

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE:

Typical continuous and integrable functions

autor práce: David Hruška

Obsah práce: Necht' X je Banachův prostor funkcí. V řadě případů nás zajímá otázka, zda v X existují funkce s určitou vlastností (\mathcal{V}), popřípadě nakolik je tato vlastnost typická v tom smyslu, že platí pro „velkou“ podmnožinu X . Klasický přístup k této otázce je skrz pojem kategorie: vlastnost \mathcal{V} prohlásíme za typickou, pokud její doplněk, tj. množinu $D = \{f \in X; f \text{ nemá vlastnost } (\mathcal{V})\}$ lze pokrýt spočetným systémem uzavřených množin, jejichž doplňky jsou husté v X . Z Bairovy věty pak plyne, že (\mathcal{V}) platí dokonce na husté G_δ podmnožině v X ; v některých případech je zajímavý (často i paradoxní) už i fakt, že funkce s vlastností (\mathcal{V}) vůbec v X existují.

Úvodní kapitola definuje základní pojmy a přináší i důkaz Bairovy věty. Ve druhé kapitole je dokázáno, že „typická“ (ve výše uvedeném smyslu) spojitá resp. Hölderovská funkce nemá derivaci v žádném bodě. Třetí kapitola se zabývá Luzinovou (N)-podmínkou a je zde dokázáno, že typická spojitá monotónní funkce tuto podmínku *nesplňuje*; speciálně není absolutně spojitá. V poslední čtvrté kapitole je ukázáno, že typická integrovatelná funkce není omezená (a tedy ani spojitá) v žádném bodě.

Hodnocení práce: Bairova věta, též s aplikací na konstrukci spojité funkce bez derivace, se zpravidla přednáší v základních kurzech analýzy. Předložená práce rozšiřuje tuto konstrukci na prostor Hölderovských funkcí. Hlavním přínosem práce je ovšem podle mě kapitola třetí, kde je Bairova věta použita k nalezení (a vlastně k důkazu typičnosti) spojitých monotónních funkcí, jež *nesplňují* Luzinovu (N)-podmínku. Celý postup je už hodně netriviální konstrukcí, užívající řady technik z teorie míry a reálných funkcí, a pro studenta bakalářského programu je to pěkný výsledek (ačkoliv patrně očekávaný a možná někde v literatuře i dohledatelný).

Zpracování je pečlivé a úplné; všechny úvahy (nakolik jsem dokázal posoudit) jsou správně odůvodněné, snad jen místy poněkud stručné (nejde o triviální čtení). Jak obsahem, tak zpracováním jde práce rozhodně výrazně nad rámec toho, co požadujeme od bakalářské práce a proto ji rozhodně doporučuji k obhajobě.

Drobnější připomínky a jeden dotaz:

1. strana 5, formule (2.1) a strana 9, formule (2.7) obsahuje dělení nulou
2. strana 6, formule (2.5) je dokazována obrázkem
3. na straně 23 je sedmý řádek zdola zbytečně zalomen
4. Dotaz: inkluze (3.8) mi dlouho nebyla jasná, než mi došlo, že je vlastně triviální, což vnuká otázku, zda nelze Luzinovu podmínku negovat silněji: typická spojitá monotónní funkce učiní (zhruba) polovinu celkového přírůstku na jisté nulové množině ...