \partial_{b]} h_{[c]d} \varepsilon + O[\varepsilon^2], \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{ab} &= -\frac{\varepsilon}{2} (\square h_{ab} + \partial_a \partial_b h - \partial_a \partial_c h^c_b - \partial_b \partial_c h^c_a) + O[\varepsilon^2] = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} (\square \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2} \square \gamma \eta_{ab} - \partial_a \partial_c \bar{\gamma}^c_b - \partial_b \partial_c \bar{\gamma}^c_a) + O[\varepsilon^2] , \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\mathcal{R} = -\frac{\varepsilon}{2} (\square \gamma + 2 \partial_c \partial_b \bar{\gamma}^{ab}) + O[\varepsilon^2] . \quad (2.2.15)$$

Zde $\square = \eta^{ab} \partial_a \partial_b$ a zavedli jsme

$$\bar{\gamma}^{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} h \eta_{ab} , \quad h_{ab} = \bar{\gamma}^{ab} - \frac{1}{2} \gamma \eta_{ab} , \quad (2.2.16)$$

$$h = h_a^a , \quad \gamma = \bar{\gamma}^a_a . \quad (2.2.17)$$

Einsteinův gravitační zákon má do prvního řádu v ε tvar

$$-\frac{1}{2} (\square \bar{\gamma}^{ab} - \partial_a \partial_c \bar{\gamma}^c_b - \partial_b \partial_c \bar{\gamma}^c_a) = \kappa T_{ab}^{(1)} . \quad (2.2.18)$$

Důsledkem pohybových rovnic je zachování se tenzoru energie-impulsu a to i v linearizované teorii, tj.

$$\partial_a T^{(1)ab} = 0 . \quad (2.2.19)$$

Metrika g_{ab} může ale být považována jako porucha jiné ploché metriky $\tilde{\eta}_{ab}$ lišící se od η_{ab} o malé (tj. řádu ε) posunutí podél vektorového pole ξ^a , tj.

$$\tilde{\eta}_{ab} = \eta_{ab} - \varepsilon \partial_{(a} \xi_{b)} . \quad (2.2.20)$$

To má za následek invarianci měřitelných veličin vzhledem k transformaci

$$h_{ab} \rightarrow \tilde{h}_{ab} = h_{ab} + \partial_{(a} \xi_{b)} . \quad (2.2.21)$$

Díky této invariance a (2.2.19) lze naložit kalibrační podmínku na

$$\partial_\alpha \bar{\gamma}^\alpha_\beta = 0 \quad (2.2.22)$$

a Einsteinův gravitační zákon do prvního řádu v ξ nabývá tvar

$$\square \bar{\gamma}_{ab} = -2\kappa T_{ab}^{(1)}, \quad (2.2.23)$$

což je pohybová rovnice pole spinu 2 (2.2.10).

2.3 Kalibrační pole

Kinematická aréna kalibračních polí je bohatší než prostý prostoročas o vnitřní stupně volnosti. Je realizována komplexním vektorovým bundle prostorem $E M$ nad prostoročasem M . Zhruba řečeno to znamená, že v každém bodě prostoročasu máme navíc vektorový prostor vnitřních stupňů volnosti. K prostoru $E M$ je přidružen prostor komplexně sdružený $\bar{E} M$. Oba prostory jsou spojeny antilineární operací

$$\bar{\quad} : E M \leftrightarrow \bar{E} M, \quad a^a \leftrightarrow \bar{a}^a \quad (2.3.1)$$

Pro vektory z $E M$ budou jako abstraktní indexy používána velká latinská písmena, pro prvky $\bar{E} M$ navíc čárkovaná. Nad $E M$ můžeme vybudovat tenzorový bundle prostor $E_{q,q}^{p,p} M$ ³⁾. $E M$

Kalibrační teorie je charakterizována kalibrační grupou G , což je nějaká dostatečně "pěkná" grupa (např. prostá, my budeme uvažovat grupy $SU(n)$, resp $U(1)$), a tzv. lokální kalibrační grupou danou součinem $G \times M$. Tato lokální grupa působí na $\bar{E} M$ prostřednictvím zobrazení

$$T : G \times M \rightarrow E_{1,0}^{1,0} M, \quad [g, p] \rightarrow T_g^p e, \quad (2.3.2)$$

přičemž T je reprezentace grupy $G \times M$. Z unitarity dostaneme, že na $E M$ lze zvolit unitární strukturu invariantní vůči akci grupy

³⁾ Zde

$$E_{q,q}^{p,p} M = \underbrace{E M \otimes \dots}_{p \times} \otimes \underbrace{E^* M \otimes \dots}_{q \times} \otimes \underbrace{\bar{E} M \otimes \dots}_{p' \times} \otimes \underbrace{\bar{E}^* M \otimes \dots}_{q' \times}$$

$$H_{\alpha\beta'} \in \mathbb{E}_{1,1}^{0,0} M, \quad (2.3.3)$$

$$\overline{H_{\alpha\beta'}} = H_{\alpha\beta'}, \quad H_{\alpha\beta'} T_{\beta}^{\alpha} \overline{T_{\alpha}^{\beta'}} = H_{\alpha\alpha'}$$

a pomocí této struktury definujeme skalární součin na $\mathbb{E}M$ ve tvaru

$$(a^{\alpha}, b^{\beta}) = \overline{a^{\alpha'}} b^{\beta} H_{\alpha\beta'} = a^{\alpha} b^{\beta} \quad (2.3.4)$$

kde jsme zavedli hermitovské sdružení †

$$^{\dagger}: \mathbb{E}M \leftarrow \mathbb{E}^{\dagger}M, \quad a^{\alpha} \rightarrow a^{\alpha\dagger} = H_{\alpha\beta'} \overline{a^{\beta'}} \quad (2.3.5)$$

Definici hermitovského sdružení lze přímočaře rozšířit na celý tenzorový bundle $\mathbb{E}_{p,p'}^{\alpha,\alpha'} M$. Podmínky unitarity potom lze psát

$$T_{\beta}^{\alpha} T_{\alpha}^{\beta'} = \mathbb{1}_{\beta}^{\beta'} \quad (2.3.6)$$

Pro grupy $SU(n)$ máme navíc podmínku

$$\det T_{\beta}^{\alpha} = 1 \quad (2.3.7)$$

Kalibrační pole je popsáno reálnou konexí D_{α} na $\mathbb{E}M$, která zachovává metriku $H_{\alpha\beta'}$

$$(\overline{D_{\alpha}} a)^{\alpha'} = D_{\alpha} \overline{a^{\alpha'}}, \quad D_{\alpha} H_{\alpha\beta'} = 0 \quad (2.3.8)$$

Tuto konexi rozšíříme na TM jako metrickou konexi ∇_{α} . Tenzor křivosti kalibračního pole je definován vztahem

$$i\ell F_{\alpha\beta}^{\alpha}{}_{\beta} \varphi^{\beta} = 2 D_{[\alpha} D_{\beta]} \varphi^{\alpha} \quad (2.3.9)$$

Zde l je vazbová konstanta kalibračního pole. Platí

$$F_{ab}^{\dagger} = F_{ba} \quad , \quad F_{ab} = -F_{ba} \quad . \quad (2.3.10)$$

Standardní technikou v teorii kalibračního pole je volba kalibrace - volba speciální báze e_a^{α} v EM vůči níž se vyjadřují ostatní veličiny. Tato báze se volí ortonormální, tj.

$$(e_a^{\alpha}, e_b^{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.3.11)$$

$$\uparrow$$

$$H_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} \bar{e}_a^{\beta} \quad ,$$

kde e_a^{α} je duální báze k e_a^{β} ($e_a^{\alpha} e_a^{\beta} = \delta_a^{\beta}$). K této bázi lze přiřadit konexi ∂_a podmínkami

$$\partial_a e_a^{\alpha} = 0 \quad , \quad \partial_a \bar{e}_a^{\alpha} = 0 \quad , \quad (2.3.12)$$

pro kterou platí

$$\partial_{[a} \partial_{b]} \varphi^{\alpha} = 0 \quad . \quad (2.3.13)$$

Nyní můžeme zavést kalibrační potenciál $A_a^{\alpha\beta}$ vztahem

$$\nabla_a \varphi^{\alpha} - \partial_a \varphi^{\alpha} = i l A_a^{\alpha\beta} \varphi^{\beta} \quad . \quad (2.3.14)$$

Platí

$$A_a^{\dagger} = A_a \quad . \quad (2.3.15)$$

Pro tenzor křivosti kalibračního pole dostáváme

$$\begin{aligned}
 F_{ab} &= 2 \partial_{[a} A_{b]} + i e [A_a, A_b] = \\
 &= 2 D_{[a} A_{b]} - i e [A_a, A_b]
 \end{aligned}
 \tag{2.3.16} \quad 4)$$

Kalibrační teorie se konstruuje tak, aby byla invariantní vůči akci lokální kalibrační grupy (tzv. kalibrační transformaci). Proto veškeré měřitelné veličiny musí být při kalibrační transformaci invariantní. Prvky $\mathbb{E}_{g, g'}^{p, p'} M$ nejsou přímo měřitelné, jelikož se transformují při kalibrační transformaci podle vztahu

$$\tilde{B}_{g, \dots, g'}^{a, \dots, a'} = T_{g, g'}^a \dots T_{g, g'}^{a'} \dots T_{g, g'}^{-1 E'} \dots T_{g, g'}^{-1 E'} B_{g, \dots, g'}^{a, \dots, a'} \tag{2.3.17}$$

Měřitelné tedy budou pouze různé zúžení přes všechny kalibrační stupně volnosti jako např. F_a^a . Kalibrační transformace indukuje také změnu kalibračního pole (konexe)

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_a \tilde{a}^a &= (\tilde{D}_a a)^a, \\
 \downarrow \\
 \tilde{D}_a a^a &= D_a a^a - (D_a T_{g, g}^a) T_{g, g}^{-1 a} a^a
 \end{aligned}
 \tag{2.3.18}$$

Potenciál vůči zadané kalibraci (zvolené bázi e_a^a), která je nezávislá na kalibrační transformaci, se bude transformovat

$$\tilde{A}_a^a = A_a^a + \frac{1}{i e} (\partial_a T_{g, g}^a) T_{g, g}^{-1 a}
 \tag{2.3.19}$$

4) Pro B_a^a, C_a^a prvky $\mathbb{E}_{g, g'}^{p, p'} M$ definujeme komutátor a stopu

$$[B, C]_a^a = B_a^a C_a^a - C_a^a B_a^a,$$

$$\text{Tr } B = B_a^a.$$

Pohybová rovnice kalibračního pole je

$$D_a \tilde{F}^{ab}{}^n{}_b = -J_k{}^n{}_b \quad (2.3.20)$$

Důsledkem pohybové rovnice je zachovávání se kalibračního toku

$$\begin{aligned} D_a J_k{}^n{}_b &= D_a D_b \tilde{F}^{ab}{}^n{}_b = D_{[a} D_{b]} \tilde{F}^{ab}{}^n{}_b = \\ &= -\frac{1}{2} Ric_{ab} \tilde{F}^{ab}{}^n{}_b - \frac{1}{2} Ric_{ab}{}^{ab} + \frac{1}{2} [F_{ab}, \tilde{F}^{ab}] = 0 \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Nyní se věnujme případu $G = U(1)$. Prostor \mathbb{E}^n je 1-dimensionální, což mnohé zjednodušuje. Kalibrační transformace jsou tvaru

$$T_g{}^n{}_b = e^{i\lambda\varphi} \mathbb{1}^n{}_b, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (2.3.22)$$

a tenzor $B \in \mathbb{E}_{q,q'}^{p,p'} M$ se transformuje

$$\tilde{B} = e^{i\lambda(p-p'-q\cdot q')\varphi} B \quad (2.3.23)$$

Speciálně

$$\tilde{F}_{ab}{}^n{}_b = F_{ab}{}^n{}_b \quad (2.3.24)$$

Navíc každý tenzor z $\mathbb{E}_{q,q'}^{p,p'} M$ má pouze jednu souřadnici a můžeme tedy definovat vektorový potenciál a kalibračně nezávislý a tenzor křivosti

$$\begin{aligned} A_a &\equiv A_a{}^n{}_b e^b e_n = A_a{}^n{}_b, \\ F_{ab} &\equiv F_{ab}{}^n{}_b e^b e_n = F_{ab}{}^n{}_b, \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

kde e^a je libovolně zvolená kalibrace (ortonormální báze). Vektorový potenciál však, díky (2.3.19), není kalibračně invariantní a transformuje se

intuitivně zapsat

$$T_{1+a} \approx 1 + i\epsilon a^\alpha \tau_\alpha \quad . \quad (2.3.31)$$

Generátory τ_α^a pro grupy $G = SU(m)$, $m > 1$ splňují

$$\tau_\alpha^\dagger = \tau_\alpha \quad , \quad i\epsilon [\tau_\alpha, \tau_\beta] = C_{\alpha\beta}^\delta \tau_\delta \quad , \quad (2.3.32)$$

$$T_R \tau_\alpha = 0 \quad .$$

Na \mathcal{M} můžeme prodloužit konexi odpovídající kalibračnímu poli tím, že položíme podmínky

$$D_\alpha C_{\beta\gamma}^\delta = 0 \quad , \quad D_\alpha \tau_\beta^a = 0 \quad ; \quad (2.3.33)$$

stejně tak můžeme prodloužit konexi ∂_α . Pro potenciál můžeme psát

$$D_\alpha a^\beta - \partial_\alpha a^\beta = A_{\alpha\beta}^\gamma a^\beta = [R_\alpha, a]^\beta \quad . \quad (2.3.34)$$

Zde jsme zavedli obvykle užívaný potenciál R_α

$$A_{\alpha\beta}^\gamma = R_\alpha^\delta C_{\delta\beta}^\gamma \quad . \quad (2.3.35)$$

Platí

$$A_{\alpha\beta}^a = R_\alpha^\delta \tau_\beta^a \quad . \quad (2.3.36)$$

Tenzor křivosti konexe na \mathcal{M} je dán vztahem

$$F_{\alpha\beta}^\gamma a^\beta = 2 D_{[\alpha} D_{\beta]} a^\gamma \quad . \quad (2.3.37)$$

Analogicky s postupem pro potenciál zavedeme tenzor F_{ab}^{α}

$$F_{ab}^{\alpha} = F_{ab}^{\alpha} C_{\alpha\beta}^{\alpha} \quad (2.3.38)$$

Platí vztahy ⁵⁾

$$F_{ab}^{\alpha} = F_{ab}^{\alpha} \tau_{\alpha}^{\beta} \quad (2.3.39)$$

$$F_{ab}^{\alpha} = 2 D_{[a} A_{b]}^{\alpha} + [A_a, A_b]^{\alpha} \quad (2.3.40)$$

$$F_{ab}^{\alpha} = 2 D_a^{\alpha} R_b^{\alpha} + [R_a, R_b]^{\alpha} \quad (2.3.41)$$

$$[F_{ab}, a]^{\alpha} = 2 D_{[a} D_{b]} a^{\alpha} \quad (2.3.42)$$

⁵⁾ Zde se nesmí zaměňovat více významů komutátorů $[,]$. V rovnici (2.3.40) je to komutátor ve smyslu poznámky ⁴⁾, v rovnicích (2.3.34), (2.3.41) a (2.3.42) ve smyslu Lieovy závorky dané rovnicí (2.3.29).

3. RETARDOVANÁ POLE URYCHLENÝCH ZDROJŮ

Tato kapitola obsahuje rozsáhlou diskusi retardovaných polí rovnoměrně urychlených zdrojů. Uvedeme známou retardovanou intenzitu elektromagnetického pole urychlené částice a nalezneme retardované skalární pole a vektorový potenciál elektromagnetického pole urychlené částice. Pro linearizovanou teorii gravitace budeme nuceni v tenzoru energie-impulsu započítat vedle urychlované částice i příčinu urychlování. Nalezneme linearizovanou metriku a Riemannův tenzor takového systému. V celé této kapitole pracujeme v plochém prostoročase a pod urychleným zdrojem, pokud není řečeno jinak chápeme rovnoměrně urychlený zdroj.

3.1. Rindlerovské souřadnice

Ke zkoumání urychlených zdrojů je výhodné používat souřadnice přizpůsobené urychlenému pozorovateli. V tomto paragrafu zavedeme několik takovéto souřadnice a uvedeme souřadnice světočáry urychleného zdroje.

Mějme plochý prostoročas s metrikou v inerciálních souřadnicích danou

$$g = -dt dt + dz dz + dx dx + dy dy \quad (3.1.1)$$

V nulových souřadnicích u, w

$$\begin{aligned} u &= z + t, & z &= \frac{1}{2}(u + w), \\ w &= z - t, & t &= \frac{1}{2}(u - w) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

má tvar

$$g = \frac{1}{2} du dv + dx dx + dy dy \quad (3.1.3)$$

Dále zavedeme souřadnice U, V a T, Z

$$U = a \ln \left| \frac{u}{a} \right|, \quad |u| = a \exp\left(\frac{U}{a}\right), \quad (3.1.4)$$

$$V = a \ln \left| \frac{w}{a} \right|, \quad |w| = a \exp\left(\frac{V}{a}\right),$$

$$U = T + Z, \quad Z = \frac{1}{2}(U + V) = \frac{1}{2} a \ln \frac{u w}{a^2} \quad (3.1.5)$$

$$V = Z - T, \quad T = \frac{1}{2}(U - V) = \frac{1}{2} a \ln \left| \frac{u}{w} \right|$$

Zde a je konstanta rozměru délky. Označme

$$G_u = \text{sign } u, \quad G_v = \text{sign } v \quad (3.1.6)$$

V souřadnicích U, V, x, y a T, Z, x, y má metrika (3.1.1) tvar

$$g = \frac{1}{2} G_u G_v \exp\left(-\frac{U+V}{a}\right) dU dV + dx dx + dy dy = \quad (3.1.7)$$

$$= G_u G_v \exp\left(2\frac{Z}{a}\right) (-dT dT + dZ dZ) + dx dx + dy dy. \quad (3.1.8)$$

Konečně zavedeme Rindlerovské souřadnice b, T

$$b = a \exp \frac{Z}{a} = \sqrt{|uv|} = \sqrt{|-t^2 - z^2|}, \quad |u| = b \exp\left(\frac{T}{a}\right), \quad (3.1.9)$$

$$T = \frac{1}{2} a \ln \left| \frac{u}{v} \right| = a \operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{t} \right)^{G_u G_v}, \quad |v| = b \exp\left(-\frac{T}{a}\right),$$

odtud

$$g = G_u G_v \left(-\frac{b^2}{a^2} dT dT + db db \right) + dx dx + dy dy. \quad (3.1.10)$$

Z definice je vidět, že tyto souřadnice jsou hladké pouze v oblastech $u, v \neq 0$; metrika není analytická funkce těchto souřadnic. Proto je výhodné zavést komplexní Rindlerovské souřadnice $u, v \neq 0$:

$$\tilde{z} = \sqrt{|uv|}, \quad u = \tilde{z} \exp \frac{\tau}{a}, \quad t = \tilde{z} \operatorname{sh} \frac{\tau}{a}, \quad (3.1.11)$$

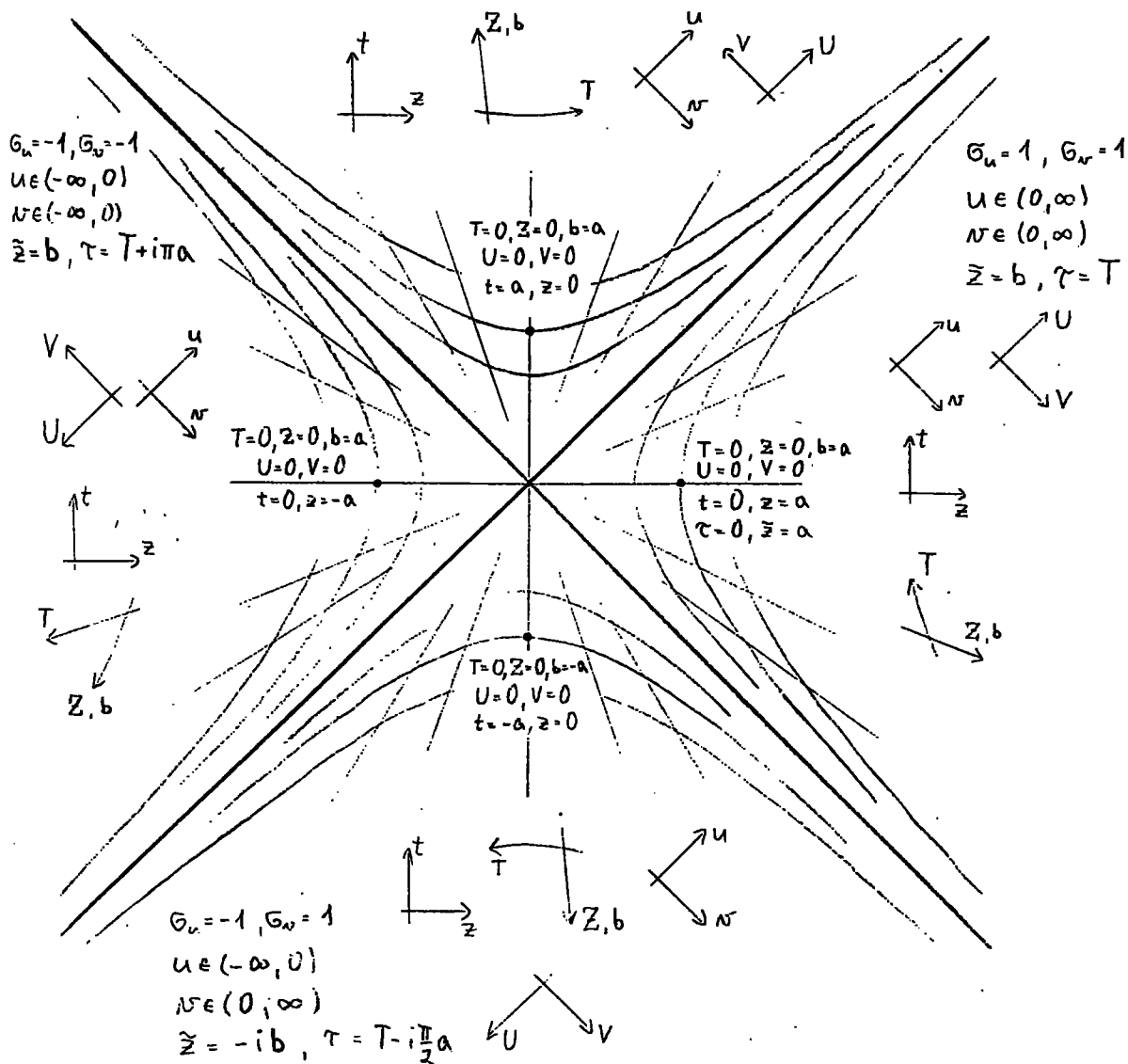
$$\tau = \frac{1}{2} a \ln \frac{u}{v}, \quad v = \tilde{z} \exp\left(-\frac{\tau}{a}\right), \quad z = \tilde{z} \operatorname{ch} \frac{\tau}{a},$$

$$g = -\frac{\tilde{z}^2}{a^2} d\tau d\tau + d\tilde{z} d\tilde{z} + dx dx + dy dy. \quad (3.1.12)$$

Funkce $\sqrt{\quad}$ a \ln jsou definovány tak, aby \tilde{z} a τ byly analytické víceznačné funkce na komplexifikovaném prostoro-

$$\sigma_u = 1, \sigma_v = -1 \quad u \in (0, \infty), v \in (-\infty, 0)$$

$$\tilde{z} = ib, \tau = T - i\frac{\pi}{2}a$$



obr. 3.1

Na obrázku jsou znázorněny směry růstu a obory hodnot jednotlivých souřadnic v různých oblastech. Souřadnice U, V, T, \tilde{z} nabývají ve všech oblastech hodnot z celého intervalu $(-\infty, \infty)$, souřadnice b nabývá hodnot $(0, \infty)$.

U, V, T, \tilde{z}

čase 2M 1). Komplexifikovaný prostoročas cM je 4- \mathbb{C} dimen-
sionální varieta s metrikou (3.1.1), kde však t, x, y, z jsou
komplexní analytické funkce. Původní Minkowského prostoročas
je pak reálný řez cM . Na tomto řezu jsou funkce \tilde{z} a τ
víceznačné, můžeme však v oblastech analytičnosti zvolit jednu
větev, např. následovně

$$\begin{aligned} G_u = 1, G_v = 1 & : \tilde{z} = b, \tau = T, \\ G_u = 1, G_v = -1 & : \tilde{z} = ib, \tau = T - i\frac{\pi}{2}a, \\ G_u = -1, G_v = 1 & : \tilde{z} = -ib, \tau = T - i\frac{\pi}{2}a, \\ G_u = -1, G_v = -1 & : \tilde{z} = b, \tau = T + i\pi a. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Komplexní souřadnice \tilde{z}, τ jsou výhodné z důvodu, že
metrika i všechny rovnice jsou analytické funkce těchto sou-
řadnic a proto některé výpočty stačí provádět pouze v oblasti
 $G_u = G_v = 1$ a výsledky pak případně analyticky prodloužit do
zbývajících oblastí.

Často budeme používat též cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \varrho \cos \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad y = \varrho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

1) Analytické mimo body větvení, tj. mimo body pro které je
 $\tilde{z} = 0$. To vede na podmínku

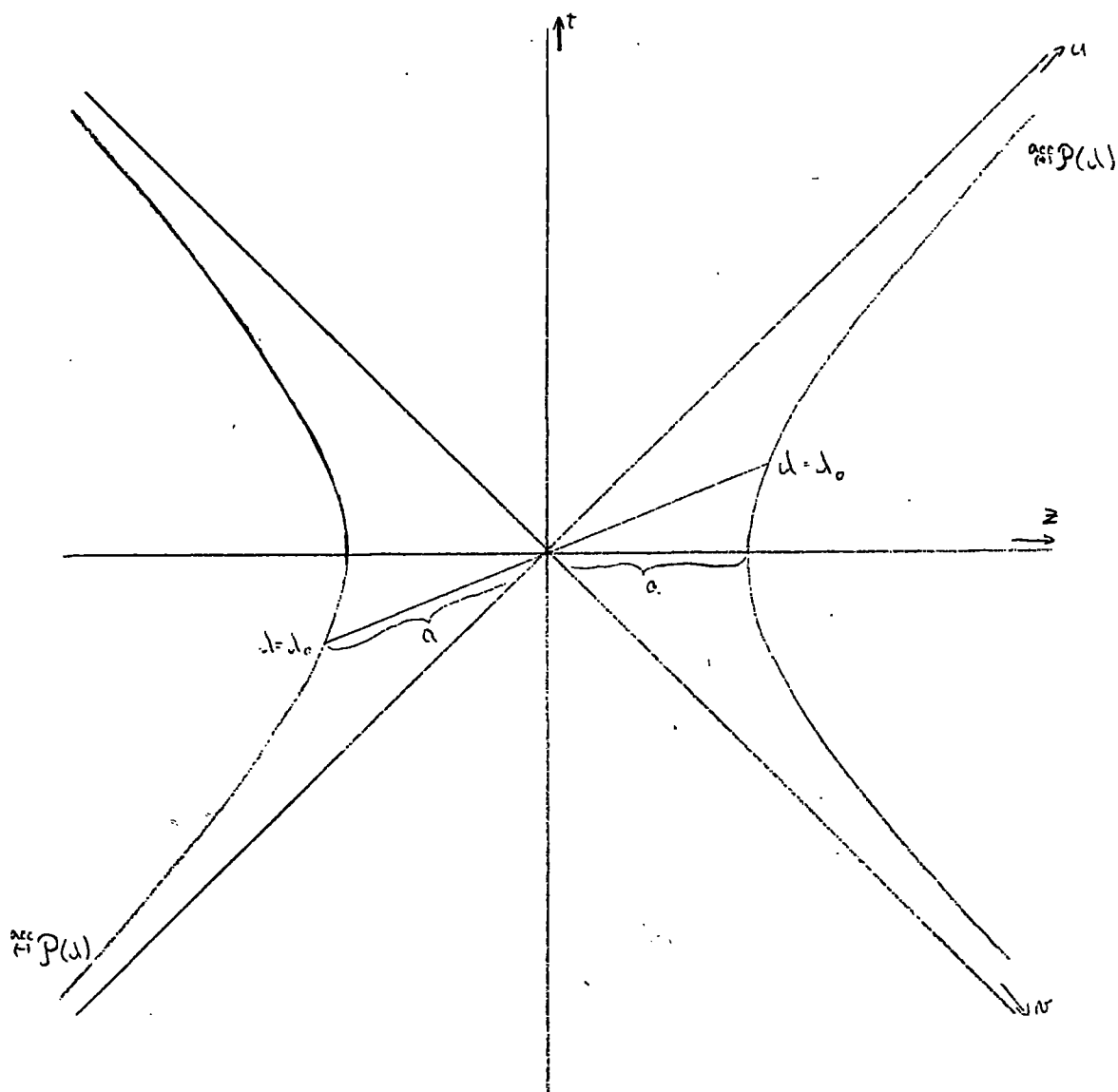
$$\operatorname{Re} t = \pm \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} t = \pm \operatorname{Im} z.$$

V dalším budeme hledat pole rovnoměrně urychlených částic. Světobíly ${}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)$ částic se zrychlením α jsou dány (obr. 3.2)

$$\begin{aligned} t({}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)) &= \pm a \sinh \frac{\lambda}{a} , & \tau({}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)) &= \pm \lambda , \\ z({}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)) &= \pm a \cosh \frac{\lambda}{a} , & \xi({}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)) &= a , \\ x({}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)) &= y({}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)) = 0 , \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

kde jsme zvolili počátek souřadnic tak, aby ve vlastním čase $\lambda = 0$ částice měly souřadnice $t = 0$ a $z = \pm a = \pm 1/\alpha$, byly v klidu a urychlovaly se ve směru osy z . Index (+) či (-) určuje směr urychlování - doprava či doleva. 4-rychlosti částic jsou

$${}^{\text{aff}}U^{\alpha}(\lambda) = \left. \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau} \right|_{{}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)} = \pm \left(\cosh \frac{\lambda}{a} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t} + \pm \sinh \frac{\lambda}{a} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial z} \right) \Big|_{{}^{\text{aff}}\mathcal{P}(\lambda)} . \quad (3.1.16)$$



obr. 3.2

Na obrázku jsou vyznačeny světočáry dvou rovnoměrně urychlených částic. Částice (+) se pohybuje v kladném směru osy x , částice (-) v záporném. Světočáry (3.1.5) jsou parametrizovány tak, aby pro každý vlastní čas λ_0 spojnice obou částic procházela středem hyperbol. Klidová vzdálenost částice od středu hyperbol je a , velikost zrychlení obou částic je $\alpha = \frac{1}{a}$. Pokud světočáru jedné částice analyticky prodloužíme do \mathbb{C} plochy v komplexifikovaném \mathbb{M} , protne tato plocha reálný prostoročas M ještě ve světočáře druhé částice.

3.2. Skalární pole

Nyní nalezneme retardované skalární pole rovnoměrně urychlené skalárně nabitě částice v plochém prostoročase. Je-li náboj částice μ , má skalární tok tvar ²⁾

$${}^{\text{ret}}J_S(x) = \mu \int d\lambda \delta({}^{\text{ret}}\mathcal{P}(\lambda) | x) \quad (3.2.1)$$

V plochém prostoročase platí

$$\delta(x|x') = \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \quad (3.2.2)$$

Využitím (3.1.15) integrací dostaneme

$$\begin{aligned} {}^{\text{ret}}J_S(x) &= \mu \int d\lambda \delta(t - a \operatorname{sh} \frac{\lambda}{a}) \delta(z - a \operatorname{ch} \frac{\lambda}{a}) \delta(x) \delta(y) = \\ &= \mu \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{a}} \delta(z - a \operatorname{ch} \frac{\lambda}{a}) \Big|_{t = a \operatorname{sh} \frac{\lambda}{a}} \delta(x) \delta(y) = \\ &= \mu 2a \delta(z^2 - a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\lambda}{a}) \Big|_{t = a \operatorname{sh} \frac{\lambda}{a}} \delta(x) \delta(y) \theta(u) \theta(v) = \\ &= \mu 2a \delta(\tilde{z}^2 - a^2) \delta(x) \delta(y) \theta(u) \theta(v) = \\ &= \mu \delta(\tilde{z} - a) \delta(x) \delta(y) \theta(u) \theta(v) \quad (3.2.3) \end{aligned}$$

²⁾ Zde $\delta(x|x')$ je delta-funkce lokalizována v bodě x normalizována na míru $g^{\frac{1}{2}}$ indukovanou metrikou $g_{\mu\nu}$, tj.

$$\int g^{\frac{1}{2}}(x') \varphi(x') \delta(x|x') = \varphi(x)$$

$\delta(x)$ je obyčejná delta-funkce na reálných číslech, tj.

$$\int \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Více viz. dodatek 3.A.

Retardovaná Greenova funkce vlnové rovnice, splňující

$$\square_x G_{\text{ret}}(x|x') = \delta(x|x') \quad , \quad (3.2.5)$$

$$G_{\text{ret}}(x|x') = 0 \quad \text{pro} \quad \varepsilon(x|x') = -1 \quad ,$$

je ³⁾

$$G_{\text{ret}}(x|x') = -\frac{1}{2\pi} \theta(x|x') \delta((x-x')^2) \quad (3.2.6)$$

Zde funkce $\theta(x|x')$ a $\varepsilon(x|x')$ jsou definovány

$$\varepsilon(x|x') \begin{cases} = 1 & \text{pro } x \text{ v příčinné budoucnosti } x' \\ = 0 & \text{pro } x, x' \text{ prostorupodobné} \\ = -1 & \text{pro } x \text{ v příčinné minulosti } x' \end{cases} \quad (3.2.7)$$

$$\theta(x|x') \begin{cases} = 1 & \text{pro } x' \text{ v příčinné minulosti } x \\ = 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

$$\theta(x|x') = \theta(\varepsilon(x|x')) \quad . \quad (3.2.9)$$

Retardované řešení rovnice (2.2.1) se zdrojem (3.2.1) je

$$\phi^{\text{ret}}(x) = \int_{x' \in M} g^{-\frac{1}{2}}(x') {}^{(3)}J_S(x') G_{\text{ret}}(x|x') \quad . \quad (3.2.10)$$

³⁾ V plochem prostoročasu má smysl zdefinovat rozdíl bodů. Na vzniklém vektorovém prostoru přirozeně působí Minkowského metrika, tj.

$$\begin{aligned} (x-x')^2 &= -(t-t')^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = \\ &= \tilde{z}^2 + \tilde{z}'^2 - 2\tilde{z}\tilde{z}' \text{ ch } \frac{\tilde{z}-\tilde{z}'}{a} + (x-x')^2 + (y-y')^2 \quad , \end{aligned}$$

kde (t, x, y, z) resp. (τ, \tilde{z}, x, y) a (t', x', y', z') resp. $(\tau', \tilde{z}', y', z')$ jsou souřadnice bodů x a x' .

Míra $g^{\frac{1}{2}}$ má v souřadnicích τ, \tilde{z} tvar

$$g^{\frac{1}{2}} = dt dz dx dy = \frac{\tilde{M}}{a} d\tau d\tilde{z} dx dy \quad (3.2.11)$$

a tak pro τ v oblasti $G_u = G_v = 1$ můžeme psát

$$\begin{aligned} {}^{acc}\phi(x) &= -\frac{\mu}{2\pi} \int \frac{\tilde{M}'}{a} d\tau' d\tilde{z}' dx' dy' \delta(\tilde{z}' - a) \Theta(x|x') \delta(\tilde{z}^2 + \tilde{z}'^2 - 2\tilde{z}\tilde{z}' \operatorname{ch} \frac{\tau - \tau'}{a}) = \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \int d\tau' \Theta(\tau - \tau') \delta(\varrho^2 + \tilde{z}^2 + a^2 - 2a\tilde{z} \operatorname{ch} \frac{\tau - \tau'}{a}) = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{\tilde{z} \operatorname{sh} \frac{\tau - \tau'}{a}} \Big|_{\operatorname{ch} \frac{\tau - \tau'}{a} = \frac{l}{2}, \tau > \tau'} \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{2a}{\xi} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

kde jsme zavedli dále často používané funkce

$$\xi = [(\tilde{z}^2 + a^2 + \varrho^2)^2 - 4a^2\tilde{z}^2]^{\frac{1}{2}} = [(\tilde{z}^2 + \varrho^2 - a^2)^2 + 4a^2\varrho^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.13)$$

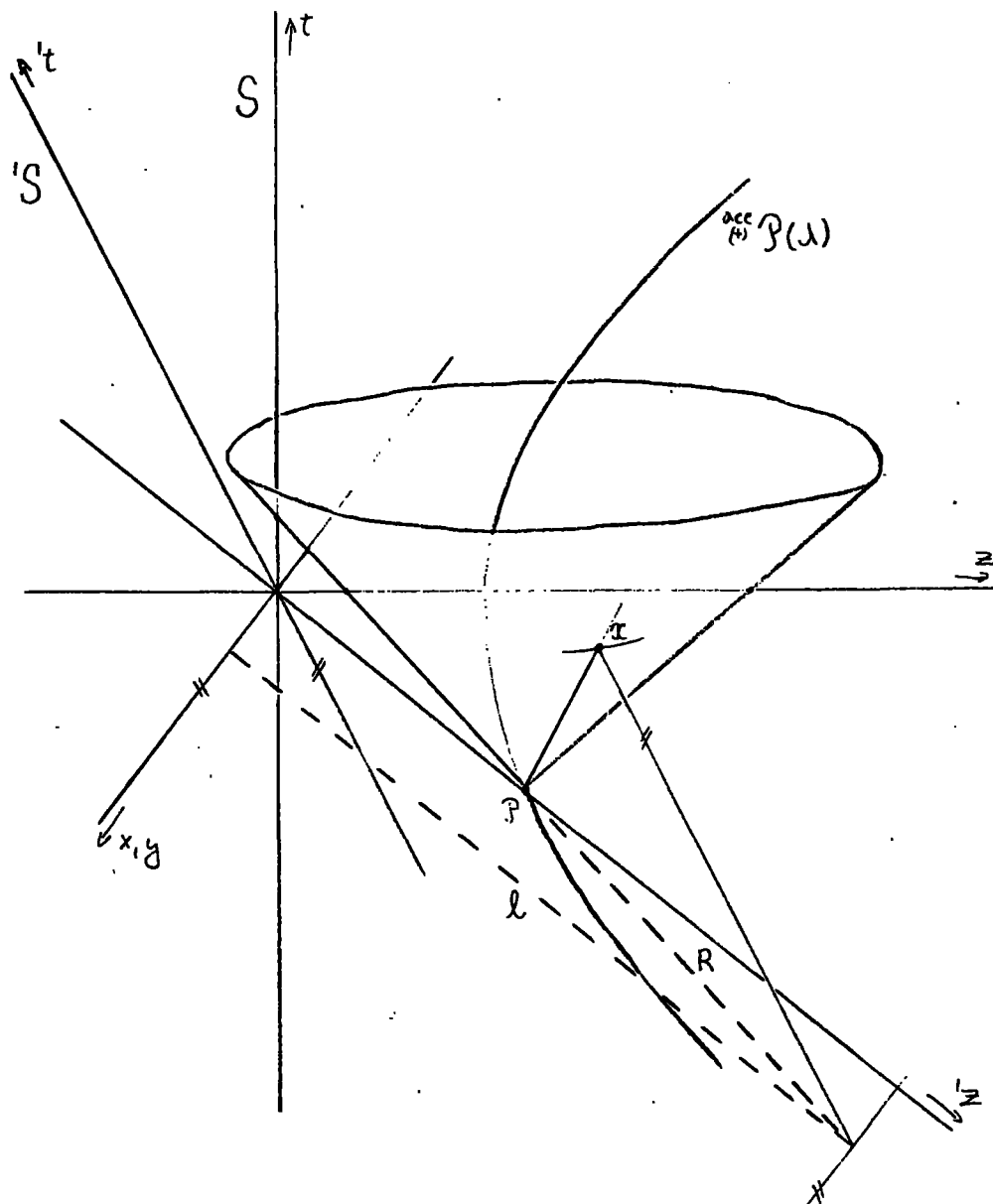
$$R = \frac{1}{2a} \xi = (l^2 - \tilde{z}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\chi = \tilde{z}^2 + \varrho^2 + a^2, \quad (3.2.14)$$

$$l = \frac{1}{2a} \chi.$$

Poznamenejme, že R má význam retardované vzdálenosti události \mathcal{U} od světočáry ${}^{acc}P(\beta)$ v soustavě, v které je v retardovaném vlastním čase částice v klidu. Obdobně l má význam souřadnice \tilde{z} události \mathcal{U} v téže soustavě (viz. obr. 3.3).

Pokud toto pole analyticky prodloužíme do celého prostoročasu, dostaneme řešení (označme ho ${}^{acc}\phi$) vlnové rovnice s analyticky prodlouženým zdrojem ${}^{acc}J_s$ (prodloužení označme ${}^{acc}J_s$). Analytické rovnice světočáry urychlené částice jsou



obr. 3.3

Událost P je okamžik, kdy částice o světločáře $\frac{d}{dt}P(x)$ ovlivňuje retardovaně pole v bodě x , tj. událost x leží na kuželu budoucnosti P . Soustava S' je klidová soustava částice v okamžik P . R je prostorová vzdálenost událostí P a x měřená v soustavě S' , l je hodnota souřadnice z' události x .

$$z^2 - t^2 = a^2, \quad x = 0, \quad y = 0. \quad (3.2.15)$$

Z těchto rovnic vidíme, že analytickým prodloužením světočáry jedné urychlené částice dostaneme ještě světočáru druhé urychlené částice umístěné symetricky k původní, tj. světočáru ${}^{\text{acc}}P(\lambda)$ (obr. 3.2). Díky tomuto analytické prodloužení zdroje ${}^{\text{acc}}J_s$ je

$${}^{\text{acc}}J_s = \int d\lambda \mu \delta(x | {}^{\text{acc}}P(\lambda)) + \int d\lambda \mu \delta(x | {}^{\text{acc}}P(\lambda)). \quad (3.2.16)$$

Jak jsme již řekli pole ${}^{\text{acc}}\phi$ je řešením vlnové rovnice právě s tímto zdrojem. Uvidíme, že ho můžeme interpretovat jako kombinaci retardovaného pole od jedné částice a advancovaného pole od částice druhé.

Nás ale především zajímá retardované pole od jedné urychlené částice. V oblasti $u > 0$ ho získáme analytickým prodloužením řešení (3.2.12) získaným v oblasti $G_k = G_{k'} = 1$. V oblasti $u < 0$ však musí být retardované pole částice lokalizované v poloprostoru $u > 0$ nulové, a tak kandidát na hledané retardované pole je

$${}^{\text{ret}}\phi = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \theta(u) = {}^{\text{acc}}\phi \theta(u), \quad (3.2.17)$$

Zatím ale nevíme, zda toto pole je řešením rovnice (2.2.1) i na hranici analytičnosti $u = 0$. To můžeme ověřit přímým dosazením

$$\begin{aligned} \square {}^{\text{ret}}\phi &= \bar{g}^{ab} \nabla_a \nabla_b \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \theta(u) \right) = \\ &= \bar{g}^{ab} \nabla_a \left(\nabla_b \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \theta(u) + \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \delta(u) d_{\frac{1}{2}} u \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \square \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \Theta(u) + 2 \int_{\vec{a}b} d_a \left(-\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \right) d_b u \delta(u) = \\
&= \mu \delta(\vec{z}-a) \Theta(u) - \frac{4\mu}{4\pi} \left(\frac{1}{R} \right)_{,a} \Big|_{u=0} \delta(u) = \\
&= \mu \delta(\vec{z}-a) \Theta(u) - \frac{4\mu}{4\pi} \left(-\frac{1}{R^2} R_{,a} \frac{u}{2\vec{z}} \right) \Big|_{u=0} \delta(u) \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

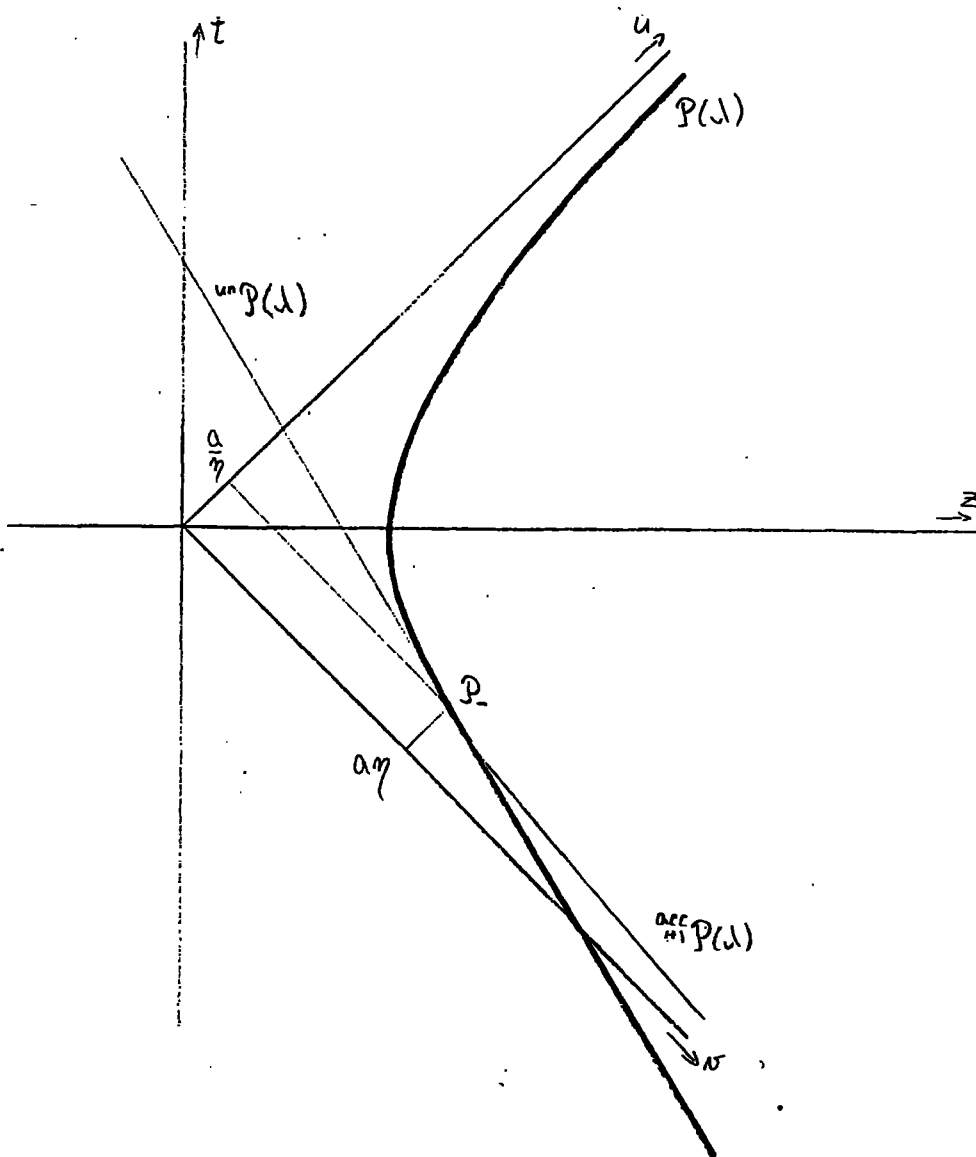
Pomocí třetího ze vztahů (3.C.5) vidíme, že druhý člen je nulový a dostáváme

$$\square^{\text{ret}} \phi = {}^{\text{ret}} \mathcal{J}_S \quad (3.2.19)$$

Pole (3.2.17) tedy je hledaným retardovaným polem jedné urychlené částice. Ze symetrie lehce obdržíme avancované pole symetricky umístěné částice (viz. (3.2.15)) a kombinací těchto dvou polí dostaneme ${}^{\text{ret}} \phi$.

Pro ilustraci použijeme ještě jiného, fyzikálně realistického postupu, kterým ověříme, že pole (3.2.17) je skutečně řešením vlnové rovnice. Pro skalární pole je tento postup zbytečně těžkopádný, pro elektromagnetické pole a linearizovanou gravitaci již ale bude nezbytný. Vyjdeme z fyzikálně rozumného argumentu, že částice se nemůže pohybovat, realisticky vzato, urychleně neustále; kdysi v minulosti musel její urychlený pohyb začít. Pro jednoduchost předpokládejme, že před tím se částice pohybovala rovnoměrně (obr. 3.4). Pokud nalezneme pole takto se pohybující částice a poté oddálíme okamžik počátku urychlování do "daleké minulosti"⁴⁾, obdržíme hledané pole.

⁴⁾ Přesně řečeno počátek urychlování částice oddalujeme do světelného nekonečna v minulosti. Pro nás je ale nyní důležité pouze to, že se tento okamžik oddálí z konečné oblasti. Tato poznámka se týká všech obdobných situací v této kapitole



obr. 3.4

V obrázku je vyznačena světočára $u^\mu P(u)$ rovnoměrně urychlené částice a světočára $u^\mu P(u)$ rovnoměrně přímočaře se pohybující částice procházející událostí P_- tečně k světočáře urychlené částice. Jejich kombinací získáme světočáru částice, která se pohybuje rovnoměrně až do okamžiku P_- a poté se začne urychlovat - vytažena silně. Souřadnice události P_- jsou $u_- = a/\eta$, $x_- = a\eta$.

Uvažujme nejdříve stojící skalární částici s nábojem μ v bodě $x=0, y=0, z=a$. Její tok je dán

$${}^{un}J_s = \mu \int d\lambda \delta({}^{un}P(\lambda) | x) = \mu \delta(x) \delta(y) \delta(z-a) \quad (3.2.20)$$

a pole

$$\begin{aligned} {}^{un}\phi &= \int G^{\mu\nu}(x') {}^{un}J_s(x') G_{\nu\sigma}(x|x') = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \int dt' \delta(t-t') \delta(-(t-t')^2 + r^2) = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

kde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2} \quad (3.2.22)$$

Skalární tok částice, která se do okamžiku \mathcal{P} pohybuje rovnoměrně a po něm urychleně je

$$J_s(x) = {}^{acc}J_s(x) \Theta(x|\mathcal{P}) + {}^{un}J_s(x) \Theta(\mathcal{P}|x) \quad (3.2.23)$$

Zde ${}^{un}J_s$ je tok rovnoměrně pohybující se částice se světočárou procházející událostí \mathcal{P} tečně k hyperbole urychleného pohybu (obr. 3.4). Tento tok dostaneme boostem toku ${}^{un}J_s$, což formálně provedeme záměnou

$$\begin{aligned} t \rightarrow 't &= \frac{1}{2} \left(\gamma u - \frac{1}{\gamma} w \right) = \\ &= t \operatorname{ch} \frac{\tau}{a} - z \operatorname{sh} \frac{\tau}{a}, \\ z \rightarrow 'z &= \frac{1}{2} \left(\gamma u + \frac{1}{\gamma} w \right) = \\ &= z \operatorname{ch} \frac{\tau}{a} - t \operatorname{sh} \frac{\tau}{a}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

kde $\tau_- = -a \ln \eta$, $\tilde{z}_- = a$ jsou souřadnice události P_- , η je parametr charakterizující, kdy urychlení začalo. Ze vztahu $\tau_- = -a \ln \eta$ vidíme, že při růstu η se událost P_- oddaluje do minulosti. Dosadíme-li do (3.2.23) dostaneme

$$J_s = \mu \delta(\tilde{z} - a) \delta(x) \delta(y) \theta(x|P_-) + \mu \delta(\tilde{z} - a) \delta(x) \delta(y) \theta(P_-|x) \quad (3.2.25)$$

Retardované pole od tohoto zdroje dostaneme kombinací polí ${}^{acc}\phi$ a ${}^{un}\phi$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= {}^{acc}\phi(x) \theta(x|P_-) + {}^{un}\phi(x) \theta(P_-|x) = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \theta(x|P_-) - \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{R} \theta(P_-|x) \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Nyní provedeme limitu $\eta \rightarrow \infty$, tj. oddálíme do daleké minulosti začátek urychlování. V této limitě povrch světelného kužele budoucnosti události P_- přechází na plochu $u=0$ (viz. (3.B.14)), tedy

$${}^{acc}\phi(x) \theta(x|P_-) \rightarrow {}^{acc}\phi(x) \theta(u) \quad (3.2.27)$$

Využitím (3.D.13) dostaneme

$$\frac{1}{R} = O\left[\frac{1}{\eta}\right], \quad (3.2.28)$$

z čehož

$${}^{un}\phi(x) \theta(P_-|x) \rightarrow 0 \quad (3.2.29)$$

Tím jsme opět ukázali, že retardované pole odpovídající zdroji ${}^{acc}J_s$ je dané (3.2.17).

Díky symetrii úlohy snadno vytvoříme avancované pole částice se světočárou ${}^{acc}P$. Jeho tvar bude

$${}^{adv}\phi = {}^{acc}\phi \Theta(-u) \quad . \quad (3.2.30)$$

Vidíme, že kombinací tohoto pole s ${}^{ret}\phi$ dostaneme právě pole ${}^{acc}\phi$.

3.3. Elektromagnetické pole

V tomto odstavci budeme hledat retardované pole elektricky nabitě rovnoměrně urychlené částice v plochém prostoročase. Elektrický tok takovéto částice je

$${}^{(4)}J_E^a = e \int d\lambda \, {}^{(4)}u^a(\lambda) \delta({}^{(4)}P(\lambda) | x) \quad , \quad (3.3.1)$$

kde e je elektrický náboj a ${}^{(4)}u^a(\lambda)$ 4-rychlost částice. Obdobně jako pro skalární pole dostaneme ⁵⁾

$${}^{(4)}J_E^a = e \, {}^{(4)}u^a \delta(\tilde{z}-z) \delta(x) \delta(y) \quad . \quad (3.3.2)$$

Ukážeme, že tok daný výrazem (3.3.1) s libovolnou světočárou, která má spojitou 4-rychlost, se zachovává, tj. splňuje podmínku (2.2.6). Pro libovolnou testovací funkci $\varphi(x)$ máme

$$\begin{aligned} \int g^{\mu\nu}(x') \varphi(x) \nabla_\mu \int d\lambda \, u^\nu(\lambda) \delta(P(\lambda) | x) &= \\ &= - \int g^{\mu\nu}(x) (\nabla_\mu \varphi)(x) \int d\lambda \, u^\nu(\lambda) \delta(P(\lambda) | x) = \\ &= - \int d\lambda \, u^\nu(\lambda) (\nabla_\mu \varphi)(P(\lambda)) = \\ &= [\varphi(P(\lambda))]_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

což jsme chtěli ukázat.

⁵⁾ Zde je ${}^{(4)}u^a$ libovolné prodloužení 4-rychlosti do vektorového pole na okolí světočáry částice, např. $\frac{\partial^a}{\partial \tau}$.

Jelikož se tok (3.3.1) zachovává, můžeme naložit kalibrační podmínku (2.2.7) a řešit vektorovou vlnovou rovnici (2.2.8). Její retardovaná Greenova funkce v plochem prostoru je dána

$$G_{\text{ret}}^{\pm}(x|x') = U_{\pm}^{\pm}(x|x') G_{\text{ret}}^{\pm}(x|x') \quad (3.3.4)$$

Zde $U_{\pm}^{\pm}(x|x')$ je operátor paralelního přenosu z x do x' . Retardované elektromagnetické pole od zdroje (3.3.1) je

$${}^{\text{ret}}A^{\pm}(x) = - \int_{\Sigma} \underline{\sigma}^{\pm}(x') {}^{\text{ret}}J^{\pm}(x') G_{\text{ret}}^{\pm}(x|x') \quad (3.3.5)$$

V oblasti $G_{\pm} = G_{\pm} = 1$ vypočteme

$$\begin{aligned} {}^{\text{ret}}A^{\pm}(x) &= \frac{e}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\tilde{z}'}{a} d\tau' d\tilde{z}' dx' dy' U_{\pm}^{\pm}(x|x') \theta(x|x') \delta((x-x')^2) = \\ &= \frac{e}{2\pi} \int d\tau' \left(ch \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial t} + sh \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial z} \right) \theta(\tau-\tau') \delta(\rho^2 + \tilde{z}^2 + a^2 - 2a\tilde{z} ch \frac{\tau-\tau'}{a}) = \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\tilde{z} sh \frac{\tau-\tau'}{a}} \left(ch \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial t} + sh \frac{\tau'}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial z} \right) \Big|_{ch \frac{\tau-\tau'}{a} = \frac{l}{R}, \tau=\tau'} = \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\tilde{z} sh \frac{\tau-\tau'}{a}} \left(ch \frac{\tau-\tau'}{a} ch \frac{\tau}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial t} - sh \frac{\tau-\tau'}{a} sh \frac{\tau}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + ch \frac{\tau-\tau'}{a} sh \frac{\tau}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial z} - sh \frac{\tau-\tau'}{a} ch \frac{\tau}{a} \frac{\partial^{\pm}}{\partial z} \right) \Big|_{ch \frac{\tau-\tau'}{a} = \frac{l}{R}, \tau=\tau'} = \\ &= \frac{e}{4\pi} \left(\frac{a}{\tilde{z}^2} \frac{l}{R} \frac{\partial^{\pm}}{\partial \tau} - \frac{1}{\tilde{z}} \frac{\partial^{\pm}}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (3.3.6) \end{aligned}$$

Analytické rozšíření do celého prostoročasu nazveme ${}^{\text{adv}}A_{\pm}$, tj.

$$\begin{aligned} {}^{\text{adv}}A_{\pm} &= - \frac{e}{4\pi} \left(\frac{1}{a} \frac{l}{R} d_{\pm} \tau + \frac{1}{\tilde{z}} d_{\pm} \tilde{z} \right) = \\ &= - \frac{e}{4\pi} \frac{1}{z^2 - t^2} \left(\frac{\chi z - \xi t}{\xi} d_{\pm} t + \frac{\xi z - \chi t}{\xi} d_{\pm} z \right) = \\ &= - \frac{e}{4\pi} \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} d_{\pm} u + \frac{R-l}{2v} d_{\pm} v \right) \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

Stejnou úvahou jako v případě skalárního pole (viz. (3.2.17)) získáme kandidáta na hledané pole od zdroje

$${}^{\text{ret}}A_{\pm} = {}^{\text{acc}}A_{\pm} \Theta(u) \quad (3.3.8)$$

Musíme ještě ověřit, zda je vlnová rovnice splněna i na nadploše $u=0$. Intenzita pole ${}^{\text{ret}}F$ je

$$\begin{aligned} {}^{\text{ret}}F &= d({}^{\text{acc}}A \Theta(u)) = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \left[\left(d\frac{\chi}{\xi} \wedge \frac{du}{2u} - d\frac{\chi}{\xi} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{2R} \right) \Theta(u) + du \wedge {}^{\text{acc}}A \delta(u) \right] = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \left(\frac{u\mathbf{r} - \mathbf{a}^2 - \mathbf{e}^2}{2aR^2} du \wedge d\mathbf{r} + \frac{e\mathbf{r}}{2aR^2} du \wedge d\mathbf{e} - \frac{e\mathbf{u}}{2aR^2} d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{e} \right) \Theta(u) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Analytické prodloužení této intenzity z oblasti $u>0, v>0$ do celého prostoročasu nazveme ${}^{\text{acc}}F$.

$$\begin{aligned} {}^{\text{acc}}F &= \left(-\frac{e}{4\pi} \right) \left(\frac{u\mathbf{r} - \mathbf{a}^2 - \mathbf{e}^2}{2aR^2} du \wedge d\mathbf{r} + \frac{e\mathbf{r}}{2aR^2} du \wedge d\mathbf{e} - \frac{e\mathbf{u}}{2aR^2} d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{e} \right) = \\ &= \left(-\frac{e}{4\pi} \right) \left(\frac{z^2 - t^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{e}^2}{2aR^2} dt \wedge dz + \frac{e\mathbf{z}}{aR^2} dt \wedge d\mathbf{e} + \frac{e\mathbf{t}}{aR^2} dz \wedge d\mathbf{e} \right) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Zatím netvrdíme, že platí ${}^{\text{acc}}F = d({}^{\text{acc}}A)$. Nakonec však ověříme, že tomu tak skutečně je. Můžeme psát

$${}^{\text{ret}}F = {}^{\text{acc}}F \Theta(u) \quad (3.3.11)$$

Rovnice pole dává

$$\begin{aligned} \nabla^{\alpha} {}^{\text{ret}}F_{\alpha\beta} &= \left(-\frac{e}{4\pi} \right) \nabla^{\alpha} \left(\frac{u\mathbf{r} - \mathbf{a}^2 - \mathbf{e}^2}{aR^2} d_{\alpha}t \wedge d_{\beta}z + \frac{e\mathbf{z}}{aR^2} d_{\alpha}t \wedge d_{\beta}e + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e\mathbf{t}}{aR^2} d_{\alpha}z \wedge d_{\beta}e \right) + \left(-\frac{e}{4\pi} \right) 2 \left(\frac{2a}{a^2 + e^2} \right)^2 d_{\alpha}u \delta(u) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

První člen dá tok $\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ (\mathbf{A} je řešením (2.2.9) v oblasti $u > 0$), zbývá nám však ještě druhý, nenulový člen. Pole \mathbf{A} tedy nespĺňuje pohybovou rovnici na nadploše $u=0$. Budeme muset přidat nějaký "povrchový" člen lokalizovaný na $u=0$, který vykompenzuje druhý člen v (3.3.12).

Navíc potenciál \mathbf{A} (3.3.8) není v distribučním smyslu dobře definován. Vyskytuje se v něm člen, který se pro malé u chová jako

$$\frac{1}{u} \Theta(u) \quad (3.3.13)$$

což není distribuce (integrál $\int_0^{\infty} \frac{1}{u} du$ diverguje). Tato nesnáze se neprojevila jen díky tomu, že vypadl výraz

$$\frac{1}{u} d(du \Theta(u)) = \frac{1}{u} du \wedge du \delta(u) = 0 \quad (3.3.14)$$

Jakákoli složitější závislost v Θ -funkci by vedla ke komplikacím.

Problémy budeme řešit následující regularizací. Využijeme toho, že pro konečné η je výraz

$$\frac{1}{u} \Theta(u - \frac{a}{\eta}) \quad (3.3.15)$$

dobře definovanou distribucí a s takovými výrazy umíme bez problémů pracovat. Položíme-li η nekonečně velké (větší než "naše schopnosti měření"), bude výraz (3.3.15) v podstatě shodný s (3.3.13), zároveň s ním však umíme neustále pracovat. Je přitom samozřejmé, že měřitelné veličiny musí být invariantní vůči změně nekonečného parametru regularizace η . Vidíme, že např. vypadnutí členu typu (3.3.14) zajistí invarianci intenzity vůči změně parametru η (podrobnosti regularizace viz.

dodatek 3.A).

Vratme se však k hledání povrchového členu, který by měl vykompenzovat druhý člen v (3.3.12). Jeho tvar získáme použitím postupu, který jsme již ilustrovali pro skalární pole. Najdeme pole částice, která se do okamžiku \mathcal{P}_- pohybovala rovnoměrně a v okamžiku \mathcal{P}_- se začala urychlovat. Potom oddálíme \mathcal{P}_- do daleké minulosti (viz. poznámka 4) na str. 38). Tím dostaneme nejen hledaný povrchový člen, ale i zmíněnou regularizaci. Elektromagnetický tok částice se světočárou $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ (viz. obr. 3.4) je

$$J^{\pm}(x) = {}^{\text{ret}}J^{\pm}(x) \Theta(x|\mathcal{P}_-) + {}^{\text{un}}J^{\pm}(x) \Theta(\mathcal{P}_-|x) \quad (3.3.16)$$

V (3.3.3) jsme ověřili, že se tento tok zachovává. Retardované pole je tedy dáno řešením vlnové rovnice (2.2.9) a můžeme ho přímo napsat

$$A_{\pm}(x) = {}^{\text{ret}}A_{\pm}(x) \Theta(x|\mathcal{P}_-) + {}^{\text{un}}A_{\pm}(x) \Theta(\mathcal{P}_-|x) \quad (3.3.17)$$

Coulombické pole částice stojící v bodě $x=y=0$, $z=a$ je

$${}^{\text{un}}A_z = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R} d_z t, \quad {}^{\text{un}}F_{zb} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R^2} d_z t \wedge d_b R \quad (3.3.18)$$

Pole ${}^{\text{un}}A$ dostaneme boostem pole ${}^{\text{un}}A$, tj. formálně záměnou (viz. (3.2.24))

$$\begin{aligned} U \rightarrow {}^{\text{un}}U &= \gamma U, & t \rightarrow {}^{\text{un}}t &= \frac{1}{2}(\gamma U - \frac{1}{\gamma} V), \\ V \rightarrow {}^{\text{un}}V &= \frac{1}{\gamma} V, & z \rightarrow {}^{\text{un}}z &= \frac{1}{2}(\gamma U + \frac{1}{\gamma} V). \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad (3.3.19)$$

Dostáváme

$$A = \left(-\frac{e}{4\pi}\right) \frac{1}{r} \left(\frac{q}{2} du - \frac{1}{2\eta} dv\right) \Theta(r-t) + \left(-\frac{e}{4\pi}\right) \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} du + \frac{R-l}{2v} dv\right) \Theta(t-r) \quad (3.3.20)$$

Nyní položíme η nekonečně velké (tj. uvažujeme limitu $\eta \rightarrow \infty$, podržíme však formální závislost konečných členů na η pro potřeby regularizace). V dodatku 3.D je odvozeno (viz. (3.D.13))

$$\frac{\eta}{r} \Theta(r-t) = \frac{1}{|u|} \Theta\left(-\frac{a}{\eta} - u\right) + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \quad (3.3.21)$$

Vyřešíme-li rovnici $t-r=0$ vzhledem k u dostaneme pro $u|_*$, kde $f|_*$ značí f vyčíslené na nadploše $t-r=0$, (viz. (3.B.23))

$$u|_* = \frac{a^2 + \xi^2}{a\eta} + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \quad (3.3.22)$$

Výraz

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u}\right) \Theta(t-r) \quad (3.3.23)$$

pro $\eta \gg 1$ v okolí $u=0$ má chování (viz. (3.B.6))

$$\frac{1}{u} \Theta(u - u|_*) \quad (3.3.24)$$

Jak jsme již řekli, takovéto výrazy vedou ke komplikacím v důsledku závislosti argumentu Θ -funkce na souřadnicích ξ, x . Provedeme tedy následující regularizaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u}\right) \Theta(t-r) &= \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u}\right) \Theta\left(u - \frac{a}{\eta}\right) - \\ &- \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u}\right) \Theta\left(u - \frac{a}{\eta}\right) \Theta(u|_* - u) \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Ukážeme

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) \Theta(u|_* - u) = \ln \frac{a^2 + \rho^2}{a^2} \delta(u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \quad (3.3.26)$$

Pro libovolnou testovací funkci $\varphi(u)$ máme

$$\begin{aligned} \int du \frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) \Theta(u|_* - u) \varphi(u) &= \\ &= \int_{\frac{a}{\gamma}}^{u_*} du \left(\frac{1}{u} \varphi(0) + O[u^0] \right) = \left[\varphi(0) \ln u + O[u] \right]_{u=\frac{a}{\gamma}}^{u=u_*} = \\ &= \varphi(0) \ln \frac{a^2 + \rho^2}{a^2} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

c. b. d. .

Dále pro $\gamma \gg 1$ platí (viz. (3.D.13), (3.B.2), (3.B.3))

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{1}{\gamma} \Theta(u|_* - u) &= O\left[\frac{1}{\gamma}\right], \\ \frac{R-l}{2uR} \Theta(u - u|_*) &= O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Konečně spojením (3.3.21), (3.3.25), (3.3.26) a (3.3.28) dostaneme

$$\begin{aligned} {}^{\text{ret}}A &= \left(-\frac{\rho}{4\sigma} \right) \left[\frac{1}{|u|} \Theta\left(-\frac{a}{\gamma} - u\right) du + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right) du + \frac{1}{R} \left(\frac{R-l}{2u} \right) du \right) \Theta\left(u - \frac{a}{\gamma}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \ln \frac{a^2 + \rho^2}{a^2} \delta(u) du \right] + O\left[\frac{1}{\gamma}\right]. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

První člen je typu $\int f(u) du$ a je kalibračně triviální - lze ho odstranit kalibrační transformací. Druhý člen je regularizované pole ${}^{\text{ret}}A\Theta(u)$. Tento člen není ale invariantní vůči změně regularizačního parametru γ . Z diskuse v dodatku 3.A víme, že invarianci do řádu $O[\gamma^0]$ lze zajistit přidáním kalibračně tri-

viálního členu (viz. (3.A.26))

$$\left(-\frac{e}{4\pi}\right) (-\ln \gamma \delta(u)) du \quad (3.3.30)$$

Třetí člen v (3.3.29) je hledaný povrchový člen zaručující splnění pohybových rovnic i na ploše $u=0$. Po vynechání kalibračně triviální části a případném potlačení explicitního zápisu regularizace dostáváme retardované elektromagnetické pole urychlené nabitě částice

$$\begin{aligned} {}^{\text{ret}}A &= \left(-\frac{e}{4\pi}\right) \left(\left(\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2v}\right) du + \frac{1}{R} \left(\frac{R-l}{2v}\right) dv \right) \theta\left(u-\frac{a}{\gamma}\right) - \ln \gamma \delta(u) \right) - \\ &- \left(-\frac{e}{4\pi}\right) \ln \frac{a^2 + \rho^2}{a^2} \delta(u) du = \\ &= \left[{}^{\text{acc}}A \theta(u) \right]_{\text{neg}} - \left(-\frac{e}{4\pi}\right) \ln \frac{a^2 + \rho^2}{a^2} \delta(u) du \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Intenzita pole je

$${}^{\text{ret}}F = {}^{\text{acc}}F \theta(u) + \left(-\frac{e}{4\pi}\right) \frac{2\rho}{a^2 + \rho^2} \delta(u) du d\rho \quad (3.3.32)$$

Tento výsledek je možno obdržet i přímo limitou intenzity (viz. [11]). Diskusi retardovaného elektromagnetického pole od jedné urychlené částice lze též nalézt v [8].

Stejně jako pro skalární pole vidíme, že ${}^{\text{acc}}A$ resp. ${}^{\text{acc}}F$ je kombinací retardovaného potenciálu resp. intenzity od jedné urychlené částice a advancovaného potenciálu resp. intenzity symetricky umístěné druhé urychlené částice. (Povrchový člen se díky změně znaménka u u a v ruší.) Navíc platí

$${}^{\text{acc}}F = d {}^{\text{acc}}A \quad (3.3.33)$$

Chování ${}^{\text{acc}}A$ v okolí $u=0$ jako $\frac{1}{u}$ není patologické. Distribuční smysl takovéto funkce je uveden v dodatku 3.A v poznámce ¹⁵⁾ na str. 92.

3.4. Gravitační pole v linearizované teorii

Urychlování částice pomocí struny

Jak jsme ukázali v 2.2 vede linearizovaná teorie gravitace na rovnici pole spinu 2. Budeme se proto nejdříve v krátkosti zabývat tímto polem. Zdroj příslušící urychlené částici je linearizovaný tenzor energie hybnosti; má tvar

$$\begin{aligned} \text{par } T_{ab}(x) &= \int d\lambda \delta(\text{acc } P(\lambda) | x) \text{acc } U_a \text{acc } U_b m = \\ &= \delta(\tilde{z}-a) \delta(x) \delta(y) \text{acc } U_a \text{acc } U_b m \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Greenova funkce vlnové rovnice je opět tvaru (3.3.4), pouze operátor $U(x|x')$ bude působit na oba tenzorové indexy. Stejným výpočtem jako pro skalární a vektorové pole dostaneme kandidáta na retardované pole spinu 2 od zdroje (3.4.1) ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{par } \tilde{\gamma}_{ab} &= \frac{2\alpha em}{4\pi} \left[\frac{1}{R} \frac{\ell^2}{a^2} d_a \tau d_b \tau + \frac{R}{z^2} d_a \tilde{z} d_b \tilde{z} + \frac{\ell}{z} d_a \tau \nu d_b \tilde{z} \right] \Theta(u) = \\ &= \frac{2\alpha em}{4\pi} \frac{1}{z^2 - t^2} \frac{1}{R} \left[(\ell z - R t)^2 d_a t d_b t + \right. \\ &\quad \left. + (\ell z - R t)(R z - \ell t) d_a t \nu d_b z + (R z - \ell t)^2 d_a z d_b z \right] \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Obdobně vektorovému poli není tento výraz dobře definovaný v okolí nadplochy $u=0$, divergence je dokonce ještě vyššího řádu - má tvar

$$\frac{1}{u^2} \Theta(u) \quad (3.4.3)$$

Nás však více než pole spinu 2 zajímá linearizovaná teorie gravitace. Díky kalibrační invarianci této teorie máme

zdroje (3.4.7), ale i přímo z Newtonova zákona pro sílu

$$m\alpha = G \quad (3.4.8)$$

kde $\alpha = 1/a$ je zrychlení částice a G síla působení struny na částici. Tedy máme podmínku

$$m = G a \quad (3.4.9)$$

Vypočtíme nyní pole způsobené tímto rozložením hmoty. Díky linearitě pohybové rovnice nám stačí již pouze najít retardované řešení vlnové rovnice se zdrojem $\text{str}^T \Theta(\vec{z}-a)\Theta(u)$ a poté ho sečíst s polem $\text{str}^T \vec{g}$, čímž dostaneme pole celého zdroje (3.4.7)²⁾.

$$\begin{aligned} \text{str}^T \vec{g} &= \frac{2\pi\epsilon_0}{4\pi} \int du' dv' dx' dy' \Theta(u'v'-a^2) \delta(x') \delta(y') \Theta(u') \cdot \\ &\quad \cdot \Theta(v'-v) \delta((u-u')(v-v') + z^2) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0}{4\pi} \int du' dv' \Theta(u'v'-a^2) \Theta(u') \frac{1}{v'-v} \delta(u-u' + \frac{z^2}{v'-v}) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0}{4\pi} \int dv' \frac{1}{v'} \Theta((u + \frac{z^2}{v'-v})v'-a^2) \Theta(v'-v) \frac{v'}{v'-v} \Theta(u) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0}{4\pi} \left[\ln \frac{v'-v}{v'} \right]_{v'=v_2}^{v'=\infty} \Theta(u) (dt^2 - dz^2) = \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{v_2}{2a} - \frac{uv}{a^2} \right) - \ln \frac{v_2}{2a} - \ln \frac{u}{a} + \ln \frac{v'-v}{v'} \Big|_{v'=\infty} \right) \Theta(u) (dt^2 - dz^2) \quad (3.4.10) \end{aligned}$$

Vidíme, že pole struny diverguje. Je to způsobeno nekonečnou délkou struny a faktem, že neznáme žádné informace o chování

²⁾ Poslední úprava bude podrobně provedena až ve výrazu (3.4.27).

podmínku (2.2.19) reprezentující zachování zdroje. Lehce ale ověříme, že

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha}^{\text{par}} T^{\alpha\beta} &= m \nabla_{\alpha} (u^{\alpha} u^{\beta} \delta(\tilde{z}-a) \delta(x) \delta(y) \Theta(u)) = \\ &= m \gamma \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau} \nabla_{\alpha} \left(\frac{\partial^{\beta}}{\partial \tau} \right) \delta(\tilde{z}-a) \delta(x) \delta(y) \Theta(u) = \\ &= -m \frac{1}{a} \frac{\partial^{\beta}}{\partial \tilde{z}} \delta(\tilde{z}-a) \delta(x) \delta(y) \Theta(u) \quad . \quad (3.4.5)\end{aligned}$$

Zdroj ${}^{\text{par}}T_{\alpha\beta}$ se tedy nezachovává. Tento fakt je pochopitelný - částice se nemůže pohybovat urychleně sama o sobě bez vnějšího zásahu. Vidíme, že v linearizované teorii gravitace bude analogie k předchozím dvěma polím složitější. Budeme muset uvážit příčinu urychleného pohybu částice. To se projeví složitější strukturou zdroje. Nejjednodušší způsob urychlování částice je připevnit ji na strunu - jakousi pružinu s napětím nezávislým na délce prodloužení. Tenzor energie-hybnosti nekonečné struny lokalizované v prostoru podél osy z je

$${}^{\text{str}}T = \sigma (dt dt - dz dz) \delta(x) \delta(y) , \quad (3.4.6)$$

kde σ je klidová hustota hmoty pružiny a zároveň napětí ve směru osy z ⁶⁾. Vezměme polonekonečnou strunu a na její konec upevníme částici. Jelikož napětí ve struně je konstantní, bude se částice rovnoměrně urychlovat. Tenzor energie-hybnosti tohoto systému bude mít tvar

$$T = {}^{\text{par}}T + {}^{\text{str}}T \Theta(\tilde{z}-a) \Theta(u) \quad (3.4.7)$$

Vztah mezi m a σ dostaneme ze zákona zachování celkového

⁶⁾ Přehled problematiky týkající se kosmických strun je podán např. v [27], [28].

struny v nekonečnu.

Vedle tohoto problému musíme řešit i problém špatného chování pole ${}^{(1)}\gamma$ kolem $u=0$. V případě elektromagnetizmu jsme ho řešili tím, že jsme částici začali urychlovat až v jistém okamžiku \mathcal{P}_- . To by však znamenalo, že až v tomto okamžiku připevníme k částici volný konec struny. Ale co bude se strunou do této doby? Struna s volným koncem není zdroj, jenž splňuje zákon zachování tenzoru energie-hybnosti - nemůže sama o sobě existovat.

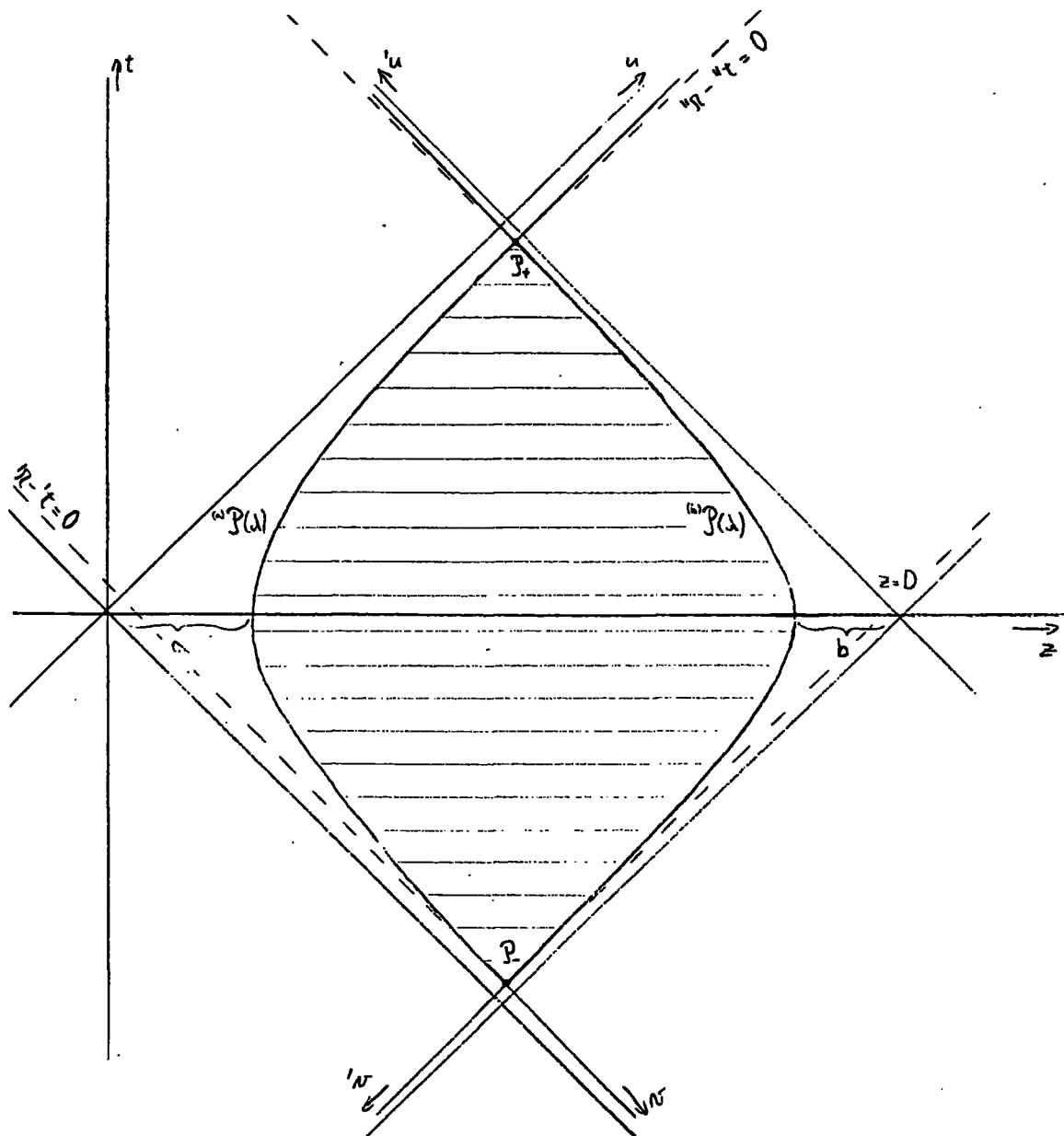
System dvou urychlených částic spojených strunou

Naštěstí můžeme oba problémy vyřešit zároveň. Řešením je systém znázorněný na obrázku 3.5. Jedná se o dvě částice o hmotnostech ${}^{(1)}m$ a ${}^{(2)}m$, které se pohybují proti sobě podél osy z , v okamžik \mathcal{P}_- se setkají a propojí se strunou (v tento okamžik zatím nulové délky). Po prolétnutí kolem sebe se začnou brzdít vlivem struny, která se mezi nimi napíná, až se začnou přibližovat a v okamžik \mathcal{P}_+ se opět potkají. Struna se odpojí a obě částice se pohybují dále rovnoměrně přímočaře.

Vztahy mezi zrychleními ${}^{(1)}\alpha$, ${}^{(2)}\alpha$ a hmotnostmi obou částic a napětím struny G jsou

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\alpha &= \frac{1}{a}, & {}^{(1)}m &= G a, \\ {}^{(2)}\alpha &= \frac{1}{b} \equiv \frac{1}{b}, & {}^{(2)}m &= G b. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Definujeme



obr. 3.5

Na obrázku je systém dvou částic o hmotnostech ${}^{(1)}m$ a ${}^{(2)}m$, které se pohybují proti sobě, podél osy z , v okamžik P_- se setkají a propojí se strunou (v tento okamžik zatím nulové délky). Po prolétnutí kolem sebe se začnou brzdít vlivem struny, která se mezi nimi napíná, až se začnou přibližovat a v okamžik P_+ se opět potkají. Struna se odpojí a obě částice se pohybují dále rovnoměrně přímočaře.

$$\begin{aligned}
 {}^{(a)}u &= D - \mathcal{N} \quad , \quad {}^{(a)}u = u \quad , \\
 {}^{(b)}\mathcal{N} &= D - u \quad , \quad {}^{(b)}\mathcal{N} = \mathcal{N} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.4.12}$$

kde D je vzdálenost středů obou hyperbol urychlených pohybů, tj. $u, \mathcal{N} = 0$ jsou asymptoty pro hyperbolu urychleného pohybu částice (a) a ${}^{(b)}u, {}^{(b)}\mathcal{N} = 0$ částice (b) (obr. 3.5). Dále pro každou funkci f , kterou lze vyjádřit jako funkce u, \mathcal{N}, x, y ,

$$f(x) = f(u(x), \mathcal{N}(x), x(x), y(x)) \tag{3.4.13}$$

zavedeme

$$\begin{aligned}
 {}^{(a)}f(x) &= f(x) \quad , \\
 {}^{(b)}f(x) &= f({}^{(b)}u(x), {}^{(b)}\mathcal{N}(x), x(x), y(x)) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.4.14}$$

přičemž, pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme index (a) vynechávat.

Tenzor energie-hybnosti popsaného systému můžeme zapsat

$$\begin{aligned}
 T &= {}^{(a)}T \theta(x|P_-) \theta(P_+|x) + {}^{(b)}T \theta(x|P_-) \theta(P_+|x) + \\
 &+ {}^{(a)}T \theta({}^{(a)}\tilde{z} - a) \theta({}^{(b)}\tilde{z} - b) + \\
 &+ ({}^{(a)}T + {}^{(b)}T) \theta(P_-|x) + \\
 &+ ({}^{(a)}T + {}^{(b)}T) \theta(x|P_+)
 \end{aligned}
 \tag{3.4.15}$$

Zde ${}^{(a)}T$ resp. ${}^{(b)}T$ dostaneme boostem zdroje odpovídajícího částici stojící v bodě $x = y = 0$, $z = a$.

$${}^m T = m dt dt \delta(z-a) \delta(x) \delta(y) \quad (3.4.16)$$

Boost provedeme záměnou

$$\begin{aligned} {}^{(j)}U &\rightarrow {}^{(j)}U = {}^{(j)}\eta {}^{(j)}U, & {}^{(j)}N &\rightarrow {}^{(j)}N = \frac{1}{{}^{(j)}\eta} {}^{(j)}N, \\ \text{resp. } {}^{(j)}U &\rightarrow {}^{(j)}U = \frac{1}{{}^{(j)}\eta} {}^{(j)}U, & {}^{(j)}N &\rightarrow {}^{(j)}N = {}^{(j)}\eta {}^{(j)}N \end{aligned} \quad j=a,b \quad (3.4.17)$$

(porovnej s (3.2.24)). Přímou z popisu systému víme, že se tento systém vyvíjí bez vnějšího zásahu a jeho tenzor energie-hybnosti se musí zachovávat. To lze i ověřit přímým výpočtem.

Souřadnice událostí P_-, P_+ jsou

$$\begin{aligned} {}^{(j)}U_- &= \frac{{}^{(j)}a}{{}^{(j)}\eta}, & {}^{(j)}N_- &= {}^{(j)}\eta {}^{(j)}a, \\ {}^{(j)}U_+ &= {}^{(j)}\eta {}^{(j)}a, & {}^{(j)}N_+ &= \frac{1}{{}^{(j)}\eta} {}^{(j)}a. \end{aligned} \quad j=a,b \quad (3.4.18)$$

Ze vztahů (3.4.12) a (3.4.18) dostaneme

$$\begin{aligned} D &= a\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)^2 a^2 - a^2 + b^2} = \\ &= b\left({}^{(a)}\eta + \frac{1}{{}^{(a)}\eta}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left({}^{(a)}\eta + \frac{1}{{}^{(a)}\eta}\right)^2 b^2 - b^2 + a^2}, \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

$$\begin{aligned} {}^{(a)}\eta &= \frac{D}{b} \eta - \frac{a}{b\eta}, \\ \eta &= \frac{D}{a} {}^{(a)}\eta - \frac{b}{a {}^{(a)}\eta}. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Z těchto vztahů vidíme, že při $\eta \rightarrow \infty$ se událost P_- oddaluje do dávné minulosti, P_+ do daleké budoucnosti a vzdálenost D se zvětšuje. Rovnoměrný pohyb částice (a) se tedy odehrává v da-

leké minulosti či budoucnosti a částice (b) se oddálila do velkých vzdáleností stejně jako jeden konec struny. V konečné vzdálenosti tedy zůstává pouze urychlovaná částice (a) a polonekonečná struna, což je přesně zdroj, který nás zajímá. Pokud při limitě $\eta \rightarrow \infty$ ponecháme závislost na nekonečném η , získáme přímo již v $\eta \rightarrow \infty$ linearizované řešení s ošetřenými divergencemi.

Spočtíme nejdříve linearizovanou metriku odpovídající zdroji (3.4.15). Schwarzschildovské pole v linearizované teorii gravitaci je

$${}^{(1)}g_{\alpha\beta} = \frac{2\kappa m}{4\pi} \frac{1}{r} dt dt \quad (3.4.21)$$

Řešení vlnové rovnice se zdrojem

$${}^{(1)}T_{\alpha\beta} \Theta(\tilde{z}-a) \Theta({}^{(1)}\tilde{z}-b) \quad (3.4.22)$$

shodným výpočtem jako v (3.4.10) dostaneme ve tvaru

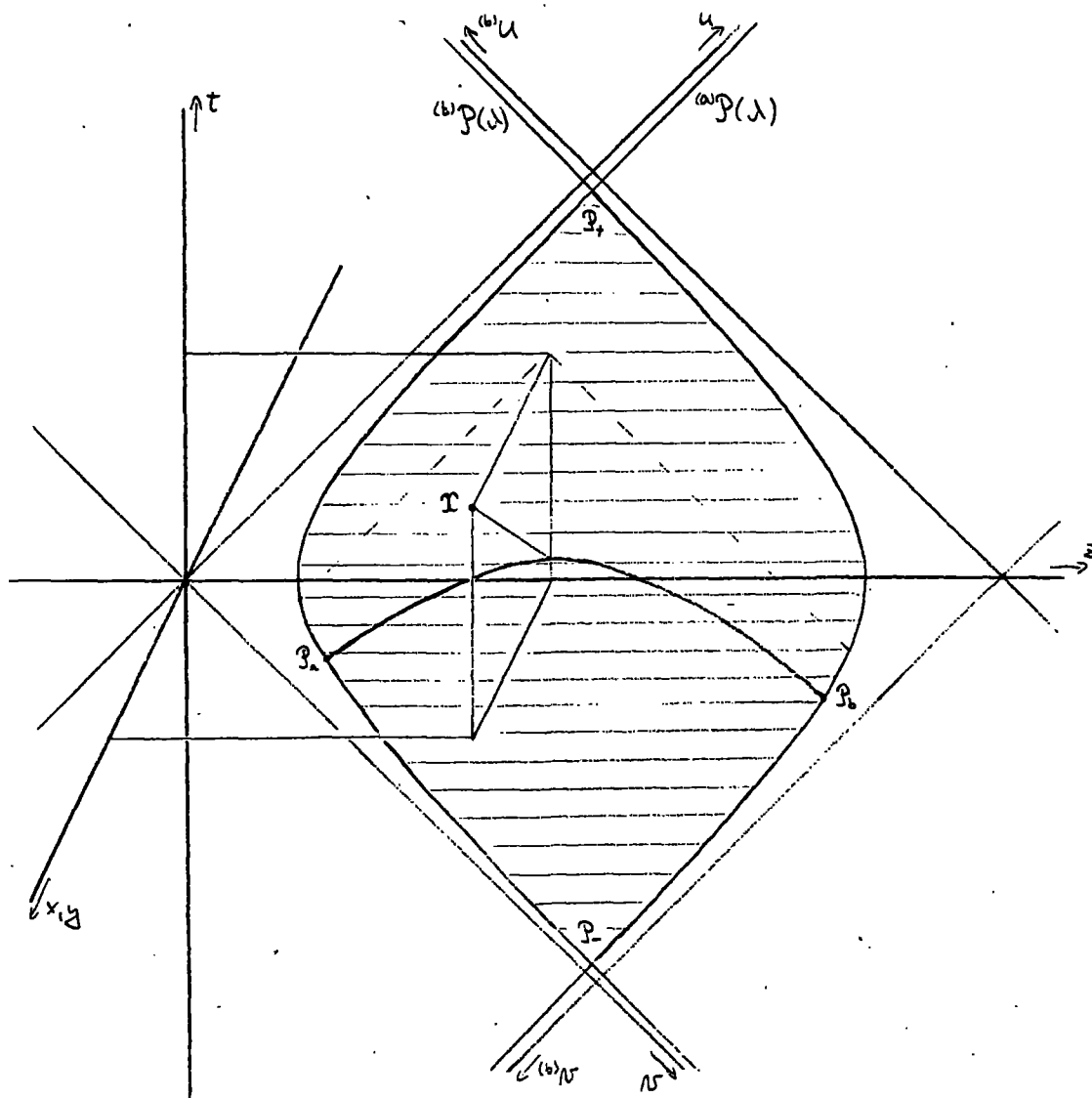
$${}^{(1)}g_{\alpha\beta} = \frac{2\kappa G}{4\pi} \left[\ln \frac{N'-N}{\rho} \right]_{N=N_a}^{N=N_b} (dt dt - dz dz) \quad (3.4.23)$$

Zde N_a resp. N_b je řešením rovnic

$$\begin{aligned} \left(u + \frac{\rho^2}{N-N_a} \right) N_a - a^2 &= 0, \\ \left(D - u + \frac{\rho^2}{(D-N)-(D-N_b)} \right) (D-N_b) - b^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Geometrická interpretace těchto vztahů je uvedena v obrázku 3.6. Vyřešením dostaneme

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{X + \xi}{2u}, \\ N_b &= D - \frac{{}^{(1)}X - {}^{(1)}\xi}{2{}^{(1)}N}. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$



obr. 3.6

Gravitační pole v bodě x retardovaně ovlivňují události ležící na světelném kuželu minulosti. Vliv struny na pole v x je tedy dán integrálem příspěvků událostí ležících na hyperbole vyznačené na obrázku. Tento integrál vede na příspěvky od krajních bodů P_+ , P_- . Jejich souřadnice jsou

$$u_a = \frac{x - \xi}{2v}, \quad (6)u_b = \frac{(6)x - (6)\xi}{2(6)v},$$

$$N_a = \frac{x + \xi}{2u}, \quad (6)N_b = \frac{(6)x - (6)\xi}{2(6)u}.$$

Platí

$$\frac{1}{\rho}(u_a - u) \frac{1}{\rho}(N_a - N) = -1, \quad \frac{1}{\rho}((6)u_b - (6)u) \frac{1}{\rho}((6)N_b - (6)N) = -1.$$

Zde u, N, ρ jsou souřadnice bodu x .

Platí identita

$$\frac{1}{\xi} (N_b - N) \frac{1}{\xi} ({}^{(b)}N_b - {}^{(b)}N) = 1 \quad (3.4.26)$$

Využitím (3.4.25) a (3.4.26) dostaneme

$$\begin{aligned} \text{str } \vec{\vec{f}} &= \frac{2\kappa G}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{\xi} (N_a - N) + \ln \frac{1}{\xi} ({}^{(b)}N_b - {}^{(b)}N) \right) (dt^2 - dz^2) \Theta(t - r) \Theta(r - t) = \\ &= \frac{2\kappa G}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{R+l}{a} - \frac{uv}{a^2} \right) - \ln \frac{\xi}{a} - \ln \frac{u}{a} + \ln \left(\frac{{}^{(b)}R + {}^{(b)}l}{b} - \frac{{}^{(b)}u {}^{(b)}v}{b^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \ln \frac{\xi}{b} - \ln \frac{{}^{(b)}u}{b} \right) (dt^2 - dz^2) \Theta(t - r) \Theta(r - t) \quad (3.4.27) \end{aligned}$$

Vidíme, že pole struny se nám separovalo na dva výrazy shodného tvaru příslušející k jednotlivým částicím. Člen příslušející jedné částici můžeme identifikovat i ve výrazu (3.4.10). Označme $\overset{\text{acc}}{\vec{\vec{f}}}$ součet $\overset{\text{par}}{\vec{\vec{f}}}$ a členu z $\overset{\text{str}}{\vec{\vec{f}}}$ příslušející částici (a) analyticky rozšířený do celého prostoročasu; tj. pro částici (a)

$$\begin{aligned} \overset{\text{acc}}{\vec{\vec{f}}} &= L a \left(\frac{1}{R} \frac{l^2}{a^2} d\tau d\tau + \frac{R}{z} d\tilde{z} d\tilde{z} + \frac{l}{z} d\tau v d\tilde{z} \right) + \\ &+ L \left(\ln \left(\frac{R+l}{a} - \frac{uv}{a^2} \right) - \ln \frac{\xi}{a} - \ln \frac{u}{a} \right) (dt^2 - dz^2) \quad (3.4.28) \end{aligned}$$

Zde jsme zavedli zkrácené označení

$$L = \frac{2\kappa G}{4\pi} = \frac{2\kappa m}{4\pi} \frac{1}{a} \quad (3.4.29)$$

Použitím (2.2.16) a označení

$${}^{(a)}g_{\alpha\beta} = d_\alpha x d_\beta x + d_\alpha y d_\beta y \quad (3.4.30)$$

dostaneme

$${}^{200}h = L \left[\frac{a}{R} \left(\frac{R+l}{2a^2} \right) d\tau^2 + \frac{a}{R} \left(\frac{R+l}{2\hat{z}^2} \right) d\hat{z}^2 + \frac{aR}{\hat{z}^2} d\tau v d\hat{z} + \right. \\ \left. + \left(\frac{a}{2R} - \ln \left(\frac{R+l}{a} - \frac{uV}{a^2} \right) + \ln \frac{\rho}{a} + \ln \frac{u}{a} \right) {}^{(0)}g \right] = \quad (3.4.31)$$

$$= L \left[\frac{a}{R} \left(\frac{R+l}{2u} \right)^2 du^2 + \frac{a}{R} \left(\frac{R+l}{2v} \right)^2 dv^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{a}{2R} - \ln \left(\frac{R+l}{a} - \frac{uV}{a^2} \right) + \ln \frac{\rho}{a} + \ln \frac{u}{a} \right) {}^{(0)}g \right] ,$$

$${}^{un}h = L \frac{1}{2} \frac{a}{R} \left(\frac{1}{2} du^2 + \frac{1}{2} dv^2 + {}^{(0)}g \right) . \quad (3.4.32)$$

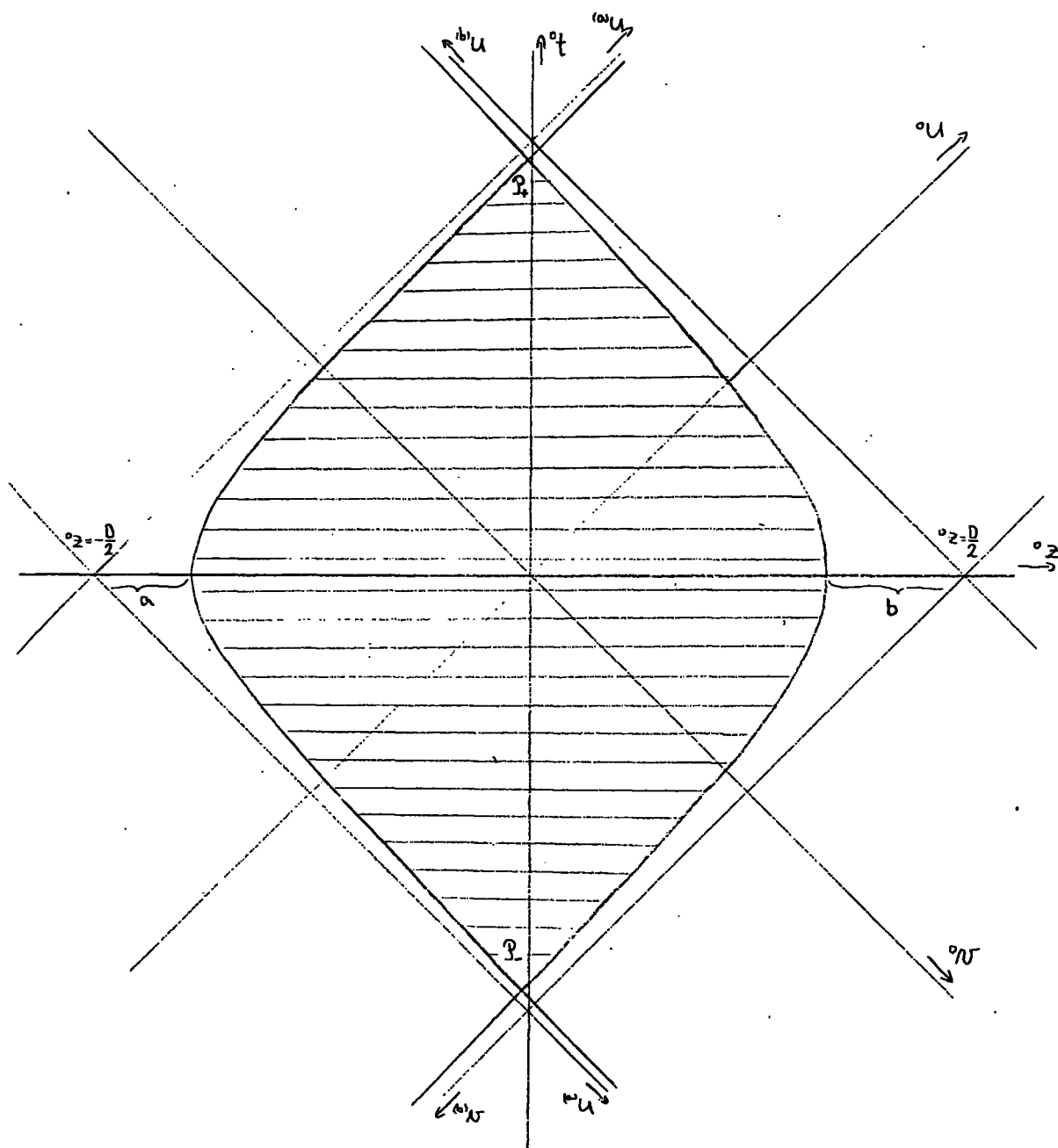
Obdobně pro částici (b). Pro linearizovanou metriku příslušející zdroji (3.4.15) máme

$$h = {}^{00c}h \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + {}^{00f}h \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\ + {}^{100}h \Theta(P_-|x) + {}^{100}h \Theta(P_-|x) + \quad (3.4.33) \\ + {}^{100}h \Theta(x|P_+) + {}^{100}h \Theta(x|P_+) .$$

Pole nekonečné struny

Nyní uděláme malou odbočku. Ověříme, zda námi používaným postupem lze najít metriku nekonečné přímé struny. Tomu v našem modelu odpovídá oddálení obou částic (a) i (b) do nekonečna. Zavedeme-li (obr. 3.7)

$${}^{(0)}u = {}^{(a)}u - \frac{D}{2} , \quad \text{resp.} \quad {}^{(0)}u = \frac{D}{2} - {}^{(a)}u , \\ {}^{(0)}v = {}^{(a)}v - \frac{D}{2} , \quad {}^{(0)}v = \frac{D}{2} - {}^{(a)}v . \quad (3.4.34)$$



obr. 3.7

Nekonečnou strunu získáme oddálením obou konců struny do nekonečna. Proto je výhodné užit souřadnice ${}^{\circ}u, {}^{\circ}v$ nevázané s koncem struny.

tak nekonečnou strunu dostaneme v oblasti konečného ${}^{(1)}U, {}^{(1)}V$ při nekonečně velkém D . Potom ${}^{(2)}\tilde{z}^z$ i ${}^{(1)}\tilde{z}^z$ jsou velké a můžeme psát

$$l = \frac{\tilde{z}^z}{2a} \left(1 - \frac{a^2 + \rho^2}{\tilde{z}^z} \right), \quad (3.4.35)$$

$$R = \frac{\tilde{z}^z}{2a} \left(1 + \frac{\rho^2 a^2}{\tilde{z}^z} + O\left[\frac{1}{\tilde{z}^z}\right] \right),$$

$$\begin{aligned} h &= L \left[2 \frac{\tilde{z}^z}{u^z} du^z + O\left[\frac{1}{\tilde{z}^z}\right] dv^z + \right. \\ &\quad + \left(O\left[\frac{1}{\tilde{z}^z}\right] - \ln\left(\frac{\rho^2}{a^2} + O\left[\frac{1}{\tilde{z}^z}\right]\right) + \ln \frac{\rho}{a} + \ln \frac{u}{a} + \right. \\ &\quad \left. \left. + O\left[\frac{1}{\tilde{z}^z}\right] - \ln\left(\frac{\rho^2}{b^2} + O\left[\frac{1}{\tilde{z}^z}\right]\right) + \ln \frac{\rho}{b} + \ln \frac{u}{b} \right) {}^{(2)}g \right] = \\ &= L \left[2 du^z + \ln \frac{D^z}{4ab} {}^{(2)}g \right. \\ &\quad \left. - \ln \frac{\rho^z}{ab} {}^{(2)}g + O\left[\frac{1}{D}\right] \right] \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

První dva členy jsou kalibračně triviální, lze je odtransformovat pomocí transformace (2.2.21). Dostáváme tedy linearizovanou opravu k metrice od nekonečné přímé struny

$$h = -\frac{2\kappa G}{4\pi} \ln \frac{\rho^z}{ab} {}^{(2)}g \quad (3.4.37)$$

Plná metrika přímé struny je

$$\begin{aligned} g &= \eta + \varepsilon h + O[\varepsilon^2] = \\ &= -dt^2 + dz^2 + {}^{(2)}g \left(1 - \frac{2\kappa G}{4\pi} \varepsilon \ln \frac{\rho^z}{ab} + O[\varepsilon^2] \right) = \\ &= -dt^2 + dz^2 + (d\rho^z + \rho^z d\varphi^z) \left(\frac{\rho^z}{ab} \right)^{-\frac{2\kappa G}{4\pi} \varepsilon} + O[\varepsilon^2] \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

Záměnou souřadnic

$$\xi \rightarrow \tilde{\xi} = \frac{1}{1 - \frac{2\pi G}{4\pi} \varepsilon} \xi \quad (ab) \quad \frac{1}{2} \frac{2\pi G}{4\pi} \varepsilon \quad (3.4.39)$$

dostaneme

$$g = -dt^2 + dz^2 + d\tilde{\rho}^2 + \left(1 - \frac{2\pi G}{4\pi} \varepsilon\right)^2 \tilde{\rho}^2 d\varphi^2 + O[\varepsilon^2] \quad (3.4.40)$$

což je známý tvar metriky nekonečné přímé struny (viz. např. [27]). Z tohoto výrazu obdržíme vztah mezi úbytkem úhlu a napětím struny

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 - \left(1 - \frac{2\pi G}{4\pi} \varepsilon\right)\right) = 2G\varepsilon \quad (3.4.41)$$

což je opět známý výsledek (viz. [14]).

Riemannův tenzor urychlené částice se strunou

Vratme se k naší původní úloze nalezení linearizovaného gravitačního pole jedné urychlené částice s polonekonečnou strunou. Jak jsme již řekli, příslušnou metriku dostaneme v oblasti konečného U, \mathcal{N} pro nekonečné \mathcal{M} . Ukazuje se ale, že linearizovaná metrika je v oblasti $U=0$ velmi divergentní. Bude snažší nejdříve najít linearizovaný Riemannův tenzor křivosti a k nalezení metriky se vrátíme dodatečně.

Označme

$$\begin{aligned} Q_{abc} &= \partial_{[a} h_{b]c} = \\ &= \left(\partial_{[a}^{\quad acc} h_{b]c} + \partial_{[a}^{\quad acc} h_{b]c} \right) \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\ &+ \left(\partial_{[a}^{\quad uun} h_{b]c} + \partial_{[a}^{\quad uun} h_{b]c} \right) \Theta(P_-|x) + \left(\partial_{[a}^{\quad uun} h_{b]c} + \partial_{[a}^{\quad uun} h_{b]c} \right) \Theta(x|P_+) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d_{[c} ({}^{t-}h_{b]c} + {}^{cc}h_{b]c} - {}^{un}h_{b]c} - {}^{un}h_{b]c}) \Big|_{t-x=0} \delta({}^t-{}^x) + \\
& + d_{[c} ({}^{t-}h_{b]c} + {}^{cc}h_{b]c} - {}^{un}h_{b]c} - {}^{un}h_{b]c}) \Big|_{t-x=0} \delta({}^t-{}^x) = \\
& = ({}^{cc}Q_{abc} + {}^{cc}Q_{abc}) \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\
& + ({}^{un}Q_{abc} + {}^{un}Q_{abc}) \Theta(P_-|x) + \\
& + ({}^{un}Q_{abc} + {}^{un}Q_{abc}) \Theta(x|P_+) ,
\end{aligned} \tag{3.4.42}$$

kde

$$\begin{aligned}
{}^{cc}Q_{abc} & = \partial_{[c} {}^{cc}h_{b]c} , \\
{}^{un}Q_{abc} & = \partial_{[c} {}^{un}h_{b]c} .
\end{aligned} \tag{3.4.43}$$

${}^{cc}Q$ je počítáno pouze v oblasti $ut > 0$. Zde jsme využili skutečnosti, že povrch kužele budoucnosti události P_- resp. P_+ je dán rovnicemi ${}^t-{}^x = 0$ resp. ${}^t-{}^x$ a spojitosti h na těchto nadplochách (viz. závěr dodatku 3.B). Celkový linearizovaný Riemannův tenzor křivosti metriky h je

$$\begin{aligned}
R_{abcd} & = 2 \partial_{[a} Q_{|ab|c]} = \\
& = (2 \partial_{[a} {}^{cc}Q_{|ab|c]} + 2 \partial_{[a} {}^{cc}Q_{|ab|c]}) \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\
& + (2 \partial_{[a} {}^{un}Q_{|ab|c]} + 2 \partial_{[a} {}^{un}Q_{|ab|c]}) \Theta(P_-|x) + (2 \partial_{[a} {}^{un}Q_{|ab|c]} + 2 \partial_{[a} {}^{un}Q_{|ab|c]}) \Theta(x|P_+) \\
& + ({}^{cc}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c} + {}^{cc}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c}) \Big|_{t-x=0} d_{[a} ({}^t-{}^x) \delta({}^t-{}^x) + \\
& + ({}^{cc}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c} + {}^{cc}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c}) \Big|_{t-x=0} d_{[a} ({}^t-{}^x) \delta({}^t-{}^x) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left({}^{acc} R_{abcd} + {}^{acc} R_{abcd} \right) \Theta(x|P_-) \Theta(P_+|x) + \\
&+ \left({}^{un} R_{abcd} + {}^{un} R_{abcd} \right) \Theta(P_-|x) + \\
&+ \left({}^{un} R_{abcd} + {}^{un} R_{abcd} \right) \Theta(x|P_+) + \\
&+ {}^{brd} R_{abcd} + {}^{brd} R_{abcd} .
\end{aligned} \tag{3.4.44}$$

Zde

$${}^{acc} R_{abcd} = 2 \partial_{[d} {}^{acc} Q_{ab]c]} , \tag{3.4.45}$$

$${}^{un} R_{abcd} = 2 \partial_{[d} {}^{un} Q_{ic]b]c]} ,$$

${}^{acc} R$ opět počítáno mimo oblasti $u|v=0$.

$${}^{brd} R_{abcd} = \left({}^{acc} Q_{ab]c]e} - {}^{un} Q_{ab]c]e} + {}^{acc} Q_{ab]c]e} - {}^{un} Q_{ab]c]e} \right) \Big|_{t=t_0} d_{[d]}(t-t_0) \delta(t-t_0) \tag{3.4.46}$$

a obdobně ${}^{brd} R$. V dodatku 3.C je spočteno ${}^{acc} R$ ^{a)} a ${}^{un} R$ (viz. (3.C.7) a (3.C.12)).

$$\begin{aligned}
{}^{acc} R_{u\varphi u\varphi} &= -L \frac{3g^2 \omega^2}{16aR^5} , & {}^{acc} R_{uvuv} &= -L \frac{3g\omega}{32aR^5} (-\tilde{a}^2 - \varphi^2 + u\omega) , \\
{}^{acc} R_{u\varphi v\varphi} &= -L \frac{3g^2 u}{16aR^5} , & {}^{acc} R_{uvv\varphi} &= L \frac{3g u}{32aR^5} (-\tilde{c}^2 - \varphi^2 + u\omega) , \\
{}^{acc} R_{uvuv} &= L \frac{3g^4 \omega^2}{16aR^5} , & {}^{acc} R_{uv\varphi\varphi} &= -L \frac{3g^3 \omega}{16aR^5} (-\tilde{a}^2 - \varphi^2 + u\omega) ,
\end{aligned} \tag{3.4.47}$$

^{a)} Přesně řečeno je výpočet proveden pouze mimo oblast světové čáry částice a svět plochy struny. Z konstrukce ${}^{acc} h$ ale víme, že v této oblasti jsou pohybové rovnice určité splněny a tak budeme nadále členy lokalizované v těchto oblastech ignorovat, přestože by měly být v ${}^{acc} R$ obsaženy.

$$\begin{aligned} {}^{arc}R_{\nu\mu\alpha\beta} &= \frac{3\varrho^4 u^2}{16aR^5} \quad , \quad {}^{arc}R_{\nu\mu\varrho\varrho} = -L \frac{3\varrho^2 u}{16aR^5} (-a^2 - \varrho^2 + u\nu) \quad , \\ {}^{arc}R_{\nu\nu\alpha\nu} &= L \left(\frac{3\varrho^2 u\nu}{16aR^5} - \frac{a}{8R^3} \right) \quad , \quad {}^{arc}R_{\nu\varrho\mu\varrho} = L \left(\frac{3\varrho^2 u\nu}{16aR^5} - \frac{a}{8R^3} \right) \quad , \\ {}^{arc}R_{\varrho\varrho\mu\mu} &= L \left(-\frac{3\varrho^2 u\nu}{4aR^5} + \frac{a\varrho^2}{2R^3} \right) \quad , \quad {}^{arc}R_{\nu\mu\varrho\varrho} = L \left(\frac{3\varrho^4 u\nu}{16aR^5} - \frac{a\varrho^2}{8R^3} \right) \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{un}R_{\nu\mu\alpha\beta} &= {}^{un}R_{\nu\mu\varrho\varrho} = -L \frac{3\varrho^2 a}{R^5} \quad , \\ {}^{un}R_{\nu\varrho\mu\varrho} &= {}^{un}R_{\nu\nu\alpha\nu} = L \left(-\frac{3(z-a)^2 a}{R^5} + \frac{a}{R^3} \right) \quad , \\ {}^{un}R_{\nu\nu\mu\mu} &= -{}^{un}R_{\nu\nu\varrho\varrho} = -L \frac{3(z-a)a\varrho}{R^5} \quad , \\ {}^{un}R_{\nu\mu\mu\mu} &= {}^{un}R_{\nu\mu\varrho\varrho} = L \frac{3\varrho^4 a}{R^5} \quad , \\ {}^{un}R_{\nu\mu\varrho\varrho} &= {}^{un}R_{\nu\mu\varrho\varrho} = -L \frac{6\varrho^3(z-a)a}{R^5} \quad , \\ {}^{un}R_{\varrho\varrho\mu\mu} &= L \left(-\frac{12\varrho^4 a}{R^5} + \frac{3\varrho^2 a}{R^3} \right) \quad , \quad {}^{un}R_{\nu\mu\mu\mu} = L \left(-\frac{3\varrho^3(z-a)a}{R^5} + \frac{a\varrho^2}{R^3} \right) \quad . \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

I limitě $\eta \rightarrow \infty$ se ${}^{sur}R$ a ${}^{un}R \Theta(r|z_+)$ oddálí do daleké budoucnosti a nebude hrát roli. ${}^{brd}R$, ${}^{un}R$ je pro nekonečné η spočítáno v dodatku 3.D a limitu polí ${}^{brd}R \Theta(r|x)$ a ${}^{arc}R$ dostaneme pomocí vztahů z dodatku 3.B

$$\begin{aligned} {}^{brd}R &= (d\nu d\varrho d\eta d\varrho - \varrho^2 d\nu d\eta d\varrho d\varrho) \cdot \\ &\cdot L a \left(\eta \frac{\varrho^2(3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) + \frac{\varrho^2 \nu}{2a(a^2 + \varrho^2)^2} (3a^4 - 4a^2\varrho^2 - \varrho^4) \delta(u) - \frac{\varrho^2(3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^2} \delta'(u) \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} d\nu d\nu d\nu d\varrho + \approx + \varrho^2 d\nu d\eta d\varrho d\varrho + \approx \right) \cdot \\ &\cdot L a \frac{\varrho^2(3a^2 + \varrho^2)}{a(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \quad , \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

$${}^{un}R\Theta(\mathcal{P}|x) = (d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi} - \varrho^2 d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}) \cdot$$

$$\cdot \text{La} \left(-\varrho \frac{\varrho^2(3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) - \frac{6\varrho a^3 \varrho^2}{(a^2 + \varrho^2)^4} \delta(u) + \frac{a\varrho^2}{(a^2 + \varrho^2)^2} \delta'(u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) +$$
(3.4.50)

$$+ \left(\frac{1}{2} d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{v}d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi} + \sim + \varrho^2 d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{\varphi} + \sim \right) \cdot$$

$$\cdot \text{La} \left(\frac{2\varrho a^3}{(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right],$$

$${}^{un}R\Theta(\mathcal{P}|x) = O\left[\frac{1}{\gamma}\right], \quad (3.4.51)$$

$${}^{acc}R\Theta(\mathcal{P}|x)\Theta(x|\mathcal{P}) = O\left[\frac{1}{\gamma}\right]. \quad (3.4.52)$$

Uvážíme-li ještě, že pro $\gamma \rightarrow \infty$ se $'R - 'r = 0$ redukuje na $u=0$ (viz. (3.B.14)), dostaneme hledaný linearizovaný Riemannův tenzor křivosti od urychlené částice s polonekonečnou strunou

$${}^{ret}R = {}^{acc}R\Theta(u) + {}^{un}R\Theta(\mathcal{P}|x) + {}^{brd}R =$$

$$= {}^{acc}R\Theta(u) +$$

$$+ (d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi} - \varrho^2 d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}) \cdot$$

$$\cdot \text{La} \left(-\frac{15\varrho^2(3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) - \frac{\varrho^2}{2(a^2 + \varrho^2)} \delta'(u) \right) +$$
(3.4.53)

$$+ (d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{v}d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi} + \sim + \varrho^2 d\underset{\sim}{u}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{\varphi}d\underset{\sim}{\varphi} + \sim) \cdot$$

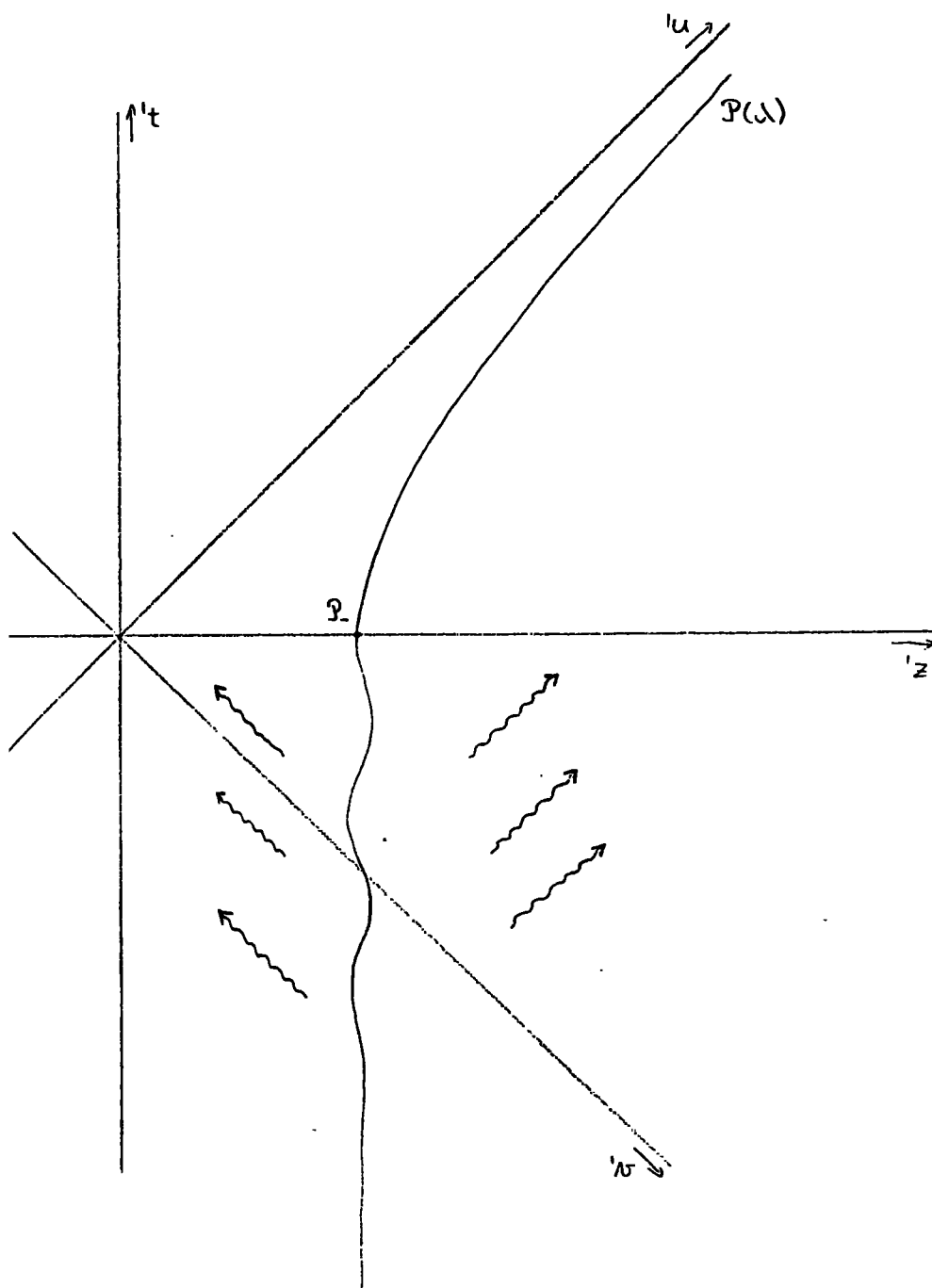
$$\cdot \text{La} \varrho \frac{2a^2 + \varrho^2}{(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u).$$

První člen je regulární část Riemannova tenzoru (až na členy lokalizované na světočáře částice a svět ploše struny diskutované v poznámce ⁸⁾ na str. 67), druhý člen je singulární část lokalizovaná na nadploše $u=0$. Lze se přesvědčit, že Ricciho

tenzor je mimo zdroje nulový, tj. jsou splněny Einsteinovy rovnice ve vakuu.

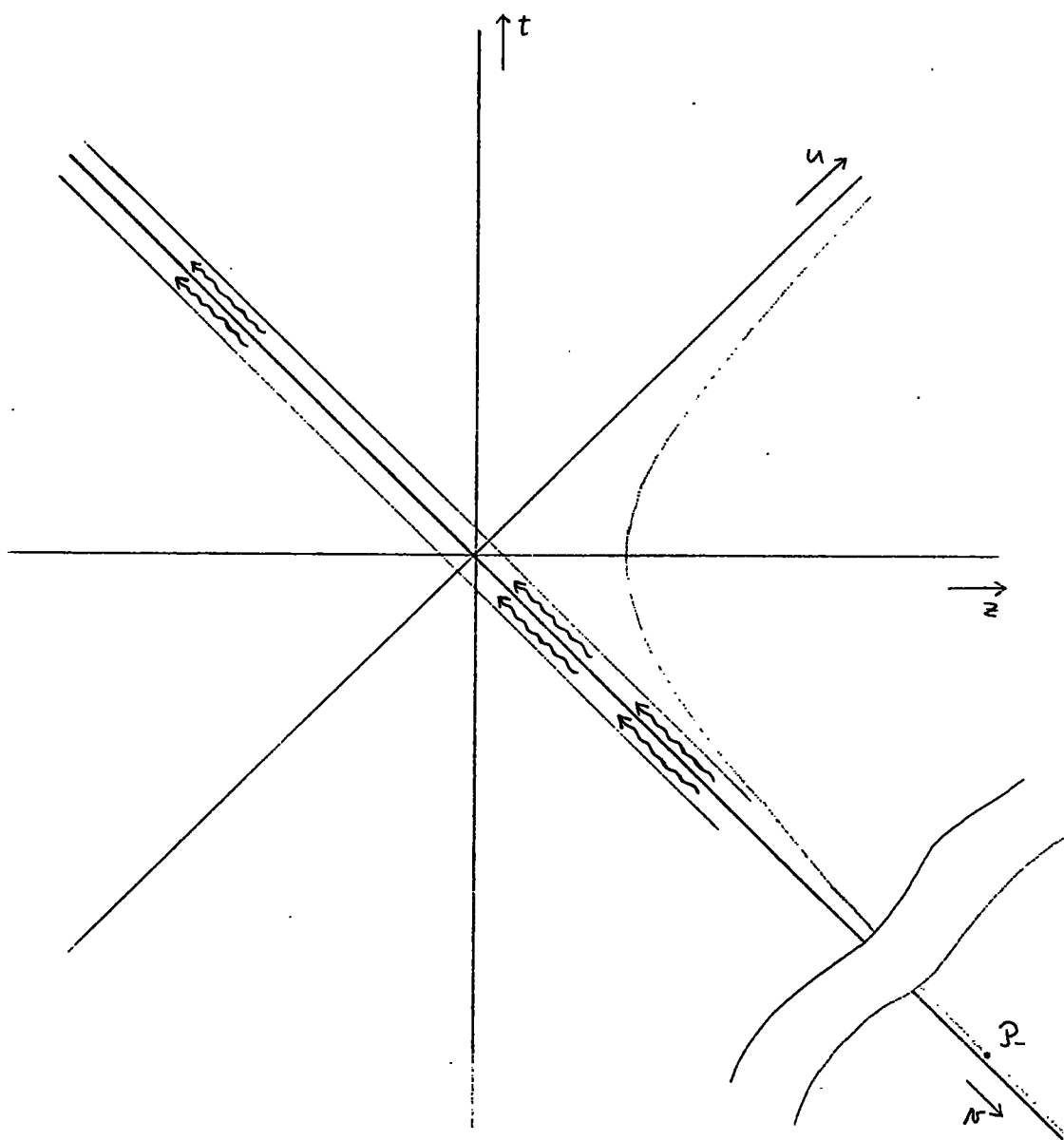
Obecný tvar Riemannova tenzoru a metriky částice se strunou

Věnujme se Riemannovu tenzoru ještě podrobněji. Můžeme se ptát, jakou obecnou strukturu může mít linearizovaný Riemannův tenzor křivosti od urychlené částice s polonekonečnou strunou. V oblasti $u > 0$, pokud nechceme připustit existenci nějaké dodatečné gravitační vlny, je linearizovaný Riemannův tenzor křivosti roven ${}^{(4)}R$. Na nadploše $u = 0$ však neumíme rozeznat vklad částice od příspěvku gravitační vlny. Jinak řečeno, konkrétní tvar linearizovaného Riemannova tenzoru na $u = 0$ je dán uspořádáním zdroje v nekonečné minulosti, o kterém nemáme informace. Můžeme však dát jisté obecné podmínky na situaci v dávné minulosti. Budeme nadále předpokládat, že rovnoměrně urychlený pohyb začal v jistém okamžiku \mathcal{P} v dávné minulosti o souřadnicích $u_- = \frac{a}{\gamma}$, $x_- = a\eta$ (η je nekonečné \mathcal{P}), ovšem pohyb před tímto okamžikem necháme obecný. Pouze požadujeme, aby zdroj směřoval do časového nekonečna (ne izotropního, jak tomu je u neustále urychleného pohybu) a aby se nejednalo o zářivý zdroj po celou dobu jeho existence. V soustavě souřadnic (u, x) (viz. (3.4.17)) spojené se souřadnicemi u, x boostem tak, aby souřadnice události \mathcal{P} byly $u_- = a$, $x_- = a$, je obecný charakter pohybu ilustrován na obrázku 3.8. Podmínka na omezenou dobu záření znamená, že částice může zářit pouze v oblasti konečného (u, x) , ale ne dříve. Pokud tento systém budeme pozorovat v oblasti konečných souřadnic u, x ($u = \frac{u}{\gamma}$, $x = \eta x$, η nekonečné), bude situace vypadat jako na obrázku 3.9. Vidíme, že retardované pole ${}^{(4)}R$ od pohybu před okamžikem \mathcal{P} se lokalizuje pouze v okolí nadplochy $u = 0$ (oblast $u > 0$ není ovlivněna pohybem částice před \mathcal{P} ;



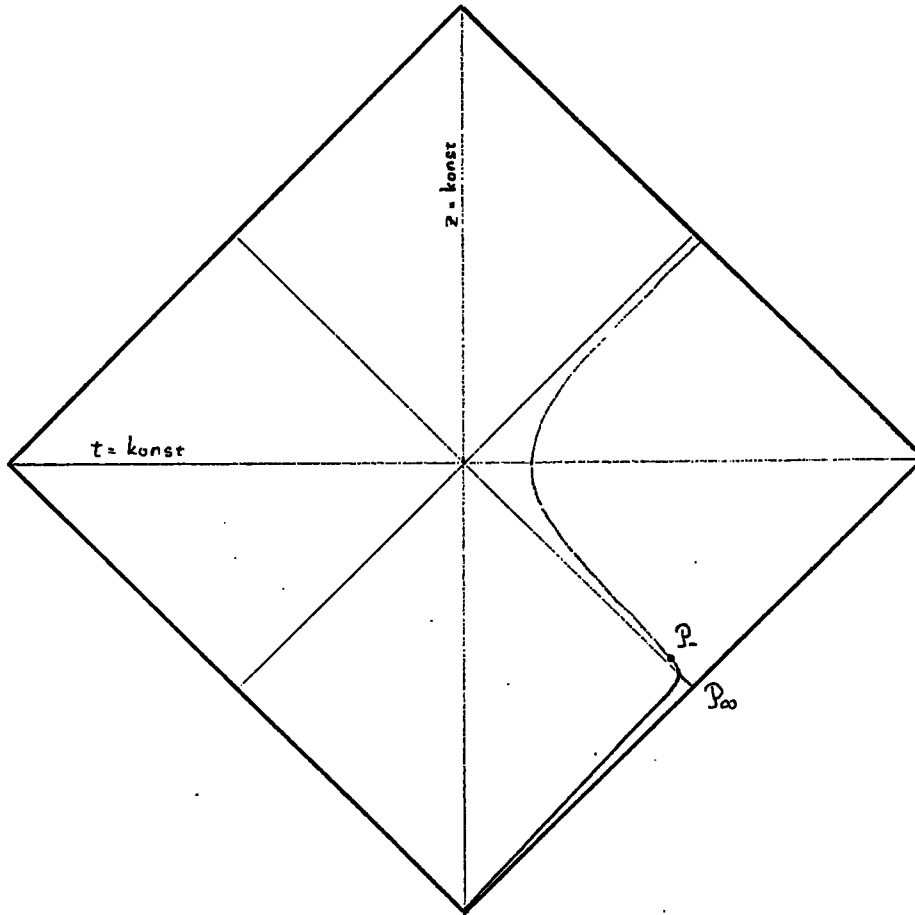
obr. 3.8

Částice se nemůže rovnoměrně urychlovat věčně, její urychlování muselo někdy začít. V soustavě spojené s počátkem urychlování částice \mathcal{P}_0 bude mít světočára částice charakter vyznačený na obrázku. Pohyb před událostí \mathcal{P}_0 může být obecný, pouze předpokládáme, aby přešel v dávno minulosti vůči této soustavě v pohyb nezářivý. Vlnovkami je vyznačeno zářivé pole způsobené částicí před okamžikem \mathcal{P}_0 .



obr. 3.9

Zde je znázorněna stejná situace jako na obrázku 3.8 vzhledem k soustavě v níž počátek rovnoměrného urychlování P nastal v dávné minulosti. Zářivé pole od pohybu před okamžikem P je lokalizované v úzké oblasti kolem nadplochy $u=0$.



obr. 3.10

Stejná situace jako v předchozích obrázcích znázorněna v Penroseově diagramu (spojeným se soustavou t, z). Částice se pohybuje rovnoměrně (tj. nežáří) z minulého časového nekonečna do blízkosti bodu P_∞ . Tento pohyb probíhá v podstatě v isotropním nekonečnu vůči soustavě t, z ale v časupodobné minulosti vzhledem k t, z - viz. obr. 3.8. Dále se částice pohybuje obecným (tj. i zářivým) pohybem až do okamžiku P , kdy se začne pohybovat rovnoměrně urychleně. V limitě $\gamma \rightarrow \infty$ okamžik P přechází do P_∞ , tj. P se oddaluje do světelného nekonečna, jak bylo řečeno v poznámce 4) na str. 38.

v oblasti $u < 0$ je pole ${}^{\text{sur}}R$ nulové díky tomu, že pohyb částice je zářivý pouze pro konečné $'u, 'v$, ale ne dříve a poloprostor $u < 0$ ovlivňuje právě tato nezářivá oblast, která je však nekonečně daleko). Měřitelné pole lokalizované v nekonečně tenkém (řádu $\frac{a}{\eta}$) okolí $u=0$ bude mít charakter delta-funkcí či jejich derivací. Celou situaci můžeme znázornit též v Penroseově diagramu ⁹⁾ - viz. obr. 3.10. Souřadnice ${}^{\text{sur}}R'_{abcd}$ linearizovaného Riemannova tenzoru ${}^{\text{sur}}R$ v soustavě souřadnic $'u, 'v, x, y$ jsou konečné v oblasti konečného $'u, 'v$, ale i v oblasti konečného u, v (pole od pohybu před \mathcal{P} může být zářivé, nemůže však se vzdáleností růst). Z toho dostáváme, že souřadnice ${}^{\text{sur}}R_{abcd}$ linearizovaného tenzoru křivosti ${}^{\text{sur}}R$ v souřadnicích u, v, x, y nabývají v oblasti konečného u, v těchto hodnot

$$\left. \begin{aligned}
 {}^{\text{sur}}R_{uaub} &= \eta^2 {}^{\text{sur}}R'_{uaub} \\
 {}^{\text{sur}}R_{uvua} &= \eta {}^{\text{sur}}R'_{u'v'u'a} \\
 {}^{\text{sur}}R_{uabc} &= \eta {}^{\text{sur}}R'_{uabc} \\
 {}^{\text{sur}}R_{uovb} &= {}^{\text{sur}}P'^i_{ua'v'b} \\
 {}^{\text{sur}}R_{uvuv} &= {}^{\text{sur}}R'_{u'v'u'v'} \\
 {}^{\text{sur}}R_{abcd} &= {}^{\text{sur}}R'_{abcd} \\
 {}^{\text{sur}}R_{(\text{ostatní})} &= O\left[\frac{1}{\eta}\right] \cdot {}^{\text{sur}}R'_{(\text{ostatní})}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 a, b, c &= x, y \\
 \text{pro } u &= O\left[\frac{a}{\eta}\right]
 \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

$${}^{\text{sur}}R_{abcd} = 0 \quad a, b, c, d = u, v, x, y \quad \text{pro } u \gg O\left[\frac{a}{\eta}\right]$$

⁹⁾ Stručně je Penroseův diagram zaveden v dodatku 5.A. Podrobněji viz. např. [16].

Abychom dostali pro integrál přes u nenulovou hodnotu (tj. aby pole lokalizované na $u=0$ bylo měřitelné - mělo charakter delta-funkce či její derivace), musí být hodnota integrandu pro $u=0$ alespoň řádu η : Tedy linearizovaný Riemannův tenzor křivosti ${}^{sur}R$ bude mít v oblasti konečného u, v obecně strukturu

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} {}^{sur}R &= du \, d\varphi \, du \, d\varphi \, A + \\ &+ (du \, dv \, du \, d\varphi + \sim) \frac{1}{2} B + \\ &+ (du \, dv \, du \, dv + \sim) \frac{1}{2} C + \\ &+ (du \, d\varphi \, du \, d\varphi + \sim) D + \\ &+ du \, d\varphi \, du \, dv \, E + \\ &+ (d\varphi \, dv \, du \, dv + \sim) F + \\ &+ (d\varphi \, dv \, du \, d\varphi + \sim) G, \end{aligned} \tag{3.4.55}$$

kde A, B, C, D, E, F, G jsou funkce lokalizované na $u=0$ (kombinace delta-funkcí a jejich derivací).

Celkový linearizovaný Riemannův tenzor křivosti je dán příspěvkem urychleného pohybu a pohybu jemu předcházejícímu

$${}^{ret}R = {}^{acc}R \Theta(u) + {}^{sur}R \tag{3.4.56}$$

Musí být splněn linearizovaný Einsteinův gravitační zákon, což vede na podmínky

$$E = -\eta^2 A, \quad F = \eta^2 B, \quad G = -C, \tag{3.4.57}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} {}^{\text{sur}}R &= (d\omega d\varphi d\omega d\varphi - \varphi^2 d\omega d\varphi d\omega d\varphi) A + \\
&+ \left(\frac{1}{2} d\omega d\omega d\omega d\varphi + \omega + \varphi^2 d\omega d\varphi d\varphi d\varphi + \omega \right) B + \\
&+ \left(\frac{1}{2} d\omega d\omega d\omega d\varphi + \omega - d\omega d\varphi d\varphi d\varphi - \omega \right) C + \\
&+ (d\omega d\varphi d\omega d\varphi + \omega) D
\end{aligned} \tag{3.4.58}$$

Dále musí být splněny Bianchiho identity

$$\partial_{[\underline{a}} {}^{\text{sur}}R_{\underline{b}\underline{c}]} = 0, \tag{3.4.59}$$

což vede na podmínky (viz. (3.E.2))

$$\begin{aligned}
B_{,\nu} &= 0, \\
\varphi B - (\varphi^2 B)_{, \varphi} + \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \Big|_{u=0} \delta(u) &= 0, \\
A_{,\nu} + \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi} B + \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}R_{u\varphi u\varphi} \Big|_{u=0} \delta(u) &= 0, \\
(\varphi^2 A)_{, \varphi} + \varphi^2 B_{, u} + \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}R_{u\varphi\varphi\varphi} \Big|_{u=0} \delta(u) &= 0, \\
C_{, \varphi} &= 0, \\
C_{,\nu} &= 0, \\
\frac{1}{2\varphi} C + D_{,\nu} &= 0, \\
C_{, u} + \frac{1}{\varphi} D + D_{, \varphi} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4.60}$$

Z (3.4.47) máme

$$\frac{1}{L} {}^{\text{occ}} R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} |_{u=0} = -4\varphi^2 \frac{1}{L} {}^{\text{occ}} R_{u\varphi u\varphi} |_{u=0} = \frac{4a^4 \varphi^2}{(a^2 + \varphi^2)^2} , \quad (3.4.61)$$

$$\frac{1}{L} {}^{\text{occ}} R_{u\varphi\varphi\varphi} |_{u=0} = 6 \frac{a^4 \varphi^3 \nu}{(a^2 + \varphi^2)^4} .$$

Řešením rovnic (3.4.60) při zachování rotační symetrie okolo osy z dostáváme

$$A = -\frac{\nu \varphi^2 (3a^2 + \varphi^2)}{2(a^2 + \varphi^2)^3} \delta(u) - \frac{\varphi^2}{2(a^2 + \varphi^2)} \delta'(u) - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\varphi^2} B(u) - \frac{1}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\varphi^2} D(u) ,$$

$$B = \varphi \frac{2a^2 + \varphi^2}{(a^2 + \varphi^2)^2} \delta(u) + \frac{1}{\varphi} B(u) , \quad (3.4.62)$$

$$C = C(u)$$

$$D = -\frac{\nu}{2\varphi} C(u) - \frac{\varphi}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\varphi} D(u) ,$$

kde A, B, C, D jsou funkce lokalizované na $u=0$, tj. kombinace delta-funkcí a jejich derivací. Pro další výpočty označíme

$${}^0A = A|_{a,\varphi=0} = -\frac{\nu \varphi^2 (3a^2 + \varphi^2)}{2(a^2 + \varphi^2)^3} \delta(u) - \frac{\varphi^2}{2(a^2 + \varphi^2)} \delta'(u) ,$$

$${}^0B = B|_{a,\varphi=0} = \varphi \frac{2a^2 + \varphi^2}{(a^2 + \varphi^2)^2} \delta(u) , \quad (3.4.63)$$

$${}^{\text{free}}A = A - {}^0A = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{\varphi^2} B(u) - \frac{1}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\varphi^2} D(u) , \quad {}^{\text{free}}B = B - {}^0B = \frac{1}{\varphi} B(u) ,$$

$${}^{\text{free}}C = C = C(u) , \quad {}^{\text{free}}D = D = -\frac{\nu}{2\varphi} C(u) - \frac{\varphi}{2} C_{,u}(u) + \frac{1}{\varphi} D(u) .$$

Řešení (3.4.53) dostaneme položením

$$A, B, C, D = 0 , \quad (3.4.64)$$

$${}^0A = A , \quad {}^0B = B , \quad C = 0 , \quad D = 0 .$$

Známe tedy obecný tvar linearizovaného Riemannova tenzoru křivosti od urychlené částice s polonekonečnou strunou. Jedná se o třídu řešení navzájem se lišících o gravitační vlnu lokalizovanou na nadploše $u=0$, která má strukturu

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} {}^{free}R = & (du dv d\varphi du dv d\varphi - \varrho^2 du dv d\varphi du dv d\varphi) {}^{free}A + \\ & + \left(\frac{1}{2} du dv d\varphi du dv d\varphi + \omega + \varrho^2 du dv d\varphi d\varphi dv d\varphi + \omega \right) {}^{free}B + \\ & + \left(\frac{1}{2} du dv d\varphi du dv d\varphi + \omega - du dv d\varphi d\varphi dv d\varphi - \omega \right) {}^{free}C + \\ & + (du dv d\varphi du dv d\varphi + \omega) {}^{free}D . \end{aligned} \quad (3.4.65)$$

Jeden reprezentant této třídy řešení je např. (3.4.53).

Jelikož získaný linearizovaný Riemannův tenzor křivosti splňuje pohybové rovnice a Bianchiho identity, musí existovat linearizovaná metrika, z které lze Riemannův tenzor odvodit. V oblasti $u > 0$ to samozřejmě je metrika ${}^{acc}h$. Jak jsme již ale řekli, tato metrika je v oblasti $u=0$ singulární. Budeme ji tedy regularizovat - "ořežeme" ji v malé hodnotě $\frac{a}{2}$, tj. použijeme metriku

$${}^{bar}h = {}^{acc}h \Theta\left(u - \frac{a}{2}\right) . \quad (3.4.66)$$

Tato metrika ale nespĺňuje Einsteinův gravitační zákon v okolí $u=0$. Musíme k ní ještě přidat členy, které splnění pohybové rovnice na $u=0$ zajistí. Budeme je hledat ve tvaru

$$\frac{1}{L} {}^{sing}h = M du^2 + N^{(1)}g + P dv dv d\varphi + Q du dv d\varphi . \quad (3.4.67)$$

Přímým výpočtem dostaneme linearizovaný Riemannův tenzor křivosti těchto metrik

$$\begin{aligned} \bar{R}_{abcd} &= \partial_{[d} (\partial_{[a} \bar{h}_{b]c]}) = {}^{acc}R_{abcd} + \\ &+ L (d_u u d_b \varphi d_\varepsilon u d_s \varphi + \varphi^2 d_u u d_b \varphi d_\varepsilon u d_s \varphi) \mathcal{F} + \\ &+ L (\varphi^2 d_\varepsilon \varphi d_b \varphi d_u u d_s \varphi + \dots) \mathcal{F} = O\left[\frac{1}{r}\right] \end{aligned} \quad (3.4.68)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{\eta}{2a} \delta(u) + \frac{1}{2a} \delta'(u) - \frac{a^2 \nu}{(a^2 + \varphi^2)^2} \delta(u) - \frac{1}{2} \frac{a}{a^2 + \varphi^2} \delta'(u) + \\ &+ \frac{1}{2a} \ln \eta \delta'(u) + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + \varphi^2}{\varphi a} \delta'(u), \end{aligned} \quad (3.4.69)$$

$$\mathcal{F} = \left(-\frac{a^2}{\varphi(a^2 + \varphi^2)^2} + \frac{1}{2a\varphi} \right) \delta(u),$$

$$\text{sing} R_{abcd} = \partial_{[d} (\partial_{[a} \text{sing} h_{b]c]}) \quad (3.4.70)$$

Výraz pro $\text{sing} R$ je poměrně dlouhý a jeho detailní tvar není velmi zajímavý - viz. (3.E.5), výpočet \bar{R} viz. (3.E.14).

Nutno upozornit, že linearizovaný Riemannův tenzor křivosti \bar{R} obsahuje nekonečně velké členy. To je způsobeno tím, že \bar{h} je námi zvoleným regularizačním způsobem "ořezaná" metrika ${}^{acc}h$ a sama již obsahuje nekonečné členy (členy $\frac{1}{u} \theta(u - \frac{a}{2})$ a $\ln u \theta(u - \frac{a}{2})$). Divergence v \bar{R} se musí kompenzovat nekonečnými členy stejné struktury v $\text{sing} R$, čehož dosáhneme vhodnou volbou M, N, P, Q .

Nejdříve se pokusíme zjistit metriku pro gravitační vlnu $\text{free} R$. Porovnáním (3.E.5) a (3.4.65) dostaneme rovnice

$$\text{free} M_{\mu\nu} = 0,$$

$$\text{free} N_{\mu\nu} = 0, \quad \text{free} N_{\mu\nu} = 0, \quad \text{free} N_{\mu\nu} = 0, \quad (\varphi^{\text{free} N_{\mu\nu}})_{,\mu} = 0,$$

$$\begin{aligned}
{}^{\text{free}}M_{,uq} &= -{}^{\text{free}}B, & {}^{\text{free}}N_{,uq} &= -2{}^{\text{free}}B, \\
{}^{\text{free}}M_{,iq} + {}^{\text{free}}N_{,uu} &= -2{}^{\text{free}}A, & \frac{1}{\rho} {}^{\text{free}}M_{,iq} + {}^{\text{free}}N_{,uu} &= 2{}^{\text{free}}A, \\
{}^{\text{free}}Q_{,iq} &= 0, & {}^{\text{free}}P_{,qu} &= 0, \\
{}^{\text{free}}Q_{,iq} + {}^{\text{free}}P_{,u} &= 0, & {}^{\text{free}}P_{,uu} - {}^{\text{free}}Q_{,iur} &= 0, \\
\rho \left({}^{\text{free}}P_{,iq} \frac{1}{\rho} \right)_{,iq} &= 0, & \rho^2 \left(\frac{1}{\rho^2} {}^{\text{free}}P_{,ur} \right)_{,iq} &= 0, \\
{}^{\text{free}}Q_{,vuu} - {}^{\text{free}}P_{,uu} &= {}^{\text{free}}C, & -{}^{\text{free}}Q_{,iq} + \frac{1}{\rho} {}^{\text{free}}Q_{,iq} &= {}^{\text{free}}C, \\
{}^{\text{free}}Q_{,iqu} - \frac{2}{\rho} {}^{\text{free}}Q_{,iu} &= {}^{\text{free}}D
\end{aligned} \tag{3.4.71}$$

(viz. (3.4.63)). Řešením těchto rovnic při zanedbávání kalibračně triviálních členů, tj. těch, které se neprojeví v linearizovaném tenzoru křivosti, dostaneme

$$\begin{aligned}
{}^{\text{free}}M &= -\nu \ln \frac{\rho}{\alpha} B + \rho^2 \left(\ln \frac{\rho}{\alpha} - 1 \right) B_{,u} + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha} A, \\
{}^{\text{free}}N &= -2 \int B du \ln \frac{\rho}{\alpha}, \\
{}^{\text{free}}P &= -\frac{1}{2} \iint C du du, \\
{}^{\text{free}}Q &= \frac{1}{2} \nu \int C du + \frac{1}{2} \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) C - \frac{1}{2} \int D du.
\end{aligned} \tag{3.4.72}$$

(Nejednoznačnost primitivních funkcí je kalibračně triviální.) To znamená, že metrika ${}^{\text{sing}}h$ s koeficienty ${}^{\text{free}}M$, ${}^{\text{free}}N$, ${}^{\text{free}}P$, ${}^{\text{free}}Q$ danými (3.4.72) vede k linearizovanému tenzoru křivosti gravitační vlny (3.4.65).

Nyní se pokusíme hledat metriku jednoho zástupce třídy linearizovaných tenzorů křivosti systému urychlené částice a polonekonečné struny. Vybereme si linearizovaný Riemannův tenzor křivosti (3.4.53) tj. v (3.4.56) položíme $a, b, c, d = 0$. Porovnáním s ${}^{\text{lin}}R + {}^{\text{sing}}R$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
 M_{,\nu\sigma} &= 0, \\
 N_{,\nu\sigma} &= 0, \quad N_{,\nu\sigma} = 0, \quad N_{\sigma\nu} = 0, \quad (\varphi M_{,\nu\sigma})_{,\nu} = 0, \\
 M_{,\nu\sigma} &= -{}^{\circ}B, \quad N_{,\nu\sigma} = -2({}^{\circ}B - \varphi), \\
 M_{,\nu\sigma} + N_{,\nu\sigma} &= -2({}^{\circ}A - \varphi), \quad \frac{1}{\varphi} M_{,\nu\sigma} + N_{,\nu\sigma} = 2({}^{\circ}A + \varphi), \\
 Q_{,\nu\sigma} &= 0, \quad P_{,\nu\sigma} = 0, \\
 Q_{,\nu\sigma} + P_{,\nu\sigma} &= 0, \quad P_{,\nu\sigma} - Q_{,\nu\sigma} = 0, \\
 \varphi(P_{,\nu\sigma} \frac{1}{\varphi})_{,\nu} &= 0, \quad \varphi^2(P_{,\nu\sigma} \frac{1}{\varphi^2})_{,\nu} = 0, \\
 Q_{,\nu\sigma} - P_{,\nu\sigma} &= 0, \quad -Q_{,\nu\sigma} + \frac{1}{\varphi} Q_{,\nu\sigma} = 0, \\
 Q_{,\nu\sigma} - \frac{1}{\varphi} Q_{,\nu\sigma} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.4.73}$$

(srovnej s rovnicemi (3.4.71)). Řešením těchto rovnic (opět až na kalibračně triviální členy) dostaneme

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\nu}{2} \left(\frac{a^2}{a^2 + \varphi^2} + \ln \frac{a^2}{a^2 + \varphi^2} \right) \delta(u) + \frac{a^2 + \varphi^2}{a^2} \left(\ln \frac{a^2 + \varphi^2}{a^2} - 1 \right) \delta'(u) - \\
 &\quad - \frac{\nu}{2} \ln \eta \delta(u) + \frac{a^2 + \varphi^2}{2} \left(-\frac{\nu}{2} \delta(u) + \ln \eta \delta'(u) \right), \tag{3.4.74}
 \end{aligned}$$

$$N = \ln \frac{a}{\varphi} \delta(u),$$

$$P = Q = 0.$$

Obecná metrika urychlené částice s polonekonečnou strunou tedy má (až na kalibraci) následující tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} {}^{\text{ret}}h &= \frac{1}{L} ({}^{\text{bar}}h + {}^{\text{sing}}h + {}^{\text{free}}h) = \\ &= \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}h \Theta(u - \frac{0}{\gamma}) + N^{(2)}g + \\ &+ M du du + \\ &+ {}^{\text{free}}M du du + {}^{\text{free}}N^{(2)}g + {}^{\text{free}}P dv v dg + {}^{\text{free}}Q du v dg, \end{aligned} \quad (3.4.75)$$

kde ${}^{\text{acc}}h$ je dáno v (3.4.31), M, N v (3.4.74) a ${}^{\text{free}}M, {}^{\text{free}}N, {}^{\text{free}}P, {}^{\text{free}}Q$ v (3.4.72). Tato metrika vede na linearizovaný Riemannův tenzor křivosti

$${}^{\text{ret}}R = {}^{\text{acc}}R \Theta(u) + {}^{\text{sur}}R, \quad (3.4.76)$$

kde ${}^{\text{acc}}R$ je dán v (3.4.47) a ${}^{\text{sur}}R$ v (3.4.58).

Pokud nás zajímá metrika vedoucí na linearizovaný Riemannův tenzor křivosti (3.4.53), položíme (3.4.64) a dostaneme

$$\frac{1}{L} {}^{\text{ret}}h = \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}h \Theta(u - \frac{0}{\gamma}) + N^{(2)}g + M du du \quad (3.4.77)$$

kde M, N jsou dané v (3.4.74).

Vidíme, že metrika je na $u=0$ značně divergentní (delta-funkce násobená nekonečným parametrem regularizace η). Tato nekonečna však nejsou patologická, neboť vedou na regulární linearizovaný Riemannův tenzor křivosti, v kterém se na ploše $u=0$ vyskytují nanejvýš členy s delta-funkcemi a jejich derivacemi. Dokonce členy s parametrem η sehrávají

pozitivní roli. V části ${}^{acc}h$ jsme totiž "ořízli" funkcí $\Theta(u - \frac{a}{2})$ členy

$$\frac{a}{R} \left(\frac{R+l}{2} \right) \frac{1}{u^2} du^2 + \ln \frac{u}{a} {}^{(3)}g = \left(\frac{a^2 + l^2}{2} \frac{1}{u^2} + \frac{l}{2} \frac{1}{u} + O[u^0] \right) du^2 + \ln \frac{u}{a} {}^{(3)}g \quad (3.4.78)$$

Srovnáním s (3.A.28), (3.A.29) a (3.A.26) vidíme, že divergentní členy v (3.4.77)

$$\left(\frac{a^2 + l^2}{2} \left(-\frac{l}{a} \delta(u) + \ln \eta \delta'(u) \right) - \frac{l}{2} \ln \eta \delta(u) \right) du^2 \quad (3.4.79)$$

přesně zajistí regularizační invarianci metriky ${}^{ret}h$. Díky tomu máme zajištěno, že libovolná veličina získaná z ${}^{ret}h$ neobsahující parametr η nemůže záviset na způsobu, kterým jsme ${}^{ret}h$ regularizovali.

Pokračujme ale v diskusi metriky ${}^{ret}h$. Všimněme si, že člen $N^{(3)}g$ není lokalizovaný na $u=0$, ale je nenulový v celém poloprostoru $u>0$. Při prohlédnutí výrazu pro ${}^{acc}h$ zde nalezneme stejný člen s opačným znaménkem - tyto výrazy se ruší.

Stejně jako pro skalární a elektromagnetické pole můžeme pomocí symetrie nalézt avancované pole symetricky položené částice (-) a složit ho s retardovaným polem částice (+) (viz. obr. 3.2). V linearizovaném tenzoru křivosti se povrchové členy lokalizované na $u=0$ vyruší a dostaneme ${}^{acc}R$. Pro metriku se však všechny povrchové členy nevyruší a zjistíme

$$h = ({}^{acc}h + L \ln \frac{a}{2} {}^{(3)}g) \left(\Theta\left(-\frac{a}{2} - u\right) + \Theta\left(\frac{a}{2} - u\right) \right) - \frac{a^2 + l^2}{2} \frac{l}{a} \delta(u) du du \quad (3.4.80)$$

Lehce nahlédneme, že druhý člen, lokalizovaný na $u=0$, je spojen s regularizační invariancí metriky h .

Jiný tvar metriky urychlené částice se strunou

Vzhledem ke kalibrační volnosti nemůžeme říci, zda retardovaná linearizovaná metrika urychlené částice s polonekonečnou strunou musí obsahovat divergentní členy. Pouze víme, že retardovaný linearizovaný Riemannův tenzor křivosti obsahuje delta-funkce lokalizované na $u=0$. Dokonce v příští kapitole nalezneme linearizovanou metriku \tilde{h}^{acc} nedivergující na $u=0$ ¹⁰⁾, která je v oblasti $u>0$ kalibračně ekvivalentní s h^{acc} . Její tvar je (viz. (4.2.12))

$$\frac{1}{L} \tilde{h}^{acc} = \frac{l-R}{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} du^2 + \frac{v}{u} dv^2 \right) + \frac{l+R-a}{2R} \frac{1}{2} du dv + \frac{a}{2R} \left(\frac{2l}{a} - 1 \right) d\varphi^2 - \frac{a}{2R} \varphi^2 \left(\frac{2R}{a} - 1 \right) d\varphi^2 . \quad (3.4.81)$$

Tuto metriku můžeme použít jako základ naší hledané retardované metriky, tj. obdobně k (3.4.66)

$$\tilde{h}^{bar} = \tilde{h}^{acc} \Theta(u) . \quad (3.4.82)$$

Jelikož \tilde{h}^{acc} je na $u=0$ regulární, nemusíme zavádět žádný parametr regularizace. Metrika \tilde{h}^{bar} nesplňuje pohybové rovnice na $u=0$. Musíme opět přidat člen lokalizovaný na $u=0$. Budeme ho hledat ve tvaru

$$\frac{1}{L} \tilde{h}^{sing} = \tilde{M} du^2 + \tilde{N}^{(2)} g . \quad (3.4.83)$$

V dodatku 3.E je vypočten linearizovaný Riemannův tenzor křivosti

¹⁰⁾ Poznamenejme, že delta-funkci nepovažujeme za divergenci - má dobrý integrální smysl. Divergentní jsou členy typu $\frac{1}{u} \Theta(u)$, $\ln u \Theta(u)$ či obsahující nekonečný parametr regularizace η .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} \overset{\text{lin}}{R} &= \frac{1}{L} \overset{\text{arc}}{R} \Theta(u) + du \, d\varphi \, d\varphi \, d\varphi \left({}^{\circ}A + \nu \frac{\varrho^2 - a^2}{2(\varrho^2 + a^2)} \delta(u) \right) + \\
&= \varrho^2 du \, d\varphi \, d\varphi \, d\varphi \left({}^{\circ}A + \nu \frac{1}{2(\varrho^2 + a^2)} \delta(u) \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{2} du \, d\nu \, d\varphi \, d\varphi + \nu \right) \left({}^{\circ}B - \frac{\varrho}{a^2 \varrho^2} \delta(u) \right) + \\
&+ \left(\varrho^2 du \, d\varphi \, d\varphi \, d\varphi + \nu \right) {}^{\circ}B .
\end{aligned} \tag{3.4.84}$$

$\overset{\text{sing}}{R}$ dostaneme z výrazu pro $\overset{\text{sing}}{R}$ (viz. (3.E.5)) záměnou $M \leftrightarrow \tilde{M}$, $N \leftrightarrow \tilde{N}$, $P, Q = 0$. Porovnáním $\overset{\text{arc}}{R} + \overset{\text{sing}}{R}$ s (3.4.53) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{,\nu\nu} &= 0 , \\
\tilde{N}_{,\nu\nu} &= 0 , \quad \tilde{N}_{,\nu\nu} = 0 , \quad \tilde{N}_{,\varrho\nu} = 0 , \quad (\partial_{\varrho} \tilde{M}_{,\varrho})_{,\varrho} = 0 , \\
\tilde{M}_{,\nu\varrho} &= -\frac{\varrho}{a^2 + \varrho^2} \delta(u) , \quad \tilde{N}_{,\varrho u} = 0 , \\
\tilde{M}_{,\varrho\varrho} + \tilde{N}_{,\nu\nu} &= \nu \frac{\varrho^2 - a^2}{(\varrho^2 + a^2)^2} \delta(u) , \quad \tilde{N}_{,\nu u} + \frac{1}{\varrho} \tilde{M}_{,\varrho} = -\nu \frac{1}{\varrho^2 + a^2} \delta(u) .
\end{aligned} \tag{3.4.85}$$

(srovnej s (3.4.73)). Řešením těchto rovnic při zanedbávání kalibračně triviálních členů obdržíme

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= -\frac{\nu}{2} \ln \frac{a^2 + \varrho^2}{a^2} \delta(u) , \\
\tilde{N} &= 0 .
\end{aligned} \tag{3.4.86}$$

Metriku vedoucí na linearizovaný Riemannův tenzor křivosti (3.4.53) lze tedy zapsat ve tvaru

$$\overset{\text{ret}}{h} = \overset{\text{arc}}{h} \Theta(u) - \frac{\nu}{2} \ln \frac{a^2 + \varrho^2}{a^2} \delta(u) du^2 , \tag{3.4.87}$$

kde $\overset{\text{arc}}{h}$ je dáno v (3.4.81).

Vidíme, že jsme se nakonec obešli bez divergencí a regularizací; metrika není však získána přímým výpočtem pomocí Greenovy funkce. Fyzikálně podstatná je ale přítomnost delta-funkcí lokalizovaných na Σ jak v metrice, tak hlavně v linearizovaném tenzoru křivosti. To vypovídá o kumulování gravitačního pole podél hranice oblasti příčinně spjaté s částicí a tedy i o omezené použitelnosti linearizované teorie. Lze očekávat, že v plné teorii gravitace, důsledkem nelinearity, budou na nadploše Σ nastávat větší potíže. V kapitole 4 se přesvědčíme, že tomu tak skutečně je.

Dodatek 3.A Některé vztahy s delta-funkcemi

Delta-funkce na reálných číslech je distribuce ¹¹⁾ definovaná vztahem

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (3.A.1)$$

Místo duality \langle, \rangle budeme častěji psát formální integrál, tj.

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad (3.A.2)$$

Platí

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x) \quad , \quad f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x) \quad , \\ \delta(x) &= \theta'(x) \quad , \end{aligned} \quad (3.A.3)$$

kde

$$\theta(x) \begin{cases} = 1 \quad , \quad x > 0 \\ = 0 \quad , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \int \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \quad (3.A.4)$$

Je-li $f(x)$ prostá (alespoň lokálně ve svých kořenech), pro složenou delta-funkci platí

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad , \quad (3.A.5)$$

kde suma probíhá přes kořeny funkce f (tj. $f(x_0) = 0$). Dále

¹¹⁾ Základy teorie distribucí viz. např. [18], [23].

$$\int \delta'(x) \varphi(x) dx = -\varphi'(0) \quad (3.A.6)$$

Platí

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \quad (3.A.7)$$

$$f(x) \delta'(x) = (f(x) \delta(x))' - f'(x) \delta(x) = f(0) \delta'(x) - f'(0) \delta(x), \quad (3.A.8)$$

Splňuje-li f podmínku vztahu (3.A.5), platí

$$\begin{aligned} \delta'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \delta(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \sum_{x_0} \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x_0 - x) = \\ &= \sum_{x_0} \frac{1}{f'(x) |f'(x_0)|} \delta'(x - x_0) = \\ &= \sum_{x_0} \left(\frac{1}{f'(x_0) |f'(x_0)|} \delta'(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2 |f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \right) = \\ &= \sum_{x_0} \operatorname{sign} f'(x_0) \frac{1}{(f'(x_0))^2} \left(\delta'(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} \delta(x - x_0) \right). \end{aligned} \quad (3.A.9)$$

Distribuce na prostoročasu jsou lineární funkcionály (s vhodnou topologií) nad dostatečně hladkou (např. nekonečně hladké s kompaktním nosičem) třídou hustot na prostoročase ¹²⁾

¹²⁾ Hustota (či element objemu) je objekt, který lze na prostoročasu integrovat. Hustoty lze zavést jako fibre-bundle prostor asociovaný s hlavním bundlem tetrad na prostoročase, přičemž standartní fibre je 1-dimensionální a reprezentace Lorentzovy grupy je následovná

$$\tilde{f}[e_a^i] = (\det M^a_b) \tilde{f}[M^a_b e_b^i]$$

Lokálně je pak integrál hustoty definovaný

$$\int_U \tilde{f} = \int_U \tilde{f}[d_\perp x^i] dx^1 \dots dx^n$$

$$\langle A, \tilde{\varphi} \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.A.10)$$

Lze též zvolit normování pomocí nějaké kanonicky dané hustoty - např. metrického elementu objemu $g^{\frac{1}{2}}$ daného

$$g^{\frac{1}{2}} [d_n x^a] = \sqrt{-\det g_{ab}} \quad (3.A.11)$$

Potom můžeme distribuce chápat jako funkcionál na třídě funkcí na prostoročase

$$\langle A, \varphi \rangle_{g^{\frac{1}{2}}} = \int g^{\frac{1}{2}}(x) A(x) \varphi(x) = \langle A, \varphi g^{\frac{1}{2}} \rangle \quad (3.A.12)$$

kde jsme opět pro dualitu \langle, \rangle použili zápis pomocí formálního integrálu.

Tenzorové distribuce pak jsou lineární funkcionály na vhodné třídě tenzorových hustot (resp., v případě normování, funkcí) s opačnou strukturou indexů

$$\langle A_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n}, \tilde{\varphi}_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_n} \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.A.13)$$

Delta-funkce lokalizovaná v bodě \mathcal{P} normalizovaná vůči elementu objemu $g^{\frac{1}{2}}$ je definovaná

Lokálně je též prostor hustot isomorfní prostoru m -forem přiřazením

$$| | : \Lambda_m M \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} M, \quad \omega_{a_1 \dots a_n} \rightarrow |\omega|$$

kde

$$|\omega| [e_a] = \omega_{1 \dots m}, \quad \omega_{a_1 \dots a_n} = \omega_{1 \dots m} e_{a_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{a_n}^m$$

Podrobnější výklad je možné nalést např. v [1].

$$\begin{aligned}
 \langle \delta_{\mathcal{P}}, \varphi \rangle_{\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}} &= \langle \delta_{\mathcal{P}}, \varphi \mathcal{G}^{\frac{1}{2}} \rangle = \\
 &= \int \mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(x) \varphi(x) \delta(x | \mathcal{P}) = \varphi(\mathcal{P}) .
 \end{aligned}
 \tag{3.A.14}$$

Distribuce lokalizované na různě dimensionálních varietách můžeme definovat pomocí složení obyčejné reálné delta-funkce s funkcí definující podvarietu. Konkrétně, chceme-li distribuci lokalizovanou na nadploše $f=0$ a platí-li

$$\mathcal{G}^{\frac{1}{2}} = |q_{a_1, \dots, a_{m-1}}|_{f=0} \wedge d_{a_1} f , \tag{3.A.15}$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}
 \langle \delta(f), \varphi \rangle_{\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}} &= \int \mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(x) \varphi(x) \delta(f(x)) = \\
 &= \int df \int |q_{a_1, \dots, a_{m-1}}|_{f=0}(x) \varphi(x) \delta(f) = \\
 &= \int |q_{a_1, \dots, a_{m-1}}|_{f=0}(x) \varphi(x) ,
 \end{aligned}
 \tag{3.A.16}$$

kde $|q_{a_1, \dots, a_{m-1}}|_{f=0}$ je element objemu indukovaný na nadplochu $f=0$ elementem objemu $\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}$ a normálou df . Obdobně pro souřadnice x^a můžeme psát ¹³⁾

$$\begin{aligned}
 \langle \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^m - x_0^m), \tilde{\varphi} \rangle &= \\
 &= \int \tilde{\varphi} \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^m - x_0^m) =
 \end{aligned}$$

¹³⁾ Zde

$$d^m x = dx^1 \dots dx^m = |d_{a_1} x^1 \wedge \dots \wedge d_{a_m} x^m|$$

je souřadný element objemu. Platí

$$\mathcal{G}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} d^m x .$$

$$\begin{aligned}
&= \int \tilde{\varphi}[d_x x^a] d^m x \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^m - x_0^m) = \\
&= \tilde{\varphi}[d_x x^a] \Big|_{x=x_0} \quad , \quad (3.A.17)
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
\langle \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^m - x_0^m), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'^m} &= (\sqrt{-\det g_{ab}} \varphi) \Big|_{x=x_0} \quad , \\
\langle \delta(x^1 - x_0^1) \dots \delta(x^m - x_0^m), \varphi \rangle_{d^m x} &= \varphi(x_0) \quad . \quad (3.A.18)
\end{aligned}$$

Derivace distribucí jsou zavedeny standardním způsobem

$$\langle \nabla_a A_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n}, \tilde{\varphi}_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_n} \rangle = - \langle A_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n}, \nabla_a \tilde{\varphi}_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_n} \rangle \quad . \quad (3.A.19)$$

Pro metrickou konexi

$$\langle \nabla_a A_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n}, \varphi_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_n} \rangle_{\mathcal{D}'^m} = - \langle A_{a_1 \dots a_n}^{b_1 \dots b_n}, \nabla_a \varphi_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_n} \rangle_{\mathcal{D}'^m} \quad . \quad (3.A.20)$$

Nutno poznamenat, že je potřeba se mít velmi na pozoru při používání distribučních derivací. Neplatí například

$$\langle u^a \nabla_a A, \varphi \rangle \stackrel{\text{neplatí}}{=} - \langle A, u^a \nabla_a \varphi \rangle \quad ,$$

ale platí

$$\langle u^a \nabla_a A, \varphi \rangle = - \langle A, \nabla_a (u^a \varphi) \rangle \quad . \quad (3.A.21)$$

Je všeobecně známo, že na prostoru distribucí není obecně definováno násobení. Nelze například násobit delta-funkci se skokovou funkcí se skokem v lokalizaci delta-funkce, či dvě

delta-funkce lokalizované ve stejném bodě ¹⁴). Dále ne každá funkce je distribucí. Nap $\frac{1}{x} \hat{\Theta}(x)$ je neintegrovatelná v okolí $x=0$ ani v nějakém slabším smyslu ¹⁵). My se však přesto i s takovými výrazy setkáme a budeme nuceni s nimi pracovat. Tyto problémy lze částečně řešit různými regularizacemi - nahrazením problematického výrazu jiným, parametrizovaným výrazem, který je dobře definován a který při nějaké hodnotě (v našem případě nekonečné) regularizačního parametru vede k původnímu výrazu. S regularizovaným výrazem můžeme formálně počítat a může se stát, že konečný výsledek nebude záviset na parametru regularizace. Nutno mít ale na paměti, že měřitelné veličiny by neměly záviset nejen na parametru regularizace, ale na způsobu regularizace. V případě elektromagnetického pole jsme se setkali např. s výrazem typu

$$\frac{1}{x} \Theta(x) \quad , \quad (3.A.22)$$

který není dobře definován. Pokud zavedeme "oříznutí" v $\frac{1}{\eta}$, kde η je parametr regularizace, tj.

$$\frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta}) \quad , \quad (3.A.23)$$

nesmíme zapomenout, že při jiném "oříznutí" v bodě $\frac{1}{\eta'}$ (nekonečně blízkém k $\frac{1}{\eta}$) dostáváme výsledek konečně se lišící

¹⁴) Není myšlena konvoluce. Výraz $\delta(x-y)\delta(x-z)$ bez integrování přes x není definovaný, ale konvoluce

$$\int dx \delta(x-y) \delta(x-z) = \delta(y-z)$$

má dobrý smysl.

¹⁵) Pro funkci $\frac{1}{x}$ lze zavést dobře definovanou distribuci $\text{vp} \frac{1}{x}$

$$\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus \langle -\epsilon, \epsilon \rangle} \varphi(x) \frac{1}{x} dx \quad .$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta'}) - \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta}), \varphi \right\rangle &= \\
&= \int_{\frac{1}{\eta'}}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx - \int_{\frac{1}{\eta}}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx = \int_{\frac{1}{\eta'}}^{\frac{1}{\eta}} \frac{1}{x} (\varphi(0) + O[x]) dx = \\
&= \left[\varphi(0) \ln x + O[x] \right]_{\frac{1}{\eta'}}^{\frac{1}{\eta}} = \\
&= \varphi(0) \ln \frac{\eta'}{\eta} + O\left[\frac{1}{\eta'}\right],
\end{aligned} \tag{3.A.24}$$

tj.

$$\frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta'}) = \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta}) + \delta(x) \ln \frac{\eta'}{\eta} + O\left[\frac{1}{\eta'}\right]. \tag{3.A.25}$$

Tato nejednoznačnost musí pro výslednou veličinu vymizet.

Často však můžeme tuto nejednoznačnost odstranit přidáním dalšího členu, který zajistí invarianci celkového výrazu (alespoň do řádu $O[\eta^0]$). Doplníme-li například k (3.A.23) člen $-\delta(x) \ln \eta$, dostaneme výraz nezávislejší na způsobu regularizace (i když ještě obsahující parametr regularizace)

$$\frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta'}) - \delta(x) \ln \eta = \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta}) - \delta(x) \ln \eta' . \tag{3.A.26}$$

Můžeme zavést označení

$$\left[\frac{1}{x} \Theta(x) \right]_{\text{reg}} = \frac{1}{x} \Theta(x - \frac{1}{\eta}) - \delta(x) \ln \eta . \tag{3.A.27}$$

Obdobně pro funkce $\ln x \cdot \Theta(x)$ a $\frac{1}{x} \cdot \Theta(x)$ dostáváme ($\frac{1}{\eta}$ a $\frac{1}{\eta'}$ nekonečně blízké)

$$\ln x \cdot \Theta(x - \frac{1}{\eta}) - \ln x \cdot \Theta(x - \frac{1}{\eta'}) = O\left[\frac{\ln \eta'}{\eta'}\right], \tag{3.A.28}$$

$$\frac{1}{x^2} \Theta(x - \frac{1}{\eta}) - \frac{1}{x^2} \Theta(x - \frac{1}{\eta'}) = \delta(x) (\eta - \eta') - \delta'(x) \ln \frac{\eta'}{\eta} + O\left[\frac{1}{\eta'}\right], \tag{3.A.29}$$

tj. regularizačně invariantní do řádu $O[\eta^0]$ je výraz

$$\left[\frac{1}{x^2} \theta(x) \right]_{\text{reg}} = \frac{1}{x^2} \theta\left(x - \frac{1}{\eta}\right) - \eta \delta(x) + \ln \eta \delta'(x) \quad (3.A.30)$$

Příklady regularizace jsou ve výpočtu potenciálu elektromagnetického pole v paragrafu 3.3 a ve výpočtech linearizovaného gravitačního pole v paragrafu 3.4.

Nakonec ještě uvedeme Taylorův rozvoj delta-funkce

$$\delta(x+a) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \delta^{(m)}(x) a^m + O[a^{N+1}] \quad (3.A.31)$$

v následujícím smyslu

$$\begin{aligned} \langle \delta(x+a), \varphi(x) \rangle &= \langle \delta(x), \varphi(x-a) \rangle = \\ &= \varphi(-a) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} (-a)^m \varphi^{(m)}(x) + O[a^{N+1}] = \\ &= \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} (-a)^m \langle \delta(x), \varphi^{(m)}(x) \rangle + O[a^{N+1}] = \\ &= \left\langle \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} a^m \delta^{(m)}(x) + O[a^{N+1}], \varphi(x) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.A.32)$$

Dodatek 3.B Rozvoje některých funkcí

V kapitole 3 jsou často používané následující funkce

$$\begin{aligned} X &= a^2 + \varrho^2 + u\nu, \quad l = \frac{1}{2a} X, \\ \xi &= \sqrt{(a^2 + \varrho^2 + u\nu)^2 - 4a^2 u\nu}, \quad R = \frac{1}{2a} \xi = \sqrt{\varrho^2 - u\nu}. \end{aligned} \quad (3.B.1)$$

Jejich rozvoje pro malé u jsou

$$l = \frac{a^2 + \varrho^2}{2a} \left(1 + \frac{\nu}{a^2 + \varrho^2} u \right), \quad (3.B.2)$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{a^2 + \varrho^2}{2a} + \frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho^2 + a^2} \frac{\nu}{2a} u + \frac{\nu^2 (2a^2 \varrho^2 - (a^2 + \varrho^2)^2)}{4a(a^2 + \varrho^2)^2} u^2 + O[u^3] = \\ &= \frac{a^2 + \varrho^2}{2a} \left(1 + \frac{\varrho^2 - a^2}{(\varrho^2 + a^2)^2} \nu u + O[u^2] \right). \end{aligned} \quad (3.B.3)$$

Dále platí

$$\frac{1}{R} = \frac{2a}{a^2 + \varrho^2} \left(1 - \frac{\varrho^2 - a^2}{(\varrho^2 + a^2)^2} \nu u + O[u^2] \right), \quad (3.B.4)$$

$$\frac{R+l}{a} = \frac{a^2 + \varrho^2}{a^2} \left(1 + \frac{\varrho^2}{(\varrho^2 + a^2)^2} \nu u + O[u^2] \right), \quad (3.B.5)$$

$$\frac{D+l}{2R} = 1 + \frac{a^2}{(a^2 + \varrho^2)^2} \nu u + \frac{5(\varrho^2 - a^2)^2 \nu^2}{4(a^2 + \varrho^2)^4} u^2 + O[u^3], \quad (3.B.6)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R+l}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + \varrho^2}{2a} \left(1 + \frac{\nu u}{a^2 + \varrho^2} + \frac{a^2 \nu^2}{(a^2 + \varrho^2)^3} u^2 + O[u^3] \right), \quad (3.B.7)$$

$$Y \equiv \frac{X}{\xi^2} (X^2 - 6a^2 u\nu) = 1 + O[u^2]. \quad (3.B.8)$$

Zajímají nás dále hodnoty těchto funkcí na budoucím světelném kuželu události \mathcal{P} . Souřadnice události \mathcal{P} jsou

$$u_- = \frac{a}{\gamma}, \quad v = a\gamma, \quad x_- = y_- = 0. \quad (3.B.9)$$

Je výhodné zavést soustavu $'u, 'v$, v které má událost \mathcal{P} souřadnice $'u=a$, $'v=a$ (viz. obr. 3.3)

$$\begin{aligned} 'u &= \gamma u, & 'x &= x, \\ 'v &= \frac{1}{\gamma} v, & 'y &= y. \end{aligned} \quad (3.B.10)$$

Souřadnice $'t, 'z$ a radiální souřadnice $'r$ kolem středu $'z=0$, $x, y = 0$ jsou dány

$$\begin{aligned} 't &= \frac{1}{2}('u - 'v) = \frac{1}{2}\left(\gamma u - \frac{1}{\gamma} v\right), \\ 'z &= \frac{1}{2}('u + 'v) = \frac{1}{2}\left(\gamma u + \frac{1}{\gamma} v\right), \\ 'r &= \sqrt{\rho^2 + ('z - a)^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma u + \frac{1}{2\gamma} v - a\right)^2} > 0. \end{aligned} \quad (3.B.11)$$

Interval mezi událostí a v těchto souřadnicích je dán

$$S^2 = -'t^2 + 'r^2, \quad (3.B.12)$$

Světelný kužel budoucnosti události \mathcal{P} je tedy dán rovnicí

$$('t - 'r)|_{\mathcal{P}} = 0, \quad (3.B.13)$$

kde zápis $f|_{\mathcal{P}}$ značí funkci f vyčíslenou na povrchu světelného kuželu budoucnosti události \mathcal{P} . Pospojováním těchto vztahů dostáváme

$$u|_{\mathcal{P}} = \frac{'r + 'z}{\gamma}|_{\mathcal{P}} = \frac{\rho^2}{(\gamma a - v)} + \frac{a}{\gamma}. \quad (3.B.14)$$

Vidíme, že $(t-r)|_* = 0$ se pro $\eta \rightarrow \infty$ redukuje na $u|_* = 0$. Dále platí

$$v|_* = (z-r)|_* \quad , \quad (3.B.15)$$

$$uv|_* = (2za - a^2 - \rho^2)|_* \quad , \quad (3.B.16)$$

$$l|_* = z|_* = \left(\frac{\eta \rho^2}{2(a\eta - v)} - \frac{1}{2\eta} (a\eta - v) + a \right) |_* \quad , \quad (3.B.17)$$

$$r|_* = r|_* = \left(\frac{\eta \rho^2}{2(a\eta - v)} + \frac{1}{2\eta} (a\eta - v) \right) |_* \quad , \quad (3.B.18)$$

$$(l+r)|_* = \frac{\eta \rho^2}{(a\eta - v)} |_* + a = \eta u|_* \quad , \quad (3.B.19)$$

$$(l-r)|_* = -\frac{1}{\eta} (a\eta - v) |_* + a - \frac{v}{\eta} |_* \quad , \quad (3.B.20)$$

$$\left(1 + \frac{z-a}{r}\right) |_* = \frac{\rho^2}{r(a - \frac{v}{\eta})} |_* \quad , \quad (3.B.21)$$

$$\left(1 - \frac{z-a}{r}\right) |_* = \frac{a - \frac{v}{\eta}}{r} |_* \quad . \quad (3.B.22)$$

Rozvoje pro velká η jsou

$$u|_* = \frac{a^2 + \rho^2}{a\eta} \left(1 + \frac{\rho^2}{(a^2 + \rho^2)} \frac{v}{a\eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right) \quad , \quad (3.B.23)$$

$$l|_* = \frac{a^2 + \rho^2}{2a} \left(1 + \frac{v}{a\eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right) \quad , \quad (3.B.24)$$

$$r|_* = \frac{a^2 + \rho^2}{2a} \left(1 + \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2} \frac{v}{a\eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right) \quad , \quad (3.B.25)$$

$$(l+r)|_* = \frac{a^2 + \rho^2}{a} \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2 + \rho^2} \frac{v}{a\eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right) \quad , \quad (3.B.26)$$

$$(l-r)|_* = \frac{v}{\eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \quad , \quad (3.B.27)$$

$$Y|_* = 1 + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \quad . \quad (3.B.28)$$

Zavedeme-li dále souřadnice ${}^{(b)}u, {}^{(b)}\nu$ (obr. 3.5)

$${}^{(b)}u = D - \nu, \quad {}^{(b)}\nu = D - u \quad (3.B.29)$$

a konvenci (3.4.14). Pak z požadavků

$$u - \nu = a^2, \quad {}^{(b)}u - {}^{(b)}\nu = b^2 \quad (3.B.30)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} D &= a \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)^2 a^2 + b^2 - a^2} = \\ &= b \frac{1}{2} \left({}^{(b)}\eta + \frac{1}{{}^{(b)}\eta} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left({}^{(b)}\eta + \frac{1}{{}^{(b)}\eta} \right)^2 b^2 + a^2 - b^2} \end{aligned} \quad (3.B.31)$$

Z toho

$${}^{(b)}\eta = \frac{1}{b} D - \frac{a}{b} \frac{1}{\eta} \quad (3.B.32)$$

a rozvojem pro velká η

$$D = a \eta \left(1 + \frac{b^2}{a^2 \eta^2} + O\left[\frac{1}{\eta^3}\right] \right), \quad (3.B.33)$$

$${}^{(b)}\eta = \frac{a}{b} \eta \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \frac{1}{\eta^2} + O\left[\frac{1}{\eta^3}\right] \right), \quad (3.B.34)$$

$${}^{(b)}u|_x = a \eta \left(1 - \frac{\nu}{a \eta} + \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\eta^2} + O\left[\frac{1}{\eta^3}\right] \right), \quad (3.B.35)$$

$${}^{(b)}\nu|_x = a \eta \left(1 + \frac{b^2 - a^2 - \nu^2}{a^2} \frac{1}{\eta^2} + O\left[\frac{1}{\eta^3}\right] \right), \quad (3.B.36)$$

$${}^{(b)}l|_x = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \eta^2 \left(1 - \frac{\nu}{a \eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right), \quad (3.B.37)$$

$${}^{(b)}p|_x = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \eta^2 \left(1 - \frac{\nu}{a \eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right), \quad (3.B.38)$$

$$({}^{(b)}l - {}^{(b)}p)|_x = \frac{{}^{(b)}\nu}{{}^{(b)}\eta}|_x = b \left(1 - \frac{\nu^2}{a^2 \eta^2} + O\left[\frac{1}{\eta^3}\right] \right), \quad (3.B.39)$$

$${}^{(b)}u^{(b)}v|_* = a^2 \eta^2 \left(1 - \frac{v}{a\eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right]\right), \quad (3.B.40)$$

$${}^{(b)}\psi|_* = 1 + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right]. \quad (3.B.41)$$

Na závěr ukážeme, že linearizovaná metrika h daná v (3.4.33) je spojitá na nadploše $t - r = 0$. Použitím identity (3.4.26), vztahů (3.4.25), (3.B.19), (3.B.20) a (3.4.18) dostaneme

$$\begin{aligned} \left(b \frac{{}^{(b)}R + {}^{(b)}l}{{}^{(b)}u \eta} - \frac{{}^{(b)}v}{\eta}\right)|_* &= \left(\frac{{}^{(b)}u}{\eta} - b \frac{{}^{(b)}l - {}^{(b)}R}{{}^{(b)}v \eta}\right)^{-1}|_* = \\ &= \frac{1}{\eta} \left({}^{(b)}u - b \frac{1}{{}^{(b)}\eta}\right)^{-1}|_* = \frac{1}{\eta} \left({}^{(b)}u - {}^{(b)}u\right)^{-1}|_* = \\ &= \frac{1}{\eta} (v - v)^{-1}|_* \quad ; \end{aligned} \quad (3.B.42)$$

$$\left(a \frac{{}^{(a)}R + l}{{}^{(a)}u \eta} - \frac{v}{\eta}\right)|_* = \frac{1}{\eta} (a\eta - v)|_* = \frac{1}{\eta} (v - v) \quad (3.B.43)$$

Využitím tohoto, (3.B.18) a opětovým použitím (3.B.19) a (3.B.20) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \left({}^{(a)}h + {}^{(b)}h\right)|_* &= \left(\frac{a}{4r} \eta^2 du^2 + \frac{a}{4r} \frac{1}{\eta^2} dv^2 + \frac{a}{2r} g + \right. \\ &\left. + \frac{b}{4r} \eta^2 d{}^{(b)}u^2 + \frac{b}{4r} \frac{1}{\eta^2} d{}^{(b)}v^2 + \frac{b}{2r} g\right)|_* \quad (3.B.44) \end{aligned}$$

Obdobně (viz. (3.B.18))

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \left({}^{(a)}h + {}^{(b)}h\right)|_* &= \left(\frac{a}{4r} \eta^2 du^2 + \frac{a}{4r} \frac{1}{\eta^2} dv^2 + \frac{a}{2r} g + \right. \\ &\left. + \frac{b}{4r} \eta^2 d{}^{(b)}u^2 + \frac{b}{4r} \frac{1}{\eta^2} d{}^{(b)}v^2 + \frac{b}{2r} g\right)|_* \quad (3.B.45) \end{aligned}$$

Z (3.B.44) a (3.B.45) vidíme, že metrika h daná v okolí

' π -' $t=0$ výrazem

$$h = \left({}^{\text{acc}}_{\text{ci}} h + {}^{\text{acc}}_{\text{ci}} h \right) \Theta(t - \pi) + \left({}^{\text{an}}_{\text{ci}} h + {}^{\text{an}}_{\text{ci}} h \right) \Theta(\pi - t) \quad (3.B.46)$$

je na ' π -' $t=0$ spojitá.

Dodatek 3.C Výpočet Riemannova tenzoru ${}^{acc}R$ a ${}^{un}R$

Budeme hledat linearizovaný Riemannův tenzor křivosti metriky

$$\begin{aligned}
 {}^{acc}h &= h_{\tau\tau} (d\tau^2 + \frac{a^2}{N^2} d\tilde{z}^2) + h_{\tau\tilde{z}} d\tau d\tilde{z} + \frac{1}{2} h^{(\omega)} g \quad , \\
 h_{\tau\tilde{z}} &= L \frac{\chi}{2a\tilde{z}} \quad , \\
 h_{\tau\tau} &= L \frac{1}{2a^2\xi} (\chi^2 - 2a^2\tilde{z}^2) \quad , \\
 h &= L \left(\frac{2a^2}{\xi} - 2 \ln \left(\frac{\chi + \xi}{2a^2} - \frac{\tilde{z}^2}{a^2} \right) + 2 \ln \frac{N}{a} + 2 \frac{\tau}{a} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3.C.1}$$

Derivováním a využitím

$$\begin{aligned}
 \partial d\tau &= -\frac{1}{N} d\tilde{z} \nu d\tau \quad , \quad \partial d\tilde{z} = -\frac{N}{a^2} d\tau d\tau \quad , \\
 \partial d\varphi &= -\frac{1}{\varphi} d\varphi \nu d\varphi \quad , \quad \partial d\varrho = \varrho d\varphi d\varphi \quad , \\
 \partial(d\tau d\tilde{z}) &= -\frac{1}{N} d\tau \nu d\tilde{z} d\tilde{z} - \frac{N}{a^2} d\tau d\tau d\tau \quad , \\
 \partial(d\tau d\varrho) &= -\frac{1}{N} d\tau \nu d\tilde{z} d\varrho + \varrho d\varphi d\tau d\varphi \quad , \\
 \partial(d\tilde{z} d\varrho) &= -\frac{N}{a^2} d\tau d\tau d\varrho + \varrho d\varphi d\tilde{z} d\varphi \quad , \\
 \partial(d\varrho d\varphi) &= \varrho d\varphi d\varphi d\varphi - \frac{1}{\varphi} d\varphi d\varrho d\varrho - \frac{1}{\varphi} d\varrho d\varrho d\varphi \quad , \\
 \partial(d\tau d\tau) &= -\frac{1}{N} d\tau \nu d\tilde{z} d\tau - \frac{1}{N} d\tau d\tau d\tilde{z} - \frac{1}{N} d\tilde{z} d\tau d\tau \quad , \\
 \partial(d\tilde{z} d\tilde{z}) &= -\frac{N}{a^2} d\tau d\tau d\tilde{z} - \frac{N}{a^2} d\tau d\tilde{z} d\tau
 \end{aligned}
 \tag{3.C.2}$$

dostáváme v oblasti $\omega > 0, \varrho > 0$ (viz. poznámka ⁸) na straně 67)

$$\begin{aligned}
 {}^{acc}Q_{abc} &= \partial_{[a} {}^{acc}h_{b]c} = \\
 &= d_{[a} \tau d_{b]} \tilde{z} d_c \tau (-h_{\tau\tau, \tilde{z}}) + \\
 &+ d_{[a} \tau d_{b]} \varrho d_c \tau (-h_{\tau\tau, \varrho}) + \\
 &+ d_{[a} \tilde{z} d_{b]} \varrho d_c \tau (-h_{\tau\tilde{z}, \varrho}) + \\
 &+ d_{[a} \tau d_{b]} \tilde{z} d_c \tilde{z} \left(-h_{\tau\tilde{z}, \tilde{z}} - \frac{1}{2\tilde{z}^2} h_{\tau\tilde{z}}\right) + \\
 &+ d_{[a} \tau d_{b]} \varrho d_c \tilde{z} (-h_{\tau\tilde{z}, \varrho}) + \\
 &+ d_{[a} \tilde{z} d_{b]} \varrho d_c \tilde{z} \left(-\frac{\varrho^2}{\tilde{z}^2} h_{\tau\tau, \varrho}\right) + \\
 &+ d_{[a} \tau {}^{(2)}g_{b]c} \quad \frac{1}{2} h_{, \tau} + \\
 &+ d_{[a} \tilde{z} {}^{(2)}g_{b]c} \quad \frac{1}{2} h_{, \tilde{z}} + \\
 &+ d_{[a} \varrho d_{b]} \varphi d_c \varphi \quad \frac{1}{2} \varrho^2 h_{, \varrho} \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.C.3}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{acc}R_{abcd} &= 2 \partial_{[a} {}^{acc}Q_{b]cd} = \\
 &= d\tau \wedge d\tilde{z} d\tau \wedge d\tilde{z} \left(-h_{\tau\tau, \tilde{z}\tilde{z}} + \frac{1}{2} h_{\tau\tau, \tilde{z}}\right) + \\
 &+ d\tau \wedge d\varrho d\tau \wedge d\varrho \left(-h_{\tau\tau, \varrho\varrho} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{z}^2}{\varrho^2} h_{, \tilde{z}}\right) + \\
 &+ d\tau \wedge d\varphi d\tau \wedge d\varphi \left(-\varrho h_{\tau\tau, \varrho} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{z}^2}{\varrho^2} \varrho^2 h_{, \tilde{z}}\right) + \\
 &+ d\tilde{z} \wedge d\varrho d\tilde{z} \wedge d\varrho \left(-\frac{\varrho^2}{\tilde{z}^2} h_{\tau\tau, \varrho\varrho} - \frac{1}{2} h_{, \tilde{z}\tilde{z}}\right) + \\
 &+ d\tilde{z} \wedge d\varphi d\tilde{z} \wedge d\varphi \left(-\frac{\varrho^2}{\tilde{z}^2} \varrho h_{\tau\tau, \varrho} - \frac{1}{2} \varrho^2 h_{, \tilde{z}\tilde{z}}\right) + \\
 &+ d\varrho \wedge d\varphi d\varrho \wedge d\varphi \left(-\frac{1}{2} \varrho^2 h_{, \varrho\varrho} - \frac{1}{2} \varrho h_{, \varrho}\right) + \\
 &+ (d\tau \wedge d\tilde{z} d\tau \wedge d\varrho + \omega) (-h_{\tau\tau, \varrho\tilde{z}}) + \\
 &+ (d\tau \wedge d\varrho d\tilde{z} \wedge d\varrho + \omega) \left(-h_{\tau\tilde{z}, \varrho\varrho} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{z}^2} h_{, \tau}\right) + \\
 &+ (d\tau \wedge d\varphi d\tilde{z} \wedge d\varphi + \omega) \left(-\varrho h_{\tau\tilde{z}, \varrho} + \frac{1}{2\tilde{z}} \varrho^2 h_{, \tau}\right) + \\
 &+ (d\tilde{z} \wedge d\varphi d\varrho \wedge d\varphi + \omega) \left(-\frac{1}{2} \varrho^2 h_{, \tilde{z}\varrho}\right)
 \end{aligned} \tag{3.C.4}$$

Nyní již zbývají jen dlouhé a úmorné výpočty derivací funkcí $h_{\tau\tau}$, $h_{\tau\bar{z}}$, h . Výsledky jsou

$$\chi_{,z} = 2\bar{z} \quad , \quad \chi_{,z} = 2\bar{z} \quad ,$$

$$\xi_{,z} = \frac{2}{f} (-a^2 - \rho^2 + z^2) \bar{z} \quad , \quad \xi_{,z} = \frac{2\chi_0}{f} \quad ,$$

$$h_{\tau\bar{z},\rho} = L \frac{\rho}{a\bar{z}} \quad ,$$

$$h_{\tau\bar{z},\rho\rho} = L \frac{1}{a\bar{z}} \quad ,$$

$$h_{,\tau} = L \frac{2}{a}$$

$$h_{,z} = L \frac{2\chi}{f^3 \bar{z}} (X^2 - 6a^2 \bar{z}^2) + \frac{8a^2 \bar{z}}{f^3} \quad ,$$

$$h_{,z} = -L \frac{4a^2 \rho^2 \chi}{f^3} - L \frac{2}{f\rho} (-a^2 + \rho^2 + z^2) \quad , \quad (3.C.5)$$

$$h_{,\rho\bar{z}} = L \frac{48a^4 \rho \bar{z}}{f^5} (-a^2 - \rho^2 + z^2) \quad ,$$

$$(\rho h_{,z})_{,\rho} = L \frac{2 \cdot 12 a^4 \rho^2 \bar{z}^2}{f^5} - L \frac{16a^4 \rho}{f^3} \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,\rho} = L \frac{\chi \rho}{a^2 f^3} (X^2 - 6a^2 \bar{z}^2) \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,\rho\rho} = L \frac{48a^2 \rho^2 \bar{z}^4}{f^5} + L \frac{\chi}{a^2 f^3} (X^2 - 6a^2 \bar{z}^2) \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,\bar{z}} = L \frac{\chi \bar{z}}{a^2 f^3} (X^2 - 6a^2 \bar{z}^2) + L \frac{4a^2 \bar{z}^3}{f^3} \quad ,$$

$$h_{\tau\tau,\bar{z}\bar{z}} = L \frac{12a^2 \bar{z}^2}{f^5} (\bar{z}^2 - a^2 - \rho^2) + L \frac{\chi}{a^2 f^3} (X^2 - 6a^2 \bar{z}^2) \quad ,$$

$$h_{,z\bar{z}} = -L \frac{8 \cdot 12 a^4 \rho^2 \bar{z}^2}{f^5} - L \frac{2\chi}{f^2 \bar{z}^2} (X^2 - 6a^2 \bar{z}^2) + L \frac{8a^4}{f^3} \quad .$$

Dosažením do (3.C.4) dostaneme pro nenulové složky

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} R_{\tau\bar{\tau}\rho\bar{\rho}} &= \frac{24a^2 \rho^2 \bar{z}^4}{\xi^5} - \frac{4a^2 \bar{z}^4}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\tau\bar{\tau}\tau\bar{\tau}} &= -\frac{12a^2 \rho^2 \bar{z}^2}{\xi^5} (-a^2 - \rho^2 + \bar{z}^2), \\
 \frac{1}{L} R_{\tau\bar{\tau}\rho\bar{\rho}} &= -\frac{24a^2 \rho^2 \bar{z}^4}{\xi^5} + \frac{2a^2 \bar{z}^2}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\tau\bar{\tau}\rho\bar{\rho}} &= \frac{2a^2 \rho^2 \bar{z}^2}{\xi^3}, \\
 \frac{1}{L} R_{\bar{\tau}\rho\bar{\tau}\rho} &= \frac{24a^2 \rho^4 \bar{z}^2}{\xi^5} - \frac{2a^4 \rho^2}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\bar{\tau}\rho\bar{\tau}\rho} &= -\frac{2a^4}{\xi^3}, \\
 \frac{1}{L} R_{\rho\bar{\rho}\rho\bar{\rho}} &= -\frac{24a^4 \rho^4 \bar{z}^2}{\xi^5} - \frac{4a^4 \rho^2}{\xi^3}, & \frac{1}{L} R_{\bar{\tau}\rho\bar{\tau}\rho} &= -\frac{12a^4 \rho^4 \bar{z}^2}{\xi^5} + \frac{4a^4 \rho^2}{\xi^3}.
 \end{aligned} \tag{3.C.6}$$

Transformací do souřadného systému u, v dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} R_{uvuv} &= -\frac{3\rho v}{32aR^5} (-a^2 - \rho^2 + uv), & \frac{1}{L} R_{uvuv} &= -\frac{3\rho^2 v^2}{16a^2 \bar{z}^5}, \\
 \frac{1}{L} R_{uvuv} &= \frac{3\rho u}{32aR^5} (-a^2 - \rho^2 + uv), & \frac{1}{L} R_{uvuv} &= -\frac{3\rho^2 u^2}{16a^2 R^5}, \\
 \frac{1}{L} R_{uvuv} &= -\frac{3\rho^2 v}{16aR^5} (-a^2 - \rho^2 + uv), & \frac{1}{L} R_{uvuv} &= \frac{3\rho^4 v^2}{16a^2 R^5}, \\
 \frac{1}{L} R_{uvuv} &= -\frac{3\rho^2 u}{16aR^5} (-a^2 - \rho^2 + uv), & \frac{1}{L} R_{uvuv} &= \frac{3\rho^4 u^2}{16a^2 R^5}, \\
 \frac{1}{L} R_{uvuv} &= \frac{3\rho^2 uv}{16aR^5} - \frac{a}{8R^2}, & \frac{1}{L} R_{\rho\bar{\rho}\rho\bar{\rho}} &= -\frac{3\rho^4 uv}{4aR^5} + \frac{\rho^2 a}{2R^2}, \\
 \frac{1}{L} R_{uvuv} &= \frac{3\rho^4 uv}{16aR^5} - \frac{a\rho^2}{8R^2}, & \frac{1}{L} R_{uvuv} &= \frac{3\rho^2 uv}{16a^2 R^5} - \frac{a^2}{8R^2}.
 \end{aligned} \tag{3.C.7}$$

Dále spočteme linearizovaný Riemannův tenzor křivosti ${}^{un}R$ metriky částice stojící v $z=a, x, y=0$. Vycházíme z metriky

$${}^{un}h = \frac{1}{2} \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2} du^2 + \frac{1}{2} dv^2 + {}^{un}g \right), \tag{3.C.8}$$

kde

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}, \quad z = \frac{1}{2}(u+iv). \tag{3.C.9}$$

Platí

$$d\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3}(\varrho d\varrho + (z-a)dz) \quad , \quad (3.C.10)$$

$$\partial(d\frac{1}{R}) = \frac{3}{R^5}(\varrho d\varrho + (z-a)dz)(\varrho d\varrho - (z-a)dz) - \frac{1}{R^3}(\varrho^2 + dz^2) \quad .$$

Odtud přímým vyčíslením

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} {}^{un}Q_{abc} &= \frac{1}{L} \partial_{[a} {}^{un}h_{b]c} = d_a u \wedge d_b \varrho d_c u \quad \frac{1}{2} \frac{a\varrho}{4R^3} + \\ &+ d_a v \wedge d_b \varrho d_c v \quad \frac{1}{2} \frac{a\varrho}{4R^3} + \\ &+ d_a u \wedge d_b v d_c u \quad \frac{1}{4} \frac{a(z-a)}{4R^3} + \\ &+ d_a u \wedge d_b v d_c v \quad \left(-\frac{1}{4} \frac{a(z-a)}{4R^3}\right) + \\ &+ d_a u \wedge d_b \varrho d_c \varrho \quad \left(-\frac{1}{2} \frac{a(z-a)}{4R^3}\right) + \\ &+ d_a v \wedge d_b \varrho d_c \varrho \quad \left(-\frac{1}{2} \frac{a(z-a)}{4R^3}\right) + \\ &+ d_a \varrho \wedge d_b \varphi d_c \varphi \quad \left(-\frac{\varrho^2 a}{4R^3}\right) + \\ &+ d_a u \wedge d_b \varphi d_c \varphi \quad \left(-\frac{1}{2} \frac{a(z-a)\varrho^2}{4R^3}\right) + \\ &+ d_a v \wedge d_b \varphi d_c \varphi \quad \left(-\frac{1}{2} \frac{a(z-a)\varrho^2}{4R^3}\right) \quad , \end{aligned} \quad (3.C.11)$$

$${}^{un}R_{u\varrho u\varrho} = {}^{un}R_{\varrho u \varrho u} = -L \frac{3\varrho^2 a}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{u\varrho v\varrho} = {}^{un}R_{v\varrho u\varrho} = L \left(-\frac{3(z-a)^2 a}{R^5} + \frac{a}{R^3} \right) \quad ,$$

$${}^{un}R_{uvu\varrho} = -{}^{un}R_{uv\varrho u} = -L \frac{3(z-a)a\varrho}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{u\varphi u\varphi} = {}^{un}R_{\varphi u \varphi u} = L \frac{3\varrho^4 a}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{u\varphi v\varphi} = {}^{un}R_{v\varphi u\varphi} = -L \frac{6\varrho^3(z-a)a}{R^5} \quad ,$$

$${}^{un}R_{\varrho\varphi\varphi\varphi} = L \left(-\frac{12\varrho^3 a}{R^5} + \frac{8\varrho^2 a}{R^3} \right) \quad , \quad {}^{un}R_{u\varphi\varphi\varphi} = L \left(-\frac{3\varrho^3(z-a)}{R^5} + \frac{a\varrho^2}{R^3} \right) \quad .$$

(3.C.12)

Dodatek 3.D Distribuční limity některých funkcí

Nejdříve nalezneme distribuční limitu funkcí

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{r} \theta(u|_* - u) \quad , \quad \frac{1}{r^3} \theta(u|_* - u) \quad , \\ \frac{\eta^2}{r^5} \theta(u|_* - u) \quad , \quad \frac{(z-a)\eta}{r^5} \theta(u|_* - u) \end{aligned} \quad (3.D.1)$$

pro $\eta \rightarrow \infty$. Zde (viz. (3.B.23))

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2} \quad , \\ z &= \frac{1}{2} \left(\eta u + \frac{1}{\eta} v \right) \quad , \\ u|_* &= \frac{a^2 + \rho^2}{a\eta} \left(1 + \frac{\rho^2}{(a^2 + \rho^2)} \frac{v}{a\eta} + O\left[\frac{1}{\eta^2}\right] \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.D.2)$$

Pro $u = \mathcal{U}[\eta^0]$ ¹⁶⁾ máme

$$\frac{\eta}{r} = \frac{1}{|u|} + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \quad . \quad (3.D.3)$$

V blízkosti $u=0$ může však být chování jiné. Zkoumejme tedy funkci

$$S(u) = \frac{\eta}{r} \theta(u|_* - u) - \frac{1}{|u|} \theta\left(-\frac{a}{\eta} - u\right) \quad , \quad (3.D.4)$$

která je lokalizovaná v oblasti $u=0$ (pro η nekonečné). Pro libovolnou testovací funkci $\varphi(u)$ můžeme psát

¹⁶⁾ $a = O[\eta^0]$ znamená, že $\frac{a}{\eta^0}$ je nejvýše konečné číslo. $a = \mathcal{U}[\eta^0]$ znamená, že $\frac{1}{a} = O\left[\frac{1}{\eta}\right]$, tj. $\frac{\eta^0}{a}$ je nejvýše konečné. Tedy $a = \mathcal{U}[\eta^0]$ znamená $a \neq O\left[\frac{1}{\eta}\right]$.

$$\int du S(u) \varphi(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \int_{u=A}^{u=B} u^m S(u) du + O\left[\frac{1}{\eta}\right], \quad (3.D.5)$$

kde jsme využili toho, že $S(u) = O\left[\frac{1}{\eta}\right]$ pro $u = U[\eta^0]$ a že pro $u = O\left[\frac{1}{\eta}\right]$ lze $\varphi(u)$ nahradit jejím rozvojem v u . Integrační meze A, B jsou zvoleny konečné, což lze zvolit díky vlastnostem testovací funkce (např. kompaktní nosič). Dále platí

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=B} du \frac{u^m}{\eta} &= \frac{2^{m+1}}{\eta^{m+1}} \int_{u=A}^{u=B} \frac{(z - \frac{u}{2\eta})^m}{(\eta^2 + (z-a)^2)^{\frac{m+1}{2}}} d(z-a) = \\ &= \frac{2^{m+1}}{\eta^{m+1}} \int_{u=A}^{u=B} \frac{(z-a)^m}{(\eta^2 + (z-a)^2)^{\frac{m+1}{2}}} d(z-a) \left(1 + O\left[\frac{1}{\eta}\right]\right) = \\ &= \frac{2^{m+1}}{\eta^{m+1}} \int_{u=A}^{u=B} \eta^m \operatorname{sh}^m \vartheta \, d\vartheta, \end{aligned} \quad (3.D.6)$$

kde jsme užili substituce

$$(z-a) = \eta \operatorname{sh} \vartheta. \quad (3.D.7)$$

Integraci per partes dostaneme

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^m \vartheta \, d\vartheta &= \frac{1}{m} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-1} \vartheta - \frac{m-1}{m(m-2)} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-3} \vartheta + \dots \\ &\dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-1)(m-3)\dots 2}{m(m-2)\dots 1} \operatorname{ch} \vartheta \end{aligned} \quad \text{pro } m \text{ liché,} \quad (3.D.8)$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^m \vartheta \, d\vartheta &= \frac{1}{m} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-1} \vartheta - \frac{m-1}{m(m-2)} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-3} \vartheta + \dots \\ &\dots - \frac{(m-1)\dots 3}{m(m-2)\dots 2} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh} \vartheta + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{(m-1)(m-3)\dots 1}{m(m-2)\dots 2} \vartheta \end{aligned} \quad \text{pro } m \text{ sudé.}$$

Uvážíme-li řád mezi integrování $A = O[\eta^0]$ a $b = O\left[\frac{1}{\eta}\right]$, tak

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \vartheta|_{u=A} &= \frac{z-a}{\eta} \Big|_{u=A} = O[\eta], \quad \operatorname{sh} \vartheta|_{u=b} = O[\eta^0], \\ \operatorname{ch} \vartheta|_{u=A} &= \sqrt{1 + \left(\frac{z-a}{\eta}\right)^2} \Big|_{u=A} = O[\eta], \quad \operatorname{ch} \vartheta|_{u=b} = O[\eta^0]. \end{aligned} \quad (3.D.9)$$

Po dosazení do (3.D.6) dostaneme pro $m > 0$

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=b} \frac{u^m}{|R|} &= \frac{2^{m+1} \varrho^m}{m \eta^{m+1}} \operatorname{ch} \vartheta \operatorname{sh}^{m-1} \vartheta \Big|_{u=A} (1 + O[\frac{1}{\eta}]) = \\ &= -\frac{1}{m \eta} |u| u^{m-1} \Big|_{u=A} (1 + O[\frac{1}{\eta}]) = \\ &= \frac{1}{m \eta} A^m (1 + O[\frac{1}{\eta}]) . \end{aligned} \quad (3.D.10)$$

Obdobně pro $m < 0$, $A = O[\eta^\alpha] < 0$ a $b = O[\frac{1}{\eta}] < 0$ máme

$$\int_{u=A}^{u=b} \frac{u^m}{|u|} du = -\frac{1}{m} [u^m]_{u=A}^{u=b} = \frac{1}{m} A^m (1 + O[\frac{1}{\eta}]) . \quad (3.D.11)$$

Dosadíme (3.D.10) a (3.D.11) do (3.D.5)

$$\begin{aligned} \int S \varphi du &= \varphi(0) \int_{u=A}^{u=b} S du + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \left(\int_{u=A}^{u=ub} \frac{u^m \eta}{|R|} - \int_{u=A}^{u=\frac{a}{\eta}} \frac{u^m}{|u|} \right) = \\ &= \varphi(0) \left(\int_{u=A}^{u=ub} \frac{1}{|R|} - \int_{u=A}^{u=\frac{a}{\eta}} \frac{1}{|u|} \right) + O[\frac{1}{\eta}] = \\ &= \varphi(0) \left([\operatorname{arsh} \frac{z-a}{\varrho}]_{u=A}^{u=ub} + [\ln \frac{|u|}{a}]_{u=A}^{u=\frac{a}{\eta}} \right) + O[\frac{1}{\eta}] = \\ &= \varphi(0) \left(\ln \left(\frac{z-a}{\varrho} + \sqrt{1 + \left(\frac{z-a}{\varrho} \right)^2} \right) \Big|_{u=ub} + \ln \left(\frac{z-a}{\varrho} + \sqrt{1 + \left(\frac{z-a}{\varrho} \right)^2} \right) \Big|_{u=A} \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{1}{\eta} - \ln \frac{|A|}{a} \right) + O[\frac{1}{\eta}] = \\ &= \varphi(0) \left(\ln \left(\frac{\varrho^2 - a^2}{2a\varrho} + \frac{\varrho^2 + a^2}{2a\varrho} \right) + \ln \frac{|A|\eta}{\varrho} + \ln(1 + O[\frac{1}{\eta}]) - \ln \frac{|A|\eta}{a} \right) + O[\frac{1}{\eta}] = \\ &= O[\frac{1}{\eta}] \end{aligned} \quad (3.D.12)$$

Dostáváme tedy

$$\frac{\eta}{|R|} O(u-ub) = \frac{1}{|u|} O(-\frac{a}{\eta} - u) + O[\frac{1}{\eta}] \quad (3.D.13)$$

a obě funkce můžeme při nekonečném η ztotožnit.

Funkce $\frac{1}{z^3}$, $\frac{z^2}{z^5}$, $\frac{z(z-a)}{z^5}$ jsou pro $u = \mathcal{O}[\frac{1}{z}]$ řádu $\mathcal{O}[\frac{1}{z}]$. Zbývá vyšetřit chování v okolí $u=0$. Můžeme psát

$$\int_{u=A}^{u=B} \frac{u^m}{z^3} du = \frac{2^{m+1}}{z^{m+1}} \int_{|z-a|=O[\frac{1}{z}]}^{(|z-a|=O[\frac{1}{z}])} d(|z-a|) \frac{((z-a)+a-\frac{1}{z})^m}{(\rho^2 + (z-a)^2)^{3/2}} \quad (3.D.14)$$

Pro $m \geq 2$ je zřejmě dominantní chování v oblasti velkých hodnot $(z-a)$. Zde můžeme integrand změnit - v čitateli ponechat pouze nejvyšší mocninu v $(z-a)$ a ve jmenovateli $|z-a|^3$, tj.

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=B} du \frac{u^m}{z^3} &= \frac{2^{m+1}}{z^{m+1}} \int_{|z-a|=O[\frac{1}{z}]}^{(|z-a|=O[\frac{1}{z}])} \frac{(z-a)^m}{|z-a|^3} d(|z-a|) (1 + \mathcal{O}[\frac{1}{z}]) = \\ &= \frac{1}{z^{m+1}} (\mathcal{O}[z^{m-2}] + \mathcal{O}[\ln z]) = \\ &= \mathcal{O}[\frac{1}{z^2}] \quad \text{pro } m \geq 2 \end{aligned} \quad (3.D.15)$$

Obdobně

$$\int_{u=A}^{u=B} du \frac{u^m}{z^5} = \mathcal{O}[\frac{1}{z^4}] \quad \text{pro } m \geq 4 \quad (3.D.16)$$

Pro malé m máme přesným zintegrováním (viz. např. [45] 2.271-2.273)

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=B} du \frac{u^m}{z^3} &= \frac{2}{z} \left[\frac{1}{z^2} \frac{z-a}{z} \right]_{u=A}^{u=B} \quad \text{pro } m=0, \\ &= \frac{4}{z^2} \left[\frac{a}{z^2} \frac{z-a}{z} - \frac{1}{z} \right]_{u=A}^{u=B} (1 + \mathcal{O}[\frac{1}{z}]) = \mathcal{O}[\frac{1}{z^2}] \quad \text{pro } m=1, \end{aligned} \quad (3.D.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{u=A}^{u=B} du \frac{u^m}{z^5} &= \frac{2}{z} \left[\frac{1}{z^4} \left(\frac{z-a}{z} - \frac{1}{3} \frac{(z-a)^2}{z^2} \right) \right]_{u=A}^{u=B} \quad \text{pro } m=0, \\ &= \frac{4}{z^2} \left[-\frac{1}{3z^3} + \frac{a}{z^4} \left(\frac{z-a}{z} - \frac{1}{3} \frac{(z-a)^2}{z^2} \right) \right]_{u=A}^{u=B} (1 + \mathcal{O}[\frac{1}{z}]) \quad \text{pro } m=1, \\ &= \mathcal{O}[\frac{1}{z^3}] \quad \text{pro } m=2, \\ &= \mathcal{O}[\frac{1}{z^4}] \quad \text{pro } m=3. \end{aligned} \quad (3.D.18)$$

Stejným způsobem dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{u=a}^{u=b} du \frac{(z-a)u^m}{r^5} &= \frac{2}{\gamma} \left[-\frac{1}{3r^3} \right]_{u=a}^{u=b} && \text{pro } m=0, \\ &= \frac{4}{\gamma^2} \left[\frac{(z-a)^3}{3\varrho^2 r^3} - \frac{a}{3r^3} \right]_{u=a}^{u=b} (1+O[\frac{1}{\gamma}]) && \text{pro } m=1, \text{ (3.D.19)} \\ &= O[\frac{1}{\gamma^3}] && \text{pro } m \geq 2. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme zkoumat distribuční chování funkcí (3.D.1) v okolí $u=0$

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{r^3} \Theta(u_{\pm}-u), \varphi \rangle &= \int_{u=a}^{u=b} du \frac{1}{r^3} \Theta(u_{\pm}-u) \varphi(u) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \int_{u=a}^{u=u_{\pm}} \frac{u^m}{r^3} du = O[\frac{1}{\gamma}] \end{aligned} \quad (3.D.20)$$

tj. pro γ nekonečné

$$\frac{1}{r^3} \Theta(u_{\pm}-u) = 0 \quad (3.D.21)$$

Dále

$$\begin{aligned} \langle \frac{\gamma(z-a)}{r^5} \Theta(u_{\pm}-u), \varphi \rangle &= \int_{u=a}^{u=b} du \frac{\gamma(z-a)}{r^5} \Theta(u_{\pm}-u) \varphi(u) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \gamma \int_{u=a}^{u=u_{\pm}} \frac{(z-a)u^m}{r^5} du = \\ &= \varphi(0) 2 \left[-\frac{1}{3r^3} \right]_{u=a}^{u=u_{\pm}} + O[\frac{1}{\gamma}] = \\ &= -\varphi(0) \frac{2}{3} \left(\frac{2a}{a^2 + \varrho^2} \right)^3 + O[\frac{1}{\gamma}] \end{aligned} \quad (3.D.22)$$

tj. pro γ nekonečné

$$\frac{\gamma(z-a)}{r^5} \Theta(u_{\pm}-u) = -\frac{2}{3} \left(\frac{2a}{a^2 + \varrho^2} \right)^3 \delta(u) \quad (3.D.23)$$

a konečně

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\eta(z-a)}{\eta^5} \Theta(u|_v-u), \varphi \right\rangle &= \int_{\omega_A}^{u_B} du \frac{\eta^z}{\eta^5} \Theta(u|_v-u) \varphi(u) = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \eta^z \int_{u_A}^{u_B} \frac{u^m}{\eta^5} du + O\left[\frac{1}{\eta}\right] = \\
 &= \varphi(0) \eta \left[\frac{1}{\eta^4} \left(\frac{z-a}{\eta} - \frac{1}{3} \frac{(z-a)^3}{\eta^3} \right) \right]_{u_A}^{u_B} + 4\varphi'(0) \left[-\frac{1}{\eta^3} + \frac{a}{\eta^4} \left(\frac{z-a}{\eta} - \frac{1}{3} \frac{(z-a)^3}{\eta^3} \right) \right]_{u_A}^{u_B} + O\left[\frac{1}{\eta}\right] = \\
 &= -\varphi(0) \eta \frac{8(3a^2 + \rho^2)}{3(\rho^2 + a^2)^3} + \varphi(0) \frac{32a^2 \eta}{(\rho^2 + a^2)^4} + 16\varphi'(0) \frac{a}{3(a^2 + \rho^2)^2} + O\left[\frac{1}{\eta}\right], \quad (3.D.24)
 \end{aligned}$$

tj. pro η velké

$$\frac{\eta^z}{\eta^5} \Theta(u|_v-u) = \eta \delta(u) \frac{8(3a^2 + \rho^2)}{3(\rho^2 + a^2)^3} + \delta(u) \frac{32a^2 \eta}{(a^2 + \rho^2)^4} - \delta'(u) \frac{16a}{3(a^2 + \rho^2)^2}. \quad (3.D.25)$$

S těmito výsledky již můžeme provést limitu $\eta \rightarrow \infty$ linearizovaného Riemannova tenzoru ${}^{un}R$ (${}^{un}R$ viz. (3.4.48) se záměnou $u \leftrightarrow 'u$, $v \leftrightarrow 'v$). Dostáváme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} {}^{un}R \Theta(u|_v-u) &= (d_u d_v d_\rho d_\eta d_\varphi - \rho^2 d_u d_v d_\rho d_\eta d_\varphi) \cdot \\
 &\cdot \left(-\eta \delta(u) \frac{\rho^2(3a^2 + \rho^2)a}{2(a^2 + \rho^2)^3} - \delta(u) \frac{6a^2 \rho^2}{(a^2 + \rho^2)^4} + \delta'(u) \frac{a^2 \rho^2}{(a^2 + \rho^2)^2} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} d_u d_v d_\rho d_\eta d_\varphi + \dots + \rho^2 d_u d_v d_\rho d_\eta d_\varphi + \dots \right) \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{2\rho a^4}{(a^2 + \rho^2)^2} \delta(u) \right) + O\left[\frac{1}{\eta}\right]. \quad (3.D.26)
 \end{aligned}$$

V dalším budeme počítat povrchový člen ${}^{sur}R$ (viz. (3.4.46))

$${}^{brd}R_{abcd} = \left({}^{acc}Q_{ab|c} + {}^{acc}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c} - {}^{un}Q_{ab|c} \right) d_{[d]}(t-r) \delta(t-r). \quad (3.D.27)$$

Platí

$$d(t-r) = \frac{1}{2} \eta \left(1 - \frac{z-a}{r}\right) du - \frac{1}{2\eta} \left(1 + \frac{z-a}{r}\right) dv - \frac{\rho}{r} d\varphi, \quad (3.D.28)$$

$$\delta(t-r) = |(t-r)_{,u}|^{-1} \delta(u-u_*) = \frac{2}{\eta \left(1 - \frac{z-a}{r}\right)} \delta(u-u_*), \quad (3.D.29)$$

tj.

$$d(t-r) \delta(t-r) = \left(du - \frac{\rho}{(a\eta - v)^2} dv - \frac{2\rho}{(a\eta - v)} d\varphi \right) \delta(u-u_*). \quad (3.D.30)$$

Transformací (3.C.3) do souřadnic u, v, φ, ψ dostaneme

$$\begin{aligned} {}^{ac}Q &= du dv du \left(-\frac{1}{2u}\right) \left(\Upsilon + 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}\right) + \\ &+ du dv dv \left(-\frac{1}{2v}\right) \left(\Upsilon - 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}\right) + \\ &+ du d\varphi du \left(-\frac{\rho}{4u^2}\right) (\Upsilon + 1) + \\ &+ dv d\varphi dv \left(-\frac{\rho}{4v^2}\right) (\Upsilon - 1) + \\ &+ du d\varphi d\varphi \left(\frac{1}{4u}\right) \left(\Upsilon + 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}\right) + \\ &+ du d\psi d\psi \left(\frac{\rho^2}{4u}\right) \left(\Upsilon + 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}\right) + \\ &+ dv d\varphi d\varphi \left(\frac{1}{4v}\right) \left(\Upsilon - 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}\right) + \\ &+ dv d\psi d\psi \left(\frac{\rho^2}{4v}\right) \left(\Upsilon - 1 + \frac{4\tilde{z}^2 a^4}{\xi^3}\right) + \\ &+ d\varphi d\psi d\psi \left(\frac{\rho^2 \rho^3 \chi}{\xi^3} - \frac{\rho}{2\xi} (-a^2 + \rho^2 + \tilde{z}^2)\right), \end{aligned} \quad (3.D.31)$$

kde

$$\Upsilon = \frac{\chi}{\xi^3} (\chi^2 - 6a^2 \tilde{z}^2). \quad (3.D.32)$$

Odečteme-li od tohoto ${}^{ac}Q$ získané z (3.C.11) záměnou $u \leftrightarrow v$,
 $v \leftrightarrow u$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} [Q]_* &\equiv \frac{1}{L} (\text{acc } Q - \text{un } Q) \Big|_* = \\
&= d u d v d u \left(-\frac{1}{8u} \left(\gamma + 1 + \frac{4z^2 a^4}{f^3} \right) - \frac{\gamma(z-a)a}{4} \frac{1}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d u d v d v \left(\frac{1}{8v} \left(\gamma - 1 + \frac{4z^2 a^4}{f^3} \right) + \frac{1}{4\gamma} \frac{(z-a)a}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d u d \varrho d u \left(-\frac{\varrho}{4u^2} (\gamma + 1) - \frac{\gamma^2}{2} \frac{\varrho a}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d v d \varrho d v \left(-\frac{\varrho}{4v^2} (\gamma - 1) - \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\varrho a}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d u d \varrho d \varrho \left(\frac{1}{4u} \left(\gamma + 1 + \frac{4z^2 a^4}{f^3} \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{(z-a)a}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d v d \varrho d \varrho \left(\frac{1}{4v} \left(\gamma - 1 + \frac{4z^2 a^4}{f^3} \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{(z-a)a}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d v d \varrho d \varrho \left(\frac{1}{4v} \left(\gamma - 1 + \frac{4z^2 a^4}{f^3} \right) + \frac{1}{2\gamma} \frac{(z-a)a}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d v d \varrho d \varrho \left(\frac{1}{4v} \left(\gamma - 1 + \frac{4z^2 a^4}{f^3} \right) + \frac{1}{2\gamma} \frac{(z-a)a}{4r^3} \right) \Big|_* + \\
&+ d \varrho d \varrho d \varrho \left(-\frac{a^2 \varrho^3 \chi}{f^3} - \frac{\varrho}{2\xi} (-a^2 + \varrho^2 z^2) + \frac{\varrho^3 a}{4r^3} \right) \Big|_* .
\end{aligned} \tag{3.D.33}$$

Rozvoj $[{}^{(a)}Q]_*$ v γ (využitím rozvoje z apendixu 3.B) je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} [{}^{(a)}Q]_* &= d u d v d u \left(-\gamma \frac{a \varrho^2 (3a^2 + \varrho^2)}{4(a^2 + \varrho^2)^3} + O[\eta^0] \right) + \\
&+ d u d \varrho d u \left(-\gamma^2 \frac{a^2 \varrho (3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^3} + \gamma \frac{a \varrho v}{(a^2 + \varrho^2)^4} (\varrho^4 + 4\varrho^2 a^2 - 3a^4) + O[\gamma^0] \right) + \\
&+ d \varrho d \varrho d \varrho \left(-\frac{\varrho (\varrho^2 - a^2) (\varrho^4 + a^4 + 4a^2 \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^3} + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) \tag{3.D.34} \\
&+ (d u d \varrho d \varrho + d v d \varrho d \varrho \varrho^2) \cdot \\
&\cdot \left(\gamma \frac{\varrho^2 (3a^2 + \varrho^2) a}{2(\varrho^2 + a^2)^3} + \frac{v \varrho^2}{2(a^2 + \varrho^2)^4} (9a^4 - 4a^2 \varrho^2 - \varrho^4) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \right) .
\end{aligned}$$

Obdobně pro částici

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} [{}^{(b)}Q]_* &\equiv \frac{1}{L} (\text{acc } Q - \text{un } Q) \Big|_* = \\
&= d \varrho d \varrho d \varrho \left(-\frac{\varrho}{2} \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] .
\end{aligned} \tag{3.D.35}$$

Součet příspěvků od obou částic je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} ([^{(a)}Q]_* + [^{(b)}Q]_*) = \\ & = d\mu d\nu d\mu \left(-\eta \frac{a \varrho^2 (3a^2 + \varrho^2)}{4(a^2 + \varrho^2)^3} + O[\eta^0] \right) + \\ & + d\mu d\varrho d\mu \left(-\eta^2 \frac{a^2 \varrho (3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^3} + \eta \frac{\varrho \nu a}{(a^2 + \varrho^2)^4} (\varrho^4 + 4\varrho^2 a^2 - 3a^4) + O[\eta^0] \right) + \\ & + d\varrho d\varphi d\varphi \left(-\frac{\varrho^5 (3a^2 + \varrho^2)}{(a^2 + \varrho^2)^3} + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \right) + \\ & + (d\mu d\varrho d\varrho + \varrho^2 d\mu d\varphi d\varphi) \cdot \\ & \cdot \left(\eta \frac{a \varrho^2 (3a^2 + \varrho^2)}{2(\varrho^2 + a^2)^3} + \frac{\nu \varrho^2}{2(a^2 + \varrho^2)^4} (9a^4 - 4a^2 \varrho^2 - \varrho^4) + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \right) . \end{aligned} \quad (3.D.36)$$

Využitím (3.D.30) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} {}^{1brd}R & = \delta(u_* - u) \left[(d\mu d\varrho d\mu d\varrho - \varrho^2 d\mu d\varphi d\mu d\varphi) \cdot \right. \\ & \cdot \left(\eta \frac{a \varrho^2 (3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^3} + \frac{\varrho^2 \nu}{2(a^2 + \varrho^2)^4} (9a^4 - 4a^2 \varrho^2 - \varrho^4) + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \right) + \\ & + (d\mu d\nu d\mu d\varrho + \nu + \varrho^2 d\mu d\varphi d\varrho d\varphi + \nu) \cdot \\ & \left. \cdot \left(\frac{\varrho^3 (3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^3} + O\left[\frac{1}{\eta}\right] \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.D.37)$$

Využitím (3.A.31) můžeme psát

$$\begin{aligned} \eta \delta(u - u_*) & = \eta \delta(u) - \delta'(u) u_* \eta + O\left[\frac{1}{\eta}\right] = \\ & = \eta \delta(u) - \frac{a^2 + \varrho^2}{a} \delta'(u) + O\left[\frac{1}{\eta}\right] . \end{aligned} \quad (3.D.38)$$

Celkově tedy dostáváme výsledek

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} {}^{1brd}R & = (d\mu d\varrho d\mu d\varrho - \varrho^2 d\mu d\varphi d\mu d\varphi) \cdot \\ & \cdot \left(\eta \frac{a \varrho^2 (3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^3} \delta(u) + \frac{\varrho^2 \nu}{2(a^2 + \varrho^2)^4} (9a^4 - 4a^2 \varrho^2 - \varrho^4) \delta(u) - \frac{\varrho^3 (3a^2 + \varrho^2)}{2(a^2 + \varrho^2)^3} \delta'(u) \right) + \\ & + \left(\frac{1}{2} d\mu d\nu d\mu d\varrho + \nu + \varrho^2 d\mu d\varphi d\varrho d\varphi + \nu \right) \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\varrho^3 (3a^2 + \varrho^2)}{(a^2 + \varrho^2)^3} \delta(u) \right) + O\left[\frac{1}{\eta}\right] . \end{aligned} \quad (3.D.39)$$

Dodatek 3.E Výpočty metrik ${}^{acc}h$ a ${}^{sing}h$

Nejprve vyjádříme Bianchiho identity pro linearizovaný Riemannův tenzor (3.4.56)

$$\begin{aligned} \partial_{[a}{}^{ret}R_{bc]de} &= \partial_{[a}({}^{acc}R_{bc]de} \Theta(u) + {}^{sur}R_{bc]de}) = \\ &= (\partial_{[a}{}^{acc}R_{bc]de})\Theta(u) + d_{[a}u R_{bc]de}|_{u=0} \delta(u) + \partial_{[a}{}^{sur}R_{bc]de} \end{aligned} \quad (3.E.1)$$

Přímým výpočtem za použití vztahů (3.C.2) a hodnot ${}^{acc}R$ na $u=0$ dostaneme

$$\begin{aligned} 3 \partial_{[a}{}^{ret}R_{bc]de} &= (3 \partial_{[a}{}^{acc}R_{bc]de})\Theta(u) + \\ &+ du \, d\sigma \, d\varrho \, d\varphi \, d\sigma \, d\varrho \, {}^{acc}R_{\sigma\varrho\varrho\sigma}|_* \delta(u) + \\ &+ du \, d\sigma \, d\varrho \, d\varphi \, d\sigma \, d\varphi \, (-\varrho^2 {}^{acc}R_{\sigma\varrho\varrho\sigma}|_* \delta(u) + \\ &+ du \, d\sigma \, d\varrho \, d\varphi \, du \, d\sigma \, (R_{uu\sigma\varrho}|_* \delta(u) - \frac{1}{2} B_{,\sigma}) + \\ &+ du \, d\varrho \, d\varphi \, d\varphi \, du \, d\varphi \, (R_{\varrho\varphi\varphi\varphi}|_* \delta(u) + (\varrho^2 A)_{,\varrho} + \varrho^2 B_{,\varrho}) + \\ &+ du \, d\sigma \, d\varrho \, d\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, (R_{\sigma\varphi\varphi\varphi}|_* \delta(u) - \varrho^2 B_{,\sigma}) + \quad (3.E.2) \\ &+ du \, d\varrho \, d\varphi \, d\varphi \, d\sigma \, d\varphi \, {}^{acc}R_{\sigma\varphi\varphi\varphi}|_* \delta(u) + \\ &+ du \, d\sigma \, d\varrho \, d\varphi \, du \, d\varrho \, (R_{\varrho\sigma\sigma\varrho}|_* \delta(u) - A_{,\sigma} + \frac{1}{2} B_{,\varrho}) + \\ &+ du \, d\sigma \, d\varrho \, d\varphi \, du \, d\varphi \, (\varrho^2 {}^{acc}R_{\varrho\sigma\sigma\varrho}|_* \delta(u) + \varrho^2 A_{,\sigma} + \frac{1}{2} \varrho B) + \\ &+ d\sigma \, d\varrho \, d\varphi \, d\varphi \, du \, d\varphi \, \varrho^2 B_{,\sigma} + \\ &+ du \, d\varrho \, d\varphi \, d\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, (\varrho B + {}^{acc}R_{\varrho\varphi\varphi\varphi}|_* \delta(u) - (\varrho^2 B)_{,\varrho}) \end{aligned}$$

kde složky ${}^{acc}R_{abcd}$ jsou dány v (3.4.47). Pro obecnou metriku tvaru

$${}^{sing}h = M du^2 + N^{(\varrho\varrho)} g + P d\sigma d\varrho + Q du d\varphi \quad (3.E.3)$$

derivováním (opět s využitím (3.C.2)) máme

$$\begin{aligned}
 \cdot \quad {}^{\text{sing}}Q_{\text{ob1c}} &= \partial_{\text{E}} {}^{\text{sing}}h_{\text{b]c}} = \\
 \cdot \quad d_u \wedge d_v \wedge d_w \wedge d_x \left(-\frac{1}{2} M_{1,v}\right) &+ d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x \left(-\frac{1}{2} M_{1,\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + d_\varphi \wedge {}^{(2)}g_{\text{b]c}} N_{1,u} &+ d_\varphi \wedge {}^{(2)}g_{\text{b]c}} N_{1,v} + \\
 \cdot \quad + d_x \wedge {}^{(2)}g_{\text{b]c}} N_{1,\varphi} &+ d_x \wedge d_\varphi \wedge d_w \wedge d_x \varphi \frac{1}{2} (-Q_{v,w} + P_{1,u}) + \\
 \cdot \quad + d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x \varphi \frac{1}{2} (-Q_{1,\varphi} + \frac{1}{\varphi} Q) &+ d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x u \frac{1}{2} Q_{1,u} + \\
 \cdot \quad + d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x u \frac{1}{2} Q_{v,w} &+ d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x u \frac{1}{2} Q_{\varphi} + \\
 \cdot \quad + d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x \varphi \frac{1}{2\varphi} Q &+ d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x \varphi \frac{1}{2\varphi} P + \\
 \cdot \quad + d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x \varphi \frac{1}{2} (-P_{1,\varphi} + \frac{1}{\varphi} P) &+ d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x v \frac{1}{2} P_{1,v} + \\
 \cdot \quad + d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x v \frac{1}{2} P_{1,u} &+ d_u \wedge d_v \wedge d_\varphi \wedge d_x v \frac{1}{2} P_{1,\varphi} ,
 \end{aligned} \tag{3.E.4}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \quad {}^{\text{sing}}Q_{\text{ob2c}} &= \partial_{\text{E}} {}^{\text{sing}}Q_{\text{ob1c}} = \\
 \cdot \quad (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(-\frac{1}{2} M_{1,v\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(\frac{1}{2} Q_{1,u} - \frac{1}{2} P_{1,u}\right) + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) \left(-\frac{1}{2} N_{1,v\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(-\frac{1}{2} P_{1,u} + \frac{1}{2} Q_{v,w}\right) + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) \left(-\frac{\varphi^2}{2} N_{1,v\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(\frac{1}{2} Q_{1,\varphi} - \frac{1}{\varphi} Q_{1,u}\right) + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) \left(-\frac{\varphi^2}{2} N_{1,\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(\frac{1}{2} P_{1,v} - \frac{1}{\varphi} P_{1,u}\right) + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) \left(-\frac{\varphi^2}{2} N_{1,v\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(\frac{1}{2} Q_{1,\varphi} - \frac{1}{2\varphi} Q_{\varphi} - \frac{1}{2\varphi} P_{1,u}\right) + d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_x \left(-\frac{1}{2} M_{1,v\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(\frac{1}{2} P_{1,\varphi} - \frac{1}{2\varphi} P_{1,\varphi}\right) + d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi \left(-\frac{1}{2} M_{1,u} - \frac{1}{2} M_{1,\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(\frac{1}{2} Q_{1,\varphi} - \frac{1}{2\varphi} Q_{1,v} - \frac{1}{2\varphi} P_{1,u}\right) + d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi \left(-\frac{1}{2} M_{1,v\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \left(\frac{1}{2} P_{1,\varphi} - \frac{1}{2\varphi} P_{1,u} - \frac{1}{2\varphi} Q_{1,v}\right) + d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi \left(-\frac{\varphi^2}{2} N_{1,v\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \frac{1}{2} Q_{1,\varphi} + d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi \left(-\frac{\varphi^2}{2} N_{1,u} - \frac{\varphi}{2} M_{1,\varphi}\right) + \\
 \cdot \quad + (d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi + \omega) & \frac{1}{2} P_{1,\varphi} + d_u \wedge d_v \wedge d_u \wedge d_\varphi \left(-\frac{\varphi^2}{2} N_{1,\varphi} - \frac{\varphi}{2} N_{1,\varphi}\right) .
 \end{aligned} \tag{3.E.5}$$

Dále spočteme linearizovaný Riemannův tenzor křivosti metriky

$$\bar{h} = {}^{\text{acc}}h \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) \quad (3.E.6)$$

kde ${}^{\text{acc}}h$ je dáno v (3.4.31). Platí

$$\bar{Q}_{[a]b} = \partial_{[a} \bar{h}_{b]} = (\partial_{[a} {}^{\text{acc}}h_{b]}) \Theta(u) + d_{[a} u {}^{\text{acc}}h_{b]} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} \delta(u - \frac{a}{\gamma}) \quad (3.E.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{abcd} &= 2 \partial_{[a} \bar{Q}_{b]c]} = \\ &= {}^{\text{acc}}R_{abcd} \Theta(u) + \\ &+ 2 (\partial_{[a} {}^{\text{acc}}h_{b]c}) \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{d]} u \delta(u - \frac{a}{\gamma}) + \\ &+ 2 \partial_{[a} ({}^{\text{acc}}h_{b]c} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{d]} u) \delta(u - \frac{a}{\gamma}) + \\ &+ 2 d_{[a} u {}^{\text{acc}}h_{b]c} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{d]} u \delta'(u - \frac{a}{\gamma}) \end{aligned} \quad (3.E.8)$$

Přímé výpočty dají

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} d_{[a} u {}^{\text{acc}}h_{b]c} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} &= (d_a u d_b \xi d_c \eta + \xi^2 d_a u d_b \varphi d_c \varphi) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2 + \xi^2} - \ln \frac{a^2 + \xi^2}{a^2} + \ln \frac{\xi}{a} - \ln \eta \right) + O\left[\frac{1}{\gamma}\right] \end{aligned} \quad (3.E.9)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{L} d_{[a} u {}^{\text{acc}}h_{b]c} \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{d]} u &= (d_a u d_b \xi d_c \eta d_d \eta + \xi^2 d_a u d_b \varphi d_c \eta d_d \varphi) \cdot \\ &\cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{a^2 + \xi^2} + \frac{1}{2} \ln \eta + \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + \xi^2}{a \xi} \right) \end{aligned} \quad (3.E.10)$$

$$2 \frac{1}{L} \partial_{[a} ({}^{\text{acc}}h_{b]c} d_{d]} u \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}}) = \xi^2 d_a u d_b \varphi d_c \eta d_d \varphi \left(-\frac{a^4}{\xi(a^2 + \xi^2)^2} + \frac{1}{2\xi} \right) \quad (3.E.11)$$

Dále s využitím výrazu (3.C.3) pro ${}^{\text{acc}}Q_{abc}$

$$\begin{aligned}
2 \frac{1}{L} (\partial_{\xi}^{\text{acc}} h_{\xi\xi}) \Big|_{u=\frac{a}{\gamma}} d_{\xi} u &= (d_{\xi} u d_{\xi} \varrho d_{\xi} u d_{\xi} \varrho + \varrho^2 d_{\xi} u d_{\xi} \varphi d_{\xi} u d_{\xi} \varphi) \cdot \\
&\cdot \left(-\frac{\gamma}{2a} - \frac{a^2 \nu}{(a^2 + \varrho^2)^2} \right) + \\
&+ \varrho^2 d_{\xi} \varrho d_{\xi} \varphi d_{\xi} u d_{\xi} \varphi \left(-\frac{a^2}{\varrho(a^2 + \varrho^2)^2} + \frac{1}{2\varrho} \right) .
\end{aligned} \tag{3.E.12}$$

Dosazením do (3.E.8) a využitím (3.A.31) dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} {}^{\text{bar}}R &= \frac{1}{L} {}^{\text{acc}}R \Theta(u - \frac{a}{\gamma}) + \\
&+ (d_{\xi} u d_{\xi} \varrho d_{\xi} u d_{\xi} \varrho + \varrho^2 d_{\xi} u d_{\xi} \varphi d_{\xi} u d_{\xi} \varphi) \mathcal{F} + \\
&+ \varrho^2 (d_{\xi} \varrho d_{\xi} \varphi d_{\xi} u d_{\xi} \varphi + d_{\xi} u d_{\xi} \varphi d_{\xi} \varrho d_{\xi} \varphi) \mathcal{T} ,
\end{aligned} \tag{3.E.13}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -\frac{\gamma}{2a^2} \delta(u) + \frac{1}{2a} \delta'(u) - \frac{a^2 \nu}{(a^2 + \varrho^2)^2} \delta(u) - \frac{1}{2} \frac{a}{a^2 + \varrho^2} \delta'(u) + \\
&+ \frac{1}{2a} \ln \gamma \delta'(u) + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + \varrho^2}{\varrho a} \delta'(u) , \\
\mathcal{T} &= \left(-\frac{a^3}{\varrho(a^2 + \varrho^2)^2} + \frac{1}{2a\varrho} \right) \delta(u) .
\end{aligned} \tag{3.E.14}$$

Obdobně vypočteme linearizovaný Riemannův tenzor křivosti metriky

$${}^{\text{bar}}h = {}^{\text{acc}}h \Theta(u) , \tag{3.E.15}$$

kde ${}^{\text{acc}}h$ je dána v (3.4.81). Využitím rozvoje v apendixu 3.B můžeme tuto metriku zapsat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{h} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{(a^2 + \varrho^2)^2} v^2 + O[u] \right) du^2 + O[u^2] dv^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2} + \frac{2a^2 \varrho^2}{(a^2 + \varrho^2)^3} v u + O[u^2] \right) du dv + \\
&+ \left(\frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2} + \frac{a^2 (3\varrho^2 + a^2)}{(a^2 + \varrho^2)^3} v u + O[u^2] \right) d\varrho^2 - \\
&- \varrho^2 \left(\frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2} + \frac{a^2 (\varrho^2 - a^2)}{(a^2 + \varrho^2)^3} v u + O[u^2] \right) d\varphi^2
\end{aligned} \tag{3.E.16}$$

Obdobně k (3.E.8) máme

$$\begin{aligned}
\overset{\text{bar}}{R}_{abcd} &= \overset{\text{acc}}{R}_{abcd} O(u) + \\
&+ 2 \left(\partial_{[c} \overset{\text{acc}}{h}_{b]e} \Big|_{u=0} \right) d_{[a} u \delta_{b]}(u) + \\
&+ 2 d_{[a} \left(\overset{\text{acc}}{h}_{b]c} \Big|_{u=0} d_{[c} u \right) \delta_{a]}(u) + \\
&+ 2 d_{[a} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]c} \Big|_{u=0} d_{[c} u \delta'_{a]}(u)
\end{aligned} \tag{3.E.17}$$

Jednotlivé členy dostaneme přímým výpočtem z (3.E.16)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} d_{[a} u \overset{\text{acc}}{h}_{b]c} \Big|_{u=0} &= \frac{1}{2} d_a u d_b v d_c u \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2} + \\
&+ d_a u d_b \varrho d_c \varrho \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2} - d_a u d_b \varphi d_c \varphi \frac{1}{2} \frac{\varrho^4}{a^2 + \varrho^2}
\end{aligned} \tag{3.E.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} d_a u \overset{\text{acc}}{h}_{b]c} \Big|_{u=0} d_{[c} u &= -d_a u d_b \varrho d_c u d_{[c} \varrho \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2} + \\
&+ d_a u d_b \varphi d_c u d_{[c} \varphi \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{a^2 + \varrho^2}
\end{aligned} \tag{3.E.19}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{1}{L} \partial_{[c} \left(\overset{\text{acc}}{h}_{b]e} \Big|_{u=0} d_{[a} u \right) &= d_a u d_b v d_c u d_{[c} \varrho \frac{a^2 \varrho}{2(a^2 + \varrho^2)^2} + \\
&+ d_a u d_b \varphi d_c \varrho d_{[c} \varphi \frac{\varrho^3 (2a^2 + \varrho^2)}{(a^2 + \varrho^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.E.20}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{1}{L} (\partial_{[a} h_{b]c})|_{u=0} d_{a]} u &= d_a u \wedge d_b \varphi d_c u \wedge d_d \psi \frac{a^2 \varphi}{2(a^2 + \varphi^2)^2} + \\
&+ d_a \varphi \wedge d_b \varphi d_c u \wedge d_d \varphi \frac{\varphi^2 (2a^2 + \varphi^2)}{(a^2 + \varphi^2)^2} - \\
&- d_a u \wedge d_b \varphi d_c u \wedge d_d \varphi \frac{a^2 (3\varphi^2 + a^2)}{2(a^2 + \varphi^2)^3} \psi + \\
&+ \varphi^2 d_a u \wedge d_b \varphi d_c u \wedge d_d \varphi \frac{a^2 (\varphi^2 - a^2)}{2(a^2 + \varphi^2)^3} .
\end{aligned} \tag{3.E.21}$$

Dosazením do (3.E.17) dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} \overset{\text{bar}}{R} &= \frac{1}{L} \overset{\text{acc}}{R} \Theta(u) + \\
&+ d_u d_\varphi d_u d_\varphi \left(- \frac{\nu \varphi^2 (3a^2 + \varphi^2)}{2(a^2 + \varphi^2)^3} \delta(u) + \nu \frac{\varphi^2 - a^2}{2(\varphi^2 + a^2)^2} \delta(u) \right) - \\
&- \varphi^2 d_u d_\varphi d_u d_\varphi \left(- \frac{\nu \varphi^2 (3a^2 + \varphi^2)}{2(a^2 + \varphi^2)^3} \delta(u) + \nu \frac{1}{2(\varphi^2 + a^2)} \delta(u) \right) + \tag{3.E.22} \\
&+ \frac{1}{2} (d_u d_\varphi d_\varphi d_\varphi + \nu) \left(\varphi \frac{2a^2 + \varphi^2}{(a^2 + \varphi^2)^2} \delta(u) - \frac{\varphi}{a^2 + \varphi^2} \delta(u) \right) + \\
&+ \varphi^2 (d_u d_\varphi d_\varphi d_\varphi + \nu) \left(\varphi \frac{2a^2 + \varphi^2}{(a^2 + \varphi^2)^2} \delta(u) \right) .
\end{aligned}$$

4. GRAVITAČNÍ POLE URYCHLENÝCH ZDROJŮ

V této kapitole se pokusíme nalézt odpověď na otázku jak vypadá retardované gravitační pole urychleného zdroje v rámci plné OTR. Uvidíme, že odpověď bude spíše negativní. Přestože existuje široká třída řešení Einsteinových gravitačních rovnic odpovídajících urychleným zdrojům, nelze z nich zkonstruovat pole retardované. V závěru uvedeme fyzikální příčiny této skutečnosti.

4.1 Obecné boost-rotáčně symetrické gravitační pole

Za urychlený zdroj a jeho gravitační pole budeme v rámci OTR považovat prostoročas s rotační a boostovou symetrií. To znamená, že metrika má dva Killingovy vektory, které jsou navzájem kolmé a navíc existuje systém 2-ploch kolmých na oba Killingovy vektory. Jeden Killingův vektor - odpovídající rotaci - je prostorůpodobný a má kompaktní orbity. Druhý Killingův vektor - odpovídající boostu - má v různých oblastech prostoročasu různý charakter a jeho orbity jsou nekompatní. Dále budeme požadovat, aby prostoročas byl asymptoticky plochý (přesná formulace viz. [4]). Zdroje musí být symetrické vůči rotaci a boostu. Navíc předpokládáme, že se nachází pouze na ose rotace.

Obecnou metriku tohoto typu nalezneme v [5] - má tvar

$$g = \frac{1}{z^2 - t^2} (e^\lambda (t dt - z dz)^2 - e^\mu (t dz - z dt)^2) + e^\lambda d\varphi^2 + \varphi^2 e^{-\mu} d\psi^2 \quad (4.1.1)$$

Zde $t, z \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^+$, $\psi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ jsou souřadnice, jejichž úplná interpretace je daná samotnou metrikou. Poznamenejme však, že rotační Killingův vektor je

$$\xi_{\mathbb{R}}^a = \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4.1.2)$$

a boostový Killingův vektor je

$$\xi_{\mathbb{B}}^a = z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.1.3)$$

μ, λ jsou funkce závislé pouze na $A = \xi^2$ a $B = (z^2 - r^2)$ (tj. na orbitě Killingových vektorů) a v oblasti mimo zdroje splňují

$$A \mu_{,AA} + B \mu_{,BB} + \mu_{,A} + \mu_{,B} = 0, \quad (4.1.4)$$

$$(A+B) \lambda_{,A} = B (A \mu_{,A}^2 - B \mu_{,B}^2 + 2A \mu_{,A} \mu_{,B}) + \\ + (A-B) \mu_{,A} - 2B \mu_{,B}, \quad (4.1.5)$$

$$(A+B) \lambda_{,B} = A (B \mu_{,B}^2 - A \mu_{,A}^2 + 2B \mu_{,A} \mu_{,B}) + \\ + (A-B) \mu_{,B} + 2A \mu_{,A}.$$

Rovnice (4.1.4) je ekvivalentní vlnové rovnici v plochém prostoročase s cylindrickými souřadnicemi t, z, ϱ, φ .

Metrika (4.1.1) je regulární mimo $A=0$ a $B=0$, regularita na ose rotace $\varrho=0$ a nadploše $B=0$ závisí na chování funkcí μ a λ . Z (4.1.5) pro $B=0$ resp. $A=0$ dostáváme

$$\mu(A,0) - \lambda(A,0) = K_1, \quad (4.1.6)$$

$$\mu(0,B) + \lambda(0,B) = K_2, \quad (4.1.7)$$

kde K_1 a K_2 jsou konstanty. Podmínka regularity na $B=0$ vede na podmínku $K_1=0$, tj.

$$\lambda(A,0) = \mu(A,0) \quad (4.1.8)$$

V opačném případě se prostoročas rozseparuje na 4 navzájem oddělené prostoročasy. Nadplochy $B=0$ se stávají nekonečným těchto prostoročasů (délka neisotropní křivky konvergující k $B=0$ je nekonečná). Podmínka regularity na $A=0$ dá $K_2=0$, tj.

$$\lambda(0, B) + \mu(0, B) = 0 \quad (4.1.9)$$

Pokud $0 \neq k_2 = \text{konst}$, je metrika na $\varrho = 0$ neanalytická. Struktura této neanalytičnosti odpovídá struktuře známé kónické singularity. Kónická singularita je charakteristická úbytkem úhlu v malém okolí osy, tj. uvažujeme-li kružnici $\varrho = \text{konst}$ kolem osy, σ nazveme její obvod a ρ její poloměr (měřeno pomocí metriky), tak při $\varrho \rightarrow 0$ podíl $\frac{\sigma}{\rho}$ nejde k 2π . Kónickou singularitu lze odvodit přítomností lineárního zdroje na ose $\varrho = 0$ - struny ¹⁾. Pokud se na ose budou nacházet i složitější zdroje, nebudeme moci v těchto oblastech použít rovnice (4.1.7) a metrika je zde obecně neregulární. Tato neregularita ale nemusí nutně znamenat singularitu. Jsou známy řešení (např. tzv. C-metriky - viz. [17]), pro které jsou funkce μ, λ neregulární na ose v nějakém intervalu $B \in (a_1^z, a_2^z)$, ovšem neregularita metriky je pouze souřadnicová - ve skutečnosti má strukturu nadplochy přes kterou lze metriku v principu prodloužit. Tuto nadplochu můžeme chápat jako povrch hmoty resp. horizont urychlené černé díry. Podrobnější rozbor je možno nalézt v [9], [12].

Zavedeme-li souřadnice u, v a \tilde{z}, τ vztahy (3.1.2) a (3.1.11), tak metrika (4.1.1) lze psát

$$g = \frac{e^u - e^v}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} dv^2 + \frac{v}{u} du^2 \right) + \frac{e^u + e^v}{2} \frac{1}{2} du dv + \\ + e^u d\tilde{z}^2 + \tilde{z}^2 e^{-v} d\tau^2 = \quad (4.1.10)$$

¹⁾ Metriku nekonečné struny v prázdném prostoročase jsme uvedli v (3.4.40) Přestože byla odvozena pouze v lineari-zované teorii, jedná se o přesné řešení Einsteinových rovnic - viz. např. [27], [28].

$$= -\frac{\tilde{z}^2}{a^2} e^{\mu} d\tau^2 + e^{\lambda} d\tilde{z}^2 + e^{\lambda} d\varrho^2 - \varrho^2 e^{-\mu} d\varphi^2 \quad (4.1.11)$$

a Killingovy vektory mají tvar

$$\xi_{\varphi}^{\tilde{z}} = \frac{\partial^{\tilde{z}}}{\partial \varphi} \quad , \quad \xi_{\tau}^{\tilde{z}} = a \frac{\partial^{\tilde{z}}}{\partial \tau} \quad (4.1.12)$$

Pro úplnost uveďme ještě Christoffelovy symboly v souřadnicích $\tau, \tilde{z}, \varrho, \varphi$, Riemannův tenzor křivosti a Ricciho tenzor metrik (4.1.1) (viz. [5], apendix B; Pozor na opačnou signaturu metrik a tímto způsobené opačné znaménko Riemannova tenzoru.) Vše je počítané mimo osu $\varrho=0$, platí zde obdoba poznámky ⁸⁾ ze str. 67.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varrho\varrho}^{\varrho} &= \frac{1}{2} \lambda_{,\varrho} \quad , \quad \Gamma_{\varrho\tilde{z}}^{\varrho} = \frac{1}{2} \lambda_{,\tilde{z}} \quad , \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varrho} &= e^{-\lambda-\mu} \left(\frac{1}{2} \varrho^2 M_{,\varrho} - \varrho \right) \quad , \\ \Gamma_{\tilde{z}\tilde{z}}^{\varrho} &= -\frac{1}{2} \lambda_{,\varrho} \quad , \quad \Gamma_{\tau\tau}^{\varrho} = \frac{1}{2} e^{\mu-\lambda} \frac{\tilde{z}^2}{a^2} M_{,\varrho} \quad , \\ \Gamma_{\varrho\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2} M_{,\varrho} \quad , \quad \Gamma_{\varphi\tilde{z}}^{\varphi} = -\frac{1}{2} M_{,\tilde{z}} \quad , \\ \Gamma_{\varrho\varrho}^{\tilde{z}} &= -\frac{1}{2} \lambda_{,\tilde{z}} \quad , \quad \Gamma_{\varrho\tilde{z}}^{\tilde{z}} = \frac{1}{2} \lambda_{,\varrho} \quad , \\ \Gamma_{\tilde{z}\tilde{z}}^{\tilde{z}} &= \frac{1}{2} \lambda_{,\tilde{z}} \quad , \quad \Gamma_{\varrho\tau}^{\tilde{z}} = \frac{1}{2} M_{,\varrho} \quad , \\ \Gamma_{\tau\tau}^{\tilde{z}} &= e^{\mu-\lambda} \left(\frac{\tilde{z}}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{z}^2}{a^2} M_{,\tilde{z}} \right) \quad , \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tilde{z}} &= \frac{1}{2} \varrho^2 e^{-\mu-\lambda} M_{,\tilde{z}} \quad , \\ \Gamma_{\tilde{z}\tau}^{\tau} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} M_{,\tilde{z}} \quad , \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= -e^{-\mu} \varrho^2 \left(-\frac{1}{2} M_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{4} (M_{,\varphi} \lambda_{,\varphi} - M_{,\bar{z}} \lambda_{,\bar{z}}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho} (\lambda_{,\varphi} + 2M_{,\varphi}) + \frac{1}{4} M_{,\varphi}^2 \right) , \\
R_{\varphi\bar{z}\varphi\bar{z}} &= -\frac{1}{2} e^{\lambda} (\lambda_{,\varphi\varphi} + \lambda_{,\bar{z}\bar{z}}) , \\
R_{\tau\varphi\tau\varphi} &= -e^{\mu} \frac{\bar{z}^2}{a^2} \left(-\frac{1}{2} M_{,\varphi\varphi} - \frac{1}{4} M_{,\varphi}^2 + \frac{1}{4} (M_{,\varphi} \lambda_{,\varphi} - M_{,\bar{z}} \lambda_{,\bar{z}}) - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{z}} \lambda_{,\bar{z}} \right) , \\
R_{\varphi\bar{z}\varphi\bar{z}} &= -e^{\mu} \varrho^2 \left(-\frac{1}{2} M_{,\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{4} M_{,\bar{z}}^2 - \frac{1}{4} (M_{,\varphi} \lambda_{,\varphi} - M_{,\bar{z}} \lambda_{,\bar{z}}) + \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho} \lambda_{,\varphi} \right) , \\
R_{\varphi\tau\varphi\tau} &= -e^{-\lambda} \varrho^2 \frac{\bar{z}^2}{a^2} \left(\frac{1}{4} (M_{,\varphi}^2 + M_{,\bar{z}}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{z}} M_{,\bar{z}} - \frac{1}{\varrho} M_{,\varphi} \right) \right) , \quad (4.1.14) \\
R_{\bar{z}\tau\bar{z}\tau} &= -e^{\mu} \frac{\bar{z}^2}{a^2} \left(-\frac{1}{2} M_{,\bar{z}\bar{z}} - \frac{1}{4} M_{,\bar{z}}^2 - \frac{1}{4} (M_{,\varphi} \lambda_{,\varphi} - M_{,\bar{z}} \lambda_{,\bar{z}}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho} (\lambda_{,\bar{z}} - 2M_{,\bar{z}}) \right) , \\
R_{\varphi\varphi\varphi\bar{z}} &= -e^{-\mu} \varrho^2 \left(\frac{1}{2} M_{,\varphi\bar{z}} - \frac{1}{4} M_{,\varphi} M_{,\bar{z}} - \frac{1}{4} (M_{,\bar{z}} \lambda_{,\varphi} + M_{,\varphi} \lambda_{,\bar{z}}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho} (\lambda_{,\bar{z}} + M_{,\bar{z}}) \right) , \\
R_{\varphi\bar{z}\varphi\tau} &= -e^{\mu} \frac{\bar{z}^2}{a^2} \left(-\frac{1}{2} M_{,\varphi\bar{z}} - \frac{1}{4} M_{,\varphi} M_{,\bar{z}} + \frac{1}{4} (M_{,\bar{z}} \lambda_{,\varphi} + M_{,\varphi} \lambda_{,\bar{z}}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{z}} (\lambda_{,\varphi} - M_{,\varphi}) \right) , \\
Ric_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} (2M_{,\varphi} + \lambda_{,\varphi}) - \lambda_{,\varphi\varphi} - \lambda_{,\bar{z}\bar{z}} - M_{,\varphi}^2 - \frac{1}{\bar{z}} \lambda_{,\bar{z}} \right) , \\
Ric_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} e^{-\mu-\lambda} \varrho^2 \left(M_{,\varphi\varphi} + \lambda_{,\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{\varrho} M_{,\varphi} + \frac{1}{\bar{z}} M_{,\bar{z}} \right) , \\
Ric_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{z}} (\lambda_{,\bar{z}} - 2M_{,\bar{z}}) - \lambda_{,\varphi\varphi} - \lambda_{,\bar{z}\bar{z}} - M_{,\bar{z}}^2 - \frac{1}{\varrho} \lambda_{,\varphi} \right) , \quad (4.1.15) \\
Ric_{\varphi\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} (M_{,\bar{z}} + \lambda_{,\bar{z}}) + \frac{1}{\bar{z}} (\lambda_{,\varphi} - M_{,\varphi}) - M_{,\varphi} M_{,\bar{z}} \right) , \\
Ric_{\tau\tau} &= e^{2\mu} \frac{\bar{z}^2}{a^2} \frac{1}{\varrho^2} Ric_{\varphi\varphi} .
\end{aligned}$$

Explicite vidíme, že rovnice (4.1.4) a (4.1.5) zaručují platnost Einsteinových vakuových rovnic.

4.2 Pole dvou urychlených částic

Uvedeme si konkrétní metriku typu (4.1.1) odpovídající dvěma navzájem opačně urychleným hmotným objektům pohybujícím se pod vlivem polonekonečných strun (v souřadnicích t, x, y, z je systém znázorněn na obrázku 4.1). Takovýto systém je diskutován v [6,10] a je dán funkcemi

$$\mu = \frac{m\alpha}{4\pi} \left(-\frac{1}{R} + \frac{2}{a} \right) = L \left(1 - \frac{a}{2R} \right), \quad (4.2.1)$$

$$\lambda = \left(\frac{m\alpha}{4\pi} \right)^2 \frac{\rho^2(z^2 - t^2)}{a^2 R^4} + \frac{2m\alpha}{4\pi a^2 R} (\rho^2 + z^2 - t^2) = L^2 \frac{\rho^2(z^2 - t^2)}{4R^4} + L \frac{\rho^2 + z^2 - t^2}{aR}, \quad (4.2.2)$$

kde R je dáno definicí (3.2.13), m je hmota částic a $\alpha = \frac{1}{a}$ je parametr charakterizující zrychlení.

Vidíme, že

$$\mu(\rho^2, 0) = \lambda(\rho^2, 0), \quad (4.2.3)$$

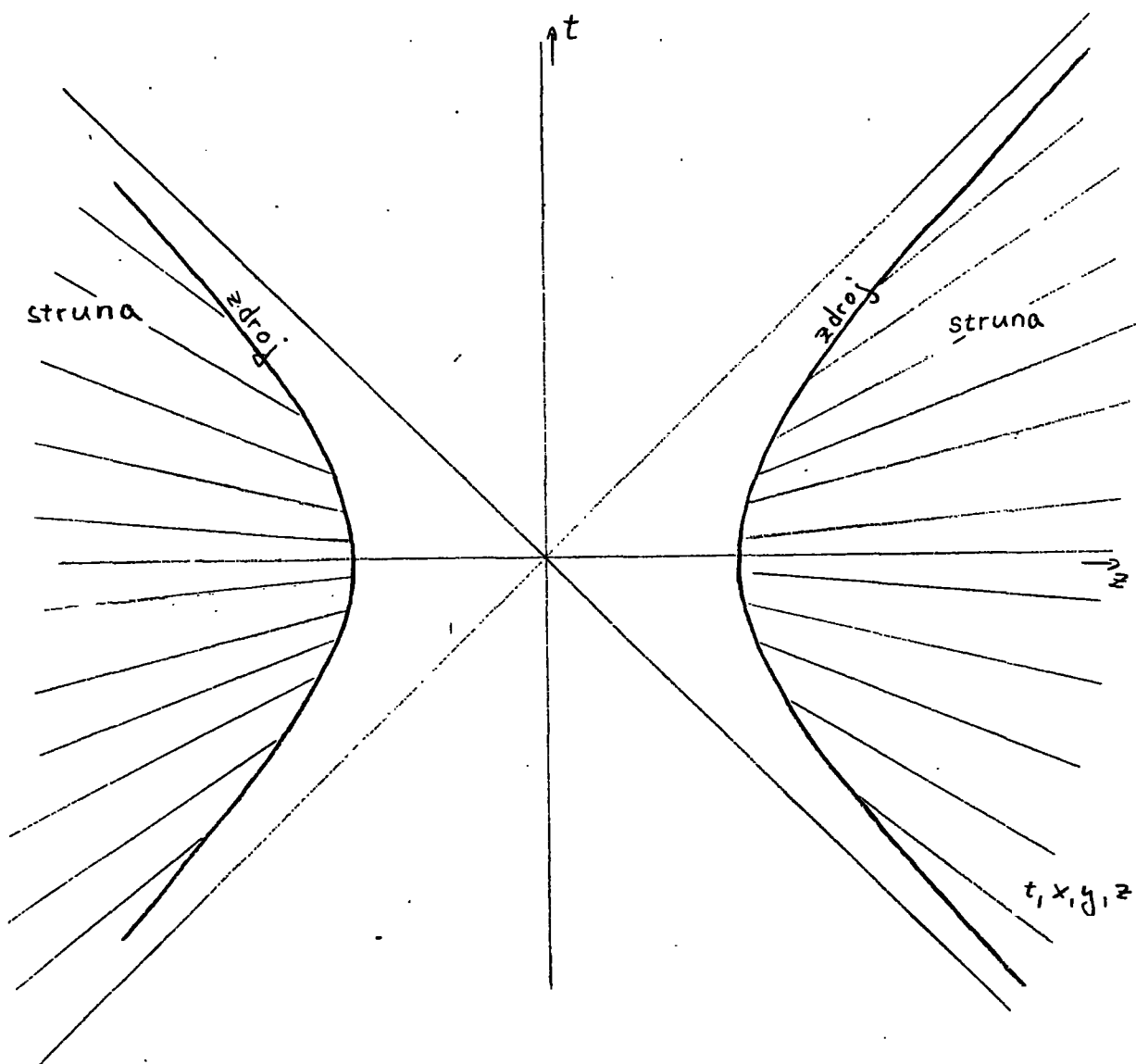
takže tato metrika je regulární na $u, v = 0$. Dále pro $\tilde{z}^2 < 0$, $\rho = 0$

$$\mu(0, \tilde{z}^2) + \lambda(0, \tilde{z}^2) = 0 \quad (4.2.4)$$

a pro $\tilde{z}^2 > 0$, $\rho = 0$

$$\mu(0, \tilde{z}^2) + \lambda(0, \tilde{z}^2) = 4L \quad (4.2.5)$$

tj. v oblasti $\tilde{z}^2 < a^2$ se na ose $\rho = 0$ nenachází žádný zdroj, v $\tilde{z}^2 = a^2$, $\rho = 0$ je lokalizovaná hmota a v oblasti $\tilde{z}^2 > a^2$, $\rho = 0$ se nachází struna. Nutno poznamenat, že struktura singularity na $\tilde{z}^2 = a^2$, $\rho = 0$ (kterou interpretujeme jako přítomnost hmotného zdroje) je poměrně složitá a jedná se o skutečnou singularitu



μ a λ . obr. 4.1

Metrika (4.1.1) s μ a λ určenými v (4.2.1), (4.2.2) odpovídá dvěma hmotným objektům, které jsou lokalizované na ose z a urychlované polonekonečnými strunami ležícími též na ose z . Situace je v souřadnicích t, x, y, z znázorněna na obrázku.

neskrytou pod horizontem (viz. [21]).

Nyní nalezneme linearizaci tohoto gravitačního pole. Budeme předpokládat, že hmotnosti a zrychlení hmotných objektů jsou malé, konkrétně

$$\frac{2\alpha}{4\pi} m \alpha = \frac{2\alpha}{4\pi} \frac{cm}{a} = \frac{2\alpha}{4\pi} G = L \ll 1 \quad (4.2.6)$$

Potom dostáváme

$$\mu = L \left(1 - \frac{a}{2R}\right) \quad (4.2.7)$$

$$\lambda = L \frac{a}{2R} \frac{\rho^2 + u\nu}{a^2} + O[L^2] \quad (4.2.8)$$

Vzhledem k velké kalibrační volnosti linearizované metriky, bude výhodnější linearizovat Riemannův tenzor křivosti. Ve výrazu (4.1.14) lze zanedbat všechny kvadratické členy v μ a λ (jsou řádu $O[L^2]$) a dostaneme

$$\begin{aligned} \overset{\text{lin}}{R}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= -\rho^2 \left(-\frac{1}{2} M_{1,\varphi\varphi} - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} (\lambda_{1,\varphi} + 2M_{1,\varphi}) \right) , \\ \overset{\text{lin}}{R}_{\varphi\hat{z}\varphi\hat{z}} &= -\frac{1}{2} (\lambda_{1,\varphi\varphi} + \lambda_{1,\hat{z}\hat{z}}) , \\ \overset{\text{lin}}{R}_{\tau\hat{z}\tau\hat{z}} &= -\frac{\hat{z}^2}{a^2} \left(-\frac{1}{2} M_{1,\varphi\varphi} - \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{z}} \lambda_{1,\hat{z}} \right) , \\ \overset{\text{lin}}{R}_{\varphi\hat{z}\varphi\hat{z}} &= -\rho^2 \left(-\frac{1}{2} M_{1,\hat{z}\hat{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \lambda_{1,\varphi} \right) , \\ \overset{\text{lin}}{R}_{\varphi\tau\varphi\tau} &= -\rho^2 \frac{\hat{z}^2}{a^2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hat{z}} M_{1,\hat{z}} - \frac{1}{\rho} M_{1,\varphi} \right) , \\ \overset{\text{lin}}{R}_{\hat{z}\tau\hat{z}\tau} &= -\frac{\hat{z}^2}{a^2} \left(-\frac{1}{2} M_{1,\hat{z}\hat{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} (\lambda_{1,\hat{z}} - 2M_{1,\hat{z}}) \right) , \\ \overset{\text{lin}}{R}_{\varphi\varphi\varphi\hat{z}} &= -\rho^2 \left(\frac{1}{2} M_{1,\varphi\hat{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} (\lambda_{1,\hat{z}} + M_{1,\varphi}) \right) , \\ \overset{\text{lin}}{R}_{\varphi\tau\hat{z}\tau} &= -\frac{\hat{z}^2}{a^2} \left(-\frac{1}{2} M_{1,\varphi\hat{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{z}} (\lambda_{1,\varphi} - M_{1,\varphi}) \right) . \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} M_{19} &= \frac{l e}{2a R^3} , \\
 \frac{1}{L} M_{199} &= \frac{1}{4a^2 R^5} (2al R^2 + 2\varrho^2 R^2 - 6l^2 \varrho^2) , \\
 \frac{1}{L} M_{19\tilde{z}} &= \frac{\varrho \tilde{z}}{2a^2 R^5} (-2l^2 - \tilde{z}^2 + 3al) , \\
 \frac{1}{L} M_{1\tilde{z}} &= \frac{\tilde{z}(l-a)}{2a R^3} , \\
 \frac{1}{L} M_{1\tilde{z}\tilde{z}} &= \frac{1}{4a^2 R^5} (-(2al - 2\varrho^2)(l^2 - \frac{\tilde{z}^2}{a^2}) - 6\tilde{z}^2(l-a)^2) , \quad (4.2.10) \\
 \frac{1}{L} u_{19} &= \frac{2\varrho}{\xi} - \frac{(x-a^2)2\varrho x}{\xi^3} + O[L] , \\
 \frac{1}{L} u_{1\tilde{z}} &= \frac{2\tilde{z}}{\xi} - \frac{(x-a^2)(2\tilde{z}x - 2a^2 2\tilde{z})}{\xi^3} + O[L] , \\
 \frac{1}{L} u_{199} &= \frac{2}{\xi} - \frac{8\varrho^2 x + 2(x-a^2)x + 4\varrho^2(x-a^2)}{\xi^3} + 3 \frac{4\varrho^2 x^2(x-a^2)}{\xi^5} + O[L] , \\
 \frac{1}{L} u_{1\tilde{z}\tilde{z}} &= \frac{2}{\xi} - \frac{(8\tilde{z}^2 - 2(x-a^2))(x-2a^2) - 4\tilde{z}^2(x-a^2)}{\xi^3} + 3 \frac{4\tilde{z}^2(x-a^2)(x-2a^2)}{\xi^5} + O[L] .
 \end{aligned}$$

Dosazením do (4.2.9) zjistíme, že

$$\lim R = {}^{arc}R. \quad (4.2.11)$$

Pokud linearizujeme přímo metriku, dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L} {}^{arc}h &= \frac{l-R}{2R} \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} dv^2 + \frac{v}{u} du^2 \right) + \frac{l+R-a}{2R} \frac{1}{2} du v dv + \\
 &+ \frac{a}{2R} \left(\frac{2l}{a} - 1 \right) d\varrho^2 - \frac{a}{2R} \varrho^2 \left(\frac{2R}{a} - 1 \right) d\varphi^2 , \quad (4.2.12)
 \end{aligned}$$

což je právě linearizovaná metrika, kterou jsme již uvedli v (3.4.81). Tímto jsme ukázali, že metrika (3.4.81) a metrika (3.4.31), získaná pomocí Grenových funkcí, jsou linearizované

metriky vedoucí v oblasti $u \neq 0$ ke stejnému linearizovanému Riemannovu tenzoru křiv $u \neq 0$ V oblasti $u > 0$ proto musí být spojeny kalibrační transformací.

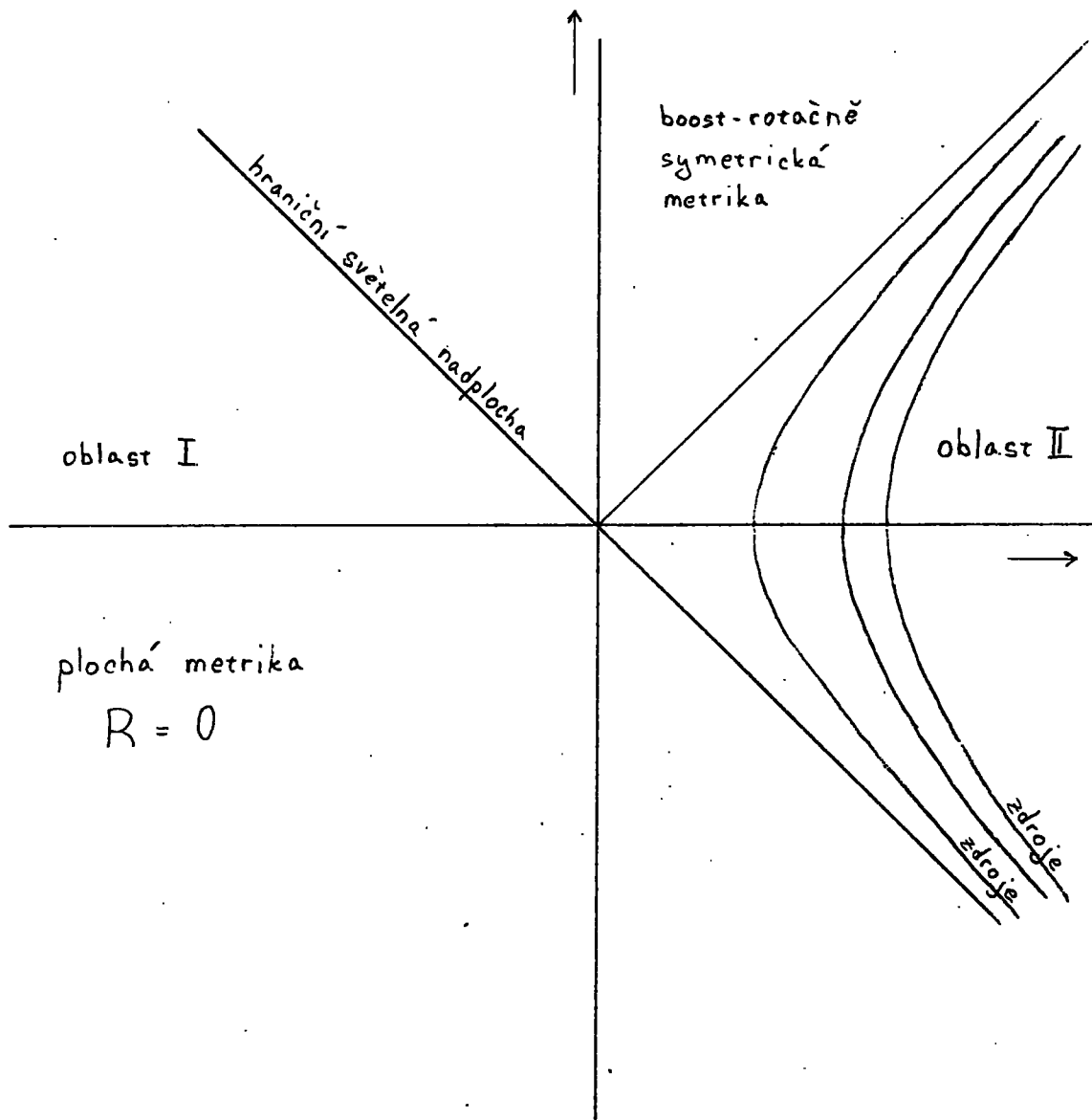
4.3 Retardované gravitační pole urychleného zdroje

Nyní se pokusíme specifikovat, co považujeme za retardované gravitační pole urychleného zdroje. Budeme požadovat, aby prostoročas reprezentující retardované gravitační pole urychleného zdroje se skládal z dvou oblastí oddělených od sebe světelnou nadplochou (obr. 4.2). Zdroje budou lokalizované v oblasti II a budou mít, stejně jako metrika v oblasti II, boost-rotaci symetrii ve smyslu popsaném v odstavci 4.1. Oblast I neleží v budoucnosti žádné události z oblasti II (hranice obou oblastí je světelná nadplocha) a tak se zde nemohou projevit žádné retardované efekty zdrojů. Proto budeme požadovat, aby v oblasti I byla plochá metrika. V oblasti II, jak jsme již řekli, požadujeme boost-rotaci symetrii metriky, takže zde metrika musí být daná výrazem (4.1.1).

Vidíme, že jak v oblasti I, tak v oblasti II je splněn Einsteinův gravitační zákon. Zbývá ještě otázka, zda je splněn i na hranici obou oblastí. Nebo jinak řečeno, ptáme se jakým způsobem musíme napojit plochou metriku v oblasti I a boost-rotaci symetrické metriky v oblasti II aby byl splněn Einsteinův gravitační zákon na tomto napojení.

U, V, R, ϕ

Je známý fakt (viz. např. [2], [3]), že metrika v rámci OTR musí být dostatečně [2], [3] nejhorším případě spojitá. Případná nespojitost vede k nejednoznačnosti mnoha operací v bodech nespojitosti, resp. k delta-funkcím v konexi. Riemannův tenzor je však kvadratický v konexi, což implikuje násobení delta-funkcí, které není dobře definováno. Proto požadujeme, aby plochá metrika v oblasti I a boost-rotaci symetrická metrika v oblasti II byly napojeny spojitě. Zvolme v oblasti I souřadnice U, V, R, ϕ v nichž má metrika tvar



obr. 4.2

Retardované gravitační pole hmotného objektu rovnoměrně urychlovaného polonekonečnou strunou by muselo být dáno boost-rotace symetrickou metrikou (4.1.1) v oblasti II a plochou metrikou v oblasti I. Oblast I totiž není kauzálně spojená s oblastí II - je oddělena světelnou nadplochou.

$$g_I = \frac{1}{2} dU \, dV + dR^2 + R^2 d\phi^2 \quad (4.3.1)$$

a oblast I je daná podmínkou

$$U < 0 \quad (4.3.2)$$

V oblasti II zvolíme souřadnice u, v, ξ, φ , v nichž má boost-rotačně symetrická metrika tvar (4.1.11) a oblast II je dána podmínkou

$$u > 0 \quad (4.3.3)$$

Metrika (4.1.11) musí být regulární na hranici oblasti II, tj. pro $u=0$. Musí být tedy splněna podmínka (4.1.8).

Zatím nevíme, jak jsou souřadnice V, R, ϕ a v, ξ, φ identifikovány na nadploše $U=u=0$. Díky rotační symetrii můžeme pouze ztotožnit úhlové souřadnice, tj.

$$\phi = \varphi \quad (4.3.4)$$

Vztah V, R a v, ξ zatím zůstává obecný. Z požadavku spojitěho navázání metrik v oblasti I a II plyne požadavek shodnosti indukovaných metrik na hraniční nadploše. Restrikce metriky (4.3.1) na hranici $U=0$ dostaneme

$$g_I = dR^2 + R^2 d\phi^2 \quad (4.3.5)$$

a restrikcí metriky (4.1.11) na hranici $u=0$ dostaneme s využitím (4.1.8)

$$g_{II} = e^{M(\xi^2, 0)} d\xi^2 + \xi^2 e^{-M(\xi^2, 0)} d\varphi^2 =$$

$$= e^{\mu(\xi^z, 0)} (\xi_{,R} dR + \xi_{,V} dV) (\xi_{,R} dR + \xi_{,V} dV) + \xi^z e^{-\mu(\xi^z, 0)} d\varphi^z \quad (4.3.6)$$

Porovnáním dostaneme podmínky

$$e^{\mu(\xi^z, 0)} \xi^z_{,R} = 1, \quad \xi^z e^{-\mu(\xi^z, 0)} = R^z, \quad (4.3.7)$$

$$\xi_{,R} \xi_{,V} = 0, \quad \xi^z_{,V} = 0.$$

Jednoduché úpravy vedou na

$$\xi_{,V} = 0, \quad (4.3.8)$$

$$\xi \xi_{,R} = R, \quad \frac{1}{\xi} \xi_{,R} e^{\mu(\xi^z, 0)} = \frac{1}{R}.$$

Integrací a využitím $\xi > 0$, $R > 0$ a $\xi = 0 \Leftrightarrow R = 0$ dostáváme

$$\xi = R, \quad e^{\mu(\xi^z, 0)} = 1. \quad (4.3.9)$$

Tímto jsme dospěli k podmínce

$$\mu(\xi^z, 0) = 0. \quad (4.3.10)$$

Vzhledem k tomu, že μ řeší vlnovou rovnici v souřadnicích u, v, ξ, φ a závisí pouze na u, v a ξ^z , je tato podmínka velmi silná - vede k triviálnímu řešení²⁾

$$\mu(A, B) = \lambda(A, B) = 0. \quad (4.3.11)$$

²⁾ Využitím (4.1.4) a (4.1.5) dostaneme z (4.3.10) též $\mu_{,B}(\xi^z, 0) = 0$, což omezuje μ jako řešení vlnové rovnice na rovinné vlny šířící se ve směru osy z identicky nulové na $u=0$. Ty jsou však vyloučeny boostovou symetrií M .

Dospěli jsme tedy k tomu, že nelze spojitě napojit netriviální boost- $u=0$ symetrickou metriku na plochou metriku podél nadplochy $u=0$. Co ale tento výsledek říká fyzikálně? Vždyť intuitivně cítíme, že retardované pole od libovolného zdroje, tedy i rovnoměrně urychleného, by mělo existovat. Potíž ale zřejmě tkví v tom, že náš zdroj se urychluje neustále. Díky tomu dochází ke kumulaci gravitačního pole podél hranice oblasti příčinně spojené se zdrojem. Takovéto kumulování gravitačního pole však v plné teorii může vést až k změně charakteru prostoročasu - prostoročas se může jakoby "rozříznout". V okolí hranice, kde se příspěvky od zdroje kumulují může gravitační pole vzrůst do nekonečna, což lze interpretovat jako zmíněné "odřiznutí" oblasti příčinně spojené se zdrojem od zbytku prostoročasu. V případě takového "odřiznutí" nemá smysl mluvit o oblasti I - nemůžeme se do ní z oblasti se zdroji dostat ani z ní obdržet nějaký signál. Nemá samozřejmě ani smysl podmínka spojitého navázání metrik obou oblastí. Naopak metrika oblasti II musí být na hranici oblasti divergentní. Této situaci odpovídá boost-rotačně symetrická metrika (4.1.11) v oblasti $u>0, \nu>0$, která není na hranici $\beta=0$ regulární, tj. není splněna podmínka (4.1.8).

Dotkněme se ještě druhé stránky problému. Ve skutečnosti není úplně jasné, že by retardovaná metrika od něčeho co nazýváme "rovnoměrně urychlený zdroj" měla být boostově symetrická. Potíž je však v tom, že pokud nebudeme požadovat boostovou symetrii metriky, ztrácí se nám význam slov "rovnoměrně urychlený zdroj" - již nemáme boostový Killingův vektor, pomocí něhož byla definována symetrie zdroje (invariance při posunutí podél orbit tohoto vektoru. Proto není jasné, jak by problém nalezení čistě retardovaného gravitačního pole rovnoměrně urychleného zdroje bez požadavku boostové symetrie šel vůbec nějak zformulovat.

5. URYCHLENÉ POLE A KONFORMNÍ TRANSFORMACE

V této kapitole při zkoumání polí rovnoměrně urychlených zdrojů využijeme konformních vlastností těchto polí. Konformní vlastnosti polí s nulovou hmotou mají však mnohem širší uplatnění. Hrají klíčovou roli v popisu chování polí ve světelném nekonečnu a tedy ve zkoumání zářivých vlastností polí. Konformní transformace nám umožňují přetransformovat nekonečno do konečné vzdálenosti. Proto využitím invariance polních rovnic vůči konformní transformaci lze úlohu ve fyzikálním prostoročasu přetransformovat na úlohu v prostoročasu s nekonečnem "stáhlým" do konečna, v kterém lze snadno zkoumat zářivé chování pole.

$$\Omega^2 > 0$$

5.1 Konformní transformace

Budeme se tedy nejdříve zabývat samotnou konformní transformací a transformačními vlastnostmi různých polí. Konformní transformací budeme rozumět transformaci metriky zachovávající úhly mezi vektory a příčinnou strukturu prostoročasu. Úhel mezi dvěma vektory je dán vztahem ¹⁾

$$\cos \varphi(a^a, b^a) = \frac{a^a b^a g_{ab}}{\|a\| \|b\|} \quad (5.1.1)$$

$$\|a\| = (a^a g_{ab} a^b)^{1/2}, \quad \|b\| = (b^a g_{ab} b^b)^{1/2}.$$

Transformace s těmito vlastnostmi mají tvar

$$\Theta: \frac{g}{\Omega} \rightarrow \hat{g} = \Omega^2 g \quad (5.1.2)$$

kde Ω je reálná kladná skalární funkce na prostoročase. Jelikož $\Omega^2 > 0$, zachovává se příčinná struktura - časupodobné vektory se převádí na časupodobné, prostorupodobné na prostorupodobné a isotropní na isotropní.

Obecné tenzorové objekty můžeme podle jejich transformačních vlastností vůči konformní transformaci rozdělit na tzv. konformní hustoty váhy s . Konformní hustota váhy s se při konformní transformaci transformuje následovně

¹⁾ Výraz (5.1.1) nedefinuje úhel nednoznačně ani v euklidovské geometrii. Jednoznačnost se v tomto případě dosáhne volbou definičního oboru, např.

$$\|a\| \in \mathbb{R}_0^+, \quad \varphi(a^a, b^a) = \langle 0, \pi \rangle$$

V Minkowského geometrii pojetí úhlu mezi vektory a veli

$$A \rightarrow \hat{A} = \Omega^s A \quad (5.1.3)$$

Váha součinu konformních hustot je součet vah jednotlivých činitelů

$$(\hat{A}\hat{B}) = \hat{A} \hat{B} = \Omega^s A \Omega^r B = \Omega^{s+r} AB \quad (5.1.4)$$

Přirozené geometrické, metricky nezávislé objekty (jako $\delta_{ij}^a, \delta_c^i \delta_j^a$ atd.) se při konformní transformaci zachovávají, tj. jsou konformními hustotami váhy 0.

$$\hat{\delta}_{ij}^a = \delta_{ij}^a \quad (5.1.5)$$

Transformace metriky indukuje transformaci metricky závislých objektů. Stručně vypíšeme některé z nich. Z posledních dvou vztahů dostáváme, že metrika s indexy "nahore" je konformní hustota váhy -2

$$\hat{g}^{ab} \hat{g}_{bc} = \hat{\delta}_{c}^a \Rightarrow \hat{g}^{ab} = \Omega^{-2} \tilde{g}^{ab} \quad (5.1.6)$$

Ortonormální báse kovektorů e_a^i ($a=1,2,\dots,m$) v každém bodě prostoročasu

$$g_{ab} = \eta_{ab} e_a^i e_b^j, \quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.7)$$

kosti vektoru získáme analytickým prodloužením z euklidovské oblasti. Úhel i velikost zde mohou nabývat komplexních hodnot a podmínky jednoznačnosti můžeme např. zvolit

$$\begin{aligned} \|a\| \in \mathbb{R}^+ & \text{ pro } a^a \text{ prostorupodobné} \\ -i \|a\| \in \mathbb{R}^+ & \text{ pro } a^a \text{ časupodobné orientované do budoucnosti} \\ i \|a\| \in \mathbb{R}^+ & \text{ pro } a^a \text{ časupodobné orientované do minulosti,} \\ \operatorname{Re} \varphi(a^i, b^j) \in \langle 0, \pi \rangle, & \operatorname{Im} \varphi(a^i, b^j) \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

je váhy 1

$$\hat{e}_a^1 = \Omega e_a^1 \quad . \quad (5.1.8)$$

Úplně antisymetrický tenzor

$$\varepsilon_{a_1, \dots, a_m} = e_{a_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{a_m}^m \quad (5.1.9)$$

je konformní hustotou váhy m

$$\hat{\varepsilon}_{a_1, \dots, a_m} = \Omega^m \varepsilon_{a_1, \dots, a_m} \quad . \quad (5.1.10)$$

Obdobně také element objemu je konformní hustotou váhy m

$$\hat{g}^{\frac{1}{2}} = |\hat{\varepsilon}_{a_1, \dots, a_m}| = |\Omega|^m |\varepsilon_{a_1, \dots, a_m}| = \Omega^m g^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (5.1.11)$$

Delta-funkce normovaná na element objemu je konformní hustotou váhy $-m$. Pro konformně nezávislou testovací funkci φ totiž platí

$$\langle \hat{\delta}_P, \varphi \hat{g}^{\frac{1}{2}} \rangle = \langle \hat{\delta}_P, \varphi \Omega^m g^{\frac{1}{2}} \rangle = \varphi(P) = \langle \delta_P, \varphi g^{\frac{1}{2}} \rangle \quad . \quad (5.1.12)$$

Dále se budeme zabývat transformací metrické konexe. Konexe je indukovaná metrikou vztahem

$$\hat{\nabla}_a \hat{g}_{bc} = 0 \quad . \quad (5.1.13)$$

Rozdíl dvou konexí lze popsat tenzorovou veličinou, proto můžeme psát (srovnej s (2.1.9))

$$\hat{\nabla}_a a^b - \nabla_a a^b = Q_{ac}^b a^c \quad , \quad (5.1.14)$$

$$\hat{\nabla}_a T_{a_1, \dots}^{b_1, \dots} - \nabla_a T_{a_1, \dots}^{b_1, \dots} = Q_{ac}^{b_1} T_{a_1, \dots}^{cb_1, \dots} + \dots - Q_{a_1 a}^c T_{c a_1, \dots}^{b_1, \dots} - \dots \quad . \quad (5.1.15)$$

Dosazením (5.1.2) do (5.1.13) a využitím (5.1.15) dostaneme (srovnej s (2.1.10))

$$Q_{ab}^{\epsilon} = \lambda_a \delta_b^{\epsilon} + \lambda_b \delta_a^{\epsilon} - \vec{J}^{\epsilon} g_{ab}, \quad (5.1.16)$$

kde

$$\lambda_a = d_a \ln \Omega = \Omega^{-1} d_a \Omega, \quad \vec{J}^{\epsilon} = \vec{g}^{ab} \lambda_b. \quad (5.1.17)$$

Pro konformní hustotu váhy s můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_a \hat{A}_{b_1 \dots}^{b_1 \dots} &= \hat{\nabla}_a (\Omega^s A_{b_1 \dots}^{b_1 \dots}) = \\ &= \Omega^s (\nabla_a A_{b_1 \dots}^{b_1 \dots} + Q_{aa}^{\epsilon} A_{b_1 \dots}^{\epsilon b_2 \dots} + \dots - Q_{\epsilon a}^{\epsilon} A_{b_1 \dots}^{b_2 \dots} - \dots + s \lambda_a A_{b_1 \dots}^{b_1 \dots}). \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Obdobou k (2.1.11) dostaneme vztah pro Riemannův tenzor

$$\hat{R}_{abcd}^d = R_{abcd}^d - \nabla_a Q_{bc}^d + \nabla_b Q_{ac}^d + Q_{ac}^{\epsilon} Q_{bc}^d - Q_{bc}^{\epsilon} Q_{ac}^d. \quad (5.1.19)$$

Zúžením

$$\hat{R}ic_{ab} = Ric_{ab} - (m-2) \nabla_a \lambda_b - g_{ab} \nabla_m \vec{J}^m + (m-2) \lambda_a \lambda_b - (m-2) g_{ab} \lambda_m \vec{J}^m, \quad (5.1.20)$$

$$\hat{R} = \Omega^{-2} (R - 2(m-1) \nabla_m \vec{J}^m - (m-2)(m-1) \lambda_m \vec{J}^m) \quad (5.1.21)$$

Weylův konformní tenzor křivosti je definován

$$\begin{aligned} C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{(m-2)} (g_{ac} Ric_{bd} - g_{ad} Ric_{bc} - g_{bc} Ric_{ad} + g_{bd} Ric_{ac}) + \\ + \frac{1}{(m-1)(m-2)} R (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

Přímým, ale dlouhým výpočtem dostaneme, že je to konformní hustota váhy 2

$$\hat{C}_{abcd} = \Omega^2 C_{abcd} \quad ; \quad (5.1.23)$$

pro následující rozložení indexů dostaneme konformní invariant

$$\hat{C}_{abc}{}^d = C_{abc}{}^d \quad (5.1.24)$$

Dále se zabýváme konformními vlastnostmi některých polních rovnic. Začneme skalárním polem. Předpokládejme, že skalární pole ϕ je konformní hustota váhy s . Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{\square} \hat{\phi} &= \hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{g}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} = \\ &= \Omega^{s-2} \left(\nabla \cdot \vec{g} \cdot \nabla \phi + (2s+m-2) \vec{\lambda} \cdot \nabla \phi + \right. \\ &\quad \left. + s \phi \nabla \cdot \vec{\lambda} + s(m+s-2) \lambda \cdot \vec{\lambda} \phi \right) \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Srovnáme-li toto s transformačními vlastnostmi skalární křivosti, dostaneme pro $s = -\frac{m}{2} + 1$, $m > 1$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{g}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} - \frac{m-2}{4(m-1)} \hat{R} \hat{\phi} = \Omega^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)} \left(\nabla \cdot \vec{g} \cdot \nabla \phi - \frac{m-2}{4(m-1)} R \phi \right). \quad (5.1.26)$$

Zdroj J_s interpretujeme jako prostorovou hustotu skalárního náboje - tj. integrací přes prostorovou nadplochu dostáváme celkový skalární náboj

$$Q = \int_{\Sigma} J_s d^{m-1} \Sigma' \quad (5.1.27)$$

Zde $d^{m-1} \Sigma'$ je element objemu prostorupodobné nadplochy. Je-li e_a^α ($a=0,1,\dots,m-1$) ortonormální báse, e_2^0 je normála k nadploše Σ' , tak

$$d^3 \Sigma' = \left| e_{\alpha'}^1 \wedge \dots \wedge e_{\alpha'_{m-1}}^{m-1} \right|_{\Sigma} \quad (5.1.28)$$

a pomocí (5.1.8) vidíme, že se jedná o konformní hustotu váhy $m-1$. Celkový náboj je globální veličina a je přirozené ji považovat za konformní invariant. To nastává, je-li J_s konformní hustota váhy $-(m-1)$

$$\hat{J}_s = \Omega^{-(m-1)} J_s \quad (5.1.29)$$

Vidíme, že je-li v dimenzi $m=4$ skalární pole konformní hustotou váhy -1 , skalární hustota náboje konformní hustotou váhy -3 , tak rovnice skalárního pole (2.2.2) s $\xi = -\frac{1}{6}$ je konformně invariantní

$$\left(\square - \frac{1}{6} R \right) \phi = J_s \quad \rightarrow \quad \left(\hat{\square} - \frac{1}{6} \hat{R} \right) \hat{\phi} = \hat{J}_s \quad (5.1.30)$$

Budeme-li v případě elektromagnetického pole předpokládat, že potenciál A_α i intenzita $F_{\alpha\beta}$ jsou konformní hustoty váhy 0, dostaneme ²⁾

$$F = dA \quad \rightarrow \quad \hat{F} = \hat{d}\hat{A} \quad (5.1.31)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{F}} = \Omega^{-4} (\nabla \cdot \vec{F} + (m-4) \lambda \cdot \vec{F}) \quad (5.1.32)$$

Nechť J_E^α je prostorová hustota elektromagnetického toku. Celkový náboj na prostorupodobné nadploše je dán vztahem

²⁾ $\frac{d\alpha}{dx^\alpha}$ je metricky nezávislý objekt a proto $\hat{d}_\alpha = d_\alpha$.
 $\vec{F}^\alpha = \vec{g}^{\alpha\beta} \vec{g}^{\gamma\delta} F_{\beta\delta}$ je konformní hustota váhy -4 .

$$Q = \int J_E^a n_a d^m \Sigma \quad (5.1.33)$$

Zde n_a je jednotková normála k nadploše, tj. $n_a = e_a^0$ v notaci (5.1.28). Z požadavku konformní invariance globálního elektromagnetického náboje opět dostáváme podmínku na transformační vlastnosti elektromagnetického toku

$$\hat{J}_E = \Omega^{-m} J_E \quad , \quad (5.1.34)$$

tj. J_E je konformní hustota váhy $-m$. Opět pro $m=4$ dostáváme konformně invariantní rovnice elektromagnetického pole

$$\begin{aligned} F = dA &\rightarrow \hat{F} = d\hat{A} \\ \hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{F}} = -\hat{J}_E &\rightarrow \hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{F}} = -\hat{J}_E \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

Obdobně pro kalibrační pole považujeme-li kalibrační stupně volnosti za konformní invarianty, dostáváme pro kalibrační konexi ³⁾

$$\hat{D}_a = D_a \quad , \quad \text{tj.} \quad \hat{A}_a^B = A_a^B \quad (5.1.36)$$

a pro kalibrační intenzitu (tenzor křivosti kalibrační konexe) ⁴⁾

³⁾ Zde je uvažována konexe pouze na kalibračním bundle prostoru. Pokud ji rozšíříme na konexi v tečném bundlu pomocí metrické konexe, tak se bude samozřejmě transformovat pomocí vztahu (5.1.15).

⁴⁾ \hat{D}_a je metricky nezávislý objekt a proto $\hat{D}_a = D_a$. $\hat{F}^{ab} = \hat{g}^{ac} \hat{g}^{bd} F_{cd}$ je konformní hustota váhy -4 .

$$\hat{F}_{ab} = 2 \hat{\partial}_{[a} \hat{A}_{b]} + i\ell [\hat{A}_a, \hat{A}_b] = F_{ab} \quad (5.1.37)$$

Pohybová rovnice se transformuje podle vztahu

$$\hat{D}_a \hat{F}^{ab} = \Omega^{-4} (D_a \bar{F}^{ab} + (m-4) \lambda_a \bar{F}^{ab}) \quad (5.1.38)$$

Bude-li J_k obdobně k elektromagnetickému toku konformní hustota váhy -4 , dostáváme v dimenzi $m=4$ konformně invariantní rovnice kalibračního pole

$$F_{ab}^a \text{ je tenzor křivosti } D_a \rightarrow \quad (5.1.39)$$

$$\rightarrow \hat{F}_{ab}^a \text{ je tenzor křivosti } \hat{D}_a,$$

$$D_a \bar{F}^{ab} = J_k^b \rightarrow \hat{D}_a \hat{F}^{ab} = \hat{J}_k^b \quad (5.1.40)$$

Rovnice gravitačního pole nejsou konformně invariantní. Ze vztahů (5.1.20), (5.1.21) dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\text{Ric}} - \frac{1}{2} \hat{g} \hat{R} &= \text{Ric} - \frac{1}{2} g R + \\ &+ (m-2) (g \nabla \cdot \vec{\lambda} - \nabla \lambda + \lambda \lambda - (m-2) g \lambda \cdot \vec{\lambda}) \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

Druhý člen na pravé straně je obecně nenulový a vidíme, že Einsteinův gravitační zákon nezachovává při konformní transformaci svůj tvar. Pouze v případě vakuových rovnic, kdy

$$\text{Ric} = 0 \quad (5.1.42)$$

a tedy i

$$R_{abcd} = C_{abcd} \quad , \quad (5.1.43)$$

dostáváme

$$\hat{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d \quad (5.1.44)$$

a pohybové rovnice teorie gravitace zachovávají při konformní transformaci svůj tvar

$$R_{abc}{}^d \text{ je tenzor křivosti } g_{ab} \rightarrow \quad (5.1.45)$$

$$\rightarrow \hat{R}_{abc}{}^d \text{ je tenzor křivosti } \hat{g}_{ab} \quad ,$$

$$Ric = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{Ric} = 0 \quad . \quad (5.1.46)$$

Stejná situace je i v případě linearizované teorii gravitace.

5.2 Bodová konformní transformace plochého prostoru

Budeme nyní zkoumat speciální transformaci plochého 4-dimensionálního prostoročasu

$$\mathbb{E}_x : M \rightarrow M, \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' \quad (5.2.1)$$

$$x^a(\mathcal{P}') = \bar{\Omega}^{-1}(\mathcal{P}) (x^a(\mathcal{P}) - \bar{x}^z(\mathcal{P}) \bar{\alpha}^a) \quad (5.2.1)$$

$$\bar{\Omega}(\mathcal{P}) = 1 - 2 x^a(\mathcal{P}) \bar{\alpha}_a + \bar{x}^z(\mathcal{P}) \bar{\alpha}^z \quad (5.2.2)$$

kde $x^a = (t, x, y, z)$, $a=0,1,2,3$ jsou inerciální souřadnice a $\bar{\alpha}^a$ jsou souřadnice nějakého globálního vektoru ⁵⁾ v souřadnicích x^a a

$$\bar{x}^z(\mathcal{P}) = x^a x^b \eta_{ab}, \quad \bar{\alpha}^z = \bar{\alpha}^a \bar{\alpha}^b \eta_{ab} \quad (5.2.3)$$

$$\bar{\alpha}_a = \eta_{ab} \bar{\alpha}^b, \quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní transformace je daná vztahy

$$x^a(\mathcal{P}) = \bar{\Omega}^{-1}(\mathcal{P}') (x^a(\mathcal{P}') + \bar{x}^z(\mathcal{P}') \bar{\alpha}^a) \quad (5.2.4)$$

$$\bar{\Omega} = 1 + 2 x^a \bar{\alpha}_a + \bar{x}^z \bar{\alpha}^z \quad (5.2.5)$$

⁵⁾ Globální vektory lze definovat v afinních (tj. plochých) prostorech - jsou to prvky zaměření afinního prostoru. Zhruba řečeno je můžeme považovat za rozdíly bodů. Globální vektory můžeme také modelovat konstantními vektorovými poli. Pokud je budeme používat budeme je značit šipkou, tj. $\vec{\alpha}, \vec{x}, \dots$. Nutno ale dát pozor na nedorozumění, někdy jsme použili šipku i pro obecné tenzorové objekty.

Definujeme-li nové souřadnice x'^a vztahem

$$x'^a(P') = x^a(P), \quad \text{kde } \Xi_{\vec{x}}: P \rightarrow P', \quad (5.2.6)$$

dostáváme

$$x'^a = \Omega^{-1} (x^a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}^a) \quad (5.2.7)$$

Transformace $\Xi_{\vec{x}}$ indukuje transformaci vektorů a tenzorů a tedy i metriky

$$\Xi_{\vec{x}}: g \rightarrow g' \quad (5.2.8)$$

Je samozřejmé, že g' je opět plochá metrika - souřadnice x'^a jsou její inerciální souřadnice. Metriku g' můžeme ale vyjádřit i pomocí metriky g

$$\begin{aligned} g' &= \eta_{ab} dx'^a dx'^b = \\ &= \eta_{ab} d(\Omega^{-1}(x^a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}^a)) d(\Omega^{-1}(x^a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}^a)) = \\ &= \Omega^{-2} \eta_{ab} dx^a dx^b + \\ &\quad + \Omega^{-2} (d\vec{x}^2 \vee dx^a \vec{\alpha}_a + \vec{\alpha}^2 d\vec{x}^2 d\vec{x}^2) - \\ &\quad - \Omega^{-3} (d\Omega \vee dx^a (\alpha_a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}_a) + d\Omega \vee dx^2 (x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}^2)) + \\ &\quad + \Omega^{-4} d\Omega d\Omega (\vec{x}^2 + 2\vec{x}^2 x^a \vec{\alpha}_a + (\vec{x}^2)^2 \vec{\alpha}^2) = \\ &= \Omega^{-2} g + \\ &\quad + \Omega^{-2} \left(\frac{1}{2} d\vec{x}^2 \vee d(2x^a \vec{\alpha}_a + \vec{\alpha}^2) \right) + \\ &\quad + \Omega^{-3} \left(\frac{1}{2} d\Omega \vee d\vec{x}^2 (1 + 2x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}^2) + \frac{1}{2} d\Omega \vee d(2x^a \vec{\alpha}_a + \vec{x}^2 \vec{\alpha}^2) \vec{x}^2 \right) + \\ &\quad + \Omega^{-2} d\Omega d\Omega \vec{x}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Omega^{-2} g + \\
&+ \Omega^{-2} \left(\frac{1}{2} d\bar{x}^2 \vee d(2x^a \bar{\alpha}_a + \bar{\alpha}^2) - \right. \\
&- \Omega^{-3} \left(\frac{1}{2} d\Omega \vee d\bar{x}^2 (1 + 2x^a \bar{\alpha}_a + \bar{x}^2 \bar{\alpha}^2) + \frac{1}{2} d\Omega \vee d(2x^a \bar{\alpha}_a + \bar{x}^2 \bar{\alpha}^2) \bar{x}^2 \right) + \\
&+ \Omega^{-2} d\Omega \wedge d\Omega \bar{x}^2 = \\
&= \Omega^{-2} g .
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Tedy metrika g' je konformně spojená s původní metrikou g .
Lorentzovy transformace spolu s transformacemi $E_{\bar{x}}$
a škálovací transformací H_s

$$\begin{aligned}
H_s : M \rightarrow M , \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' , \\
x^a(\mathcal{P}') = s x^a(\mathcal{P})
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

tvoří konformní grupu - grupu všech bodových transformací převádějících plochý prostoročas na prostoročas konformně plochý.

Skombinujeme-li transformaci $E_{\bar{x}}$ s konformní transformací

$$\theta : g' \rightarrow \hat{g} = \Omega^2 g' = g , \tag{5.2.11}$$

dostaneme transformaci zachovávající metriku prostoročasu, měnící však jiné objekty. Právě této transformace v dalším využijeme.

Všimněme si podrobněji transformace $E_{\bar{x}}$. Pro jednoduchost si vybereme typického reprezentanta - položíme

$$\bar{\alpha}^a = (0, 0, 0, \frac{1}{a}) \tag{5.2.12}$$

Transformace $\bar{\Omega}_a$ má pak tvar

$$\begin{aligned} t' &= \bar{\Omega}^{-1} t, \\ z' &= \bar{\Omega}^{-1} \left(z + \frac{1}{a} (-t^2 + \varrho^2 + z^2) \right), \\ \varrho' &= \bar{\Omega}^{-1} \varrho, \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi, \\ \Omega &= 1 + 2\frac{z}{a} + \frac{1}{a^2} (-t^2 + z^2 + \varrho^2) = 2\frac{z}{a} + \frac{\mathcal{K}}{a^2}, \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

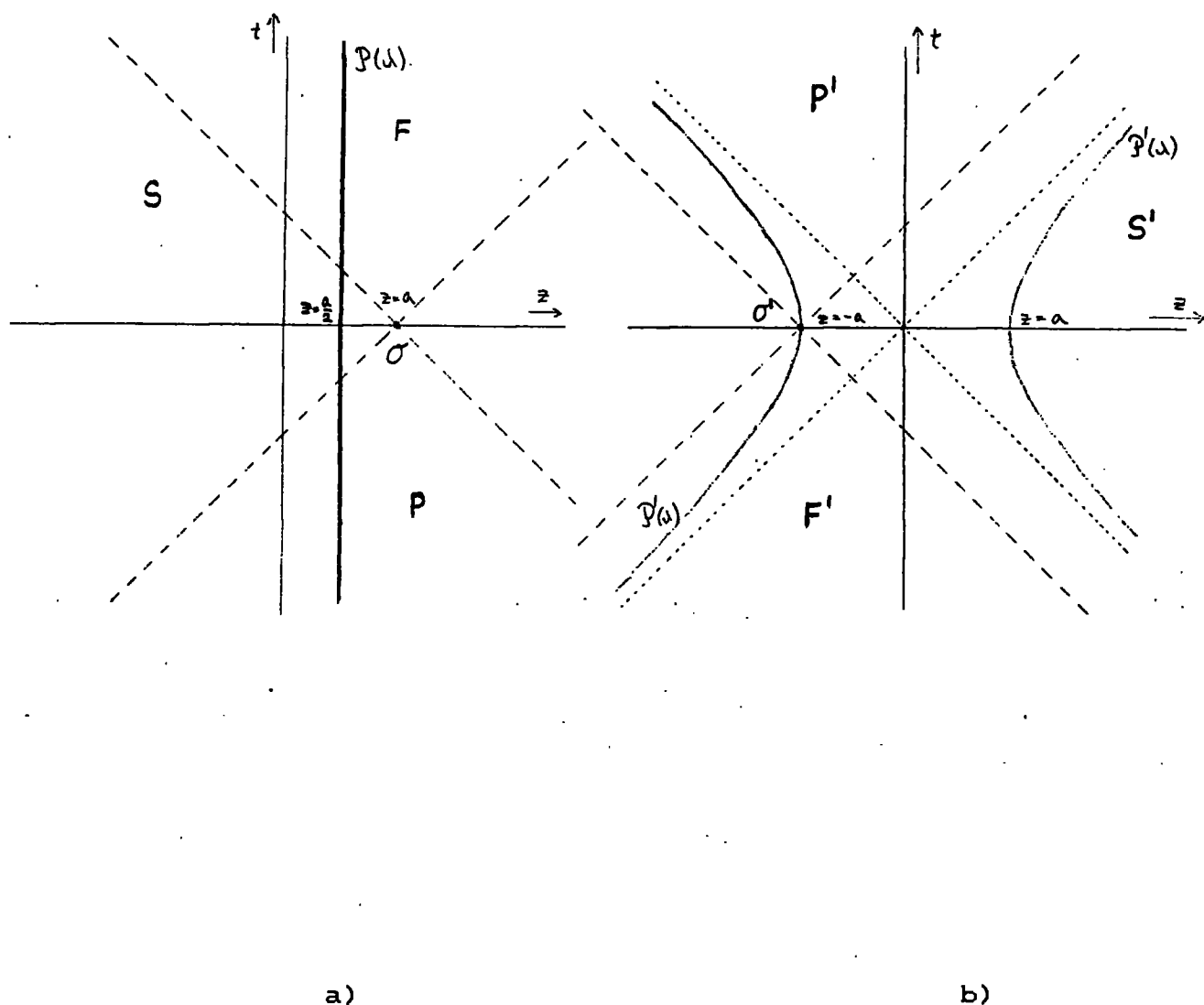
kde jsme použili cylindrických souřadnic definovaných v (3.1.14). Tato transformace je singulární pro body na nadploše dané podmínkou

$$\bar{\Omega}(P) = 0 \Leftrightarrow t^2 = (z-a)^2 + \varrho^2. \quad (5.2.15)$$

Tyto body se zobrazují do nekonečna. Přitom bod $z=a, t=\varrho=0$ se zobrazuje do prostorového a časového nekonečna, ostatní body nadplochy $\bar{\Omega}=0$ do nekonečna světelného. Další singulární body jsou na nadploše

$$\Omega(P) = 0 \Leftrightarrow t^2 = (z+a)^2 + \varrho^2 \quad (5.2.16)$$

Tato nadplocha je obrazem nekonečna. Konkrétně bod $z=-a, t=\varrho=0$ je obrazem prostorového a časového nekonečna, ostatní body nadplochy $\Omega=0$ jsou obrazem světelného nekonečna. Oblast S vně kuželu $\bar{\Omega}=0$ se zobrazuje na oblast S' vně kuželu $\Omega=0$ (obr. 5.1), oblast F na oblast F' a oblast P na oblast P'.



obr. 5.1

Transformace Σ_{σ} transformuje prostoročas na sebe. Na obrázku a) je prostoročas před transformací, na obrázku b) po transformaci. Transformace Σ_{σ} je singulární pro body na světelném kuželu bodu σ , tento kužel se zobrazuje do nekonečna. Přitom bod σ se zobrazuje do prostorového a časového nekonečna, ostatní body do nekonečna světelného. Další singulární body jsou na světelném kuželu bodu σ' . Tento kužel je obrazem nekonečna. Konkrétně bod σ' je obrazem prostorového a časového nekonečna, ostatní body jsou obrazem světelného nekonečna. Oblast S prostorupodobně položená k bodu σ se zobrazuje na oblast S' prostorupodobně položenou k σ' , oblast F na oblast F' a oblast P na oblast P'.

Pro nás je podstatná transformace světočáry částice stojící v bodě $z = \frac{a}{2}, \varphi = 0$, tj. se světočárou

$$t = \tau, \quad z = \frac{a}{2}, \quad \varphi = 0. \quad (5.2.17)$$

Přímým dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} & - (t(P'))^2 + (z(P'))^2 = \\ & = - \left(\bar{\mathcal{X}}^{-1} t(P) \right)^2 + \left(\bar{\mathcal{X}}^{-1} \left(z(P) - \frac{1}{a} (-t^2(P) + \varphi^2(P) + z^2(P)) \right) \right)^2 = \\ & = \bar{\mathcal{X}}^{-2} \left(-\tau^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{a} \left(-\tau^2 + \frac{a^2}{4} \right) \right)^2 \right) = \frac{a^2}{(-\tau^2 + \frac{a^2}{4})^2} \frac{1}{a^2} \left(-\tau^2 + \frac{a^2}{4} \right)^2 = \\ & = a^2. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Tedy obrazem přímky (5.2.17) je hyperbola. Jinak řečeno, transformací stojící částice (vůči metrice g) dostaneme částici rovnoměrně urychlenou (vůči téže metrice g). Tohoto faktu využijeme pro nalezení pole od urychlené částice.

Poznamenejme, že námi odvozený výsledek o transformaci speciálně položené přímky na hyperbolu je důsledkem mnohem obecnější skutečnosti. Libovolnou časupodobnou hyperbolu převede transformace $\bar{\mathcal{E}}_z$ opět na časupodobnou hyperbolu, kde časupodobná přímka je speciálním degenerovaným případem hyperboly se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem. Tento výsledek a další diskuse bodových konformních transformací jsou rozvedeny v apendixu 5.A.

5.3 Skalární a elektromagnetické pole urychleného náboje

Nyní využijeme invariance rovnic skalárního pole a elektromagnetického pole vůči transformaci $\Sigma_{\vec{a}}$ i Θ . Přetransformujeme řešení rovnic pole v plochém prostoročase se zdrojem J_s na řešení stejných rovnic (díky invarianci) ve stejném plochém prostoročase $(\hat{g} \cdot \Omega^{\vec{a}} g' - g)$, ale s jiným zdrojem $\hat{J} = \Theta \cdot \Sigma_{\vec{a}}[J]$. Přitom využijeme toho, že transformace $\Theta \circ \Sigma_{\vec{a}}$ převádí světočáru stojící částice na světočáru dvou rovnoměrně urychlených částic.

Konkrétně pro skalární pole je zdroj odpovídající částici stojící v bodě $z = \frac{a}{2}, \varphi = 0$ dán

$${}^{un}J_s = \int e \delta({}^{un}P(\lambda), x) d\lambda = \delta(z - \frac{a}{2}) \quad (5.3.1)$$

Transformací $\Sigma_{\vec{a}}$ dostaneme

$${}^{un}J'_s = \int e \delta'({}^{un}P'(\lambda'), x) d\lambda' \quad (5.3.2)$$

kde apostrofy u delta-funkcí označují normování na element objemu g'^k (viz. apendix 3.A) a je vlastní čas v metrice g' . Díky (5.2.9) a (5.1.11) můžeme psát

$$\delta'_P = \Omega^{\vec{a}} \delta_P \quad (5.3.3)$$

Využitím (5.1.8) dostaneme

$$d\lambda' = \Omega^{-1} d\lambda \quad (5.3.4)$$

Dosazením do (5.3.2) máme

$${}^{un}J'_s = \Omega^3 e \int \delta(\mathcal{P}(\lambda), x) d\lambda = \Omega^3 {}^{acc}J_s, \quad (5.3.5)$$

kde ${}^{acc}\mathcal{P} = {}^{un}\mathcal{P}'$ je obraz přímky ${}^{un}\mathcal{P}$, tj. světočára dvou urychlených částic (vůči g) (obr: 5.1), λ je vlastní čas světočáry ${}^{acc}\mathcal{P}$ vůči metrice g a ${}^{acc}J_s$ je skalární tok příslušící této světočáře. Řešení konformně invariantní rovnice skalárního pole se zdrojem ${}^{un}J_s$,

$$\left(\square - \frac{1}{6}R\right) {}^{un}\phi = {}^{un}J_s \quad (5.3.6)$$

je dané (3.2.21)

$${}^{un}\phi = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R}, \quad (5.3.7)$$

kde

$$R = \left(\rho^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}. \quad (5.3.8)$$

Transformace \square toto řešení převádí na řešení ${}^{un}\phi'$ rovnice

$$\left(\square' - \frac{1}{6}R'\right) {}^{un}\phi' = {}^{un}J'_s, \quad (5.3.9)$$

kde apostrofy v $\left(\square' - \frac{1}{6}R'\right)$ znamenají odkaz na metriku g' . Jak jsme ověřili v 5.1, konformní transformace θ zachovává tvar této rovnice, tj. vede ke vztahu

$$\left(\square - \frac{1}{6}R\right) {}^{un}\hat{\phi} = {}^{un}\hat{J}_s, \quad (5.3.10)$$

kde $\left(\square - \frac{1}{6}R\right)$ je vyjádříme vůči metrice $\hat{g} = \Omega^2 g' = g$ a (viz. (5.1.30), (5.3.5))

$${}^{un}\hat{\phi} = \Omega^{-1} {}^{un}\phi', \quad (5.3.11)$$

$${}^{un}\hat{J}_s = \Omega^{-3} {}^{un}J'_s = {}^{acc}J_s \quad (5.3.12)$$

Pole ${}^{un}\hat{\phi}$ tedy je pole od zdroje ${}^{acc}J_s$, tj. skalární pole dvou rovnoměrně urychlených částic. Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} {}^{acc}\phi &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R R'} = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{\Omega \left(\rho'^2 + \left(z' - \frac{a}{2} \right)^2 \right)^{1/2}} = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{\left(\rho^2 + \left(z^2 + \frac{1}{a} (-t^2 + z^2 + \rho^2) - \frac{a}{2} \Omega \right)^2 \right)^{1/2}} = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{\left(\rho^2 + (-t^2 + z^2 + \rho^2 - a^2)^2 \right)^{1/2}} = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Toto je přesně pole (3.2.12), které jsme interpretovali jako kombinaci retardovaného pole jedné urychlené částice a advancovaného pole druhé urychlené částice (viz. závěr paragrafu 3.2).

Stejným postupem pro elektromagnetické pole máme

$${}^{un}J_E^a(x) = \int e {}^{un}u^a \delta({}^{un}P(u), x) du \quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned} {}^{un}J_E^{l'a}(x) &= \int e {}^{un}u^{l'a} \delta'({}^{un}P(u), x) du = \\ &= \Omega^4 \int e {}^{acc}u^a \delta({}^{acc}P(u), x) du = \Omega^4 {}^{acc}J_E^a \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

$${}^{un}F_{\underline{a}\underline{b}} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R^2} d_{\underline{a}} t \wedge d_{\underline{b}} R \quad (5.3.16)$$

$${}^{un}F'_{\underline{a}\underline{b}} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{R'^2} d_{\underline{a}} t' \wedge d_{\underline{b}} R' \quad (5.3.17)$$

a transformace Θ převádí rovnici

$$\nabla_{\underline{z}}' \overset{un}{F}{}^{\prime ab} = - \overset{un}{J}{}^b_E \quad (5.3.18)$$

na (viz. (5.1.35))

$$\hat{\nabla}_{\underline{z}} \overset{un}{F}{}^{\hat{a}b} = - \overset{un}{J}{}^b_E \quad , \quad (5.3.19)$$

kde

$$\overset{un}{J}{}^b_E = \Omega^{-4} \overset{un}{J}{}^b_E = \overset{acc}{J}{}^b_E \quad , \quad (5.3.20)$$

$$\overset{un}{F}{}^{ab} = \Omega^{-4} \overset{un}{F}{}^{\prime ab} \quad , \quad \text{resp.} \quad \overset{acc}{F}{}_{ab} \equiv \overset{un}{F}{}^{\hat{a}b} = \overset{un}{F}{}^{\prime ab} \quad . \quad (5.3.21)$$

Pole $\overset{acc}{F}{}_{\underline{z}}$ je elektromagnetické pole vzniklé od dvou symetricky umístěných urychlených částic (částice a antičástice - částice mají opačnou 4-rychlost). Přímým dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} \overset{acc}{F} &= \overset{un}{F} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{r'^2} dt' \wedge dr' = -\frac{e}{4\pi} \frac{2a}{\xi^2} \Omega^2 d(\Omega^{-1}t) \wedge d(\Omega^{-1}\xi) = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{8a^2}{\xi^3} \frac{1}{2\Omega a} \left[\Omega \frac{1}{2} dt \wedge \xi d\xi - \frac{1}{2} t d\Omega \wedge \xi d\xi - \frac{1}{2} \xi^2 dt \wedge d\Omega \right] = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{8a^2}{\xi^3} \frac{1}{2\Omega a} \left[\varrho \left(\frac{1}{a^2} (a^2 + 2za + \bar{x}^2) \chi + 2\frac{t}{a^2} \chi - 2\frac{t^2}{a^2} (\chi - 2a^2) - 4\rho^2 - \frac{1}{a^2} (\chi - 2a^2)^2 \right) dt \wedge d\varrho + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{t\rho}{a^2} (\chi - 2a^2) z + \frac{t}{a^2} (z+a) \chi \varrho \right) dz \wedge d\varrho + \left((a^2 + 2za + \bar{x}^2) (\chi - 2a^2) \frac{z}{a^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2t^2 \frac{z}{a^2} (\chi - 2a^2) - 2\frac{t^2}{a^2} (z+a) (\chi - 2a^2) - \frac{1}{a^2} (z+a) (4a^2\rho^2 + \chi^2 - 2a^2) \right) dt \wedge dz \right] = (5.3.22) \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{8a^2}{\xi^3} \frac{1}{2\Omega a} \left[\varrho \left(\frac{1}{a^2} \chi^2 - \frac{1}{a^2} (\chi - 2a)^2 + 2\frac{z}{a} \chi + 4t^2 - 4\rho^2 \right) dt \wedge d\varrho + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t\rho}{a^2} (a^2 + 2za + \bar{x}^2) dz \wedge d\varrho + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \left((\chi - 2a^2) (a^2 + 2az + \bar{x}^2) - (\chi - 2a^2) 2\rho^2 - 4a^2\rho^2 - 4az\rho^2 \right) dt \wedge dz \right] = \\ &= -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{aR^3} \left[\varrho z dt \wedge d\varrho + \varrho t dz \wedge d\varrho + \frac{1}{2} (z^2 - t^2 - a^2 - \rho^2) dt \wedge dz \right] \quad . \end{aligned}$$

5.3 Skalární a elektromagnetické pole urychleného náboje 157

což je přesně pole (3.3.10), které jsme interpretovali jako kombinaci retardovaného pole jedné částice a advancovaného pole druhé částice.

5.4 Kalibrační pole urychlených částic

V případě kalibračního pole je situace díky nelinearitě rovnic složitější. Potíže se již vyskytnou ve zvolení kalibračního toku stojící částice tak, aby splňoval podmínku zachování (2.3.21)

$$D_{\mu} J_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (5.4.1)$$

Problémem je, že sama konexe D_{μ} je kalibračně závislá na toku J_{ν} . Nemůžeme proto ověřit platnost (5.4.1) před vyřešením pohybových rovnic, a řešení je obecně obtížné. Navíc pro bodovou částici můžeme očekávat, že kalibrační pole D_{μ} bude na světočáře částice singulární. Potom ale nebude mít rovnice (5.4.1) dobrý smysl (J_{ν} je lokalizovaný na světočáře částice). Naštěstí obě tyto potíže lze vyřešit volbou vhodné kalibrační podmínky.

Kalibrační tok reprezentující bodovou částici se světočárou $\mathcal{P}(\lambda)$ je

$$J_{\nu}^{\mu} = \int q_{\nu}^{\mu}(\lambda) u^{\nu}(\lambda) \delta(\mathcal{P}(\lambda) | x) d\lambda, \quad (5.4.2)$$

kde q_{ν}^{μ} je kalibrační náboj splňující

$$q^{\nu} = q \quad (5.4.3)$$

Platí

$$\begin{aligned} D_{\mu} \int q_{\nu}^{\mu} u^{\nu} \delta(\mathcal{P}(\lambda) | x) d\lambda &= \\ &= \int u^{\nu} (D_{\mu} q_{\nu}^{\mu}) \delta(\mathcal{P}(\lambda) | x) d\lambda + \int q_{\nu}^{\mu} \nabla_{\mu} (u^{\nu} \delta(\mathcal{P}(\lambda) | x)) d\lambda = \end{aligned}$$

$$= \int u^z (D_z q^A_B) \delta(\mathcal{P}(\omega)|x) d\omega, \quad (5.4.4)$$

kde jsme využili (3.3.3) a toho, že D_z je na tečném prostoru prostoronočasová metrická konexe ∇_z . Rovnice (5.4.1) tedy vede na

$$\frac{D}{d\omega} q^A_B = u^z D_z q^A_B = 0. \quad (5.4.5)$$

Zvolíme-li kalibraci - speciální bázi e^A_B a k ní příslušející plochou konexi ∂_z v prostoru vnitřních stupňů volnosti, můžeme psát (viz. (2.3.14))

$$0 = u^z D_z q^A_B = u^z \partial_z q^A_B + i\ell [u^z A_z, q]^A_B. \quad (5.4.6)$$

Zdrojem problémů je člen s potenciálem A_z . Naštěstí se zde vyskytují pouze některé složky potenciálu.

Ukážeme, že existuje kalibrační transformace, která tyto složky "vynuluje". Tj. že vhodnou transformací (2.3.17), (2.3.19)

$$\tilde{A}_z^A_B = A_z^A_B + \frac{1}{i\ell} (\partial_z T^A_C) T^{-1C}_B \quad (5.4.7)$$

dosáhneme

$$u^z \tilde{A}_z^A_B = 0. \quad (5.4.8)$$

Transformace T^A_B budeme hledat ve tvaru ⁶⁾

⁶⁾ Exponenciála v libovolné algebře (v našem případě $E_{1,0}^{4,0} \mathcal{P}$ s násobením $(A \cdot B)^A_B = A^A_C B^C_B$) lze definovat řadou

$$\exp A = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

$$T_B^A = (\exp i\lambda t)^A_B \quad (5.4.9)$$

Podmínka (2.3.16) vede na

$$t^A_B = t^A_B \quad (5.4.10)$$

Musíme tedy nalézt t^A_B tak, aby

$$\begin{aligned} 0 &= u^\alpha \tilde{A}_{\alpha B}^A = u^\alpha A_{\alpha B}^A + \frac{1}{i\lambda} u^\alpha \partial_\alpha (\exp i\lambda t)^A_C (\exp -i\lambda t)^C_B \\ &= u^\alpha A_{\alpha B}^A + \frac{\partial}{\partial \lambda} t^A_B = \\ &= u^\alpha A_{\alpha B}^A + \frac{d}{d\lambda} (t^A_B) e_A^A e_B^B, \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

kde

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \equiv u^\alpha \partial_\alpha \quad (5.4.12)$$

Dostáváme tak snadno řešitelné rovnice (v reálných číslech)

$$\frac{d}{d\lambda} t^A_B = -u^\alpha A_{\alpha B}^A, \quad A, B = 1, 2, \dots, N \quad (5.4.13)$$

Jejich vyřešením nalezneme hledanou transformaci

Můžeme tedy bez újmy na obecnosti položit podmínku (5.4.8). V této kalibraci se požadavek zachování toku redukuje na podmínku

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} q^A_B \equiv u^\alpha \partial_\alpha q^A_B = \frac{d}{d\lambda} (q^A_B) e_A^A e_B^B \quad (5.4.14)$$

tj. požadavek konstantnosti kalibračního náboje vůči zvolené bázi.

Budeme nyní hledat kalibrační pole stojící částice, které splňuje kalibrační podmínku (5.4.8). Kalibrační tok stojící částice napíšeme ve tvaru

$${}^{\mu\nu} J_k^a \Big|_B = \int q_B^a {}^{\mu\nu} u^i \delta({}^{\mu\nu} P(u)(x)) du, \quad (5.4.15)$$

$$q_B^a(P) = q_B^a e_A^a(P) e_B^a(P),$$

$${}^{\mu\nu} u^i = \frac{\partial^i}{\partial \tau},$$

kde e_A^a je ortonormální báze v prostoru vnitřních stupňů volnosti, d_a k ní příslušející konexe a q_B^a ($A=1,2,\dots,N$, N dimenze fibru $E_3 M$) je konstantní matice čísel (nezávislá na bodu prostoročasu). Tj.

$$d_a q_B^a = 0 \quad (5.4.16)$$

Ukážeme nyní, že kalibrační pole splňující pohybové rovnice (2.3.20) se zdrojem ${}^{\mu\nu} J_k^a$ je dáno následujícím potenciálem vůči bázi e_A^a

$${}^{\mu\nu} A_a^B = -\frac{1}{4\pi} q_B^a \frac{t}{r^2} d_a \Omega, \quad (5.4.17)$$

kde Ω je dáno výrazem (5.3.8).

Tenzor křivosti je

$${}^{\mu\nu} F_{ab}^B = 2 \partial_{[a} {}^{\mu\nu} A_{b]}^B + ie [{}^{\mu\nu} A_a, {}^{\mu\nu} A_b]^B =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} q_B^a \frac{1}{r^2} d_a t \wedge d_b \Omega. \quad (5.4.18)$$

Levá strana pohybové rovnice (3.2.20) má tvar

$$\begin{aligned}
{}^{un}D_s {}^{un}\tilde{F}^{ab}{}_{\mathbb{B}} &= \partial_s {}^{un}\tilde{F}^{ab}{}_{\mathbb{B}} + ie [{}^{un}A_s; {}^{un}\tilde{F}^{ab}]_{\mathbb{B}} = \\
&= -\frac{1}{4\pi} q_{\mathbb{B}} \nabla_s \left(\frac{1}{R^2} 2 \left(-\frac{\partial^k}{\partial t} \right) \frac{\partial^{s1}}{\partial R} \right) + \\
&\quad + ie \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{R^4} d_s R 2 \left(-\frac{\partial^k}{\partial t} \right) \frac{\partial^{s1}}{\partial R} [q, q]_{\mathbb{B}}^A .
\end{aligned} \tag{5.4.19}$$

Zde jsme využili toho, že konexe ∂_s se na tečném prostoru k prostoročasu chová jako metrická konexe ∇_s . První člen je až na povahu náboje shodný s divergencí elektromagnetické intenzity stojící částice (5.3.16), druhý člen je nulový díky antisymetrii komutátoru, tj.

$${}^{un}D_s {}^{un}\tilde{F}^{ab}{}_{\mathbb{B}} = -q_{\mathbb{B}}^A \int {}^{un}u^s \mathcal{S}({}^{un}\mathcal{P}(\lambda) | x) d\lambda = -{}^{un}J_k{}^A{}_{\mathbb{B}} , \tag{5.4.20}$$

což jsme chtěli ukázat. Musíme ještě ale ověřit splnění podmínky (5.4.1). Potenciál (5.3.17) splňuje kalibrační podmínku (5.4.14)

$${}^{un}u^s {}^{un}A_s = -\frac{1}{4\pi} q \frac{t}{R^2} \frac{\partial^s}{\partial t} d_s R = 0 \tag{5.4.21}$$

a proto vztah (5.4.16) zajišťuje zachovávání toku.

Z pole stojící částice se pokusíme nalézt pole dvou urychlených částic stejným postupem jako pro skalární a elektromagnetické pole. K tomu účelu musíme rozšířit transformaci $\square_{\mathcal{P}}$ na bundle prostor $\mathbb{E}M$. Jediné co budeme požadovat, aby toto rozšíření zachovávalo strukturu $H_{\mathbb{R}^4}$, což lze zapsat

$$\begin{aligned}
\square_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}' , \quad e_{\mathbb{R}}^A \in \mathbb{E}_{\mathcal{P}} M \rightarrow e_{\mathbb{R}}^A \in \mathbb{E}_{\mathcal{P}'} M \\
e_{\mathbb{R}}^A \text{ ortonormální} \rightarrow e_{\mathbb{R}}^A \text{ ortonormální}
\end{aligned} \tag{5.4.22}$$

Transformace $\hat{\Omega}$ převede pohybové rovnice (5.4.20) s tokem stojící částice a kalibrační podmínku (5.4.21) na

$${}^{un}D_{\underline{a}}' {}^{un}\hat{F}'^{\underline{ab}} = -{}^{un}J_k^{\underline{b}} \quad , \quad (5.4.23)$$

$${}^{un}F_{\underline{ab}}' = 2 \partial_{[\underline{a}}' {}^{un}A_{\underline{b}]}' + ie [{}^{un}A_{\underline{a}}', {}^{un}A_{\underline{b}}'] \quad ,$$

$${}^{un}u'^{\underline{a}} {}^{un}A_{\underline{a}}' = \Omega^{\text{acc}} u^{\underline{a}} {}^{un}A_{\underline{a}}' = 0 \quad , \quad (5.4.24)$$

kde

$$\begin{aligned} {}^{un}J_k^{\underline{a}} &= \int q' {}^{un}u'^{\underline{a}} \delta'({}^{un}\mathcal{P}(u')|x) d\lambda' = \\ &= \Omega^{\text{acc}} \int q' {}^{\text{acc}}u^{\underline{a}} \delta({}^{\text{acc}}\mathcal{P}(u)|x) d\lambda = \Omega^{\text{acc}} J_k^{\underline{a}} \quad , \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

$${}^{un}F_{\underline{ab}}' = -\frac{1}{4\pi} q' \frac{1}{r'^2} d_{\underline{a}} t' \wedge d_{\underline{b}} r' \quad , \quad (5.4.26)$$

$${}^{un}A_{\underline{a}}' = -\frac{1}{4\pi} q' \frac{t'}{r'^2} d_{\underline{a}} r' \quad . \quad (5.4.27)$$

Zde

$$q'^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} = q^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} e'^{\underline{a}}{}_{\underline{a}} e'^{\underline{b}}{}_{\underline{b}} \quad . \quad (5.4.28)$$

Jsou-li $A_{\underline{a}}$ a $F_{\underline{ab}}$ konformní hustoty váhy 0, $J_k^{\underline{a}}$ konformní hustota váhy -4 (viz. (5.2.39), (5.1.40)), tak transformace $\hat{\Omega}$ převede tyto rovnice na

$${}^{un}\hat{D}_{\underline{a}}' {}^{un}\hat{F}'^{\underline{ab}} = -{}^{un}\hat{J}_k^{\underline{b}} \quad , \quad (5.4.29)$$

$${}^{un}\hat{F}_{\underline{ab}}' = 2 \partial_{[\underline{a}}' {}^{un}\hat{A}_{\underline{b}]}' + ie [{}^{un}\hat{A}_{\underline{a}}', {}^{un}\hat{A}_{\underline{b}}'] = {}^{un}F_{\underline{ab}}' \quad ,$$

$${}^{un}\hat{u}^{\underline{a}} {}^{un}\hat{A}_{\underline{a}}' = \Omega^{-1} {}^{un}u'^{\underline{a}} {}^{un}A_{\underline{a}}' = {}^{\text{acc}}u^{\underline{a}} {}^{un}\hat{A}_{\underline{a}}' = 0 \quad , \quad (5.4.30)$$

kde

$${}^{un}\hat{J}_k^a = \Omega^{-4} {}^{un}J_k^{1a} = {}^{acc}J_k^a, \quad (5.4.31)$$

$${}^{un}\hat{F}_{ab} = {}^{un}F'_{ab}. \quad (5.4.32)$$

Vidíme, že ${}^{acc}D_a \equiv {}^{un}\hat{D}_a$ (s tenzorem křivosti ${}^{acc}F_{ab} \equiv {}^{un}\hat{F}_{ab}$) je hledané kalibrační pole od zdroje ${}^{acc}J_k^a$ reprezentující dvě urychlené částice. Díky (5.4.28) a kalibrační podmínce (5.4.30) se tok ${}^{acc}J_k^a$ v poli ${}^{acc}D_a$ zachovává.

Jelikož až na povahu náboje je tenzor křivosti shodný s výrazem pro elektromagnetické pole, můžeme psát

$${}^{acc}F_{ab}^B = -\frac{1}{4\pi} q_B^A \frac{1}{R^3} \left[\varrho z d_z + t d_z \varrho + \varrho t d_z z + \frac{1}{2}(z^2 - t^2 - a^2 - \varrho^2) d_z + \dots \right] \quad (5.4.33)$$

Pro potenciál ${}^{acc}A_{ab}^B$ dostáváme

$$\begin{aligned} {}^{acc}A_{ab}^B &= {}^{un}A_{ab}^B = -\frac{1}{4\pi} q_B^A \frac{t'^2}{R'^2} d_z R' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} q_B^A \frac{2at}{\xi^2} \Omega d_z(\Omega^{-1}\xi) = \\ &= \frac{1}{4\pi} q_B^A \frac{4at}{\xi^3} \left(\frac{1}{2} d_z \Omega \frac{\xi^2}{\Omega} - \frac{1}{2} \xi d_z \xi \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} q_B^A \frac{t}{R^3} \left[t \left(\frac{2R^2}{2a^2} - \frac{1}{a}(l-a) \right) d_t - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2R^2}{2a^2}(z+a) - \frac{z}{a}(l-a) \right) d_z - \right. \\ &\quad \left. - \varrho \left(\frac{2R^2}{2a^2} - \frac{1}{a}l \right) d_\varrho \right]. \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

Dodatek 5.A Sférická inverze

Při zkoumání konformních vlastností prostoročasu jsme užili transformace \mathbb{H}_σ dané v (5.2.1). Tyto transformace mají názornou geometrickou interpretaci. Jedná se o složení dvou sférických inverzí a posunutí.

Sférická inverze se středem O v plochem prostoru s metrikou η obecné signatury je dána vztahem

$$I_\sigma : M \rightarrow M, \quad x \rightarrow x' \quad (5.A.1)$$

$$\vec{x}' = \frac{e^2 \vec{x}}{\vec{x}^2},$$

kde e je charakteristická délka, \vec{x} je polohový vektor spojující střed inverze s bodem x (viz. ⁵) na str. 147) a

$$\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} \quad (5.A.2)$$

je kvadrát délky vektoru \vec{x} v příslušné metrice.

V 4-dimensionálním Minkowského prostoročase můžeme v inerciálních souřadnicích psát

$$x^a(P') = \frac{e^2 x^a(P)}{\vec{x}^2(P)} \quad (5.A.3)$$

Kombinací dvou sférických inverzí a translace dostaneme

$$x^a(I \circ T_{e\vec{\alpha}} \circ I(P)) = \frac{e^2 x^a}{\vec{x}^2} \Big|_{T_{e\vec{\alpha}} \circ I(P)} =$$

$$= \frac{e^2 (x^a - e^1 \alpha^a)}{(\vec{x} - e^1 \vec{\alpha})^2} \Big|_{I(P)} = \frac{e^2}{\left(\frac{e^2 x^a}{\vec{x}^2} - \alpha^a e^1\right)} \left(\frac{e^2 x^a}{\vec{x}^2} - \alpha^a e^1\right) \Big|_P =$$

$$= (1 - 2x^a \bar{\alpha}_a + \bar{x}^c \bar{\alpha}^c)^{-1} (x^a - \bar{\alpha}^a \bar{x}^a) = x^a (\Sigma_a [P]) \quad , \quad (5.A.4)$$

což jsme chtěli ukázat.

Sférická inverze je také prvkem konformní grupy - indukovaná metrika je daná

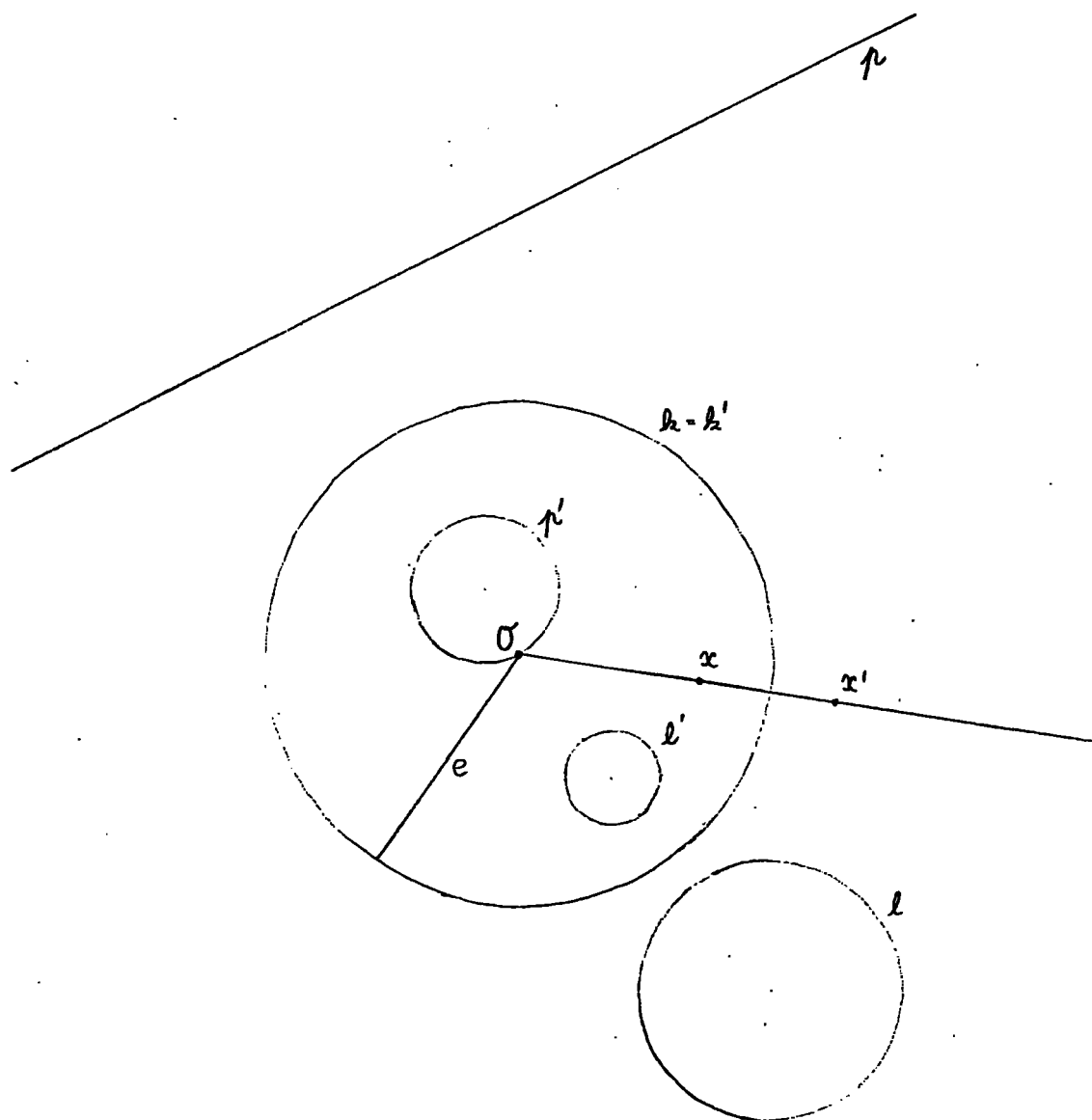
$$\begin{aligned} g &= \eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} e^a d\frac{x^a}{\bar{x}^2} d\frac{x^b}{\bar{x}^2} = \\ &= \frac{e^c}{(\bar{x}^2)^2} \eta_{ab} dx^a dx^b - \\ &\quad - \frac{e^c}{(\bar{x}^2)^3} d\bar{x}^c \vee dx^a \eta_{ab} x^b + \frac{e^c \bar{x}^c}{(\bar{x}^2)^4} d\bar{x}^c d\bar{x}^c = \\ &= \frac{e^c}{(\bar{x}^2)^2} g \end{aligned} \quad (5.A.5)$$

Můžeme tedy sférické inverze s různými středy ⁷⁾ použít jako generátory konformní grupy místo transformací Σ_a . Stačí nám tedy podrobněji zkoumat sférickou inverzi a získat Σ_a výsledky případně přenést na transformace Σ_a .

Všeobecně jsou známy vlastnosti kruhové inverze - speciálního případu sférické inverze v euklidovské rovině ⁸⁾. Tato transformace převádí obecně položené kružnice na obecně položené kružnice, přímky na kružnice procházející středem inverze a naopak (obr. 5.2). Rovinu lze doplnit jedním bodem v nekonečnu a ten přechází při kruhové inverzi na střed

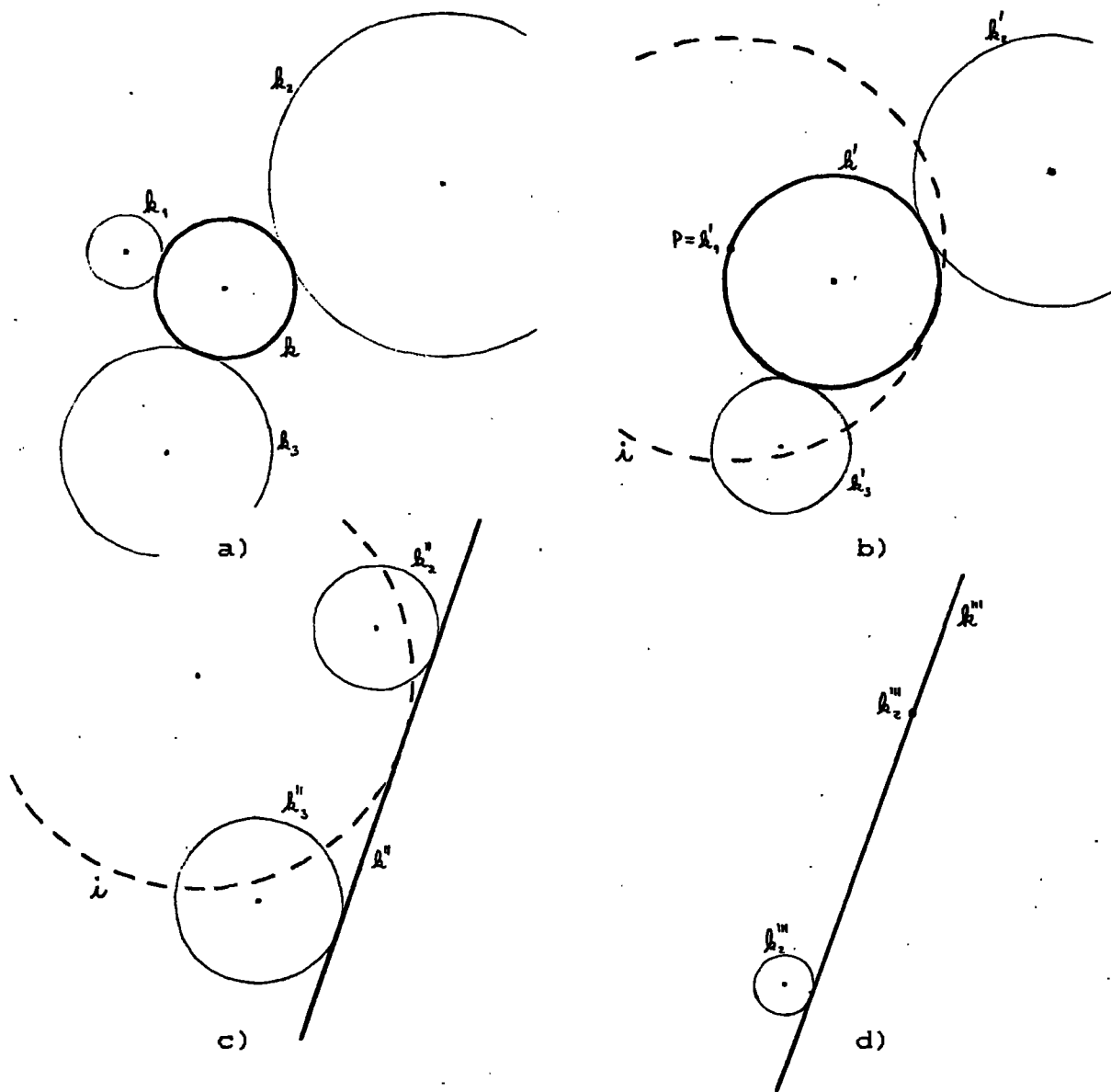
⁷⁾ Změna e odpovídá škálovací transformaci.

⁸⁾ Pomocí kruhové inverze lze poměrně elegantně vyřešit tzv. Apollonovy úlohy - nalezení kružnice dotýkající se tří kružnic. Přitom přímka a bod se považují za degenerovaný případ kružnic. Jeden příklad viz. obrázek 5.3.



obr. 5.2

Kruhová inverze zobrazuje bod x na bod x' tak, že x' leží na polopřímce $\overrightarrow{\sigma x}$ a $|x-\sigma| \cdot |x'-\sigma| = e^2$. Kruhová inverze převádí obecně položené kružnice na kružnice, přímky na kružnice procházející počátkem a kružnice procházející počátkem na přímky.



obr. 5.3.

Pomocí kruhové inverze lze vyřešit jinak velmi obtížnou geometrickou úlohu nalezení kružnice dotýkající se tří zadaných kružnic. Na obrázcích a) až d) je postup (bez diskuse všech možností) přetransformování této úlohy na úlohu nalezení tečny ke kružnici procházející daným bodem. Na obrázcích jsou hledaná kružnice a její transformace vyznačeny silně.

- a) \rightarrow b) dilatace poloměru všech kružnic o poloměr jedné z nich, tj. degenerace jedné z nich v bod
 b) \rightarrow c) kruhová inverze podle libovolné kružnice se středem v $P = k_1'$
 c) \rightarrow d) dilatace poloměru zbylých kružnic o poloměr jedné z nich, tj. degenerace jedné z nich v bod

inverze a naopak. Potom lze chápat přímku jako kružnici procházející bodem v nekonečnu.

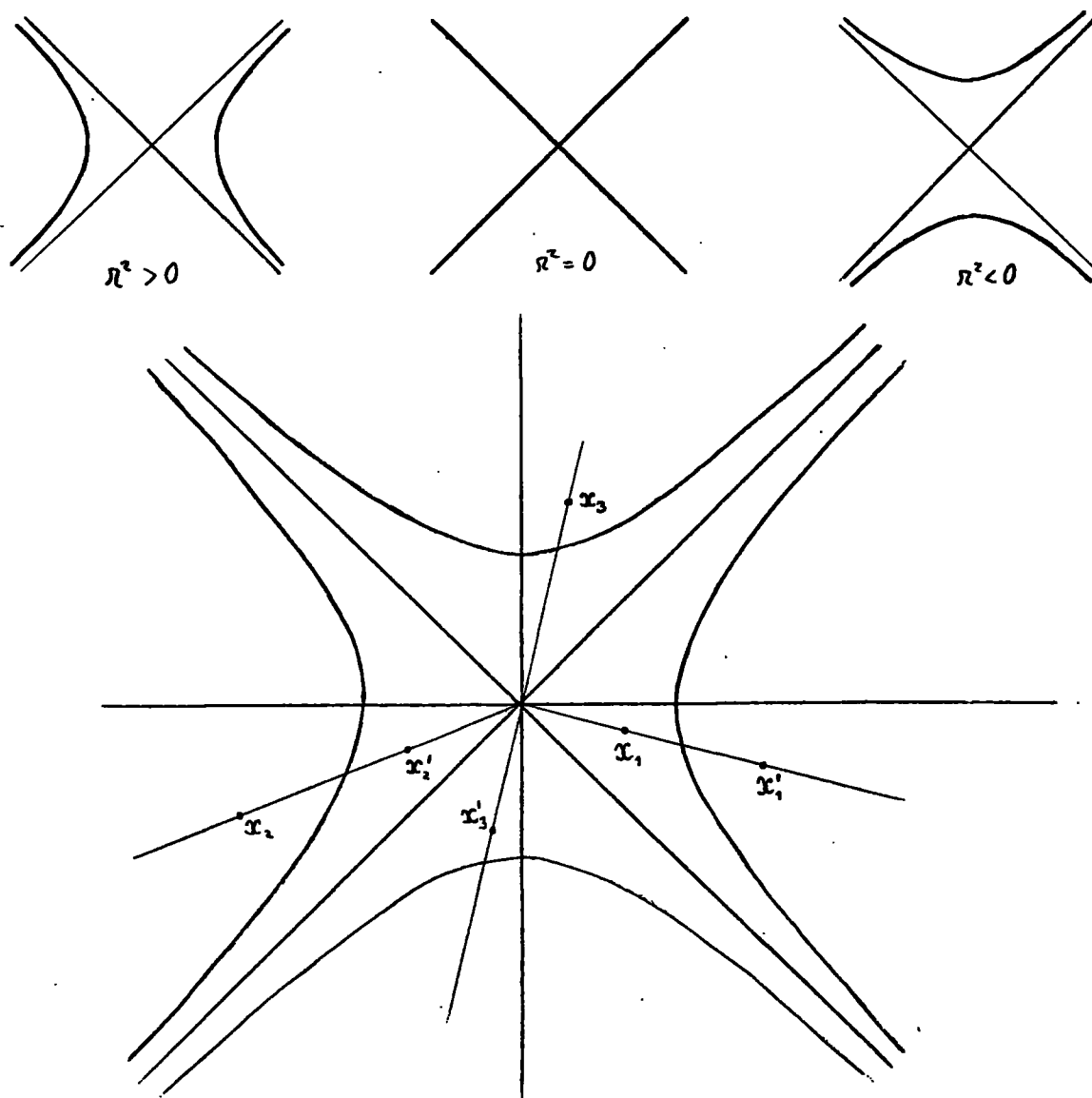
Obdobná tvrzení platí v 3-dimensionálním euklidovském prostoru pro kulovou inverzi. Zde se povrch koule zobrazuje na povrch koule, rovina na povrch koule procházející středem inverze a naopak. V tomto případě platí ale také stejná tvrzení pro kružnice - kružnice se při kulové inverzi převádí na kružnice, kde opět připouštíme degeneraci kružnice na přímku.

Přeformulujeme nyní tyto tvrzení v Minkowského 2-dimensionální rovině a potom ho zobecníme na M -dimensionální prostor s plochou metrikou obecné signatury. V Minkowského rovině se body prostorupodobné vzhledem ke středu inverze převádí na body prostorupodobné, body časupodobně položené v budoucnosti ke středu inverze na body časupodobně položené v minulosti ke středu inverze a naopak (viz. obr. 5.4). Body na světelném kuželu středu inverze se zobrazují do nekonečna a naopak. Rovnice sféry se středem x_0 (v inerciálních souřadnicích t, z) je

$$(x-x_0) \cdot (x-x_0) = -(t-t_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2, \quad (5.A.6)$$

což je rovnice hyperboly ⁹⁾. Protějškem kružnice v euklidovské rovině tedy je hyperbola (obě větve) s asymptotami tvořícími světelný kužel. Vidíme, že rovnice (5.A.6) je netriviální i pro $R^2 \leq 0$. Máme tedy (obr. 5.4) časupodobné sféry ($R^2 > 0$), isotropní sféry ($R^2 = 0$ - v tomto případě se hyperbola degeneruje na dvě isotropní přímky procházející středem sféry) a prostorupodobné sféry ($R^2 < 0$). Degenerovanými

⁹⁾ Parametr R budeme nazývat poloměrem, přestože jeho kvadrát může být záporný (tj. R imagonární).



obr. 5.4

V Minkowského rovině sférická inverze zobrazuje body prostorupodobně položené vzhledem ke středu inverze σ na body prostorupodobně položené k σ , body v kuželu budoucnosti σ na body v kuželu minulosti σ a naopak. Body na světelném kuželu σ se zobrazují do nekonečna a naopak. Protějškem kružnice v euklidovské rovině je v Minkowského rovině hyperbola (obě větve) s asymptotami tvořícími světelný kužel. Hyperbola může být časupodobná ($R^2 > 0$), isotropní ($R^2 = 0$ - v tomto případě se hyperbola degeneruje na dvě isotropní přímky) a prostorupodobná ($R^2 < 0$). Přímky jsou degenerovanými případy hyperboly se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem R .

případy dále jsou přímky - hyperboly se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem. V obecném n -dimensionálním případě ukážeme, že tyto sféry přechází při sférické inverzi opět na sféry a to stejného typu - prostorupodobné na prostorupodobné, isotropní na isotropní a časupodobné na časupodobné.

Je výhodné si celou situaci znázornit v Penroseově diagramu - v soustavě souřadnic \tilde{U}, \tilde{V}

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{\text{sign}(u) \frac{u^2}{e^z}}{1 + \frac{u^2}{e^z}}, & u &= t+z, \\ \tilde{V} &= \frac{\text{sign}(w) \frac{w^2}{e^z}}{1 + \frac{w^2}{e^z}}, & w &= t-z.\end{aligned}\tag{5.A.7}$$

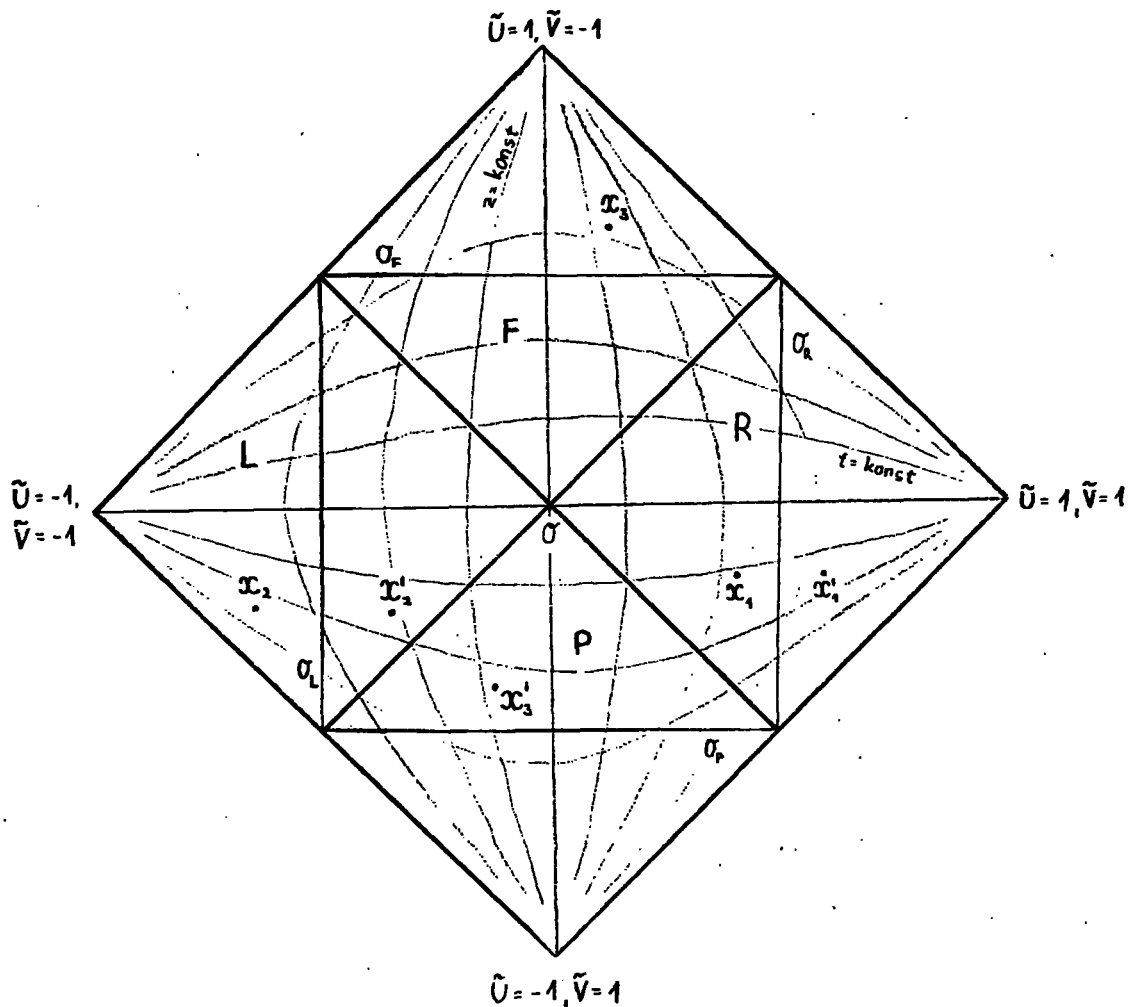
Tyto souřadnice nabývají hodnot z intervalu $(-1, 1)$. Isotropní přímky dané rovnicemi $u = \text{konst.}$, resp. $w = \text{konst.}$ mají v nových souřadnicích tvar $\tilde{U} = \text{konst.}$, resp. $\tilde{V} = \text{konst.}$, tj. v obr. 5.5 jsou isotropní světočáry přímky pod úhlem $\frac{\pi}{4}$. Body $\tilde{U}, \tilde{V} = \pm 1$ se standardně identifikují s body prostorového nekonečna, bod $\tilde{U} = 1, \tilde{V} = -1$ s budoucím časovým nekonečnem a bod $\tilde{V} = 1, \tilde{U} = -1$ s minulým časovým nekonečnem. Body $\tilde{U} = 1, \tilde{V} \in (-1, 1)$ a $\tilde{V} = -1, \tilde{U} \in (-1, 1)$ tvoří světelné nekonečno v budoucnosti, body $\tilde{U} = -1, \tilde{V} \in (-1, 1)$ a $\tilde{V} = 1, \tilde{U} \in (-1, 1)$ světelné nekonečno v minulosti. V těc: $\tilde{U}\tilde{V} = 0$ řadnicích je sférická inverze velmi jednoduchá

$$\theta: [\tilde{U}, \tilde{V}] \rightarrow [\text{sign } \tilde{V} - \tilde{V}, \text{sign } \tilde{U} - \tilde{U}],\tag{5.A.8}$$

$$\text{pro } \tilde{U} \neq 0, \tilde{V} \neq 0.$$

$$uw = 0$$

Řekli jsme, že body na světelném kuželu středu inverze (dané rovnicí $uw = 0$ resp. $\tilde{U}\tilde{V} = 0$) se zobrazují do nekonečna. Bude zajímavé zkoumat strukturu nekonečna Minkowského roviny z hlediska sférické inverze a tedy i transformací konformní



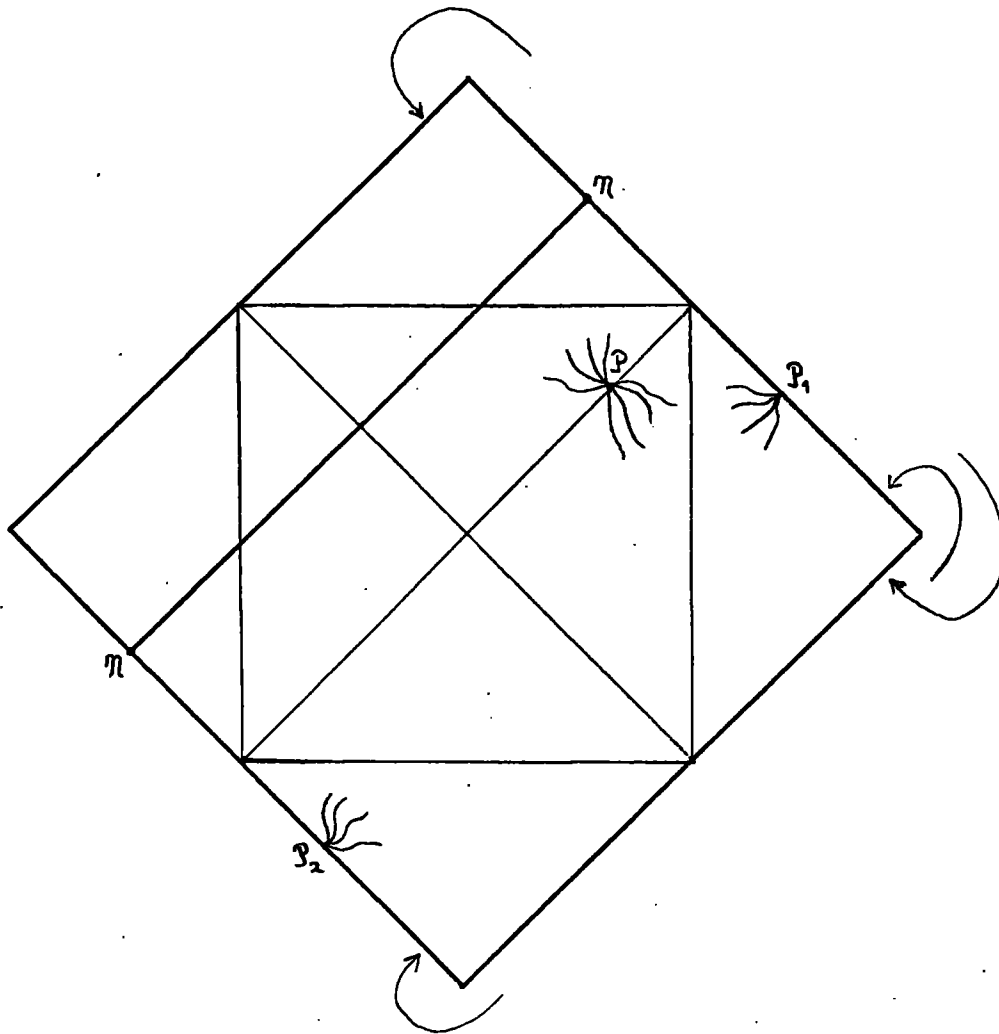
obr. 5.5

Penroseův diagram je znázornění Minkowské roviny v souřadnicích typu (5.A.7). Isotropní světočáry jsou v tomto obrázku přímky pod úhlem $\pi/2$ s vodorovnou osou. V obrázku je vyznačena souřadnicová síť t, z . Okraje diagramu odrážejí strukturu nekonečna Minkowské roviny. V souřadnicích \tilde{U}, \tilde{V} má sférická inverze jednoduchý geometrický tvar. V oblasti L, resp. R se jedná o zrcadlení podle osy σ_L , resp. σ_R , oblast F se zobrazí na oblast P středovou inverzí a zrcadlením podle osy σ_P , obdobně oblast P se zobrazí na oblast F středovou inverzí a zrcadlením podle osy σ_P . Osy σ_L, σ_R jsou ve skutečnosti hyperbola $-t^2 + z^2 = e^2$ a osy σ_P, σ_F hyperbola $+z^2 - t^2 = -e^2$.

grupy. Mimo světelný kužel $uv=0$ je sférická inverze spojitá - "blízké body se zobrazují na blízké body" a křivky vedoucí do stejného bodu se zobrazují na křivky opět vedoucí do stejného bodu. Bude výhodné doplnit Minkowského rovinu body v nekonečnu tak, aby sférická inverze byla spojitá všude. Tj. doplníme body v nekonečnu tak, aby křivky vedoucí do stejného bodu na světelném kuželu $uv=0$ po transformaci vedly do stejného bodu v nekonečnu a naopak. Vezmeme si třídu křivek vedoucí do bodu o souřadnicích $\tilde{U}=a, \tilde{V}=0$ z oblasti $\tilde{U}>0, \tilde{V}>0$ (obr. 5.6). Tato třída křivek přejde na křivky vedoucí do bodu P_1 o souřadnicích $\tilde{U}=1, \tilde{V}=1-a$, ležícího v budoucím světelném nekonečnu. Vezmeme-li ale třídu křivek vedoucích do P z oblasti $\tilde{U}>0, \tilde{V}<0$, ty se zobrazují na třídu křivek vedoucích do bodu P_2 o souřadnicích $\tilde{U}=-1, \tilde{V}=1-a$ ležícího v minulém světelném nekonečnu. Z našeho požadavku spojitosti sférické inverze plyne, že musíme body P_1 a P_2 ztotožnit. Provedeme tedy ztotožnění bodů o souřadnicích

$$\begin{aligned} \tilde{U} = -1, \tilde{V} & \longleftarrow \tilde{U} = +1, \tilde{V} \\ \tilde{U}, \tilde{V} = -1 & \longleftarrow \tilde{U}, \tilde{V} = 1 \end{aligned} \quad (5.A.9)$$

tj. např. ztotožníme všechny nesvětelná nekonečna (o souřadnicích $\tilde{U}=\pm 1, \tilde{V}=\pm 1$). Takto doplněné (a ztotožněné) body nazveme konformní nekonečno. Vidíme, že má strukturu světelného kuželu (tj. dvou isotropních přímek) se středem v prostorovém (= časovém) nekonečnu. Sférická inverze tento kužel zobrazí na světelný kužel středu inverze a naopak. Naše konstrukce nekonečna tedy odpovídá přidání jednoho bodu v nekonečnu každé isotropní přímce (směru) v Minkowského rovině a jednomu bodu v prostorovém (a zároveň časovém) nekonečnu - odpovídající isotropní přímce v nekonečnu. Toto lze chápat také tak, že každému bodu našeho kompaktifikovaného prostoročasu (po



obr. 5.6

Křivky vedoucí do bodu \mathcal{P} na světelném kuželu středu inverze z oblasti $\tilde{U} > 0$ se zobrazují na křivky vedoucí do bodu \mathcal{P}_1 , křivky vedoucí do bodu \mathcal{P} z oblasti $\tilde{U} < 0$ se zobrazují na křivky vedoucí do bodu \mathcal{P}_2 . Proto body \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 ztotožňujeme. Nekonečno tak dostává strukturu světelného kuželu se středem v bodě reprezentujícím nesvětelné nekonečno. Při sférické inverzi tento kužel přejde na světelný kužel středu inverze a naopak. Světelný kužel bodu η ležícího ve světelném nekonečnu se v konečných oblastech Minkowského roviny redukuje na isotropní přímku.

přidání bodů v nekonečnu je výsledný prostor kompaktní) přísluší světelný kužel a naopak světelnému kuželu přísluší bod. Přitom jedna isotropní přímka v Minkowského rovině je část světelného kuželu se středem v nekonečnu - další jeho část (druhá isotropní přímka) leží celá v nekonečnu (obr. 5.6).

Po získání intuice v 2-dimensionální Minkowského geometrii přejdeme k obecné dimenzi a obecné signatuře metriky. Základní tvrzení je, že sféra ($m-1$ -dimensionální) přejde při sférické inverzi opět na sféru, přičemž za sféru považujeme i nadroviny - lze ji chápat jako degenerované sféry se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem \mathcal{R} . Předpokládejme tedy, že bod \vec{x} leží na sféře o středu \vec{x}_0 a poloměru \mathcal{R} , tj.

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = \mathcal{R}^2 \quad (5.A.10)$$

Úpravami postupně dostáváme

$$\begin{aligned} (\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}_0 + \vec{x}_0^2) &= \mathcal{R}^2, \\ \frac{1}{\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2} - 2 \frac{\vec{x}}{\vec{x}^2} \cdot \frac{\vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{(\vec{x}^2)^2} &= 0, \\ \left(\frac{e^2 \vec{x}}{\vec{x}^2} - \frac{e^2 \vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2} \right) \cdot \left(\frac{e^2 \vec{x}}{\vec{x}^2} - \frac{e^2 \vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2} \right) &= \frac{e^4 \mathcal{R}^2}{(\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.A.11)$$

To znamená, že \vec{x} leží na sféře o poloměru $\frac{e^2 \mathcal{R}}{(\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2)}$ a středu $\vec{0} + \frac{e^2 \vec{x}_0}{\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2}$, což jsme přesně chtěli dokázat. Navíc díky $\frac{e^4}{(\vec{x}_0^2 - \mathcal{R}^2)^2} \geq 0$ vidíme, že sféra si při sférické inverzi zachovává charakter - znaménko u "kvadrátu poloměru". Pro Lorentzovskou signaturu $(-++ \dots +)$ to znamená, že sféra si při inverzi zachovává svoji prostorupodobnost resp. časupodobnost či isotropnost. Dále nekonečný poloměr a střed v nekonečnu dostaneme pouze pro $\vec{x}_0^2 = \mathcal{R}^2$, tj. pro sféru procházející středem inverze. Neboli sféra procházející středem inverze se zobrazí na nadro-

vinu a naopak nadrovina se zobrazí na sféru procházející středem inverze.

Stejnými úvahami jako pro 2-dimensionální Minkowského rovinu nalezneme, že kompaktifikace prostoru tak, aby sférická inverze byla spojitě zobrazení, znamená přidání bodů v nekonečnu a to každé isotropní nadrovině jeden (tyto body nazveme světelné nekonečno) a jeden bod v časovém a zároveň prostorovém ¹⁰⁾ nekonečnu (nazveme ho nesvětelné nekonečno). Takto dodané body v nekonečnu mají strukturu světelného kužele s vrcholem v nesvětelném nekonečnu. Opět můžeme v tomto kompaktifikovaném prostoru každému bodu přiřadit světelný kužel. Světelný kužel bodů ve světelném nekonečnu se v konečné oblasti redukuje na jim příslušící isotropní nadrovinu.

Dále budeme zkoumat transformační vlastnosti 1-dimensionálních křivek (nazvěme je obecné kružnice) odpovídající v 3-dimensionálním euklidovském prostoru kružnicím resp. přímkám. Přesně obecnou kružnicí nazveme 1-dimensionální průsečík $(m-1)$ $(m-1)$ -dimensionálních sfér. Lehce vidíme, že v 3-dimensionálním euklidovském prostoru dostaneme průsečík dvou koulí (resp. jejich degenerovaného případu - rovin), tj. kružnice a přímkou. Z definice a pomocí transformačních vlastností $(m-1)$ -dimensionálních sfér plyne poměrně silné tvrzení - obecné kružnice se při sférické inverzi zobrazují opět na obecné kružnice. Navíc díky zachování charakteru sfér při inverzi dostáváme zachování charakteru obecných kružnic - prostorupodobné přechází na prostorupodobné atd..

¹⁰⁾ V ploché metrice obecné signatury jsou časové směry směry s negativně definitní metrikou, prostorové směry směry s pozitivně definitní metrikou a isotropní směry směry s degenerovanou metrikou.

Jak ale takovéto obecné kružnice vypadají? Začneme tím, že průsečík dvou $(m-1)$ -dimensionálních sfér leží v $(m-1)$ -dimensionální nadrovině. Rovnice obou sfér jsou

$$\begin{aligned}(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1) &= R_1^2, \\(\vec{x} - \vec{x}_2) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2) &= R_2^2.\end{aligned}\tag{5.A.12}$$

Odečteme-li tyto dvě rovnice od sebe, dostaneme

$$-2\vec{x} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \vec{x}_1^2 - \vec{x}_2^2 - R_1^2 + R_2^2 = 0,\tag{5.A.13}$$

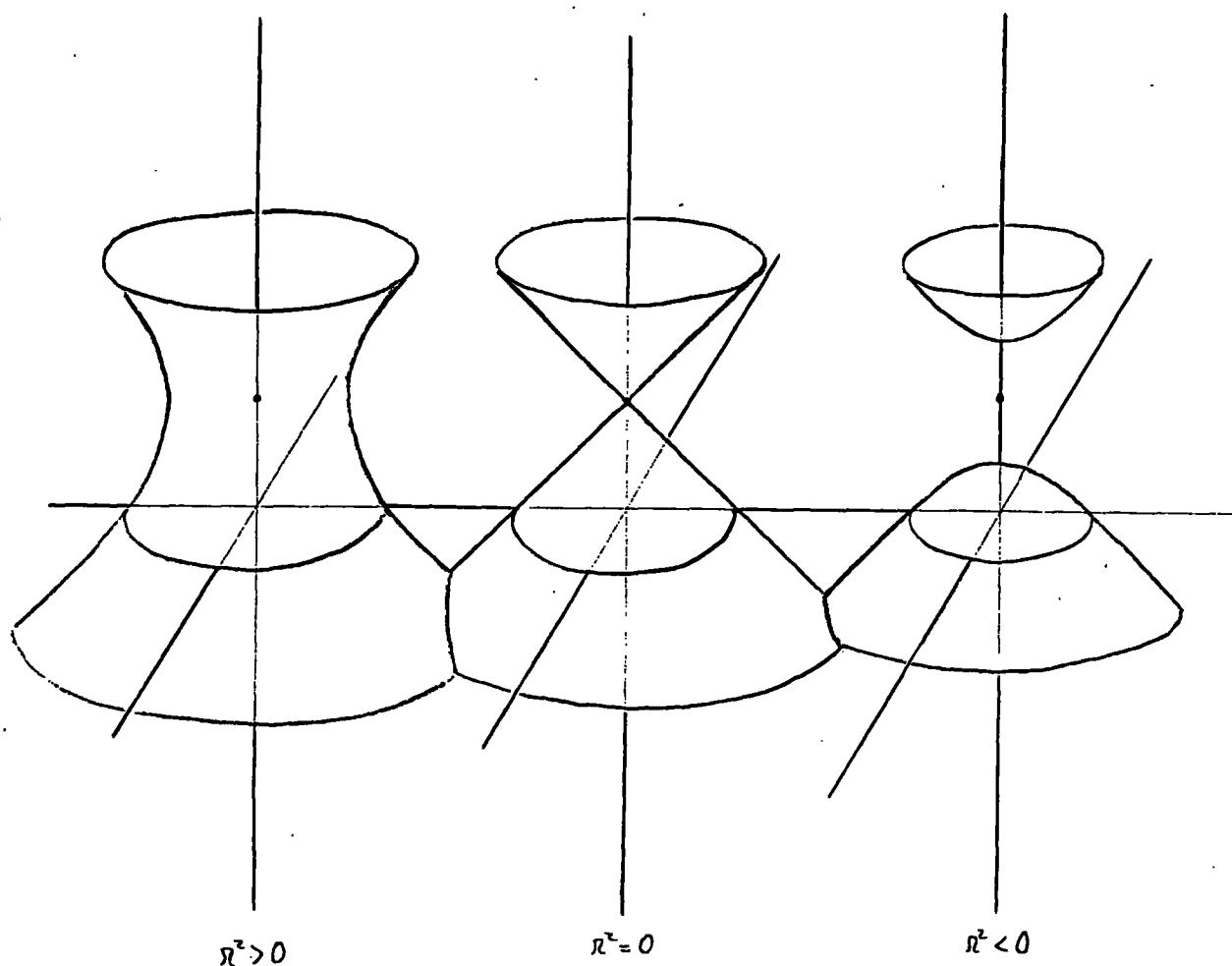
což je lineární rovnice v \vec{x} , tj. rovnice nadroviny. Stejným způsobem můžeme ukázat, že průsečík $(m-1)$ sfér musí ležet v $(m-2)$ nezávislých $(m-1)$ -dimensionálních nadrovinách, tj. v 2-dimensionální rovině. Obecná kružnice je tedy průsečík 2-dimensionální roviny a $(m-1)$ -dimensionální sféry - tj. kvadratické plochy s rovinou. Je známý fakt, že všechny takovéto křivky jsou kuželosečky - kružnice, hyperboly, přímky a paraboly. Typ kuželosečky ale závisí na její poloze. Tuto závislost lze zkoumat následovně. Obecnou kružnicí ležící v rovině a středem inverze můžeme proložit 3-dimensionální prostor. Tento prostor se při sférické inverzi převádí na sebe (obsahuje střed inverze). Proto se při zkoumání dané obecné kružnice stačí omezit na tento 3-dimensionální prostor. Indukovaná metrika tohoto prostoru může být typu $(---)$, $(--+)$, $(-++)$, $(+++)$ nebo může být degenerovaná. V obecném případě bychom dále diskutovali, jaká kvadratická plocha je průsečík $(m-1)$ -dimensionální sféry s tímto prostorem (pro nedegenerované případy to je 2-dimensionální sféra v příslušné signatuře) a jaký typ kuželosečky dostaneme průsečíkem této kvadratické plochy s rovinou v závislosti na jejich poloze. Např. pokud signatura 3-dimensionálního prostoru je $(+++)$, průsečíky

$(n-1)$ -dimensionální sféry s tímto prostorem jsou povrchy koulí (nebo roviny) a obecné kruhy M -e jsou kružnice nebo přímky.

Pro nás je zajímavý M -dimensionální prostoročas (signatura $(-++\dots+)$) a hlavně transformační vlastnosti časupodobných obecných kružnic. 3-dimensionální prostor obsahující takovou obecnou kružnici a střed inverze má signaturu $(-++)$. Proto výše nastíněnou diskusi provedeme v tomto případě. Průsečík $(n-1)$ -dimensionální sféry s 3-dimensionálním Minkowského prostorem je 2-dimensionální Minkowského sféra, tj. obecný rotační hyperboloid s osou v časovém směru a asymptotickým světelným kuželem (obr. 5.7), resp. degenerovaný případ - rovina. Průsečík časupodobného hyperboloidu (resp. roviny) s časupodobnou rovinou (zkoumáme pouze časupodobné obecné kružnice) je obecně položená časupodobná hyperbola (resp. přímka).

Dostali jsme tedy následující výsledek. V Minkowského prostoru sférická inverze transformuje prostoročasové obecně položené časupodobné hyperboly na obecně položené časupodobné hyperboly, časupodobné přímky na časupodobné hyperboly procházející počátkem a naopak.

Je zřejmé, že stejnou vlastnost bude mít i transformace \square_2 - kombinace dvou sférických inverzí a translace.



obr. 5.7

V 3-dimensionálním prostoročase (signatura $(-++)$) jsou sféry rotační hyperboloidy a to prostorupodobné ($R^2 < 0$), isotropní ($R^2 = 0$ - v tomto případě se hyperboloid redukuje na kužel) a časupodobné ($R^2 > 0$). Roviny jsou degenerované případy hyperboloidů se středem v nekonečnu a nekonečným poloměrem. Obecné kružnice v 3-dimensionálním prostoročase může být časupodobná hyperbola, časupodobná přímka, dvě protínající se isotropní přímky, jedna isotropní přímka, prostorupodobná hyperbola, prostorupodobná kružnice a prostorupodobná přímka.

Literatura

- [1] Ashtekar A., Horowitz G.T., Magnon-Ashtekar A.: Gen.Rel.Grav. 14, 411 (1982)
- [2] Barrabès C.: Class.Quantum Grav. 6, 581 (1989)
- [3] Barrabès C., Israel W.: Thin shells in general relativity and cosmology: The lightlike limit, preprint (1990)
- [4] Bičák J., Schmidt B.: Class.Quantum Grav. 6, 1547 (1989)
- [5] Bičák J., Schmidt B.: Asymptotically flat radiative space-times with boost-rotation symmetry, I. The general structure, preprint MPA 429 (1989)
- [6] Bičák J., Hoenselaers C., Schmidt D.G.: Proc.R.Soc.Lond A390, 397 (1983); Proc.R.Soc.Lond A390, 411 (1983)
- [7] Birrell N.D., Davies P.C.W.: Quantum Fields in Curved Space, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1982
- [8] Bondi H.: Proc.R.Soc.Lond A376, 493 (1981)
- [9] Bonnor W.B.: Gen.Rel.Grav. 15, 535 (1983)
- [10] Bonnor W.B., Swaminarayan N.S.: Zeitschrift für Physik 177, 240 (1964)
- [11] Boulware D.G.: Annals of Physics 124, 169 (1980)
- [12] Dray T., Walker M.: Lett.Math.Phys. 4, 15 (1980)
- [13] Friedrich H.: Comm.Math.Phys. 107, 587 (1986); Comm.Math.Phys. 119, 51 (1988)
- [14] Frolov V.P., Israel W., Unruh W.G.: Phys.Rev. D39, 1084 (1989)
- [15] Gradštejn I.S., Ryžik I.M., Tablicy integralov, Nauka, Moskva 1971
- [16] Hawking S., Ellis G.: The large scale structure of the spacetime, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1973
- [17] Kinnersley W., Walker M.: Phys.Rev. D2, 1359 (1970)
- [18] Parker P.E.: J.Math.Phys. 20, 1423 (1979)

- [19] Penrose R., Rindler W.: Spinors and Space-time, v.1, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1984
- [20] Rendall A.D.: Class.Quantum Grav. 5, 1339 (1988)
- [21] Scott S.M., Szekeres P.: Gen.Rel.Grav. 18, 571 (1986)
- [22] Schmidt B.G.: Gen.Rel.Grav. 20, 65 (1988)
- [23] Schwartz L.: Matematické metody ve fyzice, SNTL, Praha 1972
- [24] Stephens C.R., Annals of Physics 193, 255 (1989)
- [25] Trautman A.: Acta Phys.Austr., Suppl.XXIII, 401 (1981); Acta Phys.Austr., Suppl.XXIII, 433 (1981)
- [26] Unruh W.G., Wald R.M.: Phys.Rev. D29, 1047 (1984)
- [27] Vilenkin A.: Phys.Rep. 121, 263 (1985)
- [28] Vilenkin A.: Gravitational interactions of cosmic strings, in Years of Gravitation, ed. Hawking S., Israel W., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987