Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Adéla Mrázková

Stochastická dominance generovaná klesající rizikovou averzí

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26. května 2016 Adéla Mrázková

Název práce: Stochastická dominance generovaná klesající rizikovou averzí

Autor: Adéla Mrázková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cílem této práce je popsat základy relace stochastické dominance prvního a druhého řádu a dále motivovat a popsat stochastickou dominanci generovanou užitkovými funkcemi s klesající absolutní rizikovou averzí. Následuje testování na reálných datech. Je zde předvedeno testování eficience portfolia ve smyslu stochastické dominance generované klesající rizikovou averzí a dále eficience ve smyslu stochastické dominance druhého řádu. Také je vysvětlena souvislost mezi výsledky těchto testů a je porovnávána jejich výpočetní náročnost.

Klíčová slova: stochastická dominance klesající riziková averze eficience portfolia

Title: Stochastic dominance generated by a decreasing absolute risk aversion

Author: Adéla Mrázková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The aim of the thesis is to describe first order stochastic dominance, second order stochastic dominance and then to motivate and describe stochastic dominance generated by utility functions with a decreasing absolute risk aversion. A numerical application of described methods follows. Efficiency in the meaning of stochastic dominance generated by utility functions with a decreasing absolute risk aversion and second order stochastic dominance is tested. Connection between the results is clarified and used methods are compared in the meaning of computational demands.

Keywords: stochastic dominance decreasing risk aversion portfolio eficiency

Děkuji doc. RNDr. Ing. Miloši Kopovi, Ph.D. za vstřícnost při konzultacích, cenné rady a věcné připomínky.

Obsah

Úvod

Existuje celá řada více či méně objektivních investičních rozhodovacích pravidel. Investor si zpravidla volí pro své rozhodování takové pravidlo, které nejlépe zohledňuje jeho priority, například dobu návratnosti, míru rizika, celkový zisk a podobně. Mezi tato rozhodovací kritéria patří i stochastická dominance.

Relace stochastické dominance prvního a druhého řádu poskytují taková rozhodovací pravidla, která pokrývají potřeby všech investorů, resp. investorů, jež neradi riskují.

Cílem této práce je představit stochastickou dominanci prvního řádu, druhého řádu a stochastickou dominanci generovanou užitkovými funkcemi s klesající absolutní rizikovou averzí a na reálných datech porovnat eficienci ve smyslu těchto typů dominance. Posledně zmíněná relace pokrývá potřeby investorů, kteří riskují tím víc, čím víc mají majetku.

Souhrn výsledků zkoumání stochastické dominance prvního a druhého řádu nalezneme v knize [Levy, 2006]. Stochastické dominanci generované užitkovými funkcemi s klesající absolutní rizikovou averzí bylo v posledních letech věnováno hodně pozornosti. Výsledky tohoto zkoumání lze nalézt zejména v článcích [Post et al., 2015] a [Vickson, 1977]. Absolutní riziková averze samotná se poprvé vyskytuje v článcích [Arrow, 1965] [Pratt, 1964].

Motivací pro zkoumání stochastické dominance generované klesající rizikovou averzí je chování investorů. Na základě dlouhodobého pozorování lze usuzovat, že čím je člověk bohatší, tím méně mu vadí riziko.

První část práce je teoretická a skládá se ze tří kapitol. V první kapitole jsou popsány některé základní pojmy, jejichž znalost je žádoucí v dalších kapitolách. V druhé kapitole jsou představeny stochastická dominance prvního řádu a stochastická dominance druhého řádu. Čtenář zde najde definice, základní vlastnosti a v neposlední řadě nutné a postačující podmínky. Třetí kapitola se zabývá stochastickou dominancí generovanou klesající rizikovou averzí, která úzce souvisí se stochastickou dominancí třetího řádu, které je věnována samostatná podkapitola. Tato souvislost je zde rozebírána. Dále jsou rozebírány vlastnosti a nutné a postačující podmínky.

Druhá část práce se věnuje metodám testování eficience na reálných datech. Je zde předvedeno, jak lze formulovat problém testování eficience podle stochastické dominance generované klesající rizikovou averzí jako úlohu lineárního programování. Dále je představena jedna z metod testování eficience podle stochastické dominance druhého řádu. Tyto metody jsou porovnávány a je vysvětlena souvislost mezi výsledky testování.

1. Základní pojmy

1.1 Riziko a jeho měření

Máme-li se rozhodnout, zda přijmout možnost investice, přirozeně nás zajímá, zda je tato investice riziková, či nikoliv.

Poznámka. Není-li řečeno jinak, předpokládá se, že písmena n, m, i, j a k značí vždy přirozená čísla. Symbol $\mathbb{R}$ značí vždy množinu reálných čísel.

Definice 1 (Výnos z investice)**.** *Buď Ω množina situací, které mohou nastat při uskutečnění investice, $\mathcal{A}$ σ-algebra podmnožin Ω, P pravděpodobnostní míra na $\mathcal{A}$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor. Výnosem z investice rozumíme reálnou náhodnou veličinu $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Jinými slovy, hodnota výnosu z investice vyčísluje, kolik jsme vydělali nebo prodělali.

Poznámka. Není-li řečeno jinak, v dalším textu vždy automaticky předpokládáme, že máme výše popsaný pravděpodobnostní prostor.

Poznámka. Ziskem rozumíme kladné hodnoty výnosu z investice. Ztrátou rozumíme záporné hodnoty výnosu z investice.

Definice 2 (Míra rizika)**.** *[Artzner et al., 1998] Mírou rizika rozumíme zobrazení z množiny všech reálných funkcí na Ω do množiny reálných čísel.*

Nyní bychom rádi kvantifikovali riziko, neboli chtěli bychom každé investici přiřadit číslo, které vypovídá něco o tom, „jak moc“ je riziková. Následuje velmi stručný popis některých metod měření rizika.

- [Domar and Musgrave, 1944] stanovili vyčíslení rizika jako střední hodnotu záporných hodnot výnosu z investice. Vzhledem k tomu, že mnoho investorů považuje za selhání, pokud vydělá méně než by vydělali při bezrizikové investici, dá se toto modifikovat. Buď r hodnota výnosu z bezrizikové investice (tj. pokud vydělá méně než r, považuje to za selhání). Potom se riziko vyčíslí jako střední hodnota záporných hodnot náhodné veličiny $X - r$, kde X je výnos z investice. Problém této metody je v tom, že nebere v úvahu rozdílnost škod způsobených různými negativními výnosy.

- [Roy, 1952] postavil myšlenku vyčíslení rizika na snaze „zabránit katastrofě“. Investor si zvolí hladinu katastrofy d, tj. jaký musí být minimální výnos, aby to pro něj nemělo likvidační následky. Riziko (RI) pak bude následující:

  $$RI = P(X \leq d)$$

  kde X značí výnos z investice. Minimalizace rizika se tedy rovná minimalizaci pravděpodobnosti, že nastane „katastrofa“. Hlavní nevýhoda této metody je v tom, že každý investor si určuje sám svojí hodnotu d, tedy se nedá použít obecně.

- Další možný přístup k měření rizika je posuzování podle rozptylu a směrodatné odchylky výnosu z investice, [Markowitz, 1952]. Směrodatná odchylka udává, jak moc se může skutečná hodnota vzdálit od střední hodnoty. Tedy je velmi intuitivní, že větší směrodatná odchylka implikuje vyšší rizikovost. Toto ovšem může být zavádějící, protože větší směrodatná odchylka může znamenat jak větší možnou ztrátu, tak větší možný zisk.

Další důležité míry rizika byly popsány například v [Kozmík, 2010].

1.2 Užitková funkce

Představme si, že jsme v situaci, kdy si máme vybrat mezi investicemi I_1 a I_2. Zavedeme si relaci „preference“, značíme $\prec$:

Definice 3. *[Levy, 2006] Mějme investice I_1 a I_2.*

(a) $I_1 \prec I_2$, když investor preferuje I_2 před I_1.

(b) Řekneme, že investor je indiferentní mezi I_1 a I_2 (píšeme $I_1 \sim I_2$), když neupřednostňuje ani jednu z investic před druhou.

Značení. Střední hodnotu náhodné veličiny X s distribuční funkcí F popisující výnos investice I budeme značit $E_F X$.

Definice 4 (Užitková funkce)**.** *[Levy, 2006] Mějme investice I_1 a I_2 s výnosy X_1 a X_2 mající distribuční funkce F a G. Předpokládejme, že platí $I_1 \prec I_2$. Užitkovou funkcí rozumíme neklesající funkci $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $E_F u(x) < E_G u(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Poznámka. Něco jako „jednotka užitku“ nemá smysl. Máme-li užitkovou funkci u, můžeme z ní lineární transformací dostat funkci u_1. Pro tuto funkci zůstanou nerovnosti z definice zřejmě zachovány, ačkoliv funkční hodnoty u a u_1 se mohou výrazně lišit.

1.3 Eficientní množina

Označme FS množinu všech přípustných investic a U množinu užitkových funkcí. Zaveďme nejdříve pojem dominance v U, který později ještě mnohokrát použijeme.

Definice 5 (Dominance v U)**.** *[Levy, 2006] Mějme investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G. Řekneme, že I_1 dominuje I_2 v U právě tehdy, když pro každou funkci $u \in U$ platí*
$E_F u(x) \geq E_G u(x), x \in \mathbb{R}$ a existuje $u_0 \in U$, pro kterou $E_F u_0(x) > E_G u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Množinu U nazýváme generátorem (stochastické) dominance.

Definice 6 (Eficientní množina v U)**.** *[Levy, 2006] Eficientní množina vzhledem k U (označme ES) je taková podmnožina FS, pro kterou platí, že investice I je obsažena v ES právě tehdy, když neexistuje žádná investice I_1 taková, že I_1 dominuje I v U. Investice patřící do ES vzhledem k U nazýváme eficientní vzhledem k U.*

2. Stochastická dominance prvního a druhého řádu

2.1 Stochastická dominance prvního řádu (FSD)

2.1.1 Definice a základní vlastnosti

Mějme investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G. Označme U_1 množinu všech neklesajících spojitě diferencovatelných užitkových funkcí, tj. $U_1 = \{u \in \mathcal{C}^1 : u'(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, kde $\mathcal{C}^1$ značí množinu všech spojitě diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}$. To, že je užitková funkce neklesající, ve skutečnosti znamená, že investor má raději více peněz, než méně peněz. Dá se předpokládat, že na tom se shodnou všichni investoři. Proto se tato vyhodnocovací metoda dá použít velmi obecně.

Značení. Symbolem $\mathcal{C}^n$ značíme množinu všech n-krát spojitě diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Definice 7 (Stochastická dominance prvního řádu)**.** *[Levy, 2006] Řekneme, že I_1 dominuje I_2 podle stochastické dominance prvního řádu, když I_1 dominuje I_2 v U_1.*

Věta 1. *[Levy, 2006] Mějme dvě investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G. Potom I_1 dominuje I_2 podle stochastické dominance prvního řádu (píšeme FD_1G) právě tehdy, když $F(x) \leq G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ a existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, že $F(x_0) < G(x_0)$.*

Důkaz. [Levy, 2006]

□

Poznámka. Vztah popsaný ve větě 1 je také někdy nazýván silnou dominancí. Vypustíme-li požadavek na ostrou nerovnost v alespoň jednom bodě, dostaneme tzv. slabou dominanci.

2.1.2 Nutné a postačující podmínky

Definice 8 (Optimální podmínka dominance)**.** *[Levy, 2006] Optimální podmínka dominance je podmínka, která je pro dominanci nutná a postačující.*

Poznámka. Tvrzení věty 1 poskytuje optimální podmínku pro stochastickou dominanci prvního řádu.

Značení. Symbolem $min_F(x)$ resp. $max_F(x)$ značíme minimální resp. maximální hodnotu výnosu X při distribuční funkci F.

Věta 2 (Postačující podmínky pro FSD)**.** *[Levy, 2006] Mějme dvě investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G.*

(i) I_1 dominuje I_2 podle FSD, pokud $min_F(x) \geq max_G(x)$.

(ii) I_1 *dominuje* I_2 *podle FSD, pokud* $F(x) \leq G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *a existuje* $x_0 \in \mathbb{R}$, *že* $F(x_0) + a \leq G(x_0)$, *kde* a *je pevné kladné.*

Důkaz. [Levy, 2006]

□

Značení. Má-li výnos X z investice I diskrétní rozdělení s hodnotami $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in \mathbb{R}$, pak označme $P(X = x_i)$ symbolem p_i.

Věta 3 (Nutné podmínky pro FSD)**.** *[Levy, 2006] Mějme dvě investice* I_1 *a* I_2 *s distribučními funkcemi výnosů* F *a* G.

(i) $FD_1G \Rightarrow E_F(x) > E_G(x)$

(ii) $FD_1G \Rightarrow \bar{x}_{geo}(F) > \bar{x}_{geo}(G)$, *kde* $\bar{x}_{geo}$ *značí geometrickou střední hodnotu definovanou následovně:* $\bar{x}_{geo} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$

(iii) $FD_1G \Rightarrow min_F(x) \geq min_G(x)$

Důkaz. [Levy, 2006]

□

2.2 Stochastická dominance druhého řádu (SSD)

2.2.1 Definice a základní vlastnosti

Mějme investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G. Označme U_2 množinu všech neklesajících, konkávních, dvakrát spojitě diferencovatelných užitkových funkcí, tj. $U_2 = \{u \in \mathcal{C}^2 : u'(x) \geq 0, u''(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$. Tyto užitkové funkce odpovídají investorům, kteří jsou rizikově averzní. To znamená, že kromě toho, že mají rádi více peněz než méně peněz, neradi riskují. Povšimněme si, že $U_2 \subset U_1$.

Definice 9 (Riziková averze)**.** *[Levy, 2006] Řekneme, že investor je rizikově averzní, pokud pro jeho užitkovou funkci* u *platí Jensenova nerovnost, tj.*

$$u(E_F(X)) \geq E_F(u(X))$$

pro libovolnou náhodnou veličinu X.

Definice 10 (Stochastická dominance druhého řádu)**.** *[Levy, 2006] Řekneme, že* I_1 *dominuje* I_2 *podle stochastické dominance druhého řádu právě tehdy, když* I_1 *dominuje* I_2 *v* U_2.

Věta 4. *[Levy, 2006] Mějme investice* I_1 *a* I_2 *jejichž výnosy mají distribuční funkce* F *a* G *a hustoty* $f(x)$ *a* $g(x)$. *Dále mějme* $a,b \in \mathbb{R}, b > a$, *pro která platí* $F(a) = G(a) = 0$ & $F(b) = G(b) = 1$. *Pak* I_1 *dominuje* I_2 *podle stochastické dominance druhého řádu (píšeme* FD_2G*) právě tehdy, když platí*

$$Int_2(x) := \int_a^x [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b] \quad \& \quad \exists x_0 \in [a,b] \;\; Int_2(x_0) > 0$$

Důkaz. [Levy, 2006]

□

2.2.2 Nutné a postačující podmínky

Věta 5 (Postačující podmínky pro SSD)**.** *[Levy, 2006] Mějme dvě investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G.*

(i) $FD_1G \Rightarrow FD_2G$

(ii) $min_F(x) > max_G(x) \Rightarrow FD_2G$

(iii) Mějme nedegenerovaný interval $[a{,}b]$ *takový, že* $F(a) = G(a) = 0 \;\&\; F(b) = G(b) = 1$. *Potom* $\int_a^x [G(t) - F(t)]\,dt \geq K \;\; \forall x \in [a{,}b], K \in (0,\infty) \Rightarrow FD_2G$

Důkaz. [Levy, 2006]

□

Věta 6 (Nutné podmínky pro SSD)**.** *[Levy, 2006] Mějme dvě investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G.*

(i) $FD_2G \Rightarrow E_F(x) \geq E_G(x)$

(ii) $FD_2G \Rightarrow \bar{x}_{geo}(F) \geq \bar{x}_{geo}(G)$

(iii) $FD_2G \Rightarrow min_F(x) \geq min_G(x)$

Důkaz. [Levy, 2006]

□

Věta 7. *[Levy, 2006] Mějme dvě investice I_1 a I_2 s výnosy X_1 a X_2, které mají diskrétní rozdělení s hodnotami $x_1^{(1)} \leq x_2^{(1)} \leq \cdots \leq x_n^{(1)}$,$x_1^{(2)} \leq x_2^{(2)} \leq \cdots \leq x_n^{(2)}$. Předpokládejme navíc, že $P(X_1 = x_i^{(1)}) = P(X_2 = x_j^{(2)}) = \frac{1}{n} \;\forall i{,}j \in \{1,\ldots{,}n\}$. Potom platí, že I_1 dominuje I_2 ve smyslu SSD právě tehdy, když platí*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{(1)} \geq \sum_{i=1}^{k} x_i^{(2)} \;\; \forall k \in \{1,\ldots{,}n\}$$

3. Stochastická dominance generovaná klesající rizikovou averzí (DSD)

Později se ukáže, že množina užitkových funkcí s klesající absolutní rizikovou averzí je podmnožina množiny $U_3 = \{u \in \mathcal{C}^3 : u'(x) \geq 0, u''(x) \leq 0, u'''(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, které odpovídá stochastická dominance třetího řádu.

3.1 Stochastická dominance třetího řádu (TSD)

3.1.1 Definice a základní vlastnosti

Mějme investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G. Označme U_3 množinu všech třikrát spojitě diferencovatelných neklesajících konkávních užitkových funkcí s nezápornou třetí derivací, tj. $U_3 = \{u \in \mathcal{C}^3 : u'(x) \geq 0, u''(x) \leq 0, u'''(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$. Povšimněme si, že $U_3 \subset U_2$. V tomto případě už se nedá říct tak jednoduše, co vypovídá o preferencích investorů, když toto platí pro jejich užitkové funkce. Podívejme se na to podrobněji.

Definice 11 (Šikmost)**.** *[Levy, 2006] Šikmost (značíme μ_3) investice I s výnosem X je definována jako třetí centrální moment výnosu z investice, tedy*

(a)

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - EX)^3$$

pokud je X diskrétní náhodná veličina, kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou hodnoty X a $p_i = P(X = x_i)$

(b)

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - EX)^3 dx$$

pokud je X spojitá náhodná veličina, kde $f(x)$ je hustota X.

V praxi se ukazuje, že investoři mají rádi investice s kladnou šikmostí. Poukazují na to následující příklady jejich chování:

Loterie. Investoři kupují loterijní losy. To jsou investice s kladnou šikmostí, pravděpodobnost výhry je velmi malá, ale výhra je vysoká. Ukážeme si to na následujícím příkladě:

Příklad. Předpokládejme, že pravděpodobnost, že vyhrajeme v loterii 10 000 Kč je 0.01 a pravděpodobnost, že nevyhrajeme nic je 0.99. Střední hodnota výnosu z investice do takového losu je $EX = 0.01 \cdot 10\,000 + 0.99 \cdot 0 = 100$. Šikmost je potom $\mu_3 = 0.01 \cdot (10\,000 - 100)^3 + 0.99 \cdot (0 - 100)^3 = 9.693 \cdot 10^8$

Vidíme, že šikmost je zde nejenom kladná, ale i velmi vysoká. Poznamenejme, že nákup loterijního losu je investice, která má nejen kladnou šikmost, ale i rozptyl výnosu. Že by investor preferoval vyšší rozptyl je ovšem nepravděpodobné.

Pojištění. Investoři si pojišťují své domy (auta, chaty, ...). Hodnota nepojištěného domu má zápornou šikmost, dům má vysokou hodnotu a pravděpodobnost těžké ztráty v důsledku požáru nebo loupeže je malá. Zaplacením pojistného se investoři vlastně snaží kompenzovat šikmost tak, aby ve výsledku nebyla záporná.

Příklad. Mějme auto, jehož hodnota je 1 000 000 Korun. Předpokládejme, že pravděpodobnost, že nám ho někdo ukradne, a tedy jeho hodnota pro nás klesne na nulu, je 0.01, zatímco pravděpodobnost, že se nic nestane, je 0.99. Střední hodnota auta je potom $EX = 0.01 \cdot 0 + 0.99 \cdot 1\,000\,000 = 990\,000$. Šikmost je $\mu_3 = 0.01 \cdot (0 - 990\,000)^3 + 0.99 \cdot (1\,000\,000 - 990\,000)^3 = -9\,702 \cdot\ 10^{15}$.

Povšimněme si, co se stane, pojistíme-li auto za 20 000 Korun. Hodnota auta je potom 980 000 Korun ať se stane cokoliv, tedy přestává být náhodnou veličinou. Střední hodnota je sice nižší než v předchozím případě, ale šikmost se zvýší na nulu.

Podíváme se nyní na problém o něco více matematicky a podložíme tak o něco lépe hypotézu, že investoři, jejichž užitkové funkce patří do množiny U_3 preferují investice s kladnou šikmostí.

Mějme investora a jeho užitkovou funkci $u \in U_3$. Rozvineme tuto funkci do Taylorovy řady v bodě $(w + EX)$, kde w značí pevnou hodnotu majetku která se nemění a X je náhodná veličina, může představovat například nepojištěný dům, nebo zakoupený los – je to majetek, jehož hodnota je náhodná.

$$u(w+X) = u(w+EX) + u'(w+EX)(X-EX) + \frac{u''(w+EX)}{2!}(X-EX)^2 +$$
$$+ \frac{u'''(w+EX)}{3!}(X-EX)^3 + R_1$$

Nyní se podíváme na střední hodnotu:

$$E(u(w+X)) = u(w+EX) + \frac{u''(w+EX)}{2!}\sigma^2 + \frac{u'''(w+EX)}{3!}\mu_3 + R_2$$

kde σ^2 značí rozptyl, μ_3 značí šikmost a R_1,R_2 jsou zbytky Taylorovy řady, které jsou za určitých předpokladů zanedbatelné. Rovnost platí, neboť $(w + EX)$ je konstanta a $E(X - EX) = 0$.

Poznámka. Hodnotu užitkové funkce budeme někdy nazývat také užitkem.

Vzhledem k tomu, že jsme předpokládali, že $u \in U_3$ můžeme učinit následující závěry:

- Zafixujeme-li všechny ostatní hodnoty, pak vyšší rozptyl implikuje nižší střední užitek, neboť $u''(w + EX) \leq 0$.

- Zafixujeme-li všechny ostatní hodnoty, pak vyšší šikmost implikuje vyšší střední užitek, neboť $u'''(w + EX) \geq 0$.

Definice 12 (Stochastická dominance třetího řádu)**.** *[Levy, 2006] Řekneme, že I_1 dominuje I_2 podle stochastické dominance třetího řádu, když I_1 dominuje I_2 v U_3.*

Věta 8. *[Levy, 2006] Mějme investice I_1 a I_2 jejichž výnosy mají distribuční funkce F a G. Dále mějme $a,b \in \mathbb{R}, b > a$, pro která platí $F(a) = G(a) = 0$ & $F(b) = G(b) = 1$. I_1 dominuje I_2 podle stochastické dominance třetího řádu právě tehdy, když platí následující dvě podmínky:*

(i) $Int_3(x) := \int_a^x \int_a^z [G(t) - F(t)]\, dtdz \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$

(ii) $E_F(x) \geq E_G(x)$

a alespoň jedna nerovnost je ostrá.

Důkaz. [Levy, 2006]

□

3.1.2 Nutné a postačující podmínky

Věta 9 (Postačující podmínky pro TSD)**.** *[Levy, 2006] Mějme dvě investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G.*

(i) $FD_1G \Rightarrow FD_3G$

(ii) $FD_2G \Rightarrow FD_3G$

Důkaz. [Levy, 2006]

□

Věta 10 (Nutné podmínky pro TSD)**.** *[Levy, 2006] Mějme dvě investice I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G.*

(i) $FD_3G \Rightarrow E_F(x) \geq E_G(x)$

(ii) $FD_3G \Rightarrow E_F(log(x)) \geq E_G(log(x))$

(iii) $FD_3G \Rightarrow min_F(x) \geq min_G(x)$

Důkaz. [Levy, 2006]

□

3.2 Klesající absolutní riziková averze a šikmost

V praxi se ukazuje, že bohatší investoři jsou ochotni platit méně za pojištění. Užitkové funkce takových investorů mají kladnou třetí derivaci, jak uvidíme níže.

Buď $\pi(w)$ hodnota pojištění, kterou je investor ochoten zaplatit v závislosti na hodnotě majetku w. Pánové Arrow [Arrow, 1965] a Pratt [Pratt, 1964] ukázali, že přibližně platí

$$\pi(w) \approx -\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{u''(w)}{u'(w)}$$

kde u je užitková funkce a σ^2 je rozptyl výnosu.

Na základě pozorování, že s vyšším w se snižuje $\pi(w)$ máme

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} \leq 0$$

tedy

$$-\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{u'(w)u'''(w) - [u''(w)]^2}{[u'(w)]^2} \leq 0$$

Snadno nahlédneme, že toto platí jen pro $u'''(w) \geq 0$, tedy $\frac{\partial \pi}{\partial w} \leq 0 \Rightarrow u'''(w) \geq 0$. Poznamenejme, že opačná implikace neplatí.

3.3 Motivace a definice, vztah DSD a TSD

Motivací ke zkoumání užitkových funkcí s klesající absolutní rizikovou averzí je chování investorů popsané výše - „čím bohatší investor, tím méně se pojišťuje proti riziku“. Vraťme se nyní k definici 12. Povšimněme si, že z ní plyne následující:

Označme w pevnou hodnotu majetku investora, která se nemění a x majetek, který je zatížen rizikem (dům, který může shořet, auto, které může být odcizeno apod.). Pak pro rizikově averzního investora s užitkovou funkcí u platí $Eu(w+x) \leq u(w+Ex)$, tedy existuje $\pi \geq 0$, že platí $Eu(w+x) = u(w+Ex-\pi)$, neboť u je neklesající.

Právě toto číslo π je hodnota pojištění, které je investor ochoten zaplatit.

Definice 13 (Koeficient absolutní rizikové averze)**.** *[Arrow, 1965][Pratt, 1964] Koeficient absolutní rizikové averze definujeme následovně:*

$$\pi(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

kde u je užitková funkce.

Povšimněme si, že zatímco $\frac{\sigma^2}{2}$ nese informaci o investici, $-\frac{u''(w)}{u'(w)}$ nese informaci o chování investora. Proto se koeficient absolutní rizikové averze definuje právě takto.

Z chování funkce π popsaného v sekci 3.2 plyne $U_d \subseteq U_3$, kde U_d značí množinu užitkových funkcí s klesající absolutní rizikovou averzí, tedy
$U_d = \{u \in \mathcal{C}^3 : u'(x) \geq 0, u''(x) \leq 0, \frac{\partial \pi(x)}{\partial x} \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

Definice 14 (Stochastická dominance generovaná klesající rizikovou averzí)**.** *[Vickson, 1977] Řekneme, že I_1 dominuje I_2 podle stochastické dominance generované klesající rizikovou averzí právě tehdy, když I_1 dominuje I_2 v U_d.*

Z toho, že $U_d \subseteq U_3$ plyne, že TSD je postačující podmínkou pro DSD. Pro investice se stejnými středními hodnotami výnosů platí dokonce ekvivalence mezi TSD a DSD, jak praví následující věta:

Věta 11. *[Levy, 2006] Mějme dvě spojité náhodné veličiny s distribučními funkcemi F a G. Nechť platí $E_F(x) = E_G(x)$. Pak stochastická dominance třetího řádu a stochastická dominance generovaná klesající rizikovou averzí mezi investicemi I_1 a I_2 s distribučními funkcemi výnosů F a G jsou ekvivalentní.*

Důkaz. [Levy, 2006]

□

3.4 Optimalita a eficience vzhledem k DSD

Uvažujme M různých investic $I_1, \ldots, I_M$ s diskrétními výnosy $X_1, \ldots, X_M$. Předpokládejme, že pro každé $i \in \{1, \ldots, M\}$ je X_i náhodná veličina s hodnotami v $\mathcal{Y}_i := \{x_{i,r} \in \mathbb{R} : P(X_i = x_{i,r}) > 0,\ r = 1, \ldots, R\}$, tedy celkem pro všechny investice máme množinu všech hodnot všech výnosů $\mathcal{Y} := \{y \in \mathbb{R} : y = x_{i,r}, i = 1, \ldots, M; r = 1, \ldots, R\}$. Označme S počet prvků množiny $\mathcal{Y}$ a $q_{i,s} := P(X_i = y_s) = \sum_{r: x_{i,r} = y_s} P(X_i = x_{i,r})$, $i = 1, \ldots, M$, $s = 1, \ldots, S$.

Definice 15 (Optimalita)**.** *[Post et al., 2015] Řekneme, že investice I_i je optimální podle DSD vzhledem k množině $\{I_1, \ldots, I_M\}$, jestliže existuje užitková funkce $u_0 \in U_d$, pro kterou je I_i preferovaná před všemi ostatními:*

$$\sum_{s=1}^{S} u_0(y_s)(q_{i,s} - q_{j,s}) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, M$$

Poznámka. Poznamenejme, že optimalita popsaná v definici 15 není optimalita ve smyslu řešení optimalizační úlohy.

Definice 16 (Eficience)**.** *[Post et al., 2015] Řekneme, že investice I_i je eficientní podle DSD vzhledem k množině $\{I_1, \ldots, I_M\}$, jestliže platí:*

$$\sum_{r=1}^{R} P(X_i = x_{i,r}) u'(x_{i,r})(x_{i,r} - x_{j,r}) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, M$$

Značení. Pro zjednodušení značení budeme dále požívat $T = S$ nebo $T = R$ v závislosti na kontextu, podobně $z_t = x_{i,r}$ nebo $z_t = y_s$.

Abychom zabránili numerické nestabilitě, budeme požadovat, aby naše užitkové funkce byly normované „na medián“, tj. aby platilo $u'(z_m) = 1$, kde z_m je medián, tedy platí $m = min_t\{t : P(X \leq z_t) \geq 0.5\}$.

Definice 17 (Mezní užitek). *[Levy, 2006] Nechť u je diferencovatelná funkce. Pak definujeme mezní užitek u jako*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = u'(x)$$

Položme $l(x) := log(u'(x))$. Platí $\pi(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -(\log u'(x))'$. Tedy požadavek klesající rizikové averze $\pi'(x) \leq 0$ je ekvivalentní požadavku $l''(x) \geq 0$.

Tvrzení 12. *[Post et al., 2015] Záporný logaritmus mezního užitku každé přípustné funkce z U_d reprezentuje funkci z U_2. Je-li $u \in U_2$, potom $exp(-u(x))$ reprezentuje mezní užitek nějaké $u \in U_d$.*

Důkaz. [Post et al., 2015]

□

Tedy platí $U_d = \{u \in U_3 : u'(x) = exp(l(x)), -l \in U_2\ \forall x\}$. Nyní je vidět, že DSD vyžaduje od záporného logaritmu mezního užitku, tedy funkce $-l(x)$, stejné vlastnosti jako SSD od užitkové funkce u. To je dobré, neboť budeme moci díky této vlastnosti zjednodušit problém a přiblížit ho problému již známému. Bylo totiž dokázáno, že pro SSD jsou klíčové po částech lineární konkávní užitkové funkce. Předchozí poznatky napovídají tomu, že by něco podobného mohlo platit pro $l(x)$ a problém DSD.

Tvrzení 13. *[Post et al., 2015] Pro každou užitkovou funkci $u \in U_d$ a množinu hodnot výnosů $\{z_1, \ldots, z_T\}$, $z_1 \leq \cdots \leq z_T$ lze reprezentovat hodnoty funkce $l(x)$ odpovídajícími hodnotami klesající, konvexní a po částech lineární funkce hodnot výnosů:*

$$l(z_t) = \sum_{k=t}^{T-1} \rho_k(z_{k+1} - z_t) + \rho_T, \quad t = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, T$$

$$l(z_m) = \sum_{k=m}^{T-1} \rho_k(z_{k+1} - z_m) + \rho_T = 0$$

$$\rho_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T-1$$

kde $\rho_t = \pi(\bar{z}_t) - \pi(\bar{z}_{t+1}),\ \ t = 1, \ldots, T-2$, $\rho_{T-1} = \pi(\bar{z}_{T-1})$ *pro nějaká* $\bar{z}_t \in [z_t, z_{t+1}], t = 1, \ldots, T-1$ *a* $\rho_T = l(z_T)$.

Důkaz. [Post et al., 2015]

□

Na základě toho, že logaritmus mezního užitku má po částech lineární strukturu, můžeme DSD reprezentovat pomocí po částech exponenciálních funkcí. Toho se dosáhne pomocí integrace $exp(l(z_t))$, kde za $l(z_t)$ dosadíme vyjádření z tvrzení 13. Pokud dosadíme výsledek tohoto odvození do definic 15 a 16, dostaneme nutné a postačující podmínky pro optimalitu a eficienci podle DSD. To ovšem není příliš praktické, neboť takto získané výsledky jsou obecně nelineární a nekonvexní. Dalším cílem tedy bude linearizace problému.

Tvrzení 14. *[Post et al., 2015] Pro každou užitkovou funkci $u \in U_3$ a diskrétní množinu hodnot výnosů $\{z_1, \ldots, z_T\}$,$z_1 \leq \cdots \leq z_T$, lze reprezentovat hodnoty užitku (mezního užitku) pomocí odpovídajících hodnot klesající, konkávní a po částech kvadratické (klesající, konvexní a po částech lineární) funkce hodnot výnosů:*

$$u(z_t) = \frac{1}{2}\sum_{k=t}^{T-1} -\gamma_k(z_{k+1} - z_t)^2 + \gamma_T(z_t - z_T) + \gamma_{T+1}, \quad t = 1, \ldots, T$$

$$u'(z_t) = \sum_{k=t}^{T-1} \gamma_k(z_{k+1} - z_t) + \gamma_T, \quad t = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, T$$

$$u'(z_m) = \sum_{k=m}^{T-1} \gamma_k(z_{k+1} - z_m) + \gamma_T = 1$$

$$\gamma_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T$$

kde $\gamma_t = u''(\bar{\bar{z}}_{t+1}) - u''(\bar{\bar{z}}_t), t = 1, \ldots, T-2$, pro nějaká $\bar{\bar{z}}_t \in [z_t, z_{t+1}]$, $t = 1, \ldots, T-1$, a $\gamma_T = u'(z_T)$.

Důkaz. [Post et al., 2015]

□

Nyní máme dvě soustavy lineárních omezení - tvrzení 14 dává lineární vyjádření $l(x)$ pomocí hodnot výnosů a změn koeficientu rizikové averze $\pi(x)$ a tvrzení 15 dává lineární (v parametrech) vyjádření užitkové funkce a mezního užitku pomocí hodnot výnosů a změn druhých derivací užitkové funkce. Vztah mezi těmito dvěma soustavami je ovšem nelineární, platí totiž $u'(z_t) = exp(l(z_t))$. Proto budeme hledat soustavu lineárních podmínek založenou na lokálních aproximacích exponenciální funkce.

Uvažujme Taylorův polynom K-tého řádu funkce $g(x) = exp(x)$ se středem v bodě $log(c_t)$ v bodě $l(z_t)$, kde c_t značí hodnotu $u'(z_t)$:

$$\hat{g}_k(l(z_t)) := \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k g(log(c_t))}{\partial log(c_t)^k}(l(z_t) - log(c_t))^k =$$
$$= c_t\left(1 + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!}(l(z_t) - log(c_t))^k\right)$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že $g \equiv exp$.

Lemma 15. *[Post et al., 2015] Pro každou užitkovou funkci $u \in U_d$, diskrétní množinu hodnot výnosů $\{z_1, \ldots, z_T\}$, $z_1 \leq \cdots \leq z_T$, a hodnoty mezního užitku $c_1 \geq \cdots \geq c_T, c_m = 1$, platí následující nerovnosti:*

$$u'(z_t) \geq \hat{g}_1(l(z_t)) = c_t(1 + l(z_t) - log(c_t)), \quad t = 1, \ldots, T$$

Důkaz. [Post et al., 2015]

□

Věta 16 (Nutná a postačující podmínka pro optimalitu). *[Post et al., 2015] Mějme investice $I_1, \ldots, I_M$.*

(i) Nutná podmínka pro optimalitu $I_i, i = 1, \ldots, M$, podle DSD je, že pro každý daný soubor mezních užitků $c_1 \geq \ldots c_S > 0, c_m = 1$, existují $\gamma_s^*, s = 1, \ldots, S+1$ a $\rho_s^*, s = 1, \ldots, S$, která řeší následující systém lineárních nerovností:

$$\sum_{s=1}^{S} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=s}^{S-1} -\gamma_k (y_{k+1} - y_s)^2 + \gamma_S (y_s - y_S) + \gamma_{S+1} \right) \cdot (q_{i,s} - q_{j,s}) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, M \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=s}^{S-1} \gamma_k (y_{k+1} - y_s) + \gamma_S \geq c_s \left(1 + \sum_{k=s}^{S-1} \rho_k (y_{k+1} - y_s) + \rho_S - log(c_s) \right), \quad s = 1, \ldots, S \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=m}^{S-1} \gamma_k (y_{k+1} - y_m) + \gamma_S = 1 \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=m}^{S-1} \rho_k (y_{k+1} - y_m) + \rho_S = 0 \tag{3.4}$$

$$\gamma_s \geq 0, \quad s = 1, \ldots, S \tag{3.5}$$

$$\rho_s \geq 0, \quad s = 1, \ldots, S-1 \tag{3.6}$$

(ii) Nutná a postačující podmínka pro optimalitu $I_i, i = 1, \ldots, M$, je, že existují přípustné hodnoty $\gamma_s^*, s = 1, \ldots, S+1; \rho_s^*, s = 1, \ldots, S$, tj. splňující (3.1)-(3.6), pro které platí následující rovnost:

$$log \left(\sum_{k=s}^{S-1} \gamma_k^* (y_{k+1} - y_s) + \gamma_S^* \right) = \sum_{k=s}^{S-1} \rho_k^* (y_{k+1} - y_s) + \rho_S^*, \quad s = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, S \tag{3.7}$$

Důkaz. [Post et al., 2015]

□

Věta 17 (Nutná a postačující podmínka pro eficienci). *[Post et al., 2015] Mějme investice $I_1, \ldots, I_M$.*

(i) Nutná podmínka pro eficienci $I_i, i = 1, \ldots, M$, podle DSD je, že pro každý daný soubor mezních užitků $c_1 \geq \ldots c_R > 0, c_m = 1$, existují $\gamma_r^*, r = 1, \ldots, R$ a $\rho_r^*, r = 1, \ldots, R$, která řeší následující systém lineárních nerovností:

$$\sum_{r=1}^{R} \left(\sum_{k=r}^{R-1} \gamma_k (x_{i,k+1} - x_{i,r}) + \gamma_R \right) (x_{i,r} - x_{j,r}) P(X_i = x_{i,r}) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, M \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=r}^{R-1} \gamma_k(x_{i,k+1} - x_{i,r}) + \gamma_R \geq c_r \left(1 + \sum_{k=r}^{R-1} \rho_k(x_{i,k+1} - x_{i,r}) + \rho_R - log(c_r)\right), \quad r = 1, \ldots, R \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=m}^{R-1} \gamma_k(x_{i,k+1} - x_{i,m}) + \gamma_R = 1 \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=m}^{R-1} \rho_k(x_{i,k+1} - x_{i,m}) + \rho_R = 0 \quad (3.11)$$

$$\gamma_r \geq 0, \quad r = 1, \ldots, R \quad (3.12)$$

$$\rho_r \geq 0, \quad r = 1, \ldots, R - 1 \quad (3.13)$$

(ii) Nutná a postačující podmínka pro eficienci $I_i, i = 1, \ldots, M$, je, že existují přípustné hodnoty $\gamma_r^*, r = 1, \ldots, R; \rho_r^*, r = 1, \ldots, R$, tj. splňující (3.8)-(3.13), pro které platí následující rovnost:

$$log\left(\sum_{k=r}^{R-1} \gamma_k^*(x_{i,k+1} - x_{i,r}) + \gamma_R^*\right) = \sum_{k=r}^{R-1} \rho_k^*(x_{i,k+1} - x_{i,r}) + \rho_R^*, \quad r = 1, \ldots, R \quad (3.14)$$

Důkaz. [Post et al., 2015]

□

V praxi obvykle formulujeme podmínky optimality a eficience jako úlohu lineárního programování.

Konstanty c_r nejčastěji volíme jako hodnoty funkce tvaru $\eta x^{-\delta}$ v bodech z_r, kde $\eta > 0$ a $\delta > 0$ jsou parametry. Lze se snadno přesvědčit, že jde o funkce z U_d.

4. Numerická aplikace

4.1 Data

Data, která použijeme k testování DSD eficience tržního portfolia, jsou měsíční výnosy za 44 let (01/1970 – 12/2014) z 49 amerických průmyslových portfolií (IP1 – IP49), a amerického T-billu, který v našem kontextu vystupuje jako bezrizikové aktivum. Tabulka 4.1 ukazuje shrnutí dat.

Aktivum	Stř. H.	Sm. Odch.	Min	Max
T.bill	1.004	0.003	1.000	1.014
Mkt	1.009	0.046	0.774	1.166
IP1	1.010	0.065	0.712	1.289
IP2	1.012	0.046	0.821	1.196
IP3	1.012	0.067	0.737	1.383
IP4	1.011	0.054	0.802	1.261
IP5	1.015	0.063	0.751	1.325
IP6	1.008	0.072	0.656	1.269
IP7	1.013	0.079	0.681	1.387
IP8	1.009	0.060	0.748	1.307
IP9	1.009	0.048	0.784	1.185
IP10	1.011	0.068	0.691	1.324
IP11	1.010	0.083	0.609	1.365
IP12	1.010	0.054	0.794	1.210
IP13	1.011	0.051	0.809	1.318
IP14	1.011	0.057	0.720	1.220
IP15	1.011	0.061	0.694	1.320
IP16	1.011	0.075	0.675	1.590
IP17	1.010	0.064	0.693	1.355
IP18	1.009	0.074	0.689	1.240
IP19	1.008	0.076	0.670	1.307
IP20	1.007	0.072	0.733	1.304
IP21	1.010	0.064	0.688	1.230
IP22	1.012	0.064	0.678	1.232
IP23	1.009	0.071	0.636	1.496
IP24	1.012	0.068	0.698	1.253
IP25	1.011	0.075	0.677	1.292
IP26	1.013	0.067	0.699	1.326
IP27	1.008	0.107	0.664	1.786
IP28	1.010	0.076	0.652	1.269
IP29	1.012	0.105	0.621	1.461
IP30	1.011	0.056	0.818	1.247
IP31	1.009	0.041	0.874	1.188
IP32	1.010	0.048	0.838	1.213
IP33	1.007	0.069	0.718	1.245

IP34	1.009	0.058	0.723	1.254
IP35	1.009	0.074	0.665	1.252
IP36	1.010	0.108	0.641	1.736
IP37	1.010	0.077	0.678	1.273
IP38	1.010	0.074	0.698	1.220
IP39	1.010	0.057	0.736	1.243
IP40	1.010	0.058	0.718	1.209
IP41	1.010	0.059	0.721	1.190
IP42	1.010	0.056	0.714	1.181
IP43	1.011	0.056	0.708	1.271
IP44	1.011	0.062	0.687	1.279
IP45	1.010	0.061	0.728	1.250
IP46	1.011	0.056	0.735	1.268
IP47	1.006	0.077	0.623	1.596
IP48	1.011	0.064	0.741	1.196
IP49	1.005	0.070	0.736	1.212

Tabulka 4.1: Shrnutí dat.
Hrubé výnosy z 49 amerických průmyslových portfolií (IP1 – IP49), tržního portfolia (Mkt) a T-billu. Zkratka Stř. H. značí střední hodnotu, Sm. Odch. směrodatnou odchylku, Min minimum a Max maximum.

4.2 Formulace úlohy a volba konstant

Chceme otestovat, zda je naše tržní portfolio eficientní podle DSD. Problém budeme formulovat jako úlohu lineárního programování užitím věty 16, kde $M = 51$:

$$\theta^\star = \min_{\gamma_r,\rho_r,\theta} \theta$$

za podmínek

$$\sum_{r=1}^{R}\left(\sum_{k=r}^{R-1}\gamma_k(x_{i,k+1}-x_{i,r})+\gamma_R\right)(x_{i,r}-x_{j,r})P(X_i=x_{i,r})+\theta \geq 0, \qquad j=1,\ldots,M$$

$$\sum_{k=r}^{R-1}\gamma_k(x_{i,k+1}-x_{i,r})+\gamma_R \geq c_r\left(1+\sum_{k=r}^{R-1}\rho_k(x_{i,k+1}-x_{i,r})+\rho_R-ln(c_r)\right), \qquad r=1,\ldots,R$$

$$\sum_{k=m}^{R-1}\gamma_k(x_{i,k+1}-x_{i,m})+\gamma_R=1$$

$$\sum_{k=m}^{R-1}\rho_k(x_{i,k+1}-x_{i,m})+\rho_R=0$$

$$\gamma_r \geq 0, \quad r=1,\ldots,R$$

$$\rho_r \geq 0, \quad r = 1, \ldots, R-1$$

K výpočtu použijeme [R Core Team, 2015], skript je k nahlédnutí v příloze 1.

Povšimněme si významu účelové funkce. Vyjde-li $\theta^\star > 0$, implikuje to neeficienci testovaného portfolia. Je tomu tak proto, že v takovém případě jsme našli soubor mezních užitků (konstant c_r z věty 16), pro který soustava nerovností z věty 16 nemá řešení. Nutnou podmínkou pro eficienci je tedy $\theta^\star = 0$.

Chceme-li potvrdit neeficienci portfolia, je potřeba volit konstanty co „nejlépe“ - chceme najít právě ten soubor konstant, pro který nemá soustava nerovností z věty 16 řešení.

Konstanty c_r jsou zde voleny jako hodnoty funkce tvaru $\eta x^{-\delta}$ v bodech z_r, kde η je parametr, který snadno získáme z požadavku $c_m = \eta x_{i,m}^{-\delta} = 1$ při známém δ, které volíme. Otázkou je, jak moc je úloha citlivá na volbu δ.

4.3 Výsledky, citlivost na volbu konstant

Ukazuje se, že citlivost na volbě δ je poměrně malá, jak ukazuje tabulka 4.2, která obsahuje výsledky optimalizační úlohy v závislosti na volbě δ při vyhodnocení tržního portfolia.

δ	hodnota účelové funkce
1	0.00526629629630
1.2	0.00526629629628
1.6	0.00526629629629
2	0.00526629658948
5	0.00526629629629
10	0.00526629630016

Tabulka 4.2: Výsledky optimalizační úlohy v závislosti na volbě δ při vyhodnocení tržního portfolia.

Na základě těchto výsledků se lze domnívat, že nejlepší volba δ je 2, neboť dává největší hodnotu účelové funkce.

Poznamenejme, že případ $\delta = 1$ odpovídá situaci, kdy je užitková funkce logaritmus. Pokud za užitkovou funkci vezmeme $u(x) = e^{-x}$, což lze chápat jako hraniční případ, neboť jde o funkci s konstantní rizikovou averzí, dostaneme hodnotu účelové funkce 0.0052662962963.

4.4 Porovnání s SSD

Nyní budeme chtít najít nějaké portfolio, které dominuje naše DSD - neeficientní tržní portfolio ve smyslu SSD. Jelikož dominance podle SSD implikuje dominanci podle DSD, prokážeme tak, že je tržní portfolio skutečně neeficientní.

Vzhledem k tomu, že v naší aplikaci máme stejně pravděpodobné scénáře,k testování použijeme Kuosmanenův [Kuosmanen, 2004] test. Jeho formulaci převezmeme z [Kopa, 2013]. Nechť $\mathbf{X}$ je matice, která má ve sloupcích výnosy z investic a v řádcích jednotlivé scénáře. Nechť λ je vektor s nezápornými prvky, pro který platí, že součet jeho prvků je 1. Nechť $\mathbf{W}$ je matice, která má v i-tém řádku a j-tém sloupci prvek $w_{i,j}$ a $\mathbf{y}$ je vektor výnosů z testovaného portfolia. Kuosmanenův test je formulován jako úloha lineárního programování a vypadá následovně:

$$\theta^\star = \max_{\lambda,\mathbf{W}} (\mathbf{X}\lambda - \mathbf{y})^T \mathbf{1}$$

za podmínek

$$\mathbf{X}\lambda \geq \mathbf{W}\mathbf{y}$$

$$\sum_i w_{i,j} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j w_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

kde symbol $\mathbf{1}$ značí vektor jedniček.

K výpočtu použijeme [R Core Team, 2015], skript je k nahlédnutí v příloze 2.

Je-li hodnota účelové funkce nulová, pak jsme nenašli žádné portfolio, které by dominovalo testované portfolio.

Vzhledem k tomu, že naše data jsou příliš velká pro výpočet v R, budeme se muset omezit pouze na 100 pozorování. Velikost úlohy je totiž kvadraticky závislá na počtu pozorování. Potom budeme muset ověřit, zda takto získané portfolio skutečně dominuje tržní portfolio ve smyslu SSD podle věty 7.

Vezměme 100 „nejhorších“ pozorování, tj. pozorování s nejnižšími výnosy tržního portfolia. V účelové funkci použijeme všechna pozorování, ale v omezeních použijeme jen našich 100 vybraných. Tím se výrazně sníží výpočetní náročnost.

Výsledkem analýzy je portfolio, které je lineární kombinací IP5, IP26 a IP31, jak ukazuje tabulka 4.3.

$\theta^\star = 2.6471$	hodnota koeficientu	Min	Stř. h.
λ_5	0.788238022	0.751	1.015
λ_{26}	0.193165637	0.699	1.013
λ_{31}	0.018596341	0.874	1.009

Tabulka 4.3: Výsledky testování SSD eficience tržního portfolia. Portfolio, které dominuje naše tržní portfolio na stu „nejhorších“ pozorování, je lineární kombinací aktiv IP5, IP26 a IP31 s optimálními vahami λ_5,λ_{26} a λ_{31}. Pro větší přehlednost jsou zde uvedeny i minimální výnosy daných aktiv a jejich střední hodnoty. Minimální výnos tržního portfolia je 0.774, střední hodnota je 1.009.

Lze očekávat, že by nalezené portfolio mohlo dominovat tržní portfolio. Střední hodnoty výnosů IP5 a IP26 jsou vyšší než střední hodnota výnosů tržního portfolia. Střední hodnota výnosů IP31 je sice nižší, výnosy tohoto aktiva mají ale zase vysoké minimum.

Povšimněme si významu hodnoty $\theta^{\star}$. Pokud ji vydělíme počtem pozorování, dostaneme rozdíl středních hodnot dominujícího portfolia a tržního portfolia. V našem případě vyjde přibližně 0.005, což odpovídá měsíčnímu rozdílu 0.5%.

Ukazuje se, že nalezené portfolio skutečně dominuje tržní portfolio ve smyslu SSD, což jsme ověřili užitím věty 7. Tím jsme tedy našli dominující portfolio i ve smyslu DSD.

Poznamenejme, že podobně bychom mohli hledat portfolio, které dominuje testované portfolio podle FSD. Kuosmanenův test ovšem vyžaduje, aby matice $\mathbf{W}$ byla permutační. Tato úloha je tím pádem ještě více výpočetně náročná.

Závěr

Cílem práce bylo představit stochastickou dominanci prvního a druhého řádu a stochastickou dominanci generovanou klesající rizikovou averzí. Tyto relace byly rozebírány v první části práce. Důležitým poznatkem je, že test eficience a optimality ve smyslu DSD lze formulovat jako úlohu lineárního programování.

Dále bylo cílem aplikovat popsané metody na reálná data a porovnat je. Závěrem druhé části práce práce jsou následující poznatky.

Chceme-li prokázat neeficienci portfolia, použijeme nutnou podmínku pro eficienci podle DSD a formulujeme ji jako úlohu lineárního programování. Tato metoda je výpočetně příznivá a pokud zvolíme odhady mezního užitku ve tvaru $\eta x^{-\delta}$, kde η a δ jsou parametry, funguje dobře bez výraznější závislosti na volbě parametru δ.

Naproti tomu testování neeficience podle SSD je výpočetně výrazně náročnější, protože hledáme i dominující portfolio. Je tomu tak proto, že velikost úlohy záleží kvadraticky na počtu pozorování. Pokud se nám ovšem podaří najít dominující portfolio podle SSD, plyne z toho dominance podle DSD.

Neeficience podle FSD není v rámci této práce testována, neboť je to příliš výpočetně náročná úloha celočíselného lineárního programování.

Seznam použité literatury

K. J. Arrow. *Aspects of the Theory of Risk Bearing.* Yrjo Jahnssonin Saatio, Helsinki, 1965.

P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath. Coherent Measures of Risk. 1998.

E. Domar and R. A. Musgrave. Proportional income taxation and risk taking. *Quarterly Journal of Economics*, 57, 1944.

M. Kopa. *Stochastic Dominance in Portfolio Efficiency Testing.* Habilitační práce, Univerzita Karlova v Praze, 2013.

V. Kozmík. *Eficience portfolií při spojitém rozdělení výnosů.* Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, 2010.

T. Kuosmanen. Efficient diversification according to stochastic dominance criteria. *Management Science*, 50:1390–1406, 2004.

H. Levy. *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty.* Second edition. Springer, New York, 2006. ISBN 0-387-29302-7.

H. M. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 1952.

T. Post, Y. Fang, and M. Kopa. Linear Tests for Decreasing Absolute Risk Aversion Stochastic Dominance. *Management Science*, 61(7):1615–1629, 2015.

J. W. Pratt. Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, 32: 122–136, 1964.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2015. URL `https://www.R-project.org/`.

A. D. Roy. Safety-first and the holding of assets. *Econometrica*, 20, 1952.

R. G. Vickson. Stochastic Dominance Tests for Decreasing Absolute Risk Aversion. II. General Random Variables. *Management Science*, 23:478–489, 1977.

Seznam tabulek

Seznam zkratek

angl. - anglický
tj. - to jest
tzv. - takzvaně, takzvaný
DSD - stochastická dominance generovaná klesající rizikovou averzí
SSD - stochastická dominance druhého řádu
FSD - stochastická dominance prvního řádu
TSD - stochastická dominance třetího řádu
FS - množina přípustných investic
ES - eficientní množina
IS - neeficientní množina

Přílohy

Příloha 1 (DSD skript).

```
##nacteni dat
mojeData<-read.table("C:/49_Industry_Portfolios_Monthly_II.CSV",header=TRUE,
nrows=540,sep=";",dec=",",row.names=1,na.strings="-99,99",skip=1)
##mojeData[,1] je T-bill , mojeData[,2] je Mkt


mojeData<-(mojeData/100)+1 ##prepocet na hrube vynosy

##serazeni podle Mkt - 2. sloupec
mojeData<-mojeData[order(mojeData[,2]),]

##vypocet indexu medianu v i-tem sloupci
median<-function(i){
        return((length(mojeData[,i])%/%2)+1)
}

##vypocet eta pri znamem theta a indexu medianu pro i-ty sloupec tabulky
eta<-function(i,theta,median){
        hodnota<-sort(mojeData[,i])[median]^theta
        return(hodnota)
}

##funkce, ktera spocita vektor konstant c pri znamem eta a theta z i-teho sloupce tabulky
vektorKonstant<-function(i,eta,theta){
        vektor<-NULL
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                hodnota<-eta*mojeData[j,i]^(-theta)
                vektor<-c(vektor,hodnota)
                }
        return(vektor)
}

##uloha linearniho programovani------------------

library(lpSolve)

##ucelova funkce
obj<-function(pocetPozorovani){
        vektor<-rep(0, 2*pocetPozorovani)
        vektor<-c(vektor,1)
        return(vektor)
}


##vektor vstupujici do souctu v prvnim radku matice omezeni pro k-tou slozku vektoru gamma pri
##vyhodnoceni i-teho sloupce proti n-temu
vektorVstupujiciDoSouctu<-function(i,k,n){
        vektor<-NULL
        pr<-1/length(mojeData[,i])
        for(j in 1:k){
                vektor<-c(vektor,(mojeData[k+1,i]-mojeData[j,i])*(mojeData[j,i]-mojeData[j,n])*pr)
        }
        return(vektor)
}

##prvni radek matice omezeni pri vyhodnocovani i-teho sloupce proti n-temu sloupci
a1<-function(i,n){
        vektor<-NULL
        pr<-1/length(mojeData[,i])
        for(j in 1:(length(mojeData[,i])-1)){
                vektor<-c(vektor,sum(vektorVstupujiciDoSouctu(i,j,n)))
        }
        pomProKoefUGammaR<-NULL
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                pomProKoefUGammaR<-c(pomProKoefUGammaR,(mojeData[j,i]-mojeData[j,n]))
        }
        vektor<-c(vektor,(sum(pomProKoefUGammaR)*pr))
        nula<-rep(0,length(mojeData[,i]))
        vektor<-c(vektor,nula,1)
        return(vektor)
}


##vyrobeni prvnich M radku matice omezeni pri vyhodnocovani i-teho sloupce (pro M aktiv)
A1<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        for(j in 1:pocetAktiv){
                vektor<-c(vektor,a1(i,j))
        }
        ##matice<-matrix(vektor,nrow=pocetAktiv,ncol=2*length(mojeData[,i])+1,byrow=TRUE)
        ##return(matice)
        return(vektor)
}


##vypocet vektoru konstant cr pro i-ty sloupec a dane theta
cr<-function(i,theta){
        vektor<-NULL
        eta<-eta(i,theta,median(i))
        vektor<-vektorKonstant(i,eta,theta)
        return(vektor)
}
```

```
##vypocet vektoru konstant pro u=log(x)
##cr<-function(i){
##      vektor<-NULL
##      for(j in 1:length(mojeData[,i])){
##              vektor<-c(vektor,1/mojeData[j,i])
##      }
##return(vektor)
##}

##vypocet vektoru konstant pro u=exp(-theta*x)
##cr<-function(i,theta){
##      eta<-exp(theta*sort(mojeData[,i])[median(i)])
##      vektor<-NULL
##      for(j in 1:length(mojeData[,i])){
##              vektor<-c(vektor,eta*exp(-theta*mojeData[j,i]))
##      }
##return(vektor)
##}

##vypocet r-teho radku druhe casti matice omezeni pri vyhodnocovani i-teho sloupce
##pro dane theta pri znalosti vektoru cr
 a2r<-function(i,r,cr){
 vektor<-rep(0,r-1)
 for(j in r:(length(mojeData[,i])-1)){
 vektor<-c(vektor,(mojeData[j+1,i]-mojeData[r,i]))
 }
 vektor<-c(vektor,1)
 nuly<-rep(0,r-1)
 vektor<-c(vektor,nuly)
 for(j in r:(length(mojeData[,i])-1)){
 vektor<-c(vektor,(-cr[r]*(mojeData[j+1,i]-mojeData[r,i])))
 }
 vektor<-c(vektor,-cr[r],0)
 return(vektor)
 }

##vyrobeni druhe casti matice omezeni (pocet radku zavisi na poctu pozorovani) pri vyhodnocovani
##i-teho sloupce a pri znamem theta
A2<-function(i,theta){
        cr<-cr(i,theta)
        ##cr<-cr(i)
        vektor<-NULL
        for(j in 1:(length(mojeData[,i])-1)){
                vektor<-c(vektor,a2r(i,j,cr))
        }
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i])-1)
        posledniRadek<-c(nuly,1,nuly,-cr[length(mojeData[,i])],0)
        ##matice<-matrix(c(vektor,posledniRadek),nrow=length(mojeData[,i]),
        ncol=2*length(mojeData[,i])+1,byrow=TRUE)
        ##return(matice)
        vektor<-c(vektor,posledniRadek)
        return(vektor)
}


##zarovnani na median "podle gamma"
a4<-function(i){
        m<-median(i)
        median<-sort(mojeData[,i])[m]
        vektor<-NULL
        nuly<-rep(0,m-1)
        vektor<-c(vektor,nuly)
        for(k in m:(length(mojeData[,i])-1)){
                vektor<-c(vektor,(mojeData[k+1,i]-median))
        }
        vektor<-c(vektor,1)
        nuly2<-rep(0,length(mojeData[,i])+1)
        vektor<-c(vektor,nuly2)
        return(vektor)
}


##zarovnani na median "podle rho"
a5<-function(i){
        m<-median(i)
        median<-sort(mojeData[,i])[m]
        vektor<-NULL
        nuly<-rep(0,m-1+length(mojeData[,i]))
        vektor<-c(vektor,nuly)
        for(k in m:(length(mojeData[,i])-1)){
                vektor<-c(vektor,(mojeData[k+1,i]-median))
        }
        vektor<-c(vektor,1,0)
        return(vektor)
}


##vytvoreni matice omezeni
A<-function(i,theta,pocetAktiv){
        A1<-A1(i,pocetAktiv)
        A2<-A2(i,theta)
        a4<-a4(i)
        a5<-a5(i)
        A6<-diag(1,((2*length(mojeData[,i]))+1)) ##nezapornost
        matice<-matrix(c(A1,A2,a4,a5),nrow=pocetAktiv+length(mojeData[,i])+2,
        ncol=2*length(mojeData[,i])+1,byrow=TRUE)
        matice<-rbind(matice,A6)
        return(matice)
```

```
}

##vytvoreni vektoru pravych stran pri vyhodnocovani i-teho sloupce
B<-function(i,theta,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        B1<-rep(0,pocetAktiv)
        cr<-cr(i,theta)
        ##cr<-cr(i)
        b2r<-function(r){return(cr[r]-(cr[r]*log(cr[r])))}
        B2<-NULL
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                B2<-c(B2,b2r(j))
        }
        b4<-1
        b5<-0
        B6<-rep(0,2*length(mojeData[,i])+1)
        return(c(B1,B2,b4,b5,B6))
}

##vytvoreni vektoru smeru omezeni pri vyhodnocovani i-teho sloupce
smery<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        for(j in 1:pocetAktiv){
                vektor<-c(vektor, ">=")
        }
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                vektor<-c(vektor, ">=")
        }
        vektor<-c(vektor, "=", "=")
        for(j in 1:((2*length(mojeData[,i]))+1)){
                vektor<-c(vektor, ">")
        }
        return(vektor)
}


##vyhodnocovaci funkce
vyhodnoceni<-function(i,theta,pocetAktiv){
        A<-A(i,theta,pocetAktiv)
        smery<-smery(i,pocetAktiv)
        B<-B(i,theta,pocetAktiv)
        obj<-obj(length(mojeData[,i]))

        return(lp("min",obj,A,smery,B))
}

vysledky<-vyhodnoceni(2,2,51)
vysledky
```

Příloha 2 (SSD skript).

```
##nacteni dat
mojeData<-read.table("C:/49_Industry_Portfolios_Monthly_II.CSV",header=TRUE,
nrows=540,sep=";",dec=",",row.names=1,na.strings="-99,99",skip=1)
##mojeData[,1] je T-bill, mojeData[,2] je Mkt


mojeData<-(mojeData/100)+1 ##prepocet na hrube vynosy
##serazeni podle Mkt - 2. sloupec
mojeData<-mojeData[order(mojeData[,2]),]

library(lpSolve)


##soucet vynosu Mkt
konstanta<-sum(mojeData[,2])

##vypocet koeficientu ucelove funkce
obj<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        for(j in 1:pocetAktiv){
                vektor<-c(vektor,sum(mojeData[,j]))
        }
        vektor<-c(vektor,-konstanta)
        for(j in 1:length(mojeData[1:100,i])){
                for(k in 1:length(mojeData[1:100,i])){
                        vektor<-c(vektor,0)
                }
        }
        return(vektor)
}

obj<-obj(2,51)

mojeData<-mojeData[1:100,]

##vypocet prvniho radku prvni casti matice omezeni
a11<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i]))
        for(j in 1:pocetAktiv){
                vektor<-c(vektor,mojeData[1,j])
        }
        vektor<-c(vektor,0)
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                vektor<-c(vektor,-(mojeData[j,i]))
        }
        for(j in 1:(length(mojeData[,i])-1)){
```

```
                vektor<-c(vektor,nuly)
        }
        return(vektor)
}

##vypocet r-teho radku prvni casti matice omezeni, ne prvniho ani posledniho
a1r<-function(i,r,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        for(j in 1:pocetAktiv){
                vektor<-c(vektor,mojeData[r,j])
        }
        vektor<-c(vektor,0)
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i]))
        for(j in 1:(r-1)){
                vektor<-c(vektor,nuly)
        }
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                vektor<-c(vektor,-(mojeData[j,i]))
        }
        for(j in 1:(length(mojeData[,i])-r)){
                vektor<-c(vektor,nuly)
        }
        return(vektor)
}

##vypocet posledniho radku prvni casti matice omezeni
aRr<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        for(j in 1:pocetAktiv){
                vektor<-c(vektor,mojeData[length(mojeData[,i]),j])
        }
        vektor<-c(vektor,0)
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i]))
        for(j in 1:(length(mojeData[,i])-1)){
                vektor<-c(vektor,nuly)
        }
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                vektor<-c(vektor,-(mojeData[j,i]))
        }
        return(vektor)
}

##vypocet prvni casti matice omezeni
A1<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        vektor<-c(vektor,a11(i,pocetAktiv))
        for(j in 2:(length(mojeData[,i])-1)){
                vektor<-c(vektor,a1r(i,j,pocetAktiv))
        }
        vektor<-c(vektor,aRr(i,pocetAktiv))
        return(vektor)
}

##omezeni pro konstantu
omezeniProKonstantu<-function(pocetAktiv){
        nuly<-rep(0,pocetAktiv)
        vektor<-NULL
        vektor<-c(vektor,nuly,1)
        nuly2<-rep(0,length(mojeData[,2])*length(mojeData[,2]))
        vektor<-c(vektor,nuly2)
        return(vektor)
}

##vypocet prvniho radku druhe casti matice omezeni
a21<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-rep(1,pocetAktiv)
        vektor<-c(vektor,0)
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i])*length(mojeData[,i]))
        vektor<-c(vektor,nuly)
        return(vektor)
}

##vypocet jednoho (ne prvniho ani posledniho) radku druhe casti matice omezeni
a2r<-function(i,r,pocetAktiv){
        vektor<-rep(0,pocetAktiv)
        vektor<-c(vektor,0)
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i]))
        if(r>2){
                for(j in 1:(r-2)){
                        vektor<-c(vektor,nuly)
                }
        }
        jednicky<-rep(1,length(mojeData[,i]))
        vektor<-c(vektor,jednicky)
        for(j in 1:(length(mojeData[,i])+1-r)){
                vektor<-c(vektor,nuly)
        }
        return(vektor)
}

##vypocet posledniho radku druhe casti matice omezeni
aRr<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-rep(0,pocetAktiv)
        vektor<-c(vektor,0)
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i]))
        for(j in 1:(length(mojeData[,i])-1)){
                vektor<-c(vektor,nuly)
        }
```

```
        jednicky<-rep(1,length(mojeData[,i]))
        vektor<-c(vektor,jednicky)
        return(vektor)
}

##vypocet druhe casti matice omezeni
A2<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        vektor<-a21(i,pocetAktiv)
        for(j in 2:length(mojeData[,i])){
                vektor<-c(vektor,a2r(i,j,pocetAktiv))
        }
        vektor<-c(vektor,aRr(i,pocetAktiv))
        return(vektor)
}

##vypocet r-teho radku treti casti matice omezeni
a3r<-function(i,r,pocetAktiv){
        vektor<-rep(0,pocetAktiv)
        vektor<-c(vektor,0)
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                nuly<-rep(0,r-1)
                vektor<-c(vektor,nuly,1)
                nuly2<-rep(0,length(mojeData[,i])-r)
                vektor<-c(vektor,nuly2)
        }
        return(vektor)
}

##vypocet treti casti matice omezeni
A3<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-NULL
        for(j in 1:length(mojeData[,i])){
                vektor<-c(vektor,a3r(i,j,pocetAktiv))
        }
        return(vektor)
}

##nezapornost
A4<-function(i,pocetAktiv){
        return(diag(1,length(mojeData[,i])*length(mojeData[,i])+pocetAktiv+1))
}

##vypocet matice omezeni
A<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-A1(i,pocetAktiv)
        vektor<-c(vektor,omezeniProKonstantu(pocetAktiv))
        vektor<-c(vektor,A2(i,pocetAktiv))
        vektor<-c(vektor,A3(i,pocetAktiv))
        matice<-matrix(vektor,nrow=(3*length(mojeData[,i]))+2,ncol=1+pocetAktiv+(length(mojeData[,i])*length(r
        matice<-rbind(matice,A4(i,pocetAktiv))
        return(matice)
}

##vypocet vektoru pravych stran
B<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-rep(0,length(mojeData[,i]))
        jednicky<-rep(1,(2*length(mojeData[,i]))+2)
        vektor<-c(vektor,jednicky)
        nuly<-rep(0,length(mojeData[,i])*length(mojeData[,i])+pocetAktiv+1)
        vektor<-c(vektor,nuly)
        return(vektor)
}

##vyroba vektoru smeru omezeni
smery<-function(i,pocetAktiv){
        vektor<-rep(">=",length(mojeData[,i]))
        rovnitka<-rep("=",(2*length(mojeData[,i]))+2)
        vektor<-c(vektor,rovnitka)
        vetsitka<-rep(">=",length(mojeData[,i])*length(mojeData[,i])+pocetAktiv+1)
        vektor<-c(vektor,vetsitka)
        return(vektor)
}

##vyhodnocovaci funkce
vyhodnoceni<-function(i,pocetAktiv){
        A<-A(i,pocetAktiv)
        smery<-smery(i,pocetAktiv)
        B<-B(i,pocetAktiv)

        vysledek<-lp("max",obj,A,smery,B)
        return(vysledek)
}

reseni<-vyhodnoceni(2,51)
reseni
```