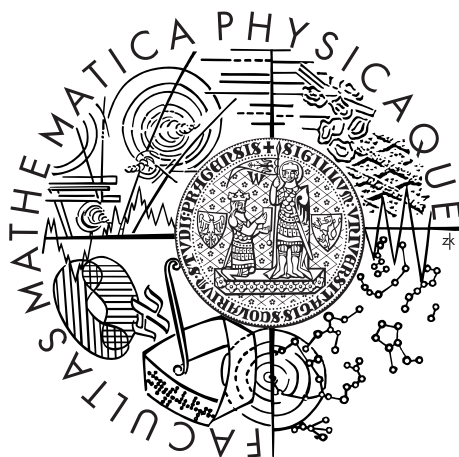


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Adam Vrátný

Studium prostoročasů typu Taub-NUT se zrychlením

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2016

Rád bych zde poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Jiřímu Podolskému, CSc., DSc. za jeho mimořádné pedagogické schopnosti, které mi otevřely cestu k oboru, který je mi blízký. Jeho připomínky a vysvětlení mi značně pomohly se v tématu zorientovat. Zároveň si velmi cením času, který mi věnoval.

Také bych rád poděkoval svým rodičům a prarodičům za jejich podporu při mém studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26. května 2016

Podpis autora

Název práce: Studium prostoročasů typu Taub-NUT se zrychlením

Autor: Adam Vrátný

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Tato práce se zabývá analýzou nedávné publikace autorů Brendy Chng, Roberta Manna a Cristiana Stelea, ve které našli nové urychlené černoděrové řešení s NUT parametrem. Ověřujeme vakuovost tohoto řešení, počítáme hlavní nulové směry a zjišťujeme algebraický typ tohoto prostoročasu. Dokazujeme, že prostoročas je algebraicky obecný, takže nemůže být obsažen v Plebaňského–Demiaňského třídě typu D. Odvozujeme také nový tvar této metriky, který umožňuje přirozené přechody na standardní tvary již známých metrik, konkrétně na C-metricku, Taub-NUT a Schwarzschildovu metricku.

Klíčová slova: zrychlený Taub-NUT, vakuové řešení, algebraický typ prostoročasu, C-metrika

Title: Study of accelerating Taub-NUT spacetimes

Author: Adam Vrátný

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In this work we investigate recent publication by Brenda Chng, Robert Mann and Cristian Stelea in which a new accelerating Taub-NUT black hole metric was found. We verify that it is indeed a vacuum solution of Einstein's field equations, we find its principal null directions, and determine the algebraical type of the spacetime. We prove that this spacetime is algebraically general, so that it can not be contained in the Plebański–Demiański type D class. We also derive a new form of this metric which is convenient for obtaining its special cases, namely the standard forms of C-metric, Taub-NUT metric, and Schwarzschild metric.

Keywords: accelerating Taub-NUT, vacuum solution, algebraic type of spacetime, C-metric

Obsah

Úvod	3
Konvence	4
1 Třídy metrik popisujících černé díry	5
1.1 Schwarzschildova metrika	5
1.2 C-metrika	6
1.3 Taub-NUT metrika	7
1.4 Plebaňského–Demiaňského třída metrik	8
1.5 Weylova třída metrik	13
1.5.1 Schwarzschildova metrika	13
1.5.2 Zipoyova–Voorhessova metrika	13
2 Algebraické typy prostoročasů	15
2.1 Ortonormální a nulová tetráda	15
2.2 Newmanovy–Penroseovy koeficienty	15
2.3 Určení algebraického typu	16
3 Shrnutí zkoumaného článku	17
3.1 Použité generační metody	17
3.1.1 Škálovací symetrie	17
3.1.2 Weylova metoda přidání náboje: $SL(2,R)$ transformace	17
3.2 Odvození řešení	19
4 Ověření vakuovosti prostoročasu	21
4.1 Metrika	21
4.2 Christoffelovy symboly	22
4.3 Riemannův a Ricciho tenzor	23
5 Určení algebraického typu prostoročasu	27
5.1 Volba nulové tetrády	27
5.2 Vyčíslení Weylových skalárů Ψ_A	30
5.2.1 Výpočet Ψ_0	31
5.2.2 Výpočet Ψ_1	35
5.2.3 Výpočet Ψ_2	37
5.2.4 Výpočet Ψ_3 a Ψ_4	38
5.2.5 Shrnutí	39
5.3 Skalární invarianty I a J	39
5.4 Hlavní nulové směry	40
6 Nový tvar metriky	45
6.1 Hledání NUT parametru	45
6.2 Fyzikální interpretace parametru Δ	48
6.3 Nový tvar metriky	50
6.4 Přejít k C-metrice	55
6.5 Přejít k Taub-NUT metrice	56

Závěr	57
Seznam použité literatury	59
Dodatky	61
D1: Weylova metoda přidání náboje	61
Kaluzova–Kleinova redukce	61
Využití $SL(2, \mathbb{R})$ symetrie redukovaného Lagrangiánu	61
D2: Složky Riemannova tenzoru	63
Přílohy	71

Úvod

V listopadu 2015 tomu bylo 100 let, co Albert Einstein předstoupil před Pruskou akademii věd a prezentoval rovnice gravitačního pole, čímž završil budování své teorie gravitace, pro kterou se ujal název obecná teorie relativity [1], [2].

Do té doby byla všeobecně přijímanou teorií gravitace Newtonova teorie z roku 1687, která se však přes své úspěchy v nebeské mechanice začala počátkem 20. století potýkat s řadou principiálních problémů. Změna gravitačního potenciálu zdroje například měla okamžitý vliv na celý systém, a tudíž byla kvůli absenci maximální možné rychlosti šíření nerelativistická. Pozorovací astronomie navíc odhalila jiný nesoulad – anomální stáčení perihelia Merkuru, byť o nesmírně malou hodnotu $43''$ za 100 let [3].

Obecná teorie relativity dokázala tyto problémy vyřešit. Byla to právě shoda důsledků obecné relativity s experimentálně naměřenou hodnotou stáčení perihelia, jež přesvědčila Einsteina o správnosti jeho nové geometrické teorie. Obecná relativita však dokázala předpovědět i jevy zcela nové a nečekané – černé díry, gravitační čočky, expanzi vesmíru nebo gravitační vlny, jejichž první přímá detekce byla úspěšně provedena teprve před pár měsíci [4]. K pochopení těchto nových fenoménů je zásadní studium různých fyzikálních aspektů přesných řešení Einsteinových rovnic.

V této práci se budeme zabývat jedním konkrétním problémem, jímž je fyzikální a geometrická interpretace nového přesného řešení Einsteinových vakuových rovnic z roku 2006. Toto řešení bylo publikováno v článku [5] a jeho autoři Brenda Chng, Robert Mann a Cristian Stelea v něm tvrdí, že popisuje urychlenou černou díru s tzv. NUT rotačním parametrem. Naším cílem je tuto interpretaci ověřit a následně příslušný prostoročas podrobněji prostudovat.

Jednou z klíčových metod této analýzy bude nalezení složek Weylova tenzoru Ψ_A , jež určují algebraické typy prostoročasu. Dále nás bude zajímat jeho fyzikální interpretace. Tu odůvodníme zejména speciálními případy řešení, které vedou na tvary metrik s dobře známou interpretací, konkrétně C-metrikou, jež popisuje nerotující zrychlenou černou díru, a Taub-NUT metrikou, která naopak popisuje nezrychlenou černou díru s twistem.

Konvence

V celé práci používáme Einsteinovu sumační konvenci – vyskytují-li se ve výrazu dva stejné indexy, pak se přes tyto indexy sčítá, tedy například

$$R_{\rho}{}^{\sigma} = g_{\rho\mu}R^{\mu\sigma} = \sum_{\mu=0}^3 g_{\rho\mu}R^{\mu\sigma}, \quad R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}. \quad (1)$$

V teorii vystupuje metrický tenzor $g_{\mu\nu}$, který je základním objektem diferenciální geometrie. Metrický tenzor se využívá ke zvedání a snižování indexů tenzorů a zavádí se pomocí něj skalární součin. My jej v této práci používáme se signaturou ve tvaru $(-+++)$.

V konvencích obecné relativity platí, že řecká písmenka v indexech mohou nabývat hodnot 0, 1, 2 a 3, přičemž 0 odpovídá časové souřadnici a hodnoty 1, 2 a 3 odpovídají třem prostorovým souřadnicím.

Dále definujeme Christoffelovy symboly 1. a 2. druhu, které vyjadřují vztah (konexi) mezi tečnými prostory variety, určené metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}), \quad (2)$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\nu\sigma}, \quad (3)$$

kde čárka značí parciální derivaci podle proměnné uvedené za ní, tedy

$$g_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}. \quad (4)$$

Pomocí těchto objektů jsou definovány klíčové tenzory obecné relativity:

$$\begin{aligned} \text{Riemannův tenzor: } R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} &= \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma}, \\ \text{Ricciho tenzor: } R_{\mu\nu} &= R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}, \\ \text{Ricciho skalár: } R &= R^{\alpha}{}_{\alpha}, \\ \text{Weylův tenzor: } C_{\rho\mu\sigma\nu} &= R_{\rho\mu\sigma\nu} + \frac{1}{6}R(g_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(R_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} + R_{\rho\nu}g_{\mu\sigma} - R_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (5)$$

V celé práci navíc používáme geometrizované jednotky:

$$c = 1, \quad G = 1, \quad (6)$$

kde c je rychlost světla a G gravitační konstanta.

1. Třídý metrik popisujících černé díry

Dne 25. listopadu 1915 byly před Pruskou akademií věd poprvé představeny Einsteinovy rovnice obecné teorie relativity

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

v té době ještě bez kosmologické konstanty Λ , která byla přidána až v Einsteinově „kosmologickém“ článku [6] z roku 1917. My však budeme v celé práci počítat s $\Lambda = 0$. Během 20. století bylo pak nalezeno mnoho přesných řešení těchto rovnic jak ve vakuu ($T_{\mu\nu} = 0$), tak v přítomnosti různých forem hmoty (dokonalá tekutina, čisté záření, elektromagnetické pole atd.).

Mnoho z těchto přesných řešení Einsteinových rovnic popisuje prostoročasy, které mají nejasnou fyzikální interpretaci anebo jsou z praktického pohledu ne-realistické, ale některé třídy metrik se ukázaly být velmi důležité pro astronomii a kosmologii. Sem patří především přesné prostoročasy s černými dírami, kosmologické modely Friedmannova typu a explicitní příklady gravitačních vln.

Uvedeme zde jen pár příkladů přesných řešení Einsteinových rovnic popisujících černé díry, které jsou pro tuto práci klíčové. Informace jsem čerpal převážně z monografie [7].

1.1 Schwarzschildova metrika

Nejznámější netriviální řešení Einsteinových rovnic ve vakuu s $\Lambda = 0$ je bezpochyby Schwarzschildova metrika (triviálním řešením je Minkowského metrika speciální teorie relativity). Byla objevena Karlem Schwarzschildem již v lednu 1916, pouhé dva měsíce po představení rovnic obecné teorie relativity. Sám Einstein k tomu poznamenal [3]: „Nečekal bych, že lze přesné řešení problému zformulovat tak jednoduše.“

Schwarzschildova metrika se dnes obvykle zapisuje ve sféricky symetrickém tvaru

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.2)$$

kde $r > 0$ a m je parametr hmotnosti zdroje.

Tato metrika přechází pro $m = 0$ nebo pro $r \rightarrow +\infty$ na sférický tvar Minkowského metriky – tj. r lze interpretovat jako radiální souřadnici. Zvolíme-li vhodnou nulovou tetradu,¹ získáme jedinou nenulovou složku Weylova (zde Riemannova) tenzoru

$$\Psi_2 = -\frac{m}{r^3}. \quad (1.3)$$

Z této skalární funkce je vidět, že metrika je algebraického typu D. Vidíme také, že pro $m \neq 0$ se vyskytuje v $r = 0$ křivostní singularita.

¹Příslušnou tetradu lze nalézt v [7].

Z metriky je zřejmá i další singularita pro $r = 2m$. Nejedná se však o křivostní singularitu, ale pouze o souřadnicovou singularitu (horizont). Navíc pro $0 < r < 2m$ (uvnitř černé díry) se souřadnice r stává časupodobnou a souřadnice t prostorupodobnou.

Geodetiky této metriky se pro m malé nebo pro r velké blíží trajektoriím těles v Newtonovském gravitačním potenciálu sféricky symetrického tělesa s hmotností m . Proto je rozumné interpretovat parametr m jako hmotnost. Jedná se o vakuové řešení, a proto je hmotnost přisuzována singularitě, která je z této metriky „vyjmutá“. Pokud máme statický sféricky symetrický objekt hmotnosti m , lze metrikou popisovat časoprostor pro r ležící mimo objekt.

Navíc z tzv. Birkhoffova teoremu plyne, že se jedná o jediné vakuové sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic [8], což ještě více zvyšuje význam Schwarzschildova řešení.

Schwarzschildova metrika je učebnicový příklad přesného řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole. Přestože se jedná o relativně jednoduché řešení, je tato metrika důležitá díky její aplikaci v astronomii. Nejčastěji se spojuje s nerotujícími černými dírami, kde jsou relativistické efekty nezanedbatelné. Její studium bylo navíc klíčové pro objev dalších řešení.

1.2 C-metrika

C-metrika je označení pro zobecněnou verzi Schwarzschildovy metriky o parametr zrychlení. Její statická verze byla objevena Levi-Civitou v roce 1918 [9] a Wylem v roce 1919 [10] a byla takto označena Ehlerem a Kundtem v roce 1962, nicméně její základní vlastnosti byly diskutovány až o dekádu let později Kinnersleym, Walkerem [11] a Bonnozem [12].

Původní verze metriky byla později nahrazena přehlednější formou, která je i po výpočetní stránce výhodnější:

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x + \bar{y})^2} \left(-\bar{F}dt^2 + \frac{d\bar{y}^2}{\bar{F}} + \frac{dx^2}{\bar{G}} + \bar{G}d\varphi^2 \right), \quad (1.4)$$

kde $\bar{F}(\bar{y}) = (\bar{y}^2 - 1)(1 - 2mA\bar{y})$ a $\bar{G}(x) = (1 - x^2)(1 + 2mA x)$, přičemž na parametry m a A klademe podmínku $0 \leq 2mA < 1$. Navíc požadujeme, aby $x \in [-1, 1]$ a zároveň $x + \bar{y} > 0$.

Zde A značí parametr zrychlení a m hmotnost černé díry, kterou považujeme za kladnou. Pokud hmotnost vymizí, přechází metrika ve specifický urychlený tvar Minkowského prostoročasu (na základě čehož bylo A interpretováno jako zrychlení). Nicméně při limitním přechodu k nulovému zrychlení není postup tak přímočarý a musí se provést transformace souřadnic $x = -\cos\theta$, $\bar{y} = 1/(Ar)$ a $t = A\tau$, která vede na metriku ve tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - Ar \cos\theta)^2} \left(-Q(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{Q(r)} + \frac{r^2 d\theta^2}{P(\theta)} + P(\theta)r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right), \quad (1.5)$$

kde

$$P(\theta) = 1 - 2Am \cos\theta, \quad (1.6)$$

$$Q(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(1 - A^2 r^2). \quad (1.7)$$

Pro $A = 0$ přechází metrika (1.5) evidentně na Schwarzschildovu metriku (1.2).

Publikace [5], ze které tato práce vychází, pracuje s nepatrně jinou formou C-metricky z práce Honga a Tea [13] a pro náš případ k ní dospějeme z (1.4) triviální transformací $\bar{y} = -y$. Metrika tohoto tvaru C-metricky je pak

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2} \left(- (y^2 - 1)F(y)dt^2 + \frac{dy^2}{(y^2 - 1)F(y)} + \frac{dx^2}{(1 - x^2)F(x)} + (1 - x^2)F(x)d\varphi^2 \right), \quad (1.8)$$

kde $F(\xi) = (1 + 2mA\xi)$, přičemž veškeré vlastnosti této metricky zůstávají zachovány. Autoři článku [5] však pracují pouze s časupodobnou částí metricky, tedy kde $x \in [-1, 1]$ a $-\frac{1}{2mA} \leq y \leq -1$.²

Pro další práci je vhodné zmínit, že vzhledem k hlavní nulové tetradě vymizí všechny její skalární funkce Ψ_A až na Ψ_2 , která je rovna

$$\Psi_2 = -mA^3(x + \bar{y})^3, \quad (1.9)$$

resp. pro tvar metricky (1.8), se kterým budeme pracovat,

$$\Psi_2 = -mA^3(x - y)^3. \quad (1.10)$$

1.3 Taub-NUT metrika

Další zajímavá třída černoděrových řešení je dnes označována zkratkou Taub-NUT. Poprvé bylo toto vakuové řešení Einsteinových rovnic objeveno Taubem v roce 1951 [14], avšak v souřadnicích, které pokrývaly pouze nestacionární část prostoročasu. Jeho obecnější verze byla pak v roce 1963 objevena Newmanem, Tamburinem a Untim (z jejichž iniciál vznikl název NUT) [15].

Jedná se o zobecnění Schwarzschildovy metricky obsahující kromě hmotnosti m navíc dva dodatečné parametry – křivostní parametr ϵ (který se historicky vyskytoval již dříve) a parametr l , interpretovaný jako parametr specifické „rotace“. Později se však zjistilo, že tento prostoročas obsahuje singulární polostruny. Nedlouho nato Kerr objevuje slavné řešení, které dnes chápeme jako rotující černou díru [16] bez strunových patologií. O fyzikální interpretaci NUT parametru, jak se parametru l obvykle říká, se dodnes vedou diskuze.³

Taub-NUT metrika se pro $\epsilon = 1$ zapisuje ve standardním tvaru

$$ds^2 = -f(R)(d\bar{t} - 2l \cos \theta d\phi)^2 + \frac{dR^2}{f(R)} + (R^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.11)$$

kde

$$f(R) = \frac{R^2 - 2MR - l^2}{R^2 + l^2}, \quad (1.12)$$

²Důvodem k tomuto vyjmutí je postup při generování nového řešení, viz sekce 3.

³Jako příklad některých interpretací uveďme magnetický náboj anebo tzv. gravitomagnetický moment, viz např. [7].

respektive po transformaci $\bar{t} = t + 2l\phi$ ve tvaru

$$ds^2 = -f(R)(dt + 4l \sin^2 \frac{\theta}{2} d\phi)^2 + \frac{dR^2}{f(R)} + (R^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.13)$$

Při podrobnějším zkoumání této metriky zjistíme zvláštnost jejího globálního charakteru danou přítomností rotující polostruny. Její časová souřadnice není vždy t (potažmo \bar{t}), o té rozhoduje znaménko před kvadrátem diferenciálu souřadnice a to závisí na funkci $f(R)$. Tato funkce má vždy dva kořeny,

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 + l^2}, \quad (1.14)$$

vymežující Killingovy horizonty, které ohraničují v časoprostoru černoděrové oblasti s odlišnou časovou souřadnicí.

Podobně jako u Schwarzschildova řešení a C-metriky vymizí Weylovy skaláry Ψ_A vzhledem ke své nulové tetradě až na Ψ_2 , které je rovno

$$\Psi_2 = -\frac{M + il}{(R + il)^3}. \quad (1.15)$$

Všimněme si, že pro $R = 0$ a $l \neq 0$ nenalezneme ve složce Weylova tenzoru křivostní singularitu. To nám dává možnost rozšířit meze radiální souřadnice na $R \in (-\infty, +\infty)$. Nyní si však z (1.11), (1.13) všimněme, že pro $M \leq 0$ získám transformací $R \rightarrow -R$ původní metriku a lze tedy klást $M \geq 0$.

Pro $l = 0$ se metrika (1.13) redukuje na Schwarzschildovu metriku (1.2), a (1.15) přejde na (1.3) s identifikací $R = r$, $M = m$.

1.4 Plebaňského–Demiaňského třída metrik

Všechny výše zmíněné třídy metrik jsou vakuové prostoročasy algebraického typu D a popisují černou díru s různými parametry – hmotností m , zrychlením A a NUT parametrem l .

Je pozoruhodné, že existuje obecná třída elektrovakuových řešení algebraického typu D, která obsahuje všechny tyto parametry a navíc ještě 4 parametry – rotaci a , elektrický náboj e , magnetický náboj g a kosmologickou konstantu Λ . Tato metrika byla objevena Debeverem v roce 1971 [17], nicméně známější je její tvar, který pro $A = 1 = \omega$ publikovali Plebaňski s Demiaňskim roku 1976 [18]:

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - Apr)^2} \left[-\frac{Q(r)}{r^2 + \omega^2 p^2} (d\tau - \omega p^2 d\sigma)^2 + \frac{r^2 + \omega^2 p^2}{Q(r)} dr^2 + \frac{P(p)}{r^2 + \omega^2 p^2} (\omega d\tau + r^2 d\sigma)^2 + \frac{r^2 + \omega^2 p^2}{P(p)} dp^2 \right], \quad (1.16)$$

kde

$$P(p) = k + 2\omega^{-1}np - \epsilon p^2 + 2Amp^3 - [A^2(\omega^2 k + e^2 + g^2) + \omega^2 \Lambda/3]p^4, \quad (1.17)$$

$$Q(r) = (\omega^2 k + e^2 + g^2) - 2mr + \epsilon r^2 - 2A\omega^{-1}nr^3 - (A^2 k + \Lambda/3)r^4. \quad (1.18)$$

V tomto tvaru metriky máme celkem 9 parametrů, přičemž dva z nich mohou být zvoleny libovolně. Vyjma parametrů Λ , e a g nemusí mít ostatní parametry

vždy přesně fyzikální význam, který bychom jim intuitivně připisovali. Jejich jednoznačný význam bude zřejmý až po úpravě na jiný tvar.

Přirozená nulová tetráda metriky (1.16) je

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \frac{1 - Apr}{\sqrt{2(r^2 + \omega^2 p^2)}} \left[\frac{1}{\sqrt{Q(r)}} (r^2 \partial_\tau - \omega \partial_\sigma) - \sqrt{Q(r)} \partial_r \right], \\ \mathbf{l} &= \frac{1 - Apr}{\sqrt{2(r^2 + \omega^2 p^2)}} \left[\frac{1}{\sqrt{Q(r)}} (r^2 \partial_\tau - \omega \partial_\sigma) + \sqrt{Q(r)} \partial_r \right], \\ \mathbf{m} &= \frac{1 - Apr}{\sqrt{2(r^2 + \omega^2 p^2)}} \left[-\frac{1}{\sqrt{P(p)}} (\omega p^2 \partial_\tau + \partial_\sigma) + i \sqrt{P(p)} \partial_p \right].\end{aligned}\quad (1.19)$$

Vzhledem k této nulové tetrádě lze spočítat skaláry Ψ_A , kde stejně jako v předešlých případech vyjde nenulová pouze složka Ψ_2 :

$$\Psi_2 = -(m + in) \left(\frac{1 - Apr}{r + i\omega p} \right)^3 + (e^2 + g^2) \left(\frac{1 - Apr}{r + i\omega p} \right)^3 \frac{1 + Apr}{r - i\omega p}. \quad (1.20)$$

Prostorčas je tedy také algebraického typu D.

Ukazuje se však výhodnější metriku (1.16) přeskálovat [19], [20] a upravit do tvaru, kde jsou přímo vidět přechody do speciálních dříve známých metrik. Provedeme transformaci

$$p = \frac{l}{\omega} + \frac{a}{\omega} \tilde{p}, \quad \tau = t - \frac{(l + a)^2}{a} \varphi, \quad \sigma = -\frac{\omega}{a} \varphi, \quad (1.21)$$

kde a a l jsou nové libovolné parametry, které se později ukáží být snadněji interpretovatelné. Tato transformace převádí metriku (1.16) na tvar [7]

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{1}{\Omega^2} \left[-\frac{Q(r)}{\rho^2} \left[dt - (a(1 - \tilde{p}^2) + 2l(1 - \tilde{p})) d\varphi \right]^2 + \frac{\rho^2}{Q(r)} dr^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho^2}{\tilde{P}(\tilde{p})} d\tilde{p}^2 + \frac{\tilde{P}(\tilde{p})}{\rho^2} \left[a dt - (r^2 + (a + l)^2) d\varphi \right]^2 \right],\end{aligned}\quad (1.22)$$

kde

$$\Omega = 1 - \frac{A}{\omega} (l + a\tilde{p})r, \quad (1.23)$$

$$\rho^2 = r^2 + (l + a\tilde{p})^2, \quad (1.24)$$

$$\tilde{P}(\tilde{p}) = a_0 + a_1 \tilde{p} + a_2 \tilde{p}^2 + a_3 \tilde{p}^3 + a_4 \tilde{p}^4, \quad (1.25)$$

$$Q(r) = (\omega^2 k + e^2 + g^2) - 2mr + \epsilon r^2 - 2A\omega^{-1}nr^3 - (A^2 k + \Lambda/3)r^4, \quad (1.26)$$

přičemž

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{a^2} \left(\omega^2 k + 2nl - \epsilon l^2 + 2A \frac{l^3}{\omega} m - \left[\frac{A^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right] l^4 \right), \\
a_1 &= \frac{2}{a} \left(n - \epsilon l + 3A \frac{l^2}{\omega} m - 2 \left[\frac{A^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right] l^3 \right), \\
a_2 &= -\epsilon + 6A \frac{l}{\omega} m - 6 \left[\frac{A^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right] l^2, \\
a_3 &= 2A \frac{a}{\omega} m - 4 \left[\frac{A^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right] al, \\
a_4 &= - \left[\frac{A^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right] a^2.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Abychom zachovali Minkowského signaturu metriky (1.22), musí být funkce $\tilde{P}(\tilde{p})$ kladná. Pokud tato funkce nemá žádné kořeny, potom je kladná pro $\tilde{p} \in (-\infty, \infty)$: Řešení je zobecnění tzv. A-II metrik, kterým se však v této práci nevěnujeme. Pokud má tato funkce alespoň dva rozdílné kořeny, lze je z volnosti parametrů nastavit v $\tilde{p} = \pm 1$. Pak lze přepsat (1.25) na

$$\tilde{P}(\tilde{p}) = (1 - \tilde{p}^2)(a_0 - a_3 \tilde{p} - a_4 \tilde{p}^2), \tag{1.28}$$

přičemž porovnáním s (1.25) získáme podmínky $a_1 = -a_3$ a $a_2 = -a_0 - a_4$, které nám z (1.27) dají 2 lineární vztahy:

$$\epsilon = \frac{\omega^2 k}{a^2 - l^2} + 4A \frac{l}{\omega} m - (a^2 + 3l^2) \left[\frac{A^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right], \tag{1.29}$$

$$n = \frac{\omega^2 kl}{a^2 - l^2} - A \frac{(a^2 - l^2)}{\omega} m + (a^2 - l^2) l \left[\frac{A^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right]. \tag{1.30}$$

Po dosazení těchto vztahů do a_0 z (1.27) navíc

$$\left(\frac{\omega^2}{a^2 - l^2} + 3A^2 l^2 \right) k = a_0 + 2A \frac{l}{\omega} m - 3A^2 \frac{l^2}{\omega^2} (e^2 + g^2) - l^2 \Lambda. \tag{1.31}$$

Nás bude zajímat pouze případ $a_0 = 1$ a díky tomuto omezení může být $\tilde{P}(\tilde{p})$ kladný pouze pro $\tilde{p} \in [-1, 1]$. Zvolíme tedy přirozenou substituci $\tilde{p} = \cos \theta$, kde $\theta \in [0, \pi]$. Tato restrikce převede metriku (1.22) na tvar popisující pouze zobecněné černé díry – třídy metrik uvedených výše, které jsou obohaceny o další parametry:⁴

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{\Omega^2} \left[- \frac{Q(r)}{\rho^2} \left[dt - (a \sin^2 \theta + 4l \sin^2 \frac{\theta}{2}) d\varphi \right]^2 + \frac{\rho^2}{Q(r)} dr^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho^2}{\mathcal{P}(\theta)} d\theta^2 + \frac{\mathcal{P}(\theta)}{\rho^2} \sin^2 \theta \left[a dt - (r^2 + (a + l)^2) d\varphi \right]^2 \right],
\end{aligned} \tag{1.32}$$

kde

$$\mathcal{P}(\theta) \equiv \sin^2 \theta \tilde{P}(\cos \theta) = 1 - a_3 \cos \theta - a_4 \cos^2 \theta. \tag{1.33}$$

⁴Podrobný rozbor všech řešení lze najít v [7].

Tím se dostáváme ke klíčovému poznatku celé této sekce. Jak bylo ukázáno v [19], *neexistuje podtřída Plebaňského–Demiaňského třídy řešení, která by popisovala nerotující ($a = 0$) zrychlenou černou díru s parametrem NUT*. Zároveň pro jednoduchost klademe $e = 0$, $g = 0$ a $\Lambda = 0$. Pro takovou kombinaci fyzikálních parametrů dostáváme z (1.23)–(1.26) a z (1.29)–(1.31) výrazy

$$\begin{aligned}
\Omega &= 1 - \frac{A}{\omega}lr, \\
\rho^2 &= r^2 + l^2, \\
\mathcal{P}(\theta) &= 1, \\
Q(r) &= \omega^2k - 2mr + \epsilon r^2 - 2A\frac{n}{\omega}r^3 - A^2kr^4 \\
&= \left[\omega^2k \left(1 + 2\frac{Al}{\omega}r \right) - 2mr - \frac{\omega^2k}{l^2}r^2 \right] \left(1 - \frac{Al}{\omega}r \right)^2, \\
\epsilon &= -\frac{\omega^2k}{l^2} + 4A\frac{l}{\omega}m - 3l^2A^2k, \\
n &= -\frac{\omega^2k}{l} + \frac{l^2A}{\omega}m - l^3A^2k, \\
\left(-\frac{\omega^2}{l^2} + 3A^2l^2 \right)k &= 1 + 2A\frac{l}{\omega}m,
\end{aligned} \tag{1.34}$$

kde jsme zároveň faktorizovali $Q(r)$.

Parametr ω lze zvolit libovolně, je-li alespoň jeden z parametrů A a l nenulový, což předpokládáme. Z této faktorizace se nyní jeví příhodné položit $\omega = l$. Soustava vztahů (1.34) se následně ještě zjednoduší na

$$\begin{aligned}
\Omega &= 1 - Ar, \\
\rho^2 &= r^2 + l^2, \\
\mathcal{P}(\theta) &= 1, \\
Q(r) &= (kl^2(1 + 2Ar) - 2mr - kr^2)(1 - Ar)^2, \\
k &= \frac{1 + 2Am}{3A^2l^2 - 1}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Metriku (1.32) lze nyní pomocí transformace

$$\begin{aligned}
r &= \frac{1}{\sqrt{1 - A^2L^2}} \left(\frac{\sqrt{1 - A^2L^2} \mathcal{R} - AL^2}{A\mathcal{R} + \sqrt{1 - A^2L^2}} \right), \\
t &= \frac{T}{\sqrt{1 - A^2L^2}}, \\
l &= \frac{L}{\sqrt{1 - A^2L^2}}
\end{aligned} \tag{1.36}$$

přepsat na tvar

$$ds^2 = -f(\mathcal{R}) \left(dT - 4L \sin^2 \frac{\theta}{2} d\phi \right)^2 + \frac{d\mathcal{R}^2}{f(\mathcal{R})} + (\mathcal{R}^2 + L^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{1.37}$$

přičemž

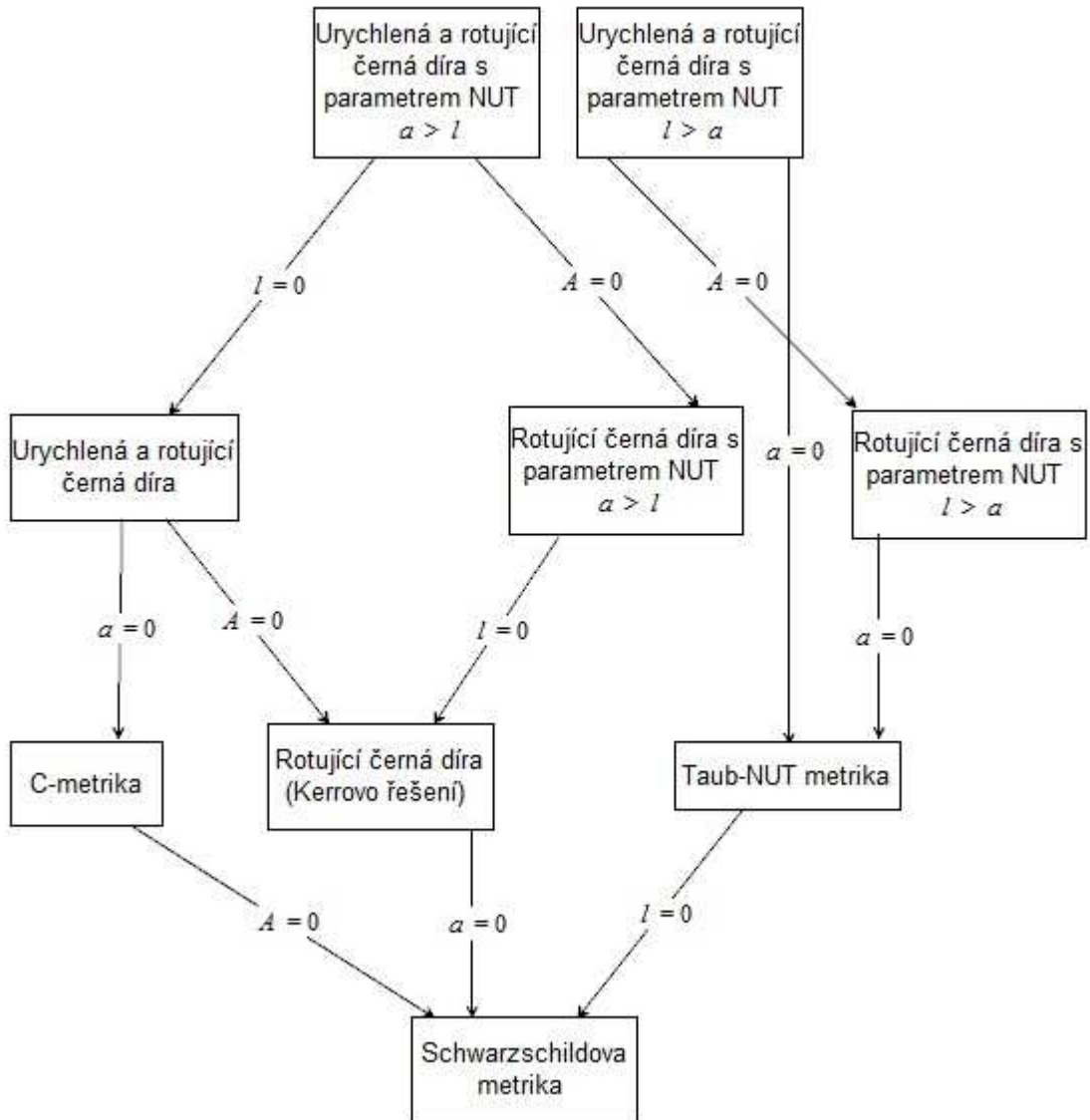
$$f(\mathcal{R}) = \frac{\mathcal{R}^2 - 2\mathcal{M}\mathcal{R} - L^2}{\mathcal{R}^2 + L^2}, \tag{1.38}$$

kde

$$\mathcal{M} = \frac{m + (3 - 4A^2L^2)AL^2}{\sqrt{1 - A^2L^2}(1 - 4A^2L^2)}. \quad (1.39)$$

Tato metrika zjevně popisuje stejný prostoročas jako metrika (1.13),⁵ ačkoliv jsme parametr zrychlení A „nevypnuli“. To nás vede k závěru, že neexistuje žádný černoděrový prostoročas Plebaňského–Demiaňského třídy metrik, který by popisoval nerotující zrychlenou černou díru s parametrem NUT.

Jednotlivé přechody jsou potom znázorněny na tomto obrázku:



Obrázek 1.1: Schéma různých podtříd Plebaňského–Demiaňského rodiny černoděrových prostoročasů. Jsou-li různé parametry položeny rovny nule, redukuje je na známé typy jednodušších metrik.

⁵Liší se ve znaménku NUT parametru. Při přechodu však ke změně směru této specifické rotace nedochází, neboť při porovnání výchozí metriky (1.32) pro $a = 0$ vidíme, že je i zde opačně orientované l .

1.5 Weylova třída metrik

Třída těchto řešení byla nalezena v rané době obecné relativity Wylem (1917) a Levi-Civitou (1918). Jedná se o statické axiálně symetrické prostoročasy. My zde uvedeme pouze vakuové řešení bez kosmologické konstanty.⁶ To lze zapsat ve tvaru

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (1.40)$$

kde U a γ závisí na souřadnicích ρ a z . Zpravidla se uvažuje $t \in (-\infty, \infty)$, $\rho \in [0, \infty)$, $z \in (-\infty, \infty)$ a $\phi \in [0, 2\pi)$.

Z vakuových Einsteinových rovnic plyne pro (1.40) Laplaceova rovnice $\Delta U = 0$, kde Δ je laplacián v cylindrických souřadnicích (ρ, ϕ, z) třírozměrného Euklidova prostoru, tj.

$$\Delta U = U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{,\rho} + U_{,zz}. \quad (1.41)$$

Získáme-li funkci U , lze poté integrovat γ pomocí vztahů

$$\gamma_{,\rho} = \rho (U_{,\rho}^2 - U_{,z}^2), \quad \gamma_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z}. \quad (1.42)$$

Tato třída řešení byla v historii velmi užitečná při generování nových matematických řešení, neboť rovnice $\Delta U = 0$ je lineární a velmi dobře prozkoumaná například v kontextu elektrostatiky. Má ale nevýhodu v nesnadné fyzikální interpretaci funkcí U a γ . Pro nás však bude klíčová jen pro generování jiných řešení.

1.5.1 Schwarzschildova metrika

Funkce U má svojí analogii v klasické newtonovské fyzice. Pokud totiž provedeme lineární aproximaci (1.40), zjistíme, že $g_{tt} \sim -1 - 2U$ a zároveň U splňuje Laplaceovu rovnici. Je tedy rozumné dávat U do souvislosti s gravitačním potenciálem.

Tuto analogii lze použít u Schwarzschildovy metriky ve Weylově tvaru, kde pro (1.40) mají funkce U a γ explicitní tvar

$$e^{2U} = \frac{R_+ + R_- - 2m}{R_+ + R_- + 2m}, \quad e^{2\gamma} = \frac{(R_+ + R_-)^2 - 4m^2}{4R_+ R_-} \quad (1.43)$$

a kde $R_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm m)^2$. Toto U lze formálně interpretovat coby gravitační potenciál „tyčky konečné délky“ umístěné na ose symetrie $\rho = 0$, jejíž hmotnost na jednotku délky je $1/2$.

1.5.2 Zipoyova–Voorhessova metrika

Zipoyova–Voorhessova třída řešení je zobecnění Schwarzschildovy metriky v analogii s U . Hmotnost „tyčky“ vztahovaná na jednotku délky může nyní nabývat obecných hodnot σ . Tato metrika tedy má tvar (1.40), přičemž

$$e^{2U} = \left(\frac{R_+ + R_- - 2L}{R_+ + R_- + 2L} \right)^{m/L}, \quad e^{2\gamma} = \left(\frac{(R_+ + R_-)^2 - 4L^2}{4R_+ R_-} \right)^{m^2/L^2}, \quad (1.44)$$

⁶Obecnou třídu řešení lze nalézt v [7].

kde $R_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm L)^2$ a $2L$ značí délku „tyčky“. Tato metrika je tedy popsána dvěma parametry: hmotností m a tzv. deformačním parametrem $\delta_{ZV} = 2\sigma = m/L$. Pro $\delta_{ZV} = 1 \Leftrightarrow m = L$ evidentně dostáváme Schwarzschildovo řešení.

Ve sferoidálních souřadnicích x, y definovanými vztahy

$$\rho = L\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}, \quad z = Lxy \quad (1.45)$$

můžeme vyjádřit

$$e^{2U} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\delta_{ZV}}, \quad e^{2\gamma} = \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right)^{\delta_{ZV}^2}, \quad (1.46)$$

přičemž metrika pak má tvar

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right) + R^2 d\phi^2, \quad (1.47)$$

kde

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &= L^2(x+1)^{\delta_{ZV}(\delta_{ZV}+1)}(x-1)^{\delta_{ZV}(\delta_{ZV}-1)}(x^2-y^2)^{1-\delta_{ZV}^2}, \\ R^2 &= L^2(x+1)^{\delta_{ZV}+1}(x-1)^{1-\delta_{ZV}}(1-y^2). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Samozřejmě, pro volbu $\delta_{ZV} = 1$ se metrika redukuje na tvar pro Schwarzschildovo řešení.

2. Algebraické typy prostoročasů

Základními matematickými objekty obecné relativity jsou tenzory křivosti, které jsou charakteristické svými transformačními vlastnostmi. Tyto vlastnosti zaručují, že se tenzorové rovnice chovají kovariantně ke změně souřadnic (zachovávají si svůj tenzorový charakter). To nám dává volnost při volbě souřadnic.

Tenzory mohou být často velmi složité objekty a ukazuje se výhodné studovat jejich vlastnosti promítnuté do vhodně zvolených směrů. Zde využijeme volnosti při volbě souřadnic a zavedeme dvě výhodné báze – ortonormální a nulovou bázi (tetradu).

2.1 Ortonormální a nulová tetradá

Ortonormální báze sestává ze čtveřice normovaných vektorů $(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, které jsou na sebe vzájemně kolmé. Jejich metrický tenzor je s přihlédnutím ke konvenci signatury roven $diag(-1, 1, 1, 1)$.

Z této tetrady je přímočaré zavést odpovídající nulovou tetradu $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ ve tvaru $\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{z})$, $\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} - \mathbf{z})$, $\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - i\mathbf{y})$ a $\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$. Z vlastností ortonormální báze plyne nulovost těchto vektorů, což odůvodňuje označení nulové tetrady. Metrický tenzor má v nulové tetradě tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Nulová tetradá však není určena jednoznačně. Máme-li jednu nulovou tetradu, lze všechny ostatní získat pomocí kombinace Lorentzových transformací

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad \mathbf{l}' = \mathbf{l} + L\bar{\mathbf{m}} + \bar{L}\mathbf{m} + L\bar{L}\mathbf{k}, \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} + L\mathbf{k}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + K\bar{\mathbf{m}} + \bar{K}\mathbf{m} + K\bar{K}\mathbf{l}, \quad \mathbf{l}' = \mathbf{l}, \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} + K\mathbf{l}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{k}' = B\mathbf{k}, \quad \mathbf{l}' = B^{-1}\mathbf{l}, \quad \mathbf{m}' = e^{i\phi}\mathbf{m}, \quad (2.4)$$

kde K a L jsou libovolná komplexní čísla a B a ϕ libovolná reálná čísla, tedy celkem 6 reálných parametrů. Transformace (2.2)–(2.4) interpretujeme coby nulové rotace s pevným \mathbf{k} , s pevným \mathbf{l} , boost a prostorovou rotaci.

2.2 Newmanovy–Penroseovy koeficienty

Pro algebraickou charakterizaci prostoročasu používáme Weylův tenzor (5), který je bezstopovou částí Riemannova tenzoru křivosti. Weylův tenzor má celkem 10 nezávislých komponent, které lze zakódovat do pěti komplexních skalárních funkcí promítnutím do nulové tetrady

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\alpha m^\beta k^\gamma m^\delta, \\ \Psi_1 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\alpha l^\beta k^\gamma m^\delta, \\ \Psi_2 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\alpha m^\beta \bar{m}^\gamma l^\delta, \\ \Psi_3 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha k^\beta l^\gamma \bar{m}^\delta, \\ \Psi_4 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha \bar{m}^\beta l^\gamma \bar{m}^\delta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde \mathbf{k} , \mathbf{l} , \mathbf{m} a $\bar{\mathbf{m}}$ je zvolená nulová tetráda. Koeficienty Ψ_A nazýváme složky Weylova tenzoru (někdy též *Newmanovy–Penroseovy koeficienty*).

Tyto koeficienty však nejsou jednoznačné, neboť máme celou třídu nulových tetrad spojených Lorentzovými transformacemi. Lze však hledat přednostní tetradu, která nejvíce zjednoduší tvar koeficientů. Zejména je klíčové hledat \mathbf{k}' takové, pro nějž platí $\Psi'_0 = 0$. Takový nulový vektor \mathbf{k}' pak určuje takzvaný *hlavní nulový směr* (*principal null direction*) Weylova tenzoru.

Ten můžeme nalézt transformace (2.3), při kterém máme fixní \mathbf{l}' a hledáme vhodné \mathbf{k}' . Weylův tenzor se potom transformuje jako¹

$$\Psi_0 + 4K\Psi_1 + 6K^2\Psi_2 + 4K^3\Psi_3 + K^4\Psi_4 = \Psi'_0 = 0, \quad (2.6)$$

což je algebraická rovnice 4. řádu v K . Proto obecně existují 4 hlavní nulové směry.

2.3 Určení algebraického typu

V závislosti na počtu a násobnosti různých kořenů K rovnice (2.6) (a tedy hlavních nulových směrů) rozlišujeme tzv. *algebraické typy prostoročasů*:

- typ I : 4 různé kořeny
- typ II : 1 kořen s násobností 2, a 2 další rozdílné kořeny
- typ D : 2 odlišné kořeny s násobností 2
- typ III : 1 kořen s násobností 3, a 1 další rozdílný kořen
- typ N : 1 kořen s násobností 4
- typ O : konformně plochý prostoročas, kterému odpovídá $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$

Algebraický typ prostoročasů lze určit ze skalárních invariantů I a J a lze se tak vyhnout počítání kořenů kvartické rovnice (2.6):

$$I = \Psi_0\Psi_4 - 4\Psi_1\Psi_3 + 3\Psi_2^2, \quad (2.7)$$

$$J = \begin{vmatrix} \Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Pokud se nejedná o algebraický typ I, potom nutně $I^3 = 27J^2$. Je-li toto splněno a zároveň I a J vymizí, potom se jedná o algebraický typ III, nebo N. V opačném případě se jedná o typ D, nebo II. Pokud navíc \mathbf{k} je hlavní nulový směr a platí $3\Psi_2\Psi_4 = 2\Psi_3^2$, jedná se o typ D (v opačném případě se jedná o typ II). Postačující podmínkou pro algebraický typ D je i splnění rovnic $\Psi_1 = 0 = \Psi_3$ a zároveň $\Psi_0\Psi_4 = 9\Psi_2^2$. Více podrobností lze najít v [8].

¹V monografii [7] se uvádí kvartická rovnice pro inverzní transformaci. Vzhledem k tomu, že však dále počítáme s nulovými směry \mathbf{k} , \mathbf{l} , \mathbf{m} a $\bar{\mathbf{m}}$, které neodpovídají hlavním nulovým směřům, bylo příhodné rovnici upravit.

3. Shrnutí zkoumaného článku

Hlavním cílem této práce je analýza publikace [5] a fyzikální interpretace v ní získaného řešení Einsteinových rovnic. V této části bych rád shrnul postup a výsledky tohoto článku, jejichž pochopení je pro předkládanou práci klíčové.

Obsahem [5] je nalezení nového vakuového řešení ve 4 dimenzích, které se povedlo získat využitím $SL(2, \mathbb{R})$ symetrie redukovaného Lagrangiánu. Tato metoda se aplikovala na zrychlenou verzi Zipoyova–Voorheesova řešení a nagenerovala řešení, které autoři interpretují jako zrychlenou verzi Zipoyovy–Voorheesovy metriky zobecněnou o NUT parametr (řešení s euklidovskou signaturou se v této práci nevěnujeme). Mimoto autoři našli řešení, které interpretují jako nabitou a zrychlenou verzi Zipoyova–Voorheesova řešení.

Jak je známo (viz sekce 1.4 a obrázek 1.1), neexistuje podtřída Plebaňského–Demiaňského metrik, která by popisovala nerotující zrychlenou černou díru s NUT parametrem. V této práci se budeme zabývat studiem nově nalezené metriky [5], která tyto vlastnosti má. Ukážeme, že toto řešení není podtřídou Plebaňského–Demiaňského třídy metrik.

3.1 Použité generační metody

Hledání přesných řešení Einsteinových rovnic (1.1) je vysoce netriviální matematický problém. Jedná se o soustavu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Metody jejich získávání se nazývají generační metody. V článku [5] se pracuje se dvěma odlišnými metodami.

3.1.1 Škálovací symetrie

První z těchto generačních metod vychází z Weylova tvaru metriky (1.40), přičemž se využívá klíčového pozorování pro funkce U a γ , totiž že splňují vakuové rovnice (1.42) :

$$\gamma_{,\rho} = \rho(U_{,\rho}^2 - U_{,z}^2), \quad \gamma_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z}. \quad (3.1)$$

Lze snadno nahlédnout, že pokud (U, γ) řeší tyto rovnice, potom je řeší i nová funkce $(\beta U, \beta^2 \gamma)$, kde β je libovolná konstanta.

Pokud tedy máme řešení ve Weylově tvaru, je možné touto transformací nalézt řešení jiné. Jako příklad lze uvést provedení transformace na Weylův tvar Schwarzschildovy metriky (1.40), (1.43). Metrika, kterou touto transformací získáme, je právě Zipoyova–Voorheesova metrika (1.40), (1.44) s konstantou $\beta = \delta_{zV}$.

3.1.2 Weylova metoda přidání náboje: $SL(2, \mathbb{R})$ transformace

Druhá generační metoda je složena ze 3 kroků. V prvním kroku vycházíme ze statického axiálně symetrického vakuového řešení (1.40)

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} ds_3^2, \quad (3.2)$$

na kterém provedeme Kaluzovu–Kleinovu redukci dimenze a aplikujeme $SL(2, \mathbb{R})$ transformaci na jeho redukovaný Lagrangián (více v dodatku D1). Získáme tak elektricky nabitě axiálně symetrické řešení:

$$ds^2 = -e^{2V} dt^2 + e^{-2V} ds_3^2, \quad (3.3)$$

pro něž platí

$$e^{2V} = e^{2U} \frac{4C^2 \bar{\delta}}{(1 - \bar{\delta} e^{2U})^2}, \quad A_e = \chi dt, \quad \chi = \frac{4C \bar{\delta}}{e^{-2U} - \bar{\delta}}, \quad (3.4)$$

kde $\bar{\delta}$ a C jsou konstanty, získané $SL(2, \mathbb{R})$ transformací. Z vlastností této transformace plyne, že

$$\bar{\delta} \geq 0. \quad (3.5)$$

Pro speciální případ, kdy $\bar{\delta} \rightarrow 0$, $C \rightarrow \pm\infty$ a zároveň platí rovnost $C^2 \bar{\delta} = 1/4$ přechází $SL(2, \mathbb{R})$ transformace v identitu, a tedy transformací získáme původní vakuové řešení (3.2).

Tato Weylova metoda přidání náboje není omezena pouze na stacionární axiálně symetrické prostoročasy, ve třetím kroku se však bez této podmínky neobejdeme.

Druhým krokem je dualizace čtyřpotenciálu elektricky nabitého řešení, čímž získáme čtyřpotenciál A_m , který bude mít pouze magnetickou složku. K tomuto řešení zároveň nalezneme odpovídající magneticky nabitě řešení.

Toto magneticky nabitě řešení se ve třetím kroku zobrazí na zcela nové vakuové axiálně symetrické řešení Einsteinových rovnic. To v sobě zahrnuje dva kroky. Nejprve se magneticky nabitě řešení

$$ds_4^2 = -e^{2V} dt^2 + e^{-2V} [e^{2D} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad A_m = A_\varphi d\varphi, \quad (3.6)$$

zobrazí na nové magneticky nabitě řešení, popsané v článku [21]:

$$ds_4^2 = -e^{\frac{V}{2}} dt^2 + e^{-\frac{V}{2}} [e^{\frac{D}{2}} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad A'_m = \frac{1}{2} A_\varphi d\varphi, \quad (3.7)$$

což lze opět chápat jako Kaluzovu–Kleinovu redukci vakuové pětirozměrné metriky¹

$$ds_5^2 = e^V (d\sigma + \frac{1}{2} A_\varphi d\varphi)^2 + e^{-\frac{V}{2}} ds_4^2, \quad (3.8)$$

kde se časová složka metriky vyskytuje v ds_4^2 . Pokud ale tato pětirozměrná metrika řeší vakuové Einsteinovy rovnice, potom má její prostorová složka nulový Ricciho tenzor, tj. řeší Einsteinovy rovnice i ve 4 dimenzích:

$$ds_4^2 = e^V (d\sigma + \frac{1}{2} A_\varphi d\varphi)^2 + e^{-V} [e^{\frac{D}{2}} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2]. \quad (3.9)$$

Autoři článku touto specifickou kombinací generačních metod získali zcela nové řešení, které sice má euklidovskou signaturu, později v textu se však autoři vracejí zpět k lorentzovské signatuře.

¹Ve výchozím článku autoři použili stejný symbol pro dvě různé souřadnice, označují tedy novou souřadnici σ .

3.2 Odvození řešení

Autoři konkrétně vyšli z metriky popisující zrychlenou verzi Zipoyovy–Voorheesovy metriky zapsanou ve Weylově tvaru, která byla prezentována v práci E. Tea [22]:

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (3.10)$$

kde

$$\begin{aligned} e^{2U} &= \frac{(y^2 - 1)F(y)}{A^2(x - y)^2} \left(\frac{F(y)}{F(x)} \right)^{\alpha-1}, \\ e^{2\gamma} &= \frac{(y^2 - 1)F(y)}{f(x, y)G(x, y)} \frac{F^{\alpha^2-1}(y)F^{(\alpha-1)^2}(x)}{G^{\alpha^2-1}(x, y)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

přičemž α je konstanta a zároveň

$$F(x) = 1 + 2mA x, \quad (3.12)$$

$$F(y) = 1 + 2mA y, \quad (3.13)$$

$$f(x, y) = (y^2 - 1)F(x) + (1 - x^2)F(y), \quad (3.14)$$

$$G(x, y) = [1 + mA(x + y)]^2 - m^2 A^2 (1 - xy)^2, \quad (3.15)$$

zatímco kanonické souřadnice Weylovy metriky ρ a z jsou definovány takto:

$$\rho^2 = \frac{(y^2 - 1)(1 - x^2)F(x)F(y)}{A^4(x - y)^4}, \quad (3.16)$$

$$z = \frac{(1 - xy)[1 + mA(x + y)]}{A^2(x - y)^2}. \quad (3.17)$$

Nyní použili generační metodu $(U, \gamma) \rightarrow (\beta^2 U, \beta\gamma)$, viz část 3.1.1, na Weylův tvar metriky (3.10), (3.11) a získali tak metriku novou:

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (3.18)$$

kde

$$\begin{aligned} e^{2U} &= \left[\frac{(y^2 - 1)F(y)}{A^2(x - y)^2} \left(\frac{F(y)}{F(x)} \right)^{\alpha-1} \right]^\beta, \\ e^{2\gamma} &= \left[\frac{(y^2 - 1)F(y)}{f(x, y)G(x, y)} \frac{F^{\alpha^2-1}(y)F^{(\alpha-1)^2}(x)}{G^{\alpha^2-1}(x, y)} \right]^{\beta^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Metriku (3.18) pomocí rovnic (3.3) a (3.4) nabili:

$$ds^2 = -\frac{e^{2U}}{H_\beta(x, y)} dt^2 + e^{-2U} H_\beta(x, y) [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (3.20)$$

kde

$$A_e = 4C\bar{\delta} \left[\left(\frac{A^2(x - y)^2}{(y^2 - 1)F(y)} \left(\frac{F(x)}{F(y)} \right)^{\alpha-1} \right)^\beta - \bar{\delta} \right]^{-1} dt, \quad (3.21)$$

$$H_\beta(x, y) = \frac{1}{4C^2\bar{\delta}} \left[1 - \bar{\delta} \left(\frac{(y^2 - 1)F(y)}{A^2(x - y)^2} \left(\frac{F(y)}{F(x)} \right)^{\alpha-1} \right)^\beta \right]^2, \quad (3.22)$$

a dualizovali jeho elektrický potenciál, viz (3.6)

$$A_m = \left[\frac{\beta (1-x^2)(\alpha F(x) + (1-\alpha)F(y))}{C A^2(x-y)^2} + \frac{2m\beta\alpha x}{AC} \right] d\varphi. \quad (3.23)$$

Nyní stačí položit $\alpha = 1$ a $\beta = 2$ a provést poslední krok této generační metody (3.9). Získáme tím metriku s euklidovskou signaturou:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \frac{C^2\bar{\delta}}{H(x,y)} \left[dt + \frac{1}{C} \left(\frac{(1-x^2)F(x)}{A^2(x-y)^2} + \frac{2mx}{A} \right) d\varphi \right]^2 \\ & + \frac{H(x,y)}{A^2(x-y)^2} \left[(1-x^2)F(x)d\varphi^2 + \frac{dx^2}{(1-x^2)F(x)} + \frac{dy^2}{(y^2-1)F(y)} \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

kde zadefinujeme funkci

$$2H(x,y) = 1 - \bar{\delta} \left(\frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \right)^2. \quad (3.25)$$

Pokud bychom ale studovali i záporné $\bar{\delta}$, dostali bychom lorentzovskou signaturu. Přeznačme proto $\bar{\delta} = -\delta$.

Je zjevné, že tento krok není matematicky zcela korektní, neboť $\bar{\delta}$ je z vlastností $SL(2,\mathbb{R})$ transformace vždy nezáporný (3.5). Přesto se ukáže, že i metrika se záporným $\bar{\delta}$ řeší vakuové Einsteinovy rovnice, což dokáží v následující kapitole.

4. Ověření vakuovosti prostorů času

Prvním cílem této práce je ověřit, že metrika (3.24), (3.25) skutečně řeší Einsteinovy vakuové rovnice. Musíme proto spočítat složky Ricciho tenzoru $R_{\mu\nu}$.

4.1 Metrika

Metriku (3.24), tedy

$$ds^2 = -\frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \frac{C^2\delta}{H(x,y)} \left[dt + \frac{1}{C} \left(\frac{(1-x^2)F(x)}{A^2(x-y)^2} + \frac{2mx}{A} \right) d\varphi \right]^2 \quad (4.1)$$

$$+ \frac{H(x,y)}{A^2(x-y)^2} \left[(1-x^2)F(x)d\varphi^2 + \frac{dx^2}{(1-x^2)F(x)} + \frac{dy^2}{(y^2-1)F(y)} \right],$$

kde

$$F(x) = 1 + 2mAx, \quad (4.2)$$

$$F(y) = 1 + 2mAy, \quad (4.3)$$

$$H(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \right)^2, \quad (4.4)$$

si podle vzorce $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ vyjádříme v souřadnicích $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, x, y)$ maticí

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & e & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

kde

$$a = -\frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \frac{C^2\delta}{H(x,y)}, \quad (4.6)$$

$$b = \frac{H(x,y)(1-x^2)F(x)}{A^2(x-y)^2} - \frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \frac{\delta}{H(x,y)} \left(\frac{(1-x^2)F(x)}{A^2(x-y)^2} + \frac{2mx}{A} \right)^2, \quad (4.7)$$

$$c = \frac{H(x,y)}{A^2(x-y)^2} \frac{1}{(1-x^2)F(x)}, \quad (4.8)$$

$$d = \frac{H(x,y)}{A^2(x-y)^2} \frac{1}{(y^2-1)F(y)}, \quad (4.9)$$

$$e = -\frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \frac{C\delta}{H(x,y)} \left(\frac{(1-x^2)F(x)}{A^2(x-y)^2} + \frac{2mx}{A} \right). \quad (4.10)$$

Abychom ověřili, že metrika $g_{\mu\nu}$ opravdu splňuje Einsteinovy rovnice (1.1) pro $T_{\mu\nu} = 0$ a $\Lambda = 0$, musíme spočítat Christoffelovy symboly 1. a 2. druhu a z nich pak stanovit složky Riemannova tenzoru křivosti a Ricciho tenzoru.

4.2 Christoffelovy symboly

Složky Christoffelova symbolu 1. druhu jsou definovány (2). Přímý výpočet dává:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{000} &= 0, & \Gamma_{100} &= 0, & \Gamma_{200} &= -\frac{1}{2}a_{,x}, & \Gamma_{300} &= -\frac{1}{2}a_{,y}, \\
\Gamma_{001} &= 0, & \Gamma_{101} &= 0, & \Gamma_{201} &= -\frac{1}{2}e_{,x}, & \Gamma_{301} &= -\frac{1}{2}e_{,y}, \\
\Gamma_{002} &= \frac{1}{2}a_{,x}, & \Gamma_{102} &= \frac{1}{2}e_{,x}, & \Gamma_{202} &= 0, & \Gamma_{302} &= 0, \\
\Gamma_{003} &= \frac{1}{2}a_{,y}, & \Gamma_{103} &= \frac{1}{2}e_{,y}, & \Gamma_{203} &= 0, & \Gamma_{303} &= 0, \\
\Gamma_{011} &= 0, & \Gamma_{111} &= 0, & \Gamma_{211} &= -\frac{1}{2}b_{,x}, & \Gamma_{311} &= -\frac{1}{2}b_{,y}, \\
\Gamma_{012} &= \frac{1}{2}e_{,x}, & \Gamma_{112} &= \frac{1}{2}b_{,x}, & \Gamma_{212} &= 0, & \Gamma_{312} &= 0, \\
\Gamma_{013} &= \frac{1}{2}e_{,y}, & \Gamma_{113} &= \frac{1}{2}b_{,y}, & \Gamma_{213} &= 0, & \Gamma_{313} &= 0, \\
\Gamma_{022} &= 0, & \Gamma_{122} &= 0, & \Gamma_{222} &= \frac{1}{2}c_{,x}, & \Gamma_{322} &= -\frac{1}{2}c_{,y}, \\
\Gamma_{023} &= 0, & \Gamma_{123} &= 0, & \Gamma_{223} &= \frac{1}{2}c_{,y}, & \Gamma_{323} &= \frac{1}{2}d_{,x}, \\
\Gamma_{033} &= 0, & \Gamma_{133} &= 0, & \Gamma_{233} &= -\frac{1}{2}d_{,x}, & \Gamma_{333} &= \frac{1}{2}d_{,y},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

přičemž jsem vynechal složky, které jsou díky symetrii ve druhém a třetím indexu stejné.

Pro složky Christoffelova symbolu 2. druhu platí definice (3). Musíme spočítat kontravariantní metrický tenzor. Vzhledem k tomu, že platí identita

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\sigma} = g_{\alpha\mu}g^{\mu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\alpha}, \tag{4.12}$$

jedná se o inverzní tenzor k metrickému tenzoru a lze jej vypočítat například pomocí Gaussovy eliminační metody pro matice:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} fb & -fe & 0 & 0 \\ -fe & fa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

kde

$$f = \frac{1}{ab - e^2}. \tag{4.14}$$

Odtud spočítáme, že

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= 0, & \Gamma^1_{00} &= 0, \\
\Gamma^0_{01} &= 0, & \Gamma^1_{01} &= 0, \\
\Gamma^0_{02} &= \frac{1}{2}f(ba_{,x} - ee_{,x}), & \Gamma^1_{02} &= \frac{1}{2}f(-ea_{,x} + ae_{,x}), \\
\Gamma^0_{03} &= \frac{1}{2}f(ba_{,y} - ee_{,y}), & \Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2}f(-ea_{,y} + ae_{,y}), \\
\Gamma^0_{11} &= 0, & \Gamma^1_{11} &= 0, \\
\Gamma^0_{12} &= \frac{1}{2}f(be_{,x} - eb_{,x}), & \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}f(-ee_{,x} + ab_{,x}), \\
\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2}f(be_{,y} - eb_{,y}), & \Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2}f(-ee_{,y} + ab_{,y}), \\
\Gamma^0_{22} &= 0, & \Gamma^1_{22} &= 0, \\
\Gamma^0_{23} &= 0, & \Gamma^1_{23} &= 0, \\
\Gamma^0_{33} &= 0, & \Gamma^1_{33} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{00} &= -\frac{a_{,x}}{2c}, & \Gamma^3_{00} &= -\frac{a_{,y}}{2d}, \\
\Gamma^2_{01} &= -\frac{e_{,x}}{2c}, & \Gamma^3_{01} &= -\frac{e_{,y}}{2d}, \\
\Gamma^2_{02} &= 0, & \Gamma^3_{02} &= 0, \\
\Gamma^2_{03} &= 0, & \Gamma^3_{03} &= 0, \\
\Gamma^2_{11} &= -\frac{b_{,x}}{2c}, & \Gamma^3_{11} &= -\frac{b_{,y}}{2d}, \\
\Gamma^2_{12} &= 0, & \Gamma^3_{12} &= 0, \\
\Gamma^2_{13} &= 0, & \Gamma^3_{13} &= 0, \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{c_{,x}}{2c}, & \Gamma^3_{22} &= -\frac{c_{,y}}{2d}, \\
\Gamma^2_{23} &= \frac{c_{,y}}{2c}, & \Gamma^3_{23} &= \frac{d_{,x}}{2d}, \\
\Gamma^2_{33} &= -\frac{d_{,x}}{2c}, & \Gamma^3_{33} &= \frac{d_{,y}}{2d}.
\end{aligned}$$

4.3 Riemannův a Ricciho tenzor

Z Christoffelových symbolů (4.15) lze přímo spočítat složky Riemannova tenzoru, který je definován vztahem (5). Z důvodu složitosti výrazů je však uvádím v dodatku D2.

Z Riemannova tenzoru lze vysčítáním přes metrický tenzor získat Ricciho tenzor obvyklou definicí

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}. \tag{4.16}$$

Z nulovosti několika složek Riemannova tenzoru dostáváme okamžitě některé nulové složky Ricciho tenzoru, totiž

$$R_{02} = R^0_{002} + R^1_{012} + R^3_{032} = 0, \tag{4.17}$$

$$R_{03} = R^0_{003} + R^1_{013} + R^2_{023} = 0, \tag{4.18}$$

$$R_{12} = R^0_{102} + R^1_{112} + R^3_{132} = 0, \tag{4.19}$$

$$R_{13} = R^0_{103} + R^1_{113} + R^2_{123} = 0. \tag{4.20}$$

Ostatní složky Ricciho tenzoru již nejsou tak přímočaré. Po úpravě do kompaktnějšího tvaru je nutné dopočítat zbylé složky pomocí výpočetního programu (osobně jsem zvolil program *Derive 6*).

Výsledkem těchto algebraických úprav je

$$\begin{aligned}
R_{00} = & -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a,x}{c} \right)_{,x} + \left(\frac{a,y}{d} \right)_{,y} \right] \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c^2} c,x a,x + \frac{1}{cd} c,y a,y + \frac{1}{cd} d,x a,x + \frac{1}{d^2} d,y a,y \right) \\
& + \frac{f}{4} \left(-\frac{a}{c} b,x a,x - \frac{a}{d} b,y a,y + 2\frac{a}{c} (e,x)^2 + 2\frac{a}{d} (e,y)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{b}{c} (a,x)^2 - 2\frac{e}{c} e,x a,x + \frac{b}{d} (a,y)^2 - 2\frac{e}{d} e,y a,y \right), \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{01} = & -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{e,x}{c} \right)_{,x} + \left(\frac{e,y}{d} \right)_{,y} \right] \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c^2} c,x e,x + \frac{1}{cd} c,y e,y + \frac{1}{cd} d,x e,x + \frac{1}{d^2} d,y e,y \right) \\
& + \frac{f}{4} \left(-\frac{a}{c} b,x e,x + \frac{a}{d} b,y e,y + \frac{b}{d} a,y e,y \right. \\
& \quad \left. + \frac{b}{c} a,x e,x - 2\frac{e}{c} b,x a,x - 2\frac{e}{d} b,y a,y \right), \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} = & -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{b,x}{c} \right)_{,x} + \left(\frac{b,y}{d} \right)_{,y} \right] \\
& - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c^2} c,x b,x + \frac{1}{cd} c,y b,y + \frac{1}{cd} d,x b,x + \frac{1}{d^2} d,y b,y \right) \\
& + \frac{f}{4} \left(-\frac{b}{c} b,x a,x - \frac{b}{d} a,y b,y + 2\frac{b}{c} (e,x)^2 + 2\frac{b}{d} (e,y)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{a}{c} (b,x)^2 - 2\frac{e}{c} e,x b,x + \frac{a}{d} (b,y)^2 - 2\frac{e}{d} e,y b,y \right), \tag{4.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} = & -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{d,x}{d} \right)_{,x} + \left(\frac{c,y}{d} \right)_{,y} \right] \\
& - \left[\frac{f}{2} \left(ba,x - 2ee,x + ab,x \right) \right]_{,x} \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{cd} (c,y)^2 + \frac{1}{cd} c,x d,x - \frac{1}{d^2} c,y d,y - \frac{1}{d^2} (d,x)^2 \right) \\
& + \frac{f}{4} \left(-\frac{b}{c} c,x a,x - 2\frac{e}{c} c,x e,x - \frac{b}{d} a,y c,y \right. \\
& \quad \left. + 2\frac{e}{d} e,y c,y + \frac{a}{c} c,x b,x - \frac{a}{d} b,y c,y \right) \\
& - \frac{f^2}{4} \left(b^2 (a,x)^2 - 4eb a,x e,x + 2e^2 (e,x)^2 + 2ab (e,x)^2 \right. \\
& \quad \left. + 2e^2 a,x b,x - 4ae e,x b,x + a^2 (b,x)^2 \right), \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{23} = & \frac{1}{2} \left(\frac{c,y}{c,x} - \frac{c,x}{c,y} \right) \\
& - \left[\frac{f}{2} \left(ba_{,x} - 2ee_{,x} + ab_{,x} \right) \right]_{,y} \\
& + \frac{f}{4} \left(\frac{b}{c} c_{,y} a_{,x} - 2 \frac{e}{c} c_{,y} e_{,x} + \frac{b}{d} a_{,y} d_{,x} \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{e}{d} e_{,y} d_{,x} + \frac{a}{c} c_{,y} b_{,x} + \frac{a}{d} b_{,y} d_{,x} \right) \\
& - \frac{f^2}{4} \left(b^2 a_{,x} a_{,y} - 2eb_{,y} e_{,x} - 2eb_{,x} e_{,y} + 2e^2 e_{,x} e_{,y} \right. \\
& \quad \left. + 2ab_{,x} e_{,y} + e^2 a_{,x} b_{,y} - 2ae_{,x} b_{,y} + e^2 b_{,x} a_{,y} \right. \\
& \quad \left. - 2ae_{,y} b_{,x} + a^2 b_{,x} b_{,y} \right), \tag{4.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} = & -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{d,x}{c} \right)_{,x} + \left(\frac{c,y}{c} \right)_{,y} \right] \\
& - \left[\frac{f}{2} \left(ba_{,y} - 2ee_{,y} + ab_{,y} \right) \right]_{,y} \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{cd} (d,x)^2 + \frac{1}{cd} c_{,y} d_{,y} - \frac{1}{c^2} c_{,x} d_{,x} - \frac{1}{c^2} (c,y)^2 \right) \\
& + \frac{f}{4} \left(-\frac{b}{c} d_{,x} a_{,x} + 2 \frac{e}{c} d_{,x} e_{,x} + \frac{b}{d} a_{,y} d_{,y} \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{e}{d} e_{,y} d_{,y} - \frac{a}{c} d_{,x} b_{,x} + \frac{a}{d} b_{,y} d_{,y} \right) \\
& - \frac{f^2}{4} \left(b^2 (a_{,y})^2 - 4eb_{,y} e_{,y} + 2e^2 (e_{,y})^2 + 2ab(e_{,y})^2 \right. \\
& \quad \left. + 2e^2 a_{,y} b_{,y} - 4ae_{,y} b_{,y} + a^2 (b_{,y})^2 \right). \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Složky R_{00}, R_{01} byly pro tento výpočetní program relativně snadné a bylo tedy možné přímo dosadit z (4.6)–(4.10) a spočítat, že jsou opravdu nulové. Nicméně u ostatních složek jsem musel postupovat složitěji. U složky R_{11} jsem sečetl nejprve první řádek s druhým a teprve poté, co jsem získal výsledek, jsem k němu přičetl třetí řádek. Postupný součet řádků jsem aplikoval i na další složky. Všechny tyto složky byly po dosazení v programu *Derive 6* rovny 0. Zkráceně lze tedy psát výsledek:

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{4.27}$$

Vzhledem k tomu, že prostoročas, který vyšetřujeme, v sobě nezahrnuje kosmologickou konstantu Λ , lze snadno odvodit, že se jedná o vakuové řešení. Opravdu, je-li $\Lambda = 0$, mají Einsteinovy rovnice tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{4.28}$$

Vakuové řešení Einsteinových rovnic splňuje rovnice právě tehdy, když pravá strana vymizí, tedy

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \tag{4.29}$$

Vysčítáním přes metrický tenzor získáme $R = 0$, což lze zpětně dosadit do předešlé rovnice a dostáváme tak Einsteinovy rovnice ve tvaru $R_{\mu\nu} = 0$.

Dokázali jsme tedy, že *metrika (4.1) opravdu je vakuovým řešením.*

5. Určení algebraického typu prostoročasu

Zjistili jsme tedy, že metrika (4.1) je skutečně vakuovým řešením Einsteinových rovnic. Naším dalším cílem je nyní určit algebraický typ tohoto prostoročasu. Pokud by se totiž ukázalo, že se jedná o prostoročas algebraického typu D, bylo by potřeba ukázat, proč ho nelze z Plebaňského–Demiaňského řešení získat, viz sekce 1.4 a obr. 1.1.

Ke zjištění tohoto typu využijeme skalární invarianty I (2.7) a J (2.8), pro které budeme potřebovat znát skalární funkce Ψ_A definované vztahem (2.5). K tomu je však nejprve potřeba zvolit vhodnou nulovou tetradu.

5.1 Volba nulové tetrady

Tetráda, kterou použijeme k výpočtu, by se měla co nejvíce blížit hlavní nulové tetradě adaptované na hlavní nulové směry, aby byly složky Ψ_A vzhledem k této bázi co nejjednodušší.

Nejbližší metrice (4.1) je Plebaňského–Demiaňského třída řešení (1.16). Tato třída však nepřipouští prostoročas charakterizovaný pouze parametry hmotnosti m , zrychlení A a NUT parametrem l , a proto neočekáváme, že její hlavní nulová tetradá je naše hledaná báze. Přesto se dá očekávat, že \mathbf{k} a \mathbf{l} budou přecházet ve známé hlavní nulové směry pro $A = 0$, potažmo $l = 0$, které je charakterizováno parametrem δ .

Plebaňského–Demiaňského třídu řešení lze zapsat ve tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - Apr)^2} \left[-\frac{Q(r)}{r^2 + \omega^2 p^2} (d\tau - \omega p^2 d\sigma)^2 + \frac{r^2 + \omega^2 p^2}{Q(r)} dr^2 + \frac{P(p)}{r^2 + \omega^2 p^2} (\omega d\tau + r^2 d\sigma)^2 + \frac{r^2 + \omega^2 p^2}{P(p)} dp^2 \right], \quad (5.1)$$

jejíž přirozená nulová tetradá je (1.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{1 - Apr}{\sqrt{2(r^2 + \omega^2 p^2)}} \left[\frac{1}{\sqrt{Q(r)}} (r^2 \partial_\tau - \omega \partial_\sigma) - \sqrt{Q(r)} \partial_r \right], \\ \mathbf{l} &= \frac{1 - Apr}{\sqrt{2(r^2 + \omega^2 p^2)}} \left[\frac{1}{\sqrt{Q(r)}} (r^2 \partial_\tau - \omega \partial_\sigma) + \sqrt{Q(r)} \partial_r \right], \\ \mathbf{m} &= \frac{1 - Apr}{\sqrt{2(r^2 + \omega^2 p^2)}} \left[-\frac{1}{\sqrt{P(p)}} (\omega p^2 \partial_\tau + \partial_\sigma) + i \sqrt{P(p)} \partial_p \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

přičemž Weylovy skaláry funkce Ψ_A vypočítané vzhledem k této nulové tetradě mají nenulovou jen Ψ_2 , viz (1.20).

Námi zkoumaná metrika je ve tvaru (4.1), tedy

$$ds^2 = -\frac{(y^2 - 1)F(y)}{A^2(x - y)^2} \frac{C^2 \delta}{H(x, y)} \left[dt + \frac{T(x, y)}{C} d\varphi \right]^2 + \frac{H(x, y)}{A^2(x - y)^2} \left[(1 - x^2)F(x) d\varphi^2 + \frac{dx^2}{(1 - x^2)F(x)} + \frac{dy^2}{(y^2 - 1)F(y)} \right], \quad (5.3)$$

kde jsme označili

$$T(x, y) = \frac{(1-x^2)F(x)}{A^2(x-y)^2} + \frac{2mx}{A}. \quad (5.4)$$

Při porovnání metrik (5.1) a (5.3) si lze všimnout jisté podobnosti. Ihned si všimneme prefaktoru v rovnici (5.1) a porovnáme ho s výrazem, který lze vytknout z celé pravé strany rovnice (5.3). Výraz $1/(1-Apr)^2$ z (5.1) závisí pouze na parametru A a prostorových souřadnicích p a r . Pokud bychom tedy v Plebaňského–Demiaňského metrice „vypnuli“ všechny parametry až na zrychlení A , zůstal by tento prefaktor stejný. Tomu by z naší metriky odpovídal prefaktor $1/A^2(x-y)^2$, který také závisí pouze na zrychlení A a prostorových souřadnicích x a y . Zdá se tedy rozumné brát $1-Apr \sim A(x-y)$.

Další ztotožnění vidíme při porovnání kvadrátů prostorových souřadnic. V Plebaňského–Demiaňského metrice se vyskytují před dp^2 a dr^2 prefaktory, které v čitateli sdílejí stejnou funkci závislou na p a r a ve jmenovateli obsahují polynomy závislé pouze na stejné proměnné, jakou vyjadřují. Navíc se tam vyskytuje výše zmíněný vytknutý prefaktor $1/(1-Apr)^2$.

Vzhledem k přiřazení prostorových souřadnic p a r k prostorovým souřadnicím x a y lze po porovnání (5.1) a (5.3) přímočaře identifikovat $H(x, y) \sim r^2 + \omega^2 p^2$, $P(p) \sim (1-x^2)F(x)$ a $Q(r) \sim (y^2-1)F(y)$. Tomu vizuálně odpovídá i porovnání prefaktorů před časovou složkou, kde se vyskytuje na očekávaném místě $H(x, y)$ i $(y^2-1)F(y)$. Nulovou tetradu lze tímto intuitivním postupem odhadnout z (5.2) ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{A(x-y)}{\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{1}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}} (\pi \partial_t + \varrho \partial_\varphi) - \sqrt{(y^2-1)F(y)} \partial_y \right], \\ \mathbf{l} &= \frac{A(x-y)}{\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{1}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}} (\pi \partial_t + \varrho \partial_\varphi) + \sqrt{(y^2-1)F(y)} \partial_y \right], \\ \mathbf{m} &= \frac{A(x-y)}{\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)F(x)}} (\varsigma \partial_t + \tau \partial_\varphi) + i \sqrt{(1-x^2)F(x)} \partial_x \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ponechali jsme si ještě jistou volnost v koeficientech π , ϱ , ς a τ , abychom této tetradě mohli vnutit vlastnosti nulové tetrady (2.1). Zapsáno ve tvaru skalárního součinu máme podmínky

$$\kappa_\rho l^\rho = -1, \quad \mu_\rho \bar{m}^\rho = 1, \quad (5.6)$$

$$\kappa_\rho k^\rho = \lambda_\rho l^\rho = \mu_\rho m^\rho = \bar{\mu}_\rho \bar{m}^\rho = 0, \quad (5.7)$$

$$\kappa_\rho m^\rho = \kappa_\rho \bar{m}^\rho = \lambda_\rho m^\rho = \lambda_\rho \bar{m}^\rho = 0, \quad (5.8)$$

kde jsme identifikovali $\kappa_\rho \equiv k_\rho$, $\lambda_\rho \equiv l_\rho$ a $\mu_\rho \equiv m_\rho$. Spočítejme tyto indexy:

$$\kappa_0 = -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \frac{C\delta\sqrt{(y^2-1)F(y)}}{H(x,y)} (C\pi + T(x,y)\varrho), \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 = & -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{C\delta\sqrt{(y^2-1)F(y)}}{H(x,y)} T(x,y)\pi \right. \\ & \left. + \left(\frac{\delta(y^2-1)F(y)T^2(x,y)}{H(x,y)} - H(x,y)(1-x^2)F(x) \right) \varrho \right], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\kappa_2 = 0, \quad (5.11)$$

$$\kappa_3 = -\frac{1}{A(x-y)} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{H(x,y)}}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}}, \quad (5.12)$$

$$\lambda_0 = -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \frac{C\delta\sqrt{(y^2-1)F(y)}}{H(x,y)} (C\pi + T(x,y)\varrho), \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{C\delta\sqrt{(y^2-1)F(y)}}{H(x,y)} T(x,y)\pi \right. \\ & \left. + \left(\frac{\delta(y^2-1)F(y)T^2(x,y)}{H(x,y)} - H(x,y)(1-x^2)F(x) \right) \varrho \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\lambda_2 = 0, \quad (5.15)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{A(x-y)} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{H(x,y)}}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}}, \quad (5.16)$$

$$\mu_0 = -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \frac{C\delta(y^2-1)F(y)(C\varsigma + T(x,y)\tau)}{H(x,y)\sqrt{(1-x^2)F(x)}}, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = & -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)F(x)}} \left[\frac{(y^2-1)F(y)C\delta T(x,y)}{H(x,y)} \varsigma \right. \\ & \left. + \left(\frac{(y^2-1)F(y)T^2(x,y)\delta}{H(x,y)} - H(x,y)(1-x^2)F(x) \right) \tau \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\mu_2 = i \frac{H(x,y)}{A(x-y)} \frac{1}{\sqrt{2H(x,y)}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)F(x)}}, \quad (5.19)$$

$$\mu_3 = 0. \quad (5.20)$$

Nyní aplikujme podmínky (5.6)–(5.8), ze kterých získáme vztahy pro dosud neurčené koeficienty π , ϱ , ς a τ . Po bližším zkoumání však zjistíme, že nám tyto podmínky dají pouze 3 nezávislé rovnice.

Prímý vztah pro koeficienty π a ϱ získáme z podmínky (5.6) a podmínky kladené na kvadráty \mathbf{k} a \mathbf{l} (5.7):

$$\begin{aligned} & \frac{C^2\delta}{H^2(x,y)}\pi^2 + 2\frac{C\delta T(x,y)}{H^2(x,y)}\pi\varrho \\ & + \frac{1}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}} \left[\frac{(y^2-1)F(y)\delta T^2(x,y)}{H^2(x,y)} - (1-x^2)F(x) \right] \varrho^2 = 1. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Podobně pro ς a τ získáme z těchto podmínek vztah:

$$\begin{aligned} \frac{C^2\delta(y^2-1)F(y)}{H^2(x,y)(1-x^2)F(x)}\varsigma^2 + 2\frac{C\delta T(x,y)(y^2-1)F(y)}{H^2(x,y)}\varsigma\tau \\ + \left[\frac{(y^2-1)F(y)\delta T^2(x,y)}{(1-x^2)F(x)H^2(x,y)} - 1 \right] \tau^2 = -1. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Podmínky (5.8) nám pak dávají vztah mezi dvojicí koeficientů π , ϱ a ς , τ :

$$\begin{aligned} \frac{C\delta(y^2-1)F(y)}{H(x,y)}[C\varsigma + T(x,y)\tau]\pi + \varrho \left[\frac{(y^2-1)F(y)C\delta T(x,y)}{H(x,y)}\varsigma \right. \\ \left. + \left(\frac{(y^2-1)F(y)\delta T^2(x,y)}{H(x,y)} - H(x,y)(1-x^2)F(x) \right) \tau \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Řešení rovnic (5.21)–(5.23) nám dává vztah pro hledané koeficienty. Lze si ale všimnout, že jsou tyto rovnice přeuredené. Zvolme tedy pro jednoduchost $\varrho = 0$. S touto dodatečnou podmínkou máme již jednoznačné řešení a tetradu (5.5) lze explicitně psát

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{A(x-y)}{\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{1}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}} \frac{H(x,y)}{C\sqrt{\delta}} \partial_t - \sqrt{(y^2-1)F(y)} \partial_y \right], \\ \mathbf{l} &= \frac{A(x-y)}{\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{1}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}} \frac{H(x,y)}{C\sqrt{\delta}} \partial_t + \sqrt{(y^2-1)F(y)} \partial_y \right], \\ \mathbf{m} &= \frac{A(x-y)}{\sqrt{2H(x,y)}} \left[\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)F(x)}} \left(\frac{T(x,y)}{C} \partial_t - \partial_\varphi \right) + i\sqrt{(1-x^2)F(x)} \partial_x \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Tato tetradá se zdá být relativně jednoduchá. Dává tak naději, že složky Ψ_A , které z ní spočteme, budou výpočetně zvládnutelné.

Vzhledem k následným výpočtům dopočteme ještě duální báze formy:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &= -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \\ &\quad \times \left[\delta\sqrt{(y^2-1)F(y)}(Cdt + T(x,y)d\varphi) + \frac{H(x,y)}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}}dy \right], \\ \boldsymbol{\lambda} &= -\frac{1}{A(x-y)\sqrt{2H(x,y)}} \\ &\quad \times \left[\delta\sqrt{(y^2-1)F(y)}(Cdt + T(x,y)d\varphi) - \frac{H(x,y)}{\sqrt{(y^2-1)F(y)}}dy \right], \\ \boldsymbol{\mu} &= -\frac{\sqrt{2H(x,y)}}{2A(x-y)} \left[\sqrt{(1-x^2)F(x)}d\varphi - i\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)F(x)}}dx \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.2 Vyčíslení Weylových skalárů Ψ_A

Z nulové tetrady (5.24) lze nyní spočítat složky skalárních funkcí Ψ_A (2.5), což jsou projekce Weylova tenzoru do nulových směrů. K tomu budeme potřebovat

znát složky Weylova tenzoru definovaného vztahem (5). Jak ale víme z kapitoly 4, je Ricciho tenzor $R_{\mu\nu} = 0$, takže zřejmě

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (5.26)$$

To nám výrazně zjednoduší výpočet, neboť již máme v dodatku D2 napočítány složky 1x kontravariantního Riemannova tenzoru $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$. Abychom nemuseli počítat novou sadu plně kovariantního Riemannova tenzoru, využijeme složek duálních bázevých forem nulové tetřady (5.25), to jest, budeme počítat skaláry Ψ_A vztahy

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha} m^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta}, \\ \Psi_1 &= R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha} l^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta}, \\ \Psi_2 &= R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha} m^{\beta} \bar{m}^{\gamma} l^{\delta}, \\ \Psi_3 &= R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \lambda_{\alpha} k^{\beta} l^{\gamma} \bar{m}^{\delta}, \\ \Psi_4 &= R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \lambda_{\alpha} \bar{m}^{\beta} l^{\gamma} \bar{m}^{\delta}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Celkově bychom takto museli v pěti případech sečíst 256 členů. Některé složky Riemannova tenzoru jsou však nulové a nejinak je tomu s některými složkami nulových vektorů. Zároveň se při výpočtu využije v jednotlivých případech příhodných triků, a proto popíšu výpočet Weylových skalárů Ψ_A jednotlivě.

5.2.1 Výpočet Ψ_0

Vypišme si netriviální kombinace indexů α, β, γ a δ složek $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, které se vyskytují v rovnici (5.27)

Ψ_0	α	β	γ	δ		α	β	γ	δ		α	β	γ	δ	
	0	0	0	1	\Re	1	0	0	1	\Re	3	0	0	2	\Im
	0	0	3	2	\Im	1	0	3	2	\Im	3	0	3	0	\Re
	0	1	0	1	\Re	1	1	0	1	\Re	3	0	3	1	\Re
	0	1	3	2	\Im	1	1	3	2	\Im	3	1	0	2	\Im
	0	2	0	2	\Re	1	2	0	2	\Re	3	1	3	0	\Re
	0	2	3	0	\Im	1	2	3	0	\Im	3	1	3	1	\Re
	0	2	3	1	\Im	1	2	3	1	\Im	3	2	0	1	\Im
											3	2	3	2	\Re

V tabulce jsem navíc zvýraznil členy, které odpovídají $\Re\Psi_0$ a ty, které odpovídají $\Im\Psi_0$. Jak vidíme, zmenšil se počet členů z 256 na netriviálních 22. Lze tedy zřejmě psát

$$\Psi_0 = \sum_{\substack{\text{netriviální} \\ \text{kombinace}}} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha} m^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta}. \quad (5.28)$$

Zbývá nám dopočítat součiny $\kappa_{\alpha} m^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta}$:

Ψ_0	α	β	γ	δ	$\kappa_a m^\beta k^\gamma m^\delta$
	0	0	0	1	$\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4H(x,y)(1-x^2)F(x)C}$
	0	0	3	2	$\frac{\sqrt{\delta}(y^2-1)F(y)A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4H^2(x,y)} i$
	0	1	0	1	$-\frac{A^2(x-y)^2}{4H(x,y)(1-x^2)F(x)}$
	0	1	3	2	$-\frac{C\sqrt{\delta}(y^2-1)F(y)A^2(x-y)^2}{4H^2(x,y)} i$
	0	2	0	2	$\frac{A^2(x-y)^2(1-x^2)F(x)}{4H(x,y)}$
	0	2	3	0	viz 0 0 3 2
	0	2	3	1	viz 0 1 3 2
	1	0	0	1	$\frac{A^2(x-y)^2 T^2(x,y)}{4H(x,y)(1-x^2)F(x)C^2}$
	1	0	3	2	$\frac{\sqrt{\delta}(y^2-1)F(y)A^2(x-y)^2 T^2(x,y)}{4H^2(x,y)C} i$
	1	1	0	1	$-\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4H(x,y)(1-x^2)F(x)C}$
	1	1	3	2	$-\frac{T(x,y)\sqrt{\delta}(y^2-1)F(y)A^2(x-y)^2}{4H^2(x,y)} i$
	1	2	0	2	$\frac{A^2(x-y)^2(1-x^2)F(x)T(x,y)}{4H(x,y)C}$
	1	2	3	0	viz 1 0 3 2
	1	2	3	1	viz 1 1 3 2

Ψ_0	$\alpha \beta \gamma \delta$	$\kappa_a m^\beta k^\gamma m^\delta$
	3 0 0 2	$-\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4C^2 \sqrt{\delta} (y^2-1) F(y)} i$
	3 0 3 0	$\frac{A^2(x-y)^2 T^2(x,y)}{4H(x,y) C^2 (1-x^2) F(x)}$
	3 0 3 1	$-\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4H(x,y) C (1-x^2) F(x)}$
	3 1 0 2	$\frac{A^2(x-y)^2}{4C \sqrt{\delta} (y^2-1) F(y)} i$
	3 1 3 0	viz 3 0 3 1
	3 1 3 1	$\frac{A^2(x-y)^2}{4H(x,y) (1-x^2) F(x)}$
	3 2 0 1	viz 3 1 0 2
	3 2 3 2	$-\frac{A^2(x-y)^2 (1-x^2) F(x)}{4H(x,y)}$

Výpočet Ψ_0 podle vzorce (5.28) však není výpočetně triviální. Pro zjednodušení výpočtu využijeme faktu, že platí

$$\kappa_0 m^0 k^0 m^1 = \frac{T(x,y)}{C} \kappa_1 m^0 k^0 m^1, \quad (5.29)$$

$$\kappa_0 m^1 k^0 m^1 = \frac{T(x,y)}{C} \kappa_1 m^1 k^0 m^1, \quad (5.30)$$

$$\kappa_0 m^2 k^0 m^2 = \frac{T(x,y)}{C} \kappa_1 m^2 k^0 m^2. \quad (5.31)$$

Ukazuje se tedy výhodné nejprve sečíst členy odpovídající těmto kombinacím

$$\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4H(x,y) (1-x^2) F(x) C} \left(R_{001}^0 + \frac{T(x,y)}{C} R_{001}^1 \right), \quad (5.32)$$

$$-\frac{A^2(x-y)^2}{4H(x,y) (1-x^2) F(x)} \left(R_{101}^0 + \frac{T(x,y)}{C} R_{101}^1 \right), \quad (5.33)$$

$$\frac{A^2(x-y)^2 (1-x^2) F(x)}{4H(x,y)} \left(R_{202}^0 + \frac{T(x,y)}{C} R_{202}^1 \right). \quad (5.34)$$

Po dosazení složek Riemannova tenzoru z dodatku D2 získáme

$$\begin{aligned} & \frac{A^2(x-y)^2}{4H(x,y)(1-x^2)F(x)} \left[-\frac{fe_{,x}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) - \frac{fe_{,y}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) \right. \\ & \quad + \frac{fa_{,x}}{4c}(be_{,x} - eb_{,x}) + \frac{fa_{,y}}{4d}(be_{,y} - eb_{,y}) \\ & \quad + \frac{T(x,y)}{C} \left(-\frac{fe_{,x}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) - \frac{fe_{,y}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{fa_{,x}}{4c}(-ee_{,x} + ab_{,x}) + \frac{fa_{,y}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \right) \right], \quad (5.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{A^2(x-y)^2}{4H(x,y)(1-x^2)F(x)} \left[-\frac{fb_{,x}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) - \frac{fb_{,y}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) \right. \\ & \quad + \frac{fe_{,x}}{4c}(be_{,x} - eb_{,x}) + \frac{fe_{,y}}{4d}(be_{,y} - eb_{,y}) \\ & \quad + \frac{T(x,y)}{C} \left(-\frac{fb_{,x}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) - \frac{fb_{,y}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{fe_{,x}}{4c}(-ee_{,x} + ab_{,x}) + \frac{fe_{,y}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \right) \right], \quad (5.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A^2(x-y)^2(1-x^2)F(x)}{4H(x,y)} \left[-\left(\frac{f}{2}(ba_{,x} - ee_{,x})\right)_{,x} \right. \\ & \quad + \frac{fc_{,x}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) - \frac{fc_{,y}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) \\ & \quad - \frac{f^2}{4}(ba_{,x} - ee_{,x})^2 \\ & \quad - \frac{f^2}{4}(be_{,x} - eb_{,x})(-ea_{,x} + ae_{,x}) \\ & \quad + \frac{T(x,y)}{C} \left(-\left(\frac{f}{2}(-ea_{,x} + ae_{,x})\right)_{,x} \right. \\ & \quad + \frac{fc_{,x}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) - \frac{fc_{,y}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \\ & \quad - \frac{f^2}{4}(-ea_{,x} + ae_{,x})(ba_{,x} - ee_{,x}) \\ & \quad \left. \left. - \frac{f^2}{4}(-ee_{,x} + ab_{,x})(-ea_{,x} + ae_{,x}) \right) \right]. \quad (5.37) \end{aligned}$$

Porovnáním (4.6) s (4.10) si lze všimnout, že platí

$$e = \frac{T(x,y)}{C}a, \quad (5.38)$$

a tedy výrazy (5.35)–(5.37) se rovnají

$$\frac{A^2(x-y)^2 f}{16H(x,y)(1-x^2)F(x)} \left[\left(b - \frac{T(x,y)}{C} e \right) \times \left(-\frac{a_{,x}e_{,x}}{c} - \frac{a_{,y}e_{,y}}{d} + \frac{a_{,x}e_{,x}}{c} + \frac{a_{,y}e_{,y}}{d} \right) \right] = 0, \quad (5.39)$$

$$-\frac{A^2(x-y)^2 f}{16H(x,y)(1-x^2)F(x)} \left[\left(b - \frac{T(x,y)}{C} e \right) \left(-\frac{a_{,x}b_{,x}}{c} - \frac{a_{,y}b_{,y}}{d} + \frac{e_{,x}^2}{c} + \frac{e_{,y}^2}{d} \right) \right] \\ = \frac{f}{16} \left(\frac{a_{,x}b_{,x}}{c} + \frac{a_{,y}b_{,y}}{d} - \frac{e_{,x}^2}{c} - \frac{e_{,y}^2}{d} \right), \quad (5.40)$$

$$-\frac{A^2(x-y)^2(1-x^2)F(x)f_{,x}}{8H(x,y)} \left[(ba_{,x} - ee_{,x})_{,x} + \frac{T(x,y)}{C} (-ea_{,x} + ae_{,x})_{,x} \right] \\ + \frac{A^2(x-y)^2(1-x^2)F(x)f}{16H(x,y)} \left[\left(b - \frac{T(x,y)}{C} e \right) \times \left(\frac{a_{,x}c_{,x}}{c} - \frac{a_{,y}c_{,y}}{d} - fa_{,x}(ba_{,x} - ee_{,x}) - fe_{,x}(-ea_{,x} + ae_{,x}) \right) \right], \quad (5.41)$$

neboť

$$\left(b - \frac{T(x,y)}{C} e \right) = \frac{H(x,y)(1-x^2)F(x)}{A^2(x-y)^2}. \quad (5.42)$$

Nyní jsem již přímo dosadil do rovnice (5.28) a spočítal pomocí programu *Derive 6* složku Ψ_0 . Zprvu měl můj počítač problémy výpočet zvládnout, po nahrazení vybraných kombinací výrazy (5.39)–(5.41) jsem však dostal faktorizovaný výsledek

$$\Psi_0 = 3\sqrt{\delta}(1-x^2)F(x)(y^2-1)F(y)\Xi(x,y), \quad (5.43)$$

kde

$$\Xi(x,y) = \frac{\sqrt{2H(x,y)-1} \left(2 - H(x,y) \right) + i(2-3H)}{2H^3(x,y)(x-y)^2}. \quad (5.44)$$

5.2.2 Výpočet Ψ_1

Podobně postupujeme u výpočtu složky Ψ_1 . Nejprve zjistíme všechny netriviální kombinace indexů α, β, γ a δ rovnice (5.27):

Ψ_1	$\alpha \beta \gamma \delta$	$\alpha \beta \gamma \delta$	$\alpha \beta \gamma \delta$
	0 0 0 1 \Re	1 0 0 1 \Re	3 0 0 2 \Im
	0 0 3 2 \Im	1 0 3 2 \Im	3 0 3 0 \Re
	0 3 0 2 \Im	1 3 0 2 \Im	3 0 3 1 \Re
	0 3 3 0 \Re	1 3 3 0 \Re	3 3 0 1 \Re
	0 3 3 1 \Re	1 3 3 1 \Re	3 3 3 2 \Im

Nyní pro tyto netriviální kombinace vypočítáme součiny $\kappa_\alpha l^\beta k^\gamma m^\delta$:

Ψ_1	$\alpha \beta \gamma \delta$	$\kappa_\alpha l^\beta k^\gamma m^\delta$
	0 0 0 1	$\frac{A^2(x-y)^2}{4C\sqrt{\delta} \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}$
	0 0 3 2	$\frac{A^2(x-y)^2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}{4H(x,y)} \text{ i}$
	0 3 0 2	$-\frac{A^2(x-y)^2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}{4H(x,y)} \text{ i}$
	0 3 3 0	$\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y) \sqrt{\delta} ((y^2-1)F(y))^{3/2}}{4H^2(x,y) \sqrt{(1-x^2)F(x)}}$
	0 3 3 1	$-\frac{A^2(x-y)^2 C\sqrt{\delta} ((y^2-1)F(y))^{3/2}}{4H^2(x,y) \sqrt{(1-x^2)F(x)}}$
	1 0 0 1	$\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4C^2\sqrt{\delta} \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}$
	1 0 3 2	$\frac{A^2(x-y)^2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)} T(x,y)}{4H(x,y) C} \text{ i}$
	1 3 3 0	$\frac{\sqrt{\delta} ((y^2-1)F(y))^{3/2} A^2(x-y)^2 T^2(x,y)}{4H^2(x,y) C \sqrt{(1-x^2)F(x)}}$
	1 3 3 1	$-\frac{\sqrt{\delta} ((y^2-1)F(y))^{3/2} A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4H^2(x,y) \sqrt{(1-x^2)F(x)}}$
	1 3 0 2	$-\frac{A^2(x-y)^2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)} T(x,y)}{4H(x,y) C} \text{ i}$
	3 0 0 2	$-\frac{A^2(x-y)^2 H(x,y) \sqrt{(1-x^2)F(x)}}{4C^2\delta ((y^2-1)F(y))^{3/2}} \text{ i}$
	3 0 3 0	$\frac{A^2(x-y)^2 T(x,y)}{4C^2\sqrt{\delta} \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}$
	3 0 3 1	$-\frac{A^2(x-y)^2}{4C\sqrt{\delta} \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}$
	3 3 0 1	$\frac{A^2(x-y)^2}{4C\sqrt{\delta} \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}$
	3 3 3 2	$\frac{A^2(x-y)^2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}}{4H(x,y)} \text{ i}$

V tomto případě stačilo pouze dosadit do (5.27) a vhodně vyfaktorizovat:

$$\Psi_1 = 3\sqrt{\delta}i \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)} S(x,y) \Xi(x,y), \quad (5.45)$$

kde

$$S(x,y) = x(3Amy^2 + y - Am) - Amy^3 - Amy - 1, \quad (5.46)$$

$$\Xi(x,y) = \frac{\sqrt{2H(x,y)-1} \left(2 - H(x,y)\right) + i(2-3H)}{2H^3(x,y)(x-y)^2}, \quad (5.47)$$

a tedy stejné jako v (5.44).

5.2.3 Výpočet Ψ_2

Nejprve si opět vypíšeme netriviální kombinace indexů α, β, Γ a Δ :

Ψ_2	$\alpha \beta \Gamma \Delta$	$\alpha \beta \Gamma \Delta$	$\alpha \beta \Gamma \Delta$	$\alpha \beta \Gamma \Delta$
	0 0 1 0	℔	1 0 1 0	℔
	0 0 2 3	℔	1 0 2 3	℔
	0 1 1 0	℔	1 1 1 0	℔
	0 1 2 3	℔	1 1 2 3	℔
	0 2 0 3	℔	1 2 0 3	℔
	0 2 1 3	℔	1 2 1 3	℔
	0 2 2 0	℔	1 2 2 0	℔
				3 2 2 3
				℔

Lze si všimnout, že jsou to až na zaměněné indexy Γ a Δ netriviální kombinace indexů pro Ψ_0 . Porovnejme tedy jejich definiční vztahy:

$$\Psi_0 = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \kappa_\alpha m^\beta k^\gamma m^\delta \quad \text{vs.} \quad \Psi_2 = R_{\beta\Gamma\Delta}^\alpha \kappa_\alpha m^\beta \bar{m}^\Gamma l^\Delta = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \kappa_\alpha m^\beta l^\gamma \bar{m}^\delta, \quad (5.48)$$

kde jsem využil toho, že je Riemannův tenzor antisymetrický ve 3. a 4. indexu. Součiny $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \kappa_\alpha m^\beta k^\gamma m^\delta$ a $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \kappa_\alpha m^\beta l^\gamma \bar{m}^\delta$ se od sebe liší pouze v několika případech a vždy o znaménko:

- 1) Z důvodu antisymetrie je před každým členem mínus,
- 2) Znaménko se mění pokud se $\delta = \Gamma = 2$,
- 3) Znaménko se mění pokud se $\gamma = \Delta = 3$.

S touto pomůckou lze sečíst všechny členy a dostat se tak ke kýženému Ψ_2 . Výpočet nám zároveň zjednodušují triky použité při výpočtu Ψ_0 (5.39)–(5.41), kde se znaménka mění u obou sčítanců a trik lze tedy znovu použít.

Výpočet byl nejvíce výpočetně náročný, přesto se však výsledek podařilo faktorizovat ve tvaru:

$$\Psi_2 = i \left[A^3 m(x-y)^5 + i\sqrt{\delta} W(x,y) \right] \Xi(x,y), \quad (5.49)$$

kde

$$W(x,y) = 2S^2(x,y) + \left(Am(x-y)^3 - (1-x^2)F(x) \right) (y^2-1)F(y), \quad (5.50)$$

$$S(x,y) = x(3Amy^2 + y - Am) - Amy^3 - Amy - 1, \quad (5.51)$$

$$\Xi(x,y) = \frac{\sqrt{2H(x,y)-1} \left(2 - H(x,y)\right) + i(2-3H)}{2H^3(x,y)(x-y)^2}. \quad (5.52)$$

5.2.4 Výpočet Ψ_3 a Ψ_4

Výpočet Ψ_3 a Ψ_4 popisují z důvodu přímočarosti v jedné podsekcí. Začneme s Ψ_3 a porovnejme ho s Ψ_1 :

$$\Psi_1 = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha} l^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta} \quad \text{vs.} \quad \Psi_3 = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \lambda_{\alpha} k^{\beta} l^{\gamma} \bar{m}^{\delta}. \quad (5.53)$$

Porovnáním komponent nulové tetrády (5.24) a komponent její duální tetrády (5.25) je zřejmé, že všechny netriviální kombinace jsou stejné:

Ψ_3	α	β	γ	δ		α	β	γ	δ		α	β	γ	δ	
	0	0	0	1	\Re	1	0	0	1	\Re	3	0	0	2	\Im
	0	0	3	2	\Im	1	0	3	2	\Im	3	0	3	0	\Re
	0	3	0	2	\Im	1	3	0	2	\Im	3	0	3	1	\Re
	0	3	3	0	\Re	1	3	3	0	\Re	3	3	0	1	\Re
	0	3	3	1	\Re	1	3	3	1	\Re	3	3	3	2	\Im

Navíc součin $\kappa_{\alpha} l^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta}$ se liší od součinu $\lambda_{\alpha} k^{\beta} l^{\gamma} \bar{m}^{\delta}$ pouze ve znaménku pro $\alpha, \beta, \gamma = 3$ nebo $\delta = 2$. Z netriviálních kombinací ovšem vidíme, že počet trojek v prvních třech indexech a dvojek pro index δ je vždycky sudý, a tedy nutně

$$\Psi_3 = \Psi_1. \quad (5.54)$$

Zbývá nám tedy spočítat složku Ψ_4 , kterou porovnáme s Ψ_0 :

$$\Psi_0 = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha} m^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta} \quad \text{vs.} \quad \Psi_4 = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \lambda_{\alpha} \bar{m}^{\beta} l^{\gamma} \bar{m}^{\delta}. \quad (5.55)$$

Postupujeme v tomto případě identicky s minulým příkladem. Netriviální kombinace indexů α, β, γ a δ jsou stejné jako u Ψ_0 , tedy:

Ψ_4	α	β	γ	δ		α	β	γ	δ		α	β	γ	δ	
	0	0	0	1	\Re	1	0	0	1	\Re	3	0	0	2	\Im
	0	0	3	2	\Im	1	0	3	2	\Im	3	0	3	0	\Re
	0	1	0	1	\Re	1	1	0	1	\Re	3	0	3	1	\Re
	0	1	3	2	\Im	1	1	3	2	\Im	3	1	0	2	\Im
	0	2	0	2	\Re	1	2	0	2	\Re	3	1	3	0	\Re
	0	2	3	0	\Im	1	2	3	0	\Im	3	1	3	1	\Re
	0	2	3	1	\Im	1	2	3	1	\Im	3	2	0	1	\Im
															\Re

Součin $\kappa_{\alpha} m^{\beta} k^{\gamma} m^{\delta}$ se tentokrát liší ve znaménku od $\lambda_{\alpha} \bar{m}^{\beta} l^{\gamma} \bar{m}^{\delta}$ tehdy, je-li $\alpha, \gamma = 3$ nebo $\beta, \delta = 2$. Opět si ale můžeme všimnout, že počet trojek a dvojek v příslušných indexech je vždycky sudý, a tedy nutně

$$\Psi_4 = \Psi_0. \quad (5.56)$$

5.2.5 Shrnutí

Závěrem můžeme shrnout napočítané skaláry Ψ_A , které se mi podařilo vyfaktorizovat a upravit na jednoduchý tvar

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= 3\sqrt{\delta}(1-x^2)F(x)(y^2-1)F(y)\Xi(x,y), \\
\Psi_1 &= 3\sqrt{\delta}i\sqrt{(1-x^2)F(x)}\sqrt{(y^2-1)F(y)}S(x,y)\Xi(x,y), \\
\Psi_2 &= i\left[A^3m(x-y)^5 + i\sqrt{\delta}W(x,y)\right]\Xi(x,y), \\
\Psi_3 &= 3\sqrt{\delta}i\sqrt{(1-x^2)F(x)}\sqrt{(y^2-1)F(y)}S(x,y)\Xi(x,y), \\
\Psi_4 &= 3\sqrt{\delta}(1-x^2)F(x)(y^2-1)F(y)\Xi(x,y),
\end{aligned} \tag{5.57}$$

kde funkce $\Xi(x,y)$, $W(x,y)$ a $S(x,y)$ jsou dány

$$\Xi(x,y) = \frac{\sqrt{2H(x,y)-1}\left(2-H(x,y)\right) + i(2-3H)}{2H^3(x,y)(x-y)^2}, \tag{5.58}$$

$$W(x,y) = 2S^2(x,y) + \left(Am(x-y)^3 - (1-x^2)F(x)\right)(y^2-1)F(y), \tag{5.59}$$

$$S(x,y) = x(3Amy^2 + y - Am) - Amy^3 - Amy - 1. \tag{5.60}$$

Připomeňme především symetrii složek Weylova tenzoru:

$$\Psi_0 = \Psi_4, \quad \Psi_1 = \Psi_3. \tag{5.61}$$

Fakt, že jsou Weylovy skaláry takto vyfaktorizované a nakonec relativně jednoduché, přidává na důvěryhodnosti tohoto výsledku.

Všimněme si také, že pro $\delta = 0$ vymizí všechny skaláry vyjma Ψ_2 , který se zjednoduší na

$$\Psi_2 = -2mA(x-y)^3. \tag{5.62}$$

Porovnáním s (1.10) je očividné, že parametr δ bude přímo souviset s NUT parametrem l . V průběhu další kapitoly provedeme souřadnicovou transformaci metricky (4.1), která vysvětlí „nesrovnalost“ v přeškálování Ψ_2 faktorem 2.

5.3 Skalární invarianty I a J

Ze skalárů Ψ_A lze nyní spočítat invarianty I a J zavedené v kapitole 2 předpisy (2.7) a (2.8). Z nich pak odvodíme, jaký algebraický typ prostoročasu skaláry Ψ_A reprezentují.

Nejprve nás bude zajímat, zda se jedná o *algebraicky speciální typ* (všechny algebraické typy až na typ I). Takový prostoročas nutně musí splňovat rovnici

$$I^3 = 27J^2. \tag{5.63}$$

Práci nám značně usnadňují symetrie $\Psi_0 = \Psi_4$ a $\Psi_1 = \Psi_3$, díky nimž lze rovnici (5.63) upravit na tvar

$$\begin{aligned}
I^3 - 27J^2 &= \Psi_0^6 - \Psi_0^4(12\Psi_1^2 + 18\Psi_2^2) + 108\Psi_0^3\Psi_1^2\Psi_2 \\
&\quad - 3\Psi_0^2(20\Psi_1^4 + 60\Psi_1^2\Psi_2^2 - 27\Psi_4^4) \\
&\quad + 108\Psi_0\Psi_1^2\Psi_2(2\Psi_1^2 - \Psi_2^2) - 64\Psi_1^6 + 36\Psi_1^4\Psi_2^2.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Každý člen na pravé straně rovnice je součinem 6 skalárů Ψ_A a lze proto vytknout výraz $\Xi^6(x, y)$, neboť se $\Xi(x, y)$ vyskytuje ve všech složkách (5.57). Dostanu tedy podmínku

$$I^3 - 27J^2 = \Upsilon(x, y) \Xi^6(x, y). \quad (5.65)$$

Může být člen $\Xi(x, y)$ nulový? Připomeňme, že

$$\Xi(x, y) = \frac{\sqrt{2H(x, y) - 1} (2 - H(x, y)) + i(2 - 3H)}{2H^3(x, y)(x - y)^2}, \quad (5.66)$$

$$H(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{(y^2 - 1)F(y)}{A^2(x - y)^2} \right)^2, \quad (5.67)$$

viz (5.58) a (4.4). Funkce $\Xi(x, y)$ je nulová při divergenci $H(x, y)$, což nastává pro $A \rightarrow 0$ nebo pro $\delta \rightarrow +\infty$. Jak v následující kapitole uvidíme, odpovídají tyto řešení Taub-NUT metrice a C-metric, o nichž je známo, že jsou typu D.

Zjevně ale *neexistuje* taková netriviální kombinace parametrů m, A a δ , která by pro každé pevné x a y z definičního oboru zajistila, aby $H(x, y) = \frac{2}{3}$ a zároveň $H(x, y) = \frac{1}{2}$, nebo $H(x, y) = 2$.

Tedy jedinou možností, jak splnit podmínku (5.63) na algebraicky speciální typ prostoročasu, potom je $\Upsilon(x, y) = 0$. Funkci $\Upsilon(x, y)$ jsem explicitně spočítal pomocí programu *Derive 6*, nicméně se mi ji nepodařilo faktorizovat. Porovnáním (5.57) a (5.64) lze však snadno nahlédnout, že funkce $\Upsilon(x, y)$ má vzhledem ke svým proměnným x a y *polynomiální* charakter. Pokud by tedy měla existovat netriviální kombinace parametrů m, A a δ taková, že $\Upsilon(x, y) = 0$ pro každé pevné x a y z definičního oboru, potom by byl nulový *každý* prefaktor P_{ij} výrazu

$$\Upsilon(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N P_{ij} x^i y^j. \quad (5.68)$$

Stačí uvést, že prefaktor členu $x^{20} y^{15}$ je úměrný $A^{13} m^{11} \delta^{5/2}$, a tedy musí být alespoň jeden parametr nulový. Je-li však kterýkoliv parametr nulový, přechází metrika (4.1) na již známé metriky, o kterých víme, že jsou algebraicky speciální. To bude zřejmé z následující kapitoly, kde budeme interpretovat tyto parametry.

Zjistili jsme tedy, že metrika (4.1) je *algebraicky obecný prostoročas*.

5.4 Hlavní nulové směry

Pro lepší pochopení této metriky je důležité spočítat i příslušné čtyři různé hlavní nulové směry Weylova tenzoru. Známe skalární funkce Ψ_A , viz (5.57), vzhledem k nulové tetradě (5.24), přičemž známe i způsob, jak se tyto nulové směry transformují Lorentzovou transformací (2.3). Konstantu K lze dopočítat z kvartické rovnice (2.6)

$$\Psi_0 + 4K\Psi_1 + 6K^2\Psi_2 + 4K^3\Psi_3 + K^4\Psi_4 = \Psi'_0 = 0, \quad (5.69)$$

kde Ψ_A jsou již napočítané složky této skalární funkce (5.57) vzhledem k zavedené tetradě (5.24) a $\Psi'_0 = 0$ je požadavek na skalární funkci Ψ'_A vzhledem k nové tetradě (viz kapitola 2).

Rovnice (5.69) je kvartická rovnice a ze znalosti toho, že se jedná o obecný algebraický typ prostoročasu, víme, že tuto rovnici řeší 4 *různé* kořeny K .

Pro explicitní řešení této rovnice opět využijeme symetrie skalárních funkcí $\Psi_0 = \Psi_4$ a $\Psi_1 = \Psi_3$. Rovnici (5.69) lze díky tomu upravit do tvaru

$$\Psi_0 \left(K^2 + \frac{1}{K^2} \right) + 4\Psi_1 \left(K + \frac{1}{K} \right) + 6\Psi_2 = 0, \quad (5.70)$$

kde zjevně $K \neq 0$, pokud $\Psi_0 \neq 0$. Nyní zavedeme substituci

$$v = K + \frac{1}{K} \quad (5.71)$$

a přepíšeme kvartickou rovnici do tvaru

$$\Psi_0 v^2 + 4\Psi_1 v + 6\Psi_2 - 2\Psi_0 = 0. \quad (5.72)$$

Řešení této kvadratické rovnice je

$$v_{1,2} = \frac{-2\Psi_1 \pm \sqrt{4\Psi_1^2 - 2\Psi_0(3\Psi_2 - \Psi_0)}}{\Psi_0}. \quad (5.73)$$

Po dosazení složek Ψ_A z (5.57) lze po úpravě dojít ke vztahu

$$v_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}} \left[-iS(x,y) \pm \sqrt{\frac{1}{2}Am(x-y)^3 \sqrt{(y^2-1)F(y)} - i \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}}} \right]. \quad (5.74)$$

Nyní je klíčové upravit odmocninu z komplexního čísla. Obecně platí

$$\sqrt{\phi + i\psi} = \Phi + i\Psi, \quad (5.75)$$

z čehož lze vyjádřit Φ a Ψ ve tvaru

$$\Phi^2 = \frac{\phi + \sqrt{\phi^2 + \psi^2}}{2}, \quad (5.76)$$

$$\Psi^2 = \frac{-\phi + \sqrt{\phi^2 + \psi^2}}{2}, \quad (5.77)$$

kde jsme zároveň využili toho, že Φ a Ψ jsou reálná čísla a vyloučili tak řešení, pro které by $\Phi^2 < 0$ a $\Psi^2 < 0$. Toto nyní aplikujeme na komplexní odmocninu v (5.74), tedy

$$\phi = (y^2 - 1)F(y), \quad (5.78)$$

$$\psi = -\frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}}, \quad (5.79)$$

takže

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \frac{1}{2} \left[(y^2 - 1)F(y) + \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}} \sqrt{1 + \delta \frac{(y^2 - 1)^2 F^2(y)}{A^4(x-y)^4}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(y^2 - 1)F(y) + \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}} \sqrt{2H(x,y)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}} \left(\sqrt{2H(x,y)} + \sqrt{2H(x,y) - 1} \right), \tag{5.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi^2 &= \frac{1}{2} \left[-(y^2 - 1)F(y) + \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}} \sqrt{1 + \delta \frac{(y^2 - 1)^2 F^2(y)}{A^4(x-y)^4}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-(y^2 - 1)F(y) + \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}} \sqrt{2H(x,y)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}} \left(\sqrt{2H(x,y)} - \sqrt{2H(x,y) - 1} \right). \tag{5.81}
\end{aligned}$$

Po úpravě komplexní odmocniny lze tedy (5.74) přepsat na výsledný tvar

$$\begin{aligned}
v_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}} \\
&\left[\pm \sqrt{Am(x-y)^3} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \sqrt{\sqrt{2H(x,y)} + \sqrt{2H(x,y) - 1}} \right. \\
&\quad \left. -i \left(2S(x,y) \pm \sqrt{Am(x-y)^3} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \sqrt{\sqrt{2H(x,y)} - \sqrt{2H(x,y) - 1}} \right) \right]. \tag{5.82}
\end{aligned}$$

Je dobré uvědomit si, že z rovnice (5.75) plyne různost znamének funkcí Φ a Ψ , neboť ψ (5.79) je záporné.

Nyní již stačí dopočítat K z (5.71), čili kořen kvadratické rovnice

$$K^2 - vK - 1 = 0, \tag{5.83}$$

pro $v = v_1$ a $v = v_2$. Kořeny lze vyjádřit ve tvaru

$$K = \frac{v + \epsilon \sqrt{v^2 - 4}}{2}, \tag{5.84}$$

kde jsme zavedli veličinu ϵ , která může nabývat hodnot $+1$, nebo -1 . Tato veličina symbolizuje dvě různá řešení. Vzhledem k tomu, že v samo obsahuje dvě řešení v_1 a v_2 , dostáváme tak celkově 4 řešení K kvartické rovnice (5.69).

Vidíme, že je opět potřeba spočítat odmocninu komplexního čísla. Využijeme tedy vztahů (5.75)–(5.77) a přímým dosazením (5.82) do kořene této rovnice

získáváme

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}} \\
&\left\{ \pm \sqrt{Am(x-y)^3} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \sqrt{\sqrt{2H(x,y)} + \sqrt{2H(x,y)-1}} \right. \\
&-i \left(2S(x,y) \pm \sqrt{Am(x-y)^3} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \sqrt{\sqrt{2H(x,y)} - \sqrt{2H(x,y)-1}} \right) \\
&+ \epsilon \left[\sqrt{M(x,y) - \sqrt{M^2(x,y) + N^2(x,y)}} \right. \\
&\left. \left. + i \sqrt{-M(x,y) - \sqrt{M^2(x,y) + N^2(x,y)}} \right] \right\}, \tag{5.85}
\end{aligned}$$

kde $\epsilon = \pm 1$ a

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= -2S^2(x,y) + Am(x-y)^3(y^2-1)F(y) \\
&-2(1-x^2)F(x)(y^2-1)F(y) \tag{5.86} \\
&\mp 2S(x,y) \sqrt{Am(x-y)^3} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \sqrt{\sqrt{2H(x,y)} - \sqrt{2H(x,y)-1}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(x,y) &= -Am(x-y)^3 \frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{\delta}} \tag{5.87} \\
&\mp 2S(x,y) \sqrt{Am(x-y)^3} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \sqrt{\sqrt{2H(x,y)} + \sqrt{2H(x,y)-1}},
\end{aligned}$$

přičemž zopakujeme, že

$$H(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{(y^2-1)F(y)}{A^2(x-y)^2} \right)^2, \tag{5.88}$$

$$S(x,y) = x(3Amy^2 + y - Am) - Amy^3 - Amy - 1. \tag{5.89}$$

Evidentně je zde nutno předpokládat, že $\delta \neq 0$. Příslušné čtyři odlišné hlavní nulové směry \mathbf{k}' tohoto algebraicky obecného prostoročasu pak dostaneme aplikací Lorentzovy transformace (2.3) pro čtyři různá řešení K dané rovnicí (5.85), čili

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + K\bar{\mathbf{m}} + \bar{K}\mathbf{m} + K\bar{K}\mathbf{l}, \quad \mathbf{l}' = \mathbf{l}, \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} + K\mathbf{l}. \tag{5.90}$$

Ve speciálním případě $\delta = 0$ dostáváme přímo z (5.62), že prostoročas je algebraického typu D, přičemž \mathbf{k} a \mathbf{l} dané (5.24) jsou dvojnásobně degenerované hlavní nulové směry (odpovídající volbě $K = 0$ a $K = \infty$).

To lze ověřit z kořenu K , neboť pro $\delta \rightarrow 0$ začnou být dominantní členy s parametrem δ ve jmenovateli. Pro velké δ pak

$$\begin{aligned}
K_{\delta \rightarrow 0} &\approx \frac{\sqrt{Am(x-y)^3}}{2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \left\{ \pm (1-i) + \epsilon \left[\sqrt{-1} + i\sqrt{-1} \right] \right\}, \\
&= \frac{\sqrt{Am(x-y)^3}}{2 \sqrt{(1-x^2)F(x)} \sqrt{(y^2-1)F(y)}} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \left[(1-i)(\pm 1 - \epsilon) \right], \tag{5.91}
\end{aligned}$$

což odpovídá dvakrát degenerovanému řešení $K = 0$ a dvakrát degenerovanému řešení $K = \infty$.¹

Zatímco pro $A \rightarrow 0$ vidíme již z funkce v (5.82), že

$$\pm \sqrt{Am(x-y)^3} \frac{A(x-y)}{\sqrt[4]{\delta}} \sqrt{\sqrt{2H(x,y)} + \sqrt{2H(x,y) - 1}} \rightarrow 0, \quad (5.92)$$

a tedy kořen K řeší kvartickou rovnicí (5.69) pouze pro 2 různá řešení určenými hodnotou ϵ .

To potvrzuje naši představu, že metrika (4.1) přechází pro $A \rightarrow 0$ a $\delta \rightarrow 0$ na metriky, o nichž víme, že jsou algebraického typu D.

¹Kořen K je obecně komplexní funkce, přičemž na komplexní rovině existuje pouze jedno nekonečno.

6. Nový tvar metriky

Pro fyzikální interpretaci metriky (4.1) a kontrolu dosavadních výpočtů je nyní potřeba analyzovat její speciální případy a identifikovat je s již známými metrikami, zmíněnými v kapitole 1. Konkrétně to budou C-metrika (1.4), potažmo (1.8), pro nulový NUT parametr a Taub-NUT řešení (1.11) pro nulové zrychlení.

V závěru této kapitoly pak najdeme souřadnicovou transformaci metriky (4.1), která ji převede na tvar vhodný k přímočarým přechodům na tyto speciální případy.

6.1 Hledání NUT parametru

Začneme se speciálním případem přechodu na standardní Taub-NUT metriku. V první řadě musíme zjistit vztah mezi parametrem δ v metrice (4.1) a obvyklým NUT parametrem l v metrice (1.11). Problém ovšem nastává pro $A \rightarrow 0$, kde metrika diverguje. Problému se lze vyhnout, provedeme-li souřadnicovou transformaci metriky. Volíme podobnou transformaci, která byla použita v [5]:

$$x = -\cos\theta, \quad y = -\frac{1}{Ar}, \quad \delta = A^4\Delta, \quad t = \frac{\tau}{AC\xi\sqrt{\Delta}}. \quad (6.1)$$

Transformace se liší ve znaménku x -ové souřadnice a přeškálování času o $\frac{1}{C\xi\sqrt{\Delta}}$. Dodatečný parametr ξ využívá volnosti v přeškálování časové souřadnice a bude později jednoznačně zafixován.

Po transformaci dostáváme z (4.1) metriku

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2(r, \theta)} \left[-\frac{2Q(r)}{H_r(r, \theta)\xi} \left(d\tau + \sqrt{\Delta}\xi \left(\frac{AP(\theta)r^2\sin^2\theta}{\Omega^2(r, \theta)} - 2m\cos\theta \right) d\varphi \right)^2 + \frac{H_r(r, \theta)\xi}{2} \left(\frac{dr^2}{Q(r)} + \frac{r^2 d\theta^2}{P(\theta)} + P(\theta)r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right], \quad (6.2)$$

kde

$$\begin{aligned} \Omega(r, \theta) &= 1 - Ar\cos\theta, \\ P(\theta) &= 1 - 2Am\cos\theta, \\ Q(r) &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(1 - A^2r^2), \\ H_r(r, \theta) &= 1 + \Delta \frac{Q^2(r)}{\Omega^4(r, \theta)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Vidíme, že nový tvar metriky (6.2) je výhodný v tom, že nám umožňuje snadno „vypnout“ parametr zrychlení,¹ tedy položit $A = 0$. Tím se řešení redukuje a my se ho nyní pokusíme identifikovat s Taub-NUT metrikou (1.11), přičemž najdeme

¹Mlčky předpokládáme, že A je opravdu parametr zrychlení, což prokážeme na konci této kapitoly, kde přímo potvrdíme, že metrika (6.2) přechází v C-metriku s parametrem zrychlení A v případě, kdy vypneme NUT parametr.

vztah mezi Δ a NUT parametrem l . Metrika (6.2) přejde pro $A = 0$ na jednodušší tvar

$$ds^2 = -\frac{1 - \frac{2m}{r}}{\frac{1}{2}\xi \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2\right)} (d\tau - 2m\xi\sqrt{\Delta} \cos\theta d\varphi)^2 \quad (6.4)$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\xi \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2\right)}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + \frac{1}{2}\xi \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2\right) r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Porovnáním s metrikou (1.11) a funkcí $f(R)$ (1.12) lze nyní určit vztahy

$$R^2 + l^2 = \frac{1}{2}\xi r^2 \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2\right), \quad (6.5)$$

$$R^2 - 2MR - l^2 = r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (6.6)$$

$$l = m\xi\sqrt{\Delta}, \quad (6.7)$$

kde R je radiální souřadnice Taub-NUT metriky, M jeho hmotnost a l NUT parametr.² Zároveň platí identifikace $\bar{t} = \tau$ a $\phi = \varphi$.

Uvědomme si však jednu podstatnou věc. Z podobnosti těchto metrik jsme usoudili, že je rozumné předpokládat rovnost $dR^2 = dr^2$. Předpokládáme tedy, že platí

$$R = \pm r + const. \quad (6.8)$$

Z této vlastnosti se nám podaří jednoznačně určit hodnotu parametru ξ .

Pokusme se nyní najít explicitní tvar mezi r a R . Ze vztahů (6.5)–(6.7) zřejmě

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2M} [(R^2 + l^2) - (R^2 - 2MR - l^2) - 2l^2] \\ &= \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{2}\xi r^2 \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2\right) - r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - 2\Delta m^2 \xi^2 \right] \\ &= \frac{1}{2M} \left[\left(\frac{1}{2}\xi(1 + \Delta) - 1\right) r^2 + 2m(1 - \xi\Delta)r + 2m^2\xi\Delta(1 - \xi) \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

což je explicitní závislost R na r . My však předpokládáme jejich *lineární* závislost (6.8). Lineární vztah lze ale splnit pouze pro

$$\xi = \frac{2}{1 + \Delta}. \quad (6.10)$$

Nyní lze již jednoznačně určit vztahy (6.5)–(6.7):

$$R^2 + l^2 = \frac{1}{1 + \Delta} r^2 \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2\right), \quad (6.11)$$

$$R^2 - 2MR - l^2 = r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (6.12)$$

$$l = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 + \Delta} m, \quad (6.13)$$

²Počítejme s l kladné, přičemž na konci bude rozšíření pro l záporné přímočaré.

příčemž metrika (6.2) má explicitní tvar

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2(r, \theta)} \left[-Q(r) \frac{1 + \Delta}{H_r(r, \theta)} \left(d\tau + \frac{l}{m} \left(\frac{AP(\theta)r^2 \sin^2\theta}{\Omega^2(r, \theta)} - 2m \cos\theta \right) d\varphi \right)^2 + \frac{H_r(r, \theta)}{1 + \Delta} \left(\frac{dr^2}{Q(r)} + \frac{r^2 d\theta^2}{P(\theta)} + P(\theta)r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right]. \quad (6.14)$$

Dále lze dosazením ξ do (6.9) určit, že

$$R = \frac{1}{M} \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta} \left(mr - m^2 \frac{2\Delta}{1 + \Delta} \right), \quad (6.15)$$

respektive

$$M = \frac{1}{R} \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta} \left(mr - m^2 \frac{2\Delta}{1 + \Delta} \right), \quad (6.16)$$

příčemž z (6.11) a (6.13) dále platí

$$\begin{aligned} |R| &= \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta} r^2 \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \right) - l^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta} r^2 \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \right) - \frac{4\Delta m^2}{(1 + \Delta)^2}} \\ &= \left| \frac{(1 + \Delta)r - 2m\Delta}{1 + \Delta} \right| \\ &= \left| r - m \frac{2\Delta}{1 + \Delta} \right| = \left| r - \sqrt{\Delta} l \right|, \end{aligned} \quad (6.17)$$

což nám dává dvě možná řešení, která odpovídají našemu předpokladu (6.8).

My však jedno řešení nebudeme brát v potaz, neboť se zdá přirozené předpokládat, že radiální souřadnice R bude pouze posunutá vůči r , nikoliv navíc zrcadlově převrácena. Vycházíme především z přesvědčení, že při „vypnutí“ jednotlivých parametrů získáme přímo známé tvary metrik, bez nutnosti provádět transformaci typu $R \rightarrow -R$. Máme tedy:

$$R = r - \sqrt{\Delta} l. \quad (6.18)$$

Zároveň nesmíme zapomenout na fakt, že radiální souřadnice Taub-NUT metriky R dosahuje plného rozsahu $(-\infty, +\infty)$, zatímco radiální souřadnice C-metriky $r \in (0, +\infty)$, protože se v $r = 0$ nachází fyzikální singularita. Navíc pro $l = 0$ splývá R s r a lze s ním ekvivalentně popisovat C-metiku. Nicméně pro $A = 0$ je souřadnice r posunutá o $\sqrt{\Delta} l$ od klasického souřadnicového počátku Taub-NUT metriky. Ukazuje se tedy vhodnější volit R jako radiální souřadnici i pro popis obecné metriky (6.14). K této úvaze se vrátíme při přepisu obecné metriky v následující sekci 6.2, nejprve však budeme potřebovat interpretovat význam parametru Δ .

Ze vztahu (6.18) zjišťujeme ještě jednu klíčovou informaci. Po dosazení vztahu do (6.16) dostáváme jednoznačný vztah mezi M a m , totiž

$$M = \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta} m. \quad (6.19)$$

Stojí za zmínku uvědomit si, že M a m mohou být současně nezáporné pouze pro $\Delta \in [0, 1]$, pro $\Delta \in [1, +\infty)$ získáme vzájemně nesouhlasná znaménka.³

Provedli jsme tedy přechod k Taub-NUT metrice, kdy $A = 0$, a odvodili jsme vztah mezi NUT parametrem l a Δ . Nyní se pokusíme přepsat metriku (6.14) na tvar, kde se nebude vyskytovat Δ , ale l . K tomu však budeme potřebovat lépe porozumět tomuto parametru.

6.2 Fyzikální interpretace parametru Δ

Pro fyzikální interpretaci vztahů (6.18) a (6.19) je ještě potřeba vyjasnit význam bezrozměrného parametru Δ . Ze vztahu (6.13) víme, že má určitý vztah k NUT parametru l , a sice

$$l = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 + \Delta} m. \quad (6.20)$$

Porovnáním s grafy na obr. 6.1 vidíme, že $l(\Delta)$ není prostá funkce. Konkrétně jednomu NUT parametru l odpovídají *dvě hodnoty* parametru Δ . Maximum této funkce je vždy v $\Delta = 1$, a lze tedy diskutovat dva odlišné případy $\Delta \in [0, 1]$ a $\Delta \in [1, +\infty)$.

Vyjádříme nyní Δ ze vztahu (6.20) řešením příslušné kvadratické rovnice:

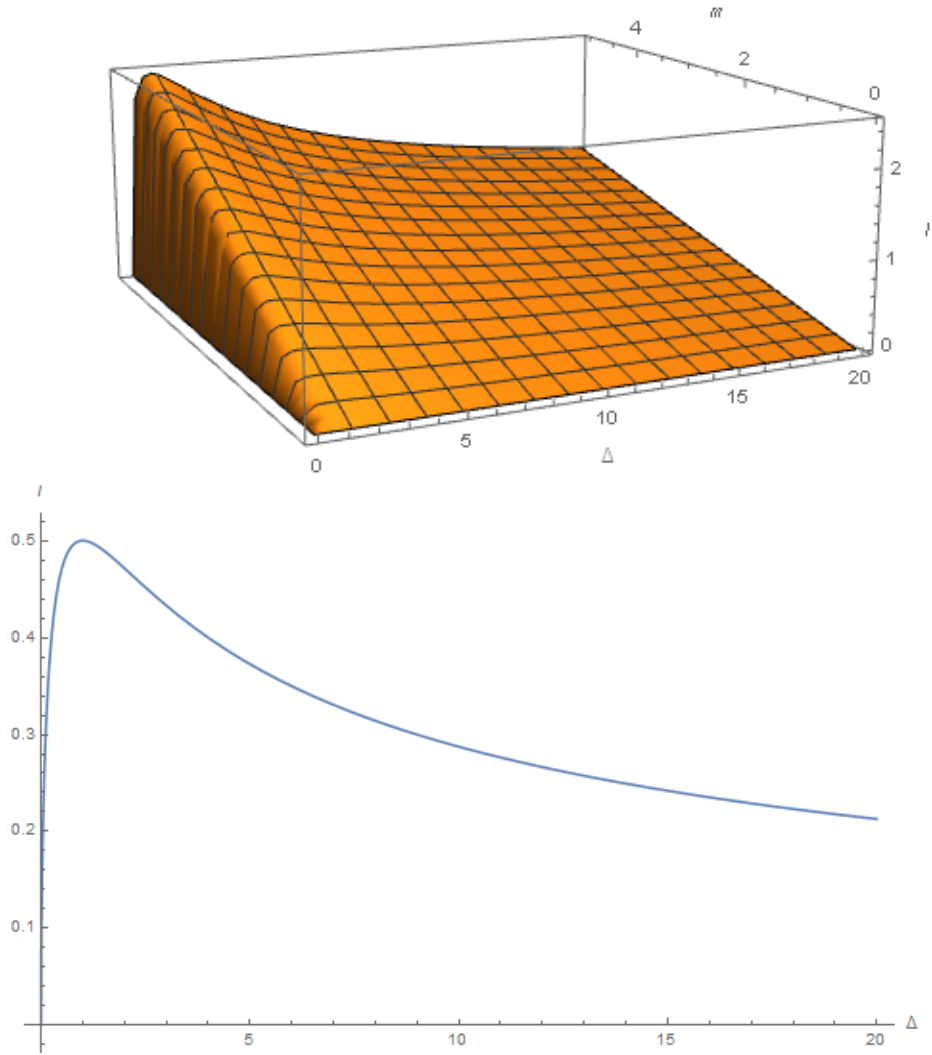
$$\Delta = -1 + \frac{2m^2}{l^2} \mp 2\frac{m}{l}\sqrt{\frac{m^2}{l^2} - 1}. \quad (6.21)$$

Podle očekávání získáváme 2 řešení. Řešení s $-$ bude odpovídat intervalu $[0, 1]$ a řešení s $+$ intervalu $[1, +\infty)$.

Tento vztah je problematický pro $l = 0$, nicméně z (6.20) je zjevné, že l nabývá nuly pro $\Delta = 0$ a pro $\Delta \rightarrow +\infty$. Rádi bychom později dosadili Δ do metriky (6.14), tak aby se pro $l = 0$ zredukovala na C-metriku. Jednoduchým trikem lze tento problém obejít úpravou

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[-1 + \frac{2m^2}{l^2} \mp 2\frac{m}{l}\sqrt{\frac{m^2}{l^2} - 1} \right] \times \frac{-1 + \frac{2m^2}{l^2} \pm 2\frac{m}{l}\sqrt{\frac{m^2}{l^2} - 1}}{-1 + \frac{2m^2}{l^2} \pm 2\frac{m}{l}\sqrt{\frac{m^2}{l^2} - 1}} \\ &= \frac{l^2}{2m^2 \pm 2m\sqrt{m^2 - l^2} - l^2} \\ &= \frac{l^2}{(m \pm \sqrt{m^2 - l^2})^2} \\ &= \frac{(m \mp \sqrt{m^2 - l^2})^2}{l^2}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

³Předpokládáme $\Delta \geq 0$, viz (3.5).



Obrázek 6.1: Výše: Závislost NUT parametru l na m a Δ . Níže: Funkce $l(\Delta)$ pro speciální případ $m = 1$.

Ze vztahu (6.22) a vztahu mezi M a m (6.19) lze stejným trikem ukázat, že

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta} m = \frac{1 - (m \mp \sqrt{m^2 - l^2})^2 l^{-2}}{1 + (m \mp \sqrt{m^2 - l^2})^2 l^{-2}} m \\
 &= -\frac{(2m^2 \mp 2m\sqrt{m^2 - l^2} - l^2) - l^2}{(2m^2 \mp 2m\sqrt{m^2 - l^2} - l^2) + l^2} m \\
 &= -\frac{m^2 \mp m\sqrt{m^2 - l^2} - l^2}{m^2 \mp m\sqrt{m^2 - l^2}} m \times \frac{m^2 \pm m\sqrt{m^2 - l^2}}{m^2 \pm m\sqrt{m^2 - l^2}} \\
 &= \pm \sqrt{m^2 - l^2}, \tag{6.23}
 \end{aligned}$$

neboli

$$M^2 = m^2 - l^2. \tag{6.24}$$

Nyní je zřejmé, že intervalu $\Delta \in [0, 1]$ odpovídá nezáporné M a intervalu

$\Delta \in [1, +\infty)$ nekladné M . Dosazením do (6.22) získáváme

$$\Delta = \frac{(m \mp \sqrt{m^2 - l^2})^2}{l^2} = \frac{(M \mp \sqrt{M^2 + l^2})^2}{l^2} = \frac{(|M| - \sqrt{M^2 + l^2})^2}{l^2}, \quad (6.25)$$

tedy

$$\Delta = \frac{R_-^2}{l^2}. \quad (6.26)$$

V tomto vztahu jsme označili $R_- = |M| - \sqrt{M^2 + l^2}$, což je Killingův horizont Taub-NUT metriky (1.14). Na první pohled by se zdálo, že tento výraz popisuje oba Killinovy horizonty Taub-NUT metriky, nesmíme však zapomenout na fakt, že M je pro případ $+$ nekladný. Nyní dokážeme plně porozumět vztahům mezi radiálními souřadnicemi r a R , neboť z (6.18) zřejmě

$$R = r - |R_-| = r + R_-. \quad (6.27)$$

Tento výsledek se zdá být velmi přesvědčivý. Ukazuje totiž, že počátek radiální souřadnice r je posunutý k něčemu, co je ve speciálním případě Taub-NUT metriky horizontem.

Nicméně stále ještě nelze triviálně „vypnout“ parametr l , kterým bychom rádi nahradili Δ v metrice (6.14). My však víme již ze vztahu (6.22), že lze vyjádřit Δ ve tvaru

$$\Delta = \frac{l^2}{(m \pm \sqrt{m^2 - l^2})^2} = \frac{l^2}{(M \pm \sqrt{M^2 + l^2})^2} = \frac{l^2}{(|M| + \sqrt{M^2 + l^2})^2}, \quad (6.28)$$

takže

$$\Delta = \frac{l^2}{R_+^2}. \quad (6.29)$$

Tento tvar nám již dovoluje položit $l = 0$, nicméně je dobré uvědomit si, zda je tento krok zcela regulérní, neboť jsme prováděli úpravy, kde jsme tento bod vyjmuli.

Pokud se však znova podíváme na výraz (6.20), ze kterého jsme vycházeli, uvědomíme si, že $l = 0$ pro $\Delta = 0$ v intervalu $[0, 1]$ a pro $\Delta \rightarrow +\infty$ v intervalu $[1, +\infty)$. Funkci $\Delta(l)$ lze tedy spojitě dodefinovat na celém intervalu $[0, +\infty)$.

Nyní nám již nic nebrání v přepsání metriky (6.14) na ještě výhodnější tvar.

6.3 Nový tvar metriky

Náš nový tvar metriky přizpůsobíme radiální souřadnici R a hmotnostnímu parametru M . Vzhledem k tomu, že se jedná o souřadnici i parametr Taub-NUT metriky (1.11), pokusíme se nový tvar metriky co nejvíce přiblížit této metrice. Uveďme nejprve metriku (6.14), ze které vycházíme:

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2(r, \theta)} \left[-Q(r) \frac{1 + \Delta}{H_r(r, \theta)} \left(d\tau + \frac{l}{m} \left(\frac{AP(\theta)r^2 \sin^2\theta}{\Omega^2(r, \theta)} - 2m \cos\theta \right) d\varphi \right)^2 + \frac{H_r(r, \theta)}{1 + \Delta} \left(\frac{dr^2}{Q(r)} + \frac{r^2 d\theta^2}{P(\theta)} + P(\theta)r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right], \quad (6.30)$$

kde

$$\begin{aligned}
\Omega(r, \theta) &= 1 - Ar \cos \theta, \\
P(\theta) &= 1 - 2Am \cos \theta, \\
Q(r) &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (1 - A^2 r^2), \\
H_r(r, \theta) &= 1 + \Delta \frac{Q^2(r)}{\Omega^4(r, \theta)}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Ze vztahů (6.23) a (6.27) vyjádříme M a R a dosadíme do metriky (6.30). Při vyjadřování m získáme opět dvě řešení, nicméně to záporné nebereme v potaz, neboť pro speciální případ C-metriky pracujeme s $m \geq 0$. Pokud m nahradíme výrazem $\sqrt{M^2 + l^2}$, lze počítat pouze s $M \geq 0$.

Po dosazení získáme

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{\Omega^2(R, \theta)} \left[-Q(R) \frac{1 + \Delta}{H_R(R, \theta)} \right. \\
&\quad \times \left(d\tau + \left(\frac{Al(R - R_-)^2 P(\theta) \sin^2 \theta}{\sqrt{M^2 + l^2} \Omega^2(R, \theta)} - 2l \cos \theta \right) d\varphi \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{H_R(R, \theta)}{1 + \Delta} \left(\frac{dR^2}{Q(R)} + \frac{(R - R_-)^2 d\theta^2}{P(\theta)} + P(\theta)(R - R_-)^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \right],
\end{aligned} \tag{6.32}$$

kde

$$\begin{aligned}
\Omega(R, \theta) &= 1 - A(R - R_-) \cos \theta, \\
P(\theta) &= 1 - 2A\sqrt{M^2 + l^2} \cos \theta, \\
Q(R) &= \left(1 - \frac{2\sqrt{M^2 + l^2}}{R - R_-}\right) [1 - A^2(R - R_-)^2], \\
H_R(R, \theta) &= 1 + \frac{l^2}{R_+^2} \frac{Q^2(R)}{\Omega^4(R, \theta)},
\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\tag{6.34}$$

přičemž

$$R_+ = M + \sqrt{M^2 + l^2}, \tag{6.35}$$

$$R_- = M - \sqrt{M^2 + l^2}. \tag{6.36}$$

Pro $A = 0$ je $\Omega(R, \theta) = 1$. Ukazuje se také příhodné označit

$$\mathcal{F}(R, \theta) = Q(R) \frac{1 + \Delta}{H_R(R, \theta)}, \tag{6.37}$$

přičemž pro $A = 0$ přejde $\mathcal{F}(R, \theta)$ na $f(R)$ (1.12). Budeme však muset $\mathcal{F}(R, \theta)$ upravit do tvaru vhodného pro přímočaré „vypínání“ tohoto parametru.

Porovnání s (6.11) a (6.12) nám dává nápovědu, jak bychom mohli postupovat. Označíme si nový čitatel a jmenovatel funkce $\mathcal{F}(R, \theta)$:

$$\mathcal{N}(R) = (R - R_-)^2 Q(R), \tag{6.38}$$

$$\mathcal{D}(R, \theta) = \frac{1}{1 + \Delta} (R - R_-)^2 H_R(R, \theta), \tag{6.39}$$

přičemž zřejmě

$$\mathcal{F}(R, \theta) = \frac{\mathcal{N}(R)}{\mathcal{D}(R, \theta)}. \quad (6.40)$$

Upravme nejprve $\mathcal{N}(R)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(R) &= (R - R_-)^2 Q(R) = \left(1 - \frac{2\sqrt{M^2 + l^2}}{R - R_-}\right) (R - R_-)^2 [1 - A^2(R - R_-)^2] \\ &= (R - R_- - 2\sqrt{M^2 + l^2})(R - R_-) [1 - A^2(R - R_-)^2] \\ &= (R - R_+)(R - R_-) [1 - A^2(R - R_-)^2] \\ &= (R^2 - 2MR - l^2) [1 - A^2(R - R_-)^2]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

První součinitel je přesně to, co bychom očekávali! Výpočet jmenovatele $\mathcal{D}(R, \theta)$ funkce $\mathcal{F}(R, \theta)$ však nebude tak přímočarý. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{F}(R, \theta)$ přejde pro $A = 0$ na

$$f(R) = \frac{R^2 - 2MR - l^2}{R^2 + l^2}, \quad (6.42)$$

lze očekávat, že jmenovatel $\mathcal{D}(R, \theta)$ přejde pro $A = 0$ na $R^2 + l^2$. Výraz $\mathcal{D}(R, \theta)$ lze obecně upravit na

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R, \theta) &= \frac{1}{1 + \Delta} (R - R_-)^2 H_R(R, \theta) \\ &= \frac{1}{1 + \Delta} (R - R_-)^2 \left(1 + \Delta \frac{Q^2(R)}{\Omega^4(R, \theta)}\right) \\ &= \frac{l}{2m\sqrt{\Delta}} (R - R_-)^2 \left(1 + \Delta \frac{Q^2(R)}{\Omega^4(R, \theta)}\right) \\ &= \frac{R_+}{2\sqrt{M^2 + l^2}} (R - R_-)^2 \left(1 + \frac{l^2}{R_+^2} \frac{Q^2(R)}{\Omega^4(R, \theta)}\right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Výrazem $(R - R_-)^2$ roznásobme závorku a převedme na společný jmenovatel. Spočtěme proto nejprve

$$\begin{aligned} (R - R_-)^2 Q^2(R) &= (R - R_-)^2 \left(1 - \frac{2\sqrt{M^2 + l^2}}{R - R_-}\right)^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2 \\ &= \left(R - R_- - 2\sqrt{M^2 + l^2}\right)^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2 \\ &= (R - R_+)^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2, \end{aligned} \quad (6.44)$$

a tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R, \theta) &= \frac{R_+}{2\sqrt{M^2 + l^2}} \left[(R - R_-)^2 + \frac{l^2}{R_+^2} \frac{(R - R_+)^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2}{\Omega^4(R, \theta)} \right] \\ &= \frac{1}{2R_+ \Omega^4(R, \theta) \sqrt{M^2 + l^2}} R_+^2 \Omega^4(R, \theta) \left[R^2 - 2R_- R + R_-^2 \right. \\ &\quad \left. + l^2 (R^2 - 2R_+ R + R_+^2) [1 - A^2(R - R_-)^2]^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Nyní je klíčové uvědomit si, které členy úměrné polynomu v R ve speciálních případech vymizí. Přepíšme $\mathcal{D}(R, \theta)$ na tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R, \theta) = & \frac{R_+^2 \Omega^4(R, \theta) + l^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2}{2R_+ \Omega^4(R, \theta) \sqrt{M^2 + l^2}} R^2 \\ & - \frac{2R_- R_+^2 \Omega^4(R, \theta) + 2l^2 R_+ [1 - A^2(R - R_-)^2]^2}{2R_+ \Omega^4(R, \theta) \sqrt{M^2 + l^2}} R \\ & + \frac{R_-^2 R_+^2 \Omega^4(R, \theta) + l^2 R_+^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2}{2R_+ \Omega^4(R, \theta) \sqrt{M^2 + l^2}}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Naším cílem je upravit tento výraz do tvaru, ve kterém bychom při triviálním „vypnutí“ NUT parametru l získali R^2 a při „vypnutí“ parametru zrychlení A dostali výraz $R^2 + l^2$. Je pozoruhodné, že lze zavést zcela novou funkci $\Theta(R, \theta)$, která je jak pro $A = 0$, tak pro $l = 0$ nulová a výrazně nám tak zjednodušuje úpravu. Definujme tedy

$$\Theta(R, \theta) \equiv l^2 \left([1 - A^2(R - R_-)^2]^2 - \Omega^4(R, \theta) \right), \quad (6.47)$$

což po úpravě dává

$$\begin{aligned} \Theta(R, \theta) = & Al^2(R - R_-) \left[-2A(R - R_-) + 2 \cos \theta + A(R - R_-) \sin^2 \theta \right] \\ & \times [2 - 2A(R - R_-) \cos \theta - A^2(R - R_-)^2 \sin^2 \theta], \end{aligned} \quad (6.48)$$

kde je přímo vidět, že

$$\Theta_{A=0}(R, \theta) = \Theta_{l=0}(R, \theta) = 0. \quad (6.49)$$

Předtím než dosadíme funkci $\Theta(R, \theta)$ do $\mathcal{D}(R, \theta)$, využijeme ještě těchto dvou vztahů:

$$\begin{aligned} 2R_+ \Omega^4(R, \theta) \sqrt{M^2 + l^2} &= \Omega^4(R, \theta) (2M^2 + 2M \sqrt{M^2 + l^2} + 2l^2) \\ &= \Omega^4(R, \theta) (R_+^2 + l^2), \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$R_- R_+ = -l^2, \quad (6.51)$$

které převedou $\mathcal{D}(R, \theta)$ v rovnici (6.46) na tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R, \theta) = & \frac{R_+^2 \Omega^4(R, \theta) + l^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2}{\Omega^4(R, \theta) (R_+^2 + l^2)} R^2 \\ & + \frac{2l^2 R_+ \Omega^4(R, \theta) - 2l^2 R_+ [1 - A^2(R - R_-)^2]^2}{2R_+ \Omega^4(R, \theta) \sqrt{M^2 + l^2}} R \\ & + \frac{l^4 \Omega^4(R, \theta) + l^2 R_+^2 [1 - A^2(R - R_-)^2]^2}{\Omega^4(R, \theta) (R_+^2 + l^2)}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Nyní je jen krůček k vyjádření pomocí funkce $\Theta(R, \theta)$, neboť

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R, \theta) = & \frac{(R_+^2 + l^2) + l^2 \left[[1 - A^2(R - R_-)^2]^2 - \Omega^4(R, \theta) \right]}{\Omega^4(R, \theta) (R_+^2 + l^2)} R^2 \\ & + \frac{l^2 \left[\Omega^4(R, \theta) - [1 - A^2(R - R_-)^2]^2 \right]}{\Omega^4(R, \theta) \sqrt{M^2 + l^2}} R \\ & + \frac{(R_+^2 + l^2) \Omega^4(R, \theta) + R_+^2 \left[[1 - A^2(R - R_-)^2]^2 - \Omega^4(R, \theta) \right]}{\Omega^4(R, \theta) (R_+^2 + l^2)} l^2, \end{aligned} \quad (6.53)$$

a tedy

$$\mathcal{D}(R, \theta) = (1 + \Theta(R, \theta))R^2 - \frac{\Theta(R, \theta)}{\Omega^4(R, \theta)\sqrt{M^2 + l^2}} R + l^2 + R_+^2 \Theta(R, \theta). \quad (6.54)$$

Dostali jsme se tak k našemu finálnímu výsledku: *nový tvar metriky lze zapsat*

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2(R, \theta)} \left[-\mathcal{F}(R, \theta) \left(d\tau - 2l \left(\cos \theta - A \frac{(R - R_-)^2 P(\theta) \sin^2 \theta}{(R_+ - R_-) \Omega^2(R, \theta)} \right) d\varphi \right)^2 + \frac{dR^2}{\mathcal{F}(R, \theta)} + \mathcal{D}(R, \theta) \left(\frac{d\theta^2}{P(\theta)} + P(\theta) \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \right], \quad (6.55)$$

kde

$$\begin{aligned} \Omega(R, \theta) &= 1 - A(R - R_-) \cos \theta, \\ P(\theta) &= 1 - A(R_+ - R_-) \cos \theta, \\ \mathcal{F}(R, \theta) &= \frac{\mathcal{N}(R)}{\mathcal{D}(R, \theta)}, \\ \mathcal{N}(R) &= (R^2 - 2MR - l^2) [1 - A^2(R - R_-)^2], \\ \mathcal{D}(R, \theta) &= R^2 + l^2 + \Theta(R, \theta) \left[R^2 - \frac{2R}{\Omega^4(R, \theta)(R_+ - R_-)} + R_+^2 \right], \\ \Theta(R, \theta) &= l^2 \left([1 - A^2(R - R_-)^2]^2 - \Omega^4(R, \theta) \right), \end{aligned} \quad (6.56)$$

přičemž konstanty určující polohy horizontů jsou

$$R_+ = M + \sqrt{M^2 + l^2}, \quad (6.57)$$

$$R_- = M - \sqrt{M^2 + l^2}, \quad (6.58)$$

takže

$$R_+ - R_- = 2\sqrt{M^2 + l^2}. \quad (6.59)$$

Tímto jsme získali nový tvar metriky, který položením $l = 0$ anebo $A = 0$ *přímo přechází ve známé tvary metrik*, viz následující sekce 6.4 a 6.5.

Z tohoto nového tvaru metriky je navíc zřejmé, že stejně jako v případě Taub-NUT metriky rozhoduje o časupodobnosti/prostorupodobnosti souřadnic znaménko funkce $\mathcal{F}(R, \theta)$. Její čitatel $\mathcal{N}(R)$ lze navíc explicitně rozložit na kořeny přímo určující polohy horizontů:

$$\mathcal{N}(R) = (R - R_-)(R - R_+) [1 - A(R - R_-)] [1 + A(R - R_-)]. \quad (6.60)$$

Zřejmě si tak $\mathcal{N}(R)$ zachovává podobnou strukturu jako pro Taub-NUT metriku. Funkce R_- a R_+ jsou v Taub-NUT metrice interpretovány coby Killingovy horizonty – geometrické místo bodů (událostí), kde norma Killingova vektoru ∂_τ je nulová a charakter souřadnice R přechází z prostorupodobného na časupodobný, zatímco souřadnice τ z časupodobného na prostorupodobný. Tuto povahu si R_- a R_+ ponechávají i v naší zobecněné metrice (6.55) popisující zrychlenou černou díru s NUT parametrem.

Tyto dva *černoděrové Killingovy horizonty* doprovází nyní ještě další dva horizonty, které odpovídají vlastnostem urychlené metriky, a sice *akceleračním horizontům*. Jsou dva, neboť narozdíl od C-metriky souřadnice $R \in (-\infty, +\infty)$.

6.4 Přechod k C-metrice

Přechod k C-metrice lze nyní snadno získat „vypnutím“ NUT parametru l . Lze si snadno ověřit, že nový tvar metriky (6.55) přechází na C-metricku (1.5). Opravdu, funkce $\mathcal{D}(R, \theta)$ má pro speciální případ $l = 0$ tvar

$$\mathcal{D}_{l=0}(R, \theta) = R^2, \quad (6.61)$$

a tedy

$$\mathcal{F}_{l=0}(R, \theta) = \frac{(R^2 - 2MR)(1 - A^2R^2)}{R^2}, \quad (6.62)$$

což je právě

$$Q_{l=0}(R) = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) (1 - A^2R^2). \quad (6.63)$$

a tedy v důsledku $\Theta_{l=0} = 0$ je metrika

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega_{l=0}^2(R, \theta)} \left[-Q_{l=0}(R) d\tau^2 + \frac{dR^2}{Q_{l=0}(R)} + \frac{R^2 d\theta^2}{P_{l=0}(\theta)} + P_{l=0}(\theta) R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (6.64)$$

kde

$$\begin{aligned} \Omega_{l=0}(R, \theta) &= 1 - AR \cos \theta, \\ P_{l=0}(\theta) &= 1 - 2AM \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.65)$$

To je *přesně C-metrika* ve tvaru (1.5)–(1.7) s identifikací $r = R$. Navíc: protože A je *parametr zrychlení* v C-metrice, lze stejně interpretovat A v obecné metrice (6.55).

Tento speciální případ lze využít i pro kontrolu Weylových skalárů Ψ_A (5.57). Ze vztahu (6.13) a jeho grafického znázornění (Obr. 6.1) je zřejmé, že $l = 0$ pouze pro $\Delta = 0$, nebo pro $\Delta \rightarrow +\infty$. Pro pevné nenulové A toto jistě platí i pro $\delta = 0$, nebo pro $\delta \rightarrow +\infty$ (6.1). Pro oba případy vyjde nenulový pouze skalár:

$$\Psi_2 = -2mA^3 (x - y)^3. \quad (6.66)$$

Vidíme, že výsledek se liší od očekávaného výrazu (1.10) pouze o dvojkou. To je však důsledek souřadnicové transformace (6.1), kde jsme mimo jiné přenásobili celou metriku parametrem ξ z (6.10). Jednou kontravariantní Weylův tenzor je invariantní vůči přenásobení metriky konformním faktorem [23], nicméně skaláry Ψ_A jsou složky plně kovariantního Weylova tenzoru a není tak překvapením, že se výsledek (6.66) liší o dvojkou, neboť parametr ξ je pro $\Delta = 0$ roven dvěma.⁴

⁴Případ $\Delta \rightarrow +\infty$ neuvažujeme, neboť pak $\xi \rightarrow 0$ a výraz degeneruje.

6.5 Přechod k Taub-NUT metrice

Položíme-li naopak v metrice (6.55) parametr zrychlení A roven nule, dostaneme

$$\begin{aligned}\Omega_{A=0}(R, \theta) &= 1, \\ P_{A=0}(R, \theta) &= 1, \\ \Theta_{A=0}(R, \theta) &= 0, \\ \mathcal{N}_{A=0}(R) &= R^2 - 2MR - l^2, \\ \mathcal{D}_{A=0}(R, \theta) &= R^2 + l^2\end{aligned}\tag{6.67}$$

a tedy

$$ds^2 = -\mathcal{F}_{A=0}(R)(d\tau - 2l \cos \theta d\varphi)^2 + \frac{dR^2}{\mathcal{F}_{A=0}(R)} + (R^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \tag{6.68}$$

kde

$$\mathcal{F}_{A=0}(R) = \frac{R^2 - 2MR - l^2}{R^2 + l^2}, \tag{6.69}$$

což je přesně Taub-NUT metrika v kanonickém tvaru (1.11) s identifikací $\mathcal{F}_{A=0} = f$ a $\bar{t} = \tau$.

Podobně jako u přechodu C-metricky zkontrolujeme i přechod skaláru Ψ_A .

Vezmeme námi vypočítané Ψ_A (5.57), provedeme souřadnicovou transformaci (6.1) a položíme $A = 0$. Jediný nenulový člen nám vyjde Ψ_2 , což je v souladu s očekáváním:

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= \left[-2m(8m^3\Delta^2 - 12m^2r\Delta(\Delta + 1) + 6mr^2\Delta(\Delta + 1) + r^3(1 - \Delta^2)) \right. \\ &\quad \left. + 4m\sqrt{\Delta}(4m^3\Delta - 3mr^2(\Delta + 1) + r^3(\Delta + 1))i \right] \left[r^2 \left(1 + \Delta \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \right) \right]^{-3}\end{aligned}\tag{6.70}$$

V souřadnicích Taub-NUT metricky by měl určovat Ψ_2 vztah (1.15). Bude vhodné si ho rozložit na reálnou a imaginární část:

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= -\frac{M + il}{(R + il)^3} = \frac{1}{(R^2 + l^2)^3} \left[- (MR^3 - 3Rl^2M + 3R^2l^2 - l^4) \right. \\ &\quad \left. - il(R^3 - 3Rl^2 - 3R^2M + l^2M) \right].\end{aligned}\tag{6.71}$$

Upravíme reálnou i imaginární část Ψ_2 do vhodnějšího tvaru

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= -\frac{1}{(R^2 + l^2)^3} \left[(MR(R^2 - 3l^2) + l^2(3R^2 - l^2)) \right. \\ &\quad \left. + il(R(R^2 - 3l^2) - M(3R^2 - l^2)) \right]\end{aligned}\tag{6.72}$$

a přímo dosadíme vztahy (6.11)–(6.13), resp. přímé vyjádření pro R dané (6.18) a M dané (6.19). Výsledek se přímo shoduje s (6.70).

Po této poslední kontrole můžeme tedy uzavřít, že metrika (6.55) přirozeně popisuje prostoročas typu Taub-NUT s dodatečným parametrem A reprezentujícím zrychlení.

Závěr

V této práci jsme se zabývali článkem [5] autorů Brendy Chng, Roberta Manna a Cristiana Stelea z roku 2006 obsahující prostoročas, který podle autorů popisuje zrychlený prostoročas s NUT parametrem.

V úvodní kapitole shrnujeme *základní černoděrová řešení* Einsteinových rovnic, která jsou podtřídou Plebaňského–Demiaňského třídy prostoročasů. Uvádíme i obecný tvar Plebaňského–Demiaňského třídy, který je v obecném případě algebraického typu D, a zdůvodňujeme, proč *neexistuje* černoděrová metrika této třídy řešení, která by byla charakterizována pouze hmotností, parametrem zrychlení a NUT parametrem.

Ve druhé kapitole připomínáme *algebraickou charakterizaci prostoročasů* a objasňujeme pojem *hlavních nulových směrů* Weylova tenzoru.

Třetí kapitola se zabývá výhradně *shrnutím zkoumaného článku*. Nejprve jsme se pokusili stručně popsat, jaké generační metody byly autory článku použity k hledání jejich nového řešení. Některé pasáže textu však vyžadovaly znalost širšího kontextu studované látky, který však příliš odbočoval od hlavní myšlenky textu, a proto jsme je přesunuli do dodatku. Druhá část této kapitoly obsahuje aplikaci těchto generačních metod, jejíž cílem bylo nalezení zcela nového vakuového řešení Einsteinových rovnic (4.1).

Zda se skutečně jedná o vakuového řešení Einsteinových rovnic bylo potřeba ověřit. Náplní čtvrté kapitoly tak byl přímý výpočet Christoffelových symbolů 1. a 2. druhu, z nichž jsme posléze dopočítali složky Riemannova tenzoru. Z důvodu složitosti tohoto tenzoru uvádíme složky Riemannova tenzoru v dodatku. Z Riemannova tenzoru jsme vyscítáním přes první a třetí index určili Ricciho tenzor, který nám opravdu vyšel nulový, čímž *jsme ověřili, že se skutečně jedná o vakuové řešení* Einsteinových rovnic (pro $\Lambda = 0$).

V dalším kroku bylo potřeba *ukázat, že toto řešení není podtřídou Plebaňského–Demiaňského třídy metrik*. To šlo ukázat určením algebraického typu tohoto nového prostoročasu. V páté kapitole jsme tak odhadem stanovili nulovou tetradu podobnou hlavním nulovým směrům Plebaňského–Demiaňského třídy řešení a spočítali složky Weylova tenzoru promítnutého do těchto nulových směrů. Tyto skalární funkce Ψ_A jsme úspěšně faktorizovali a uvedli ve tvaru (5.57), ze kterého šlo ověřit základní vlastnosti prostoročasu – především určit algebraický typ prostoročasu. Aplikací skalárních funkcí I a J jsme přímo ověřili, že řešení je *obecného algebraického typu*, tedy *opravdu nespadá do Plebaňského–Demiaňského třídy*, která je typu D.

V závěru páté kapitoly jsme ještě našli explicitní vyjádření funkce K , ze které lze explicitně spočítat *hlavní nulové směry* této metriky. Vzhledem k tomu, že nám vyšla 4 různá K , ověřili jsme znovu algebraický typ tohoto prostoročasu.

V šesté závěrečné kapitole jsme našli *zcela nový tvar metriky* (6.55), který přirozeně přechází na známé tvary metrik černoděrových prostoročasů. Nejprve jsme potřebovali převést nalezenou metriku na tvar, ve kterém bylo možné položit zrychlení $A = 0$. Toho jsme dosáhli pomocí souřadnicové transformace.

Po „vypnutí“ parametru zrychlení A jsme byli schopni interpretovat, jaká kombinace parametrů popisuje klasický NUT parametr l . Nebylo však možné jej přímo dosadit do metriky, a bylo tak potřeba vyjádřit parametr Δ (přeskálovaný

parametr, nacházející se v původním tvaru metriky) a dosadit ho do původní metriky. Během těchto úprav se nám podařilo $\sqrt{\Delta}$ interpretovat coby polohu Killingova horizontu Taub-NUT metriky vztahovaný na NUT parametr l .

V průběhu úprav se ukázalo příhodné provést další souřadnicovou transformaci, která převedla metriku autorů článku na zcela *nový tvar (6.55)*, vhodný pro přechody na známé tvary metrik – konkrétně na C-metriku a Taub-NUT metriku, viz části 6.4 a 6.5.

Tím jsme nejen provedli přirozený přechod na tyto standardní metriky, ale ověřili jsme tím i předpokládanou interpretaci parametru A coby zrychlení. Pro tyto speciální případy metriky typu D jsme též zkontrolovali jejich známé složky Weylova tenzoru Ψ_A vzhledem k hlavní nulové tetradě.

Naše práce nechává otevřenou otázku, jak je možné, že právě kombinace zrychlení a NUT parametru černoděrového řešení vyžaduje zcela odlišnou algebraickou strukturu prostoročasu oproti všem jiným řešením s černými dírami.

Seznam použité literatury

- [1] Einstein, A.: *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. **48** 844-847 (1915)
- [2] Einstein, A.: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. **49** 749-822, Leipzig (1916)
- [3] Isaacson, W.: *Einstein: Jeho život a vesmír*, Ladislav Horáček - Paseka, Praha a Litomyšl (2010)
- [4] Abbott, B. P., et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration): Phys. Rev. Lett. **116** 061102 (2016)
- [5] Chng, B., Mann, R., Stelea, C.: *Accelerating Taub-NUT and Eguchi-Hanson solitons in four dimensions*, Physical Review D **74** 084031 (2006)
- [6] Einstein, A.: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Max Planck Institute for the History of Science (1917)
- [7] Griffiths, J. B., Podolský, J.: *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (2009)
- [8] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., Herlt, E.: *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge University Press (2003)
- [9] Levi-Civita, T.: Rend. Accad. Naz. Lincei T **27** 343 (1918)
- [10] Weyl, H.: *Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.*, Annalen der Physik **59** 185-188 (1919)
- [11] Kinnersley, W., Walker, M.: Phys. Rev. D **2** 1359 (1970)
- [12] Bonnor, W. B.: *The sources of the C-metric*, Gen. Rel. Grav. **15** 535-551 (1983)
- [13] Hong K., Teo, E.: Class. Quant. Grav. **20** 3269 (2003)
Hong K., Teo, E.: Class. Quant. Grav. **22** 109 (2005)

- [14] Taub, A. H.: *Empty space-times admitting a three parameter group of motions*, Ann. Math. (The Annals of Mathematics) **53** 472–490 (1951)
- [15] Newman, E., Tamburino, L., Unti, T.: *Empty-space generalization of the Schwarzschild metric*, Journal of Mathematical Physics **4** 915–923 (1963)
- [16] Kerr, R. P.: *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Physical Review Letters **11** 237–238 (1963)
- [17] Debever, R.: *On type D expanding solutions of Einstein–Maxwell equations*, Bull. Soc. Math. Belg. **23** 360–376 (1971)
- [18] Plebański, J. F., Demiański, M.: *Rotating charged and uniformly accelerating mass in general relativity*, Ann. Phys. (NY) **98** 98–127 (1976)
- [19] Griffiths, J. B., Podolský, J.: *Accelerating a nd rotating black holes*, Class. Quantum Grav. **22** 3467–3479 (2005)
- [20] Griffiths, J. B., Podolský, J.: *A new look at the Plebański–Demiański family of solutions*, Int. J. Mod. Phys. D **15** 335–369 (2006)
- [21] Emparan, R., Teo, E.: Nucl. Phys. B **610** 190 (2001)
- [22] Teo, E.: Phys. Rev. D **73** 024016 (2006)
- [23] Wald, R. M.: *General relativity*, University of Chicago Press (1984)
- [24] Kaluza, T.: *Zum Unitätsproblem in der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 966–972 (1921)
- [25] Klein, O.: *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeitschrift für Physik A **37** (12) 895–906 (1926)
- [26] Klein, O.: *The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory* Law Nature **118** 516 (1926)

Dodatky

D1: Weylova metoda přidání náboje

Kaluzova–Kleinova redukce

Motivací této metody je myšlenka, že ve vesmíru existuje kromě námi dobře známé jedné časové a tří prostorových dimenzí ještě další, ne-li více dimenzí. Důvod, proč jsme si jich zatím nevšimli, je ten, že jsou zacyklené samy do sebe na námi nedosažitelných škálách. Pozorovateli, který se v této 5dimenzionální metrice pohybuje, se proto jeví prostoročas efektivně čtyřrozměrný, přesto ho však dodatečná dimenze ovlivňuje.

S tímto tvrzením přišli T. Kaluza a O. Klein v letech 1919-1926 [24], [25], [26] a pokusili se tím na teoretické úrovni sjednotit teorii gravitace s teorií elektromagnetismu. Kaluzovu–Kleinovu teorii je však obtížné, ne-li nemožné, experimentálně prokázat, a proto zůstává z fyzikálního hlediska nedůvěryhodná.

My však můžeme využít jejího čistě matematického aparátu při studiu Einsteinových rovnic pole a při generaci nových řešení. Kaluzova–Kleinova redukce dimenze nám říká:

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \varsigma^2 A_\mu \\ \varsigma^2 A_\nu & \varsigma^2 \end{pmatrix},$$

kde g_{MN} je (D+1)-dimenzionální metrika a $g_{\mu\nu}$ je její nabitá redukováná forma, ve které se skrytá dimenze projeví skalárním potenciálem ς (který je v KK teorii volným parametrem) a čtyřpotenciálem A_μ .

Využití $SL(2, \mathbf{R})$ symetrie redukováného Lagrangiánu

Vycházíme z řešení, které je díky Einsteinově–Maxwellově teorii popsáno Lagrangiánem

$$\mathcal{L}_4 = \sqrt{-g} R - \frac{1}{4} \sqrt{-g} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (73)$$

kde g je determinantem metrického tenzoru popisující řešení, ze kterého vycházíme a R je jeho Ricciho tenzor. Toto řešení je obecně nabité, a proto je popsáno tenzorem elektromagnetického pole $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, který je definován pomocí čtyřpotenciálu $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Uvažujeme pouze elektricky nabitě řešení, a proto navíc $A_\mu = \chi dt$, kde χ je elektrický potenciál. Takovéto řešení popisuje i speciální případ nenabitě metriky ($\chi = 0$).

Zmíněnou metriku lze popsat pomocí Kaluzovy–Kleinovy redukce ve tvaru

$$ds_4^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} ds_3^2, \quad (74)$$

přičemž ds_3^2 popisuje Lagrangián redukováné metriky (autory popisovaný coby redukováný Lagrangián), který lze zapsat ve tvaru:

$$\mathcal{L}_3 = \sqrt{g} R + \sqrt{g} \text{Tr}[\partial \mathcal{M}^{-1} \partial \mathcal{M}], \quad (75)$$

kde ∂ je míněn operátor, který matici \mathcal{M} zobrazí v matici 1-forem, a matice \mathcal{M} má tvar

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} e^{-U} & \frac{\chi}{2}e^{-U} \\ \frac{\chi}{2}e^{-U} & -e^U + \frac{\chi^2}{4}e^{-U} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Klíčový poznatek tohoto kroku je fakt, že \mathcal{L}_3 je invariantní vůči $SL(2, \mathbb{R})$ transformaci, čili záměně matice \mathcal{M} na

$$\mathcal{M}' = \Omega^T \mathcal{M} \Omega, \quad \Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1. \quad (77)$$

Tomuto \mathcal{M}' však odpovídá jiné nabitě řešení, které je s původním řešením provázané, čehož lze využít jako prostředku k nabití řešení. Zvolíme-li totiž výchozí řešení nenabitě ($\chi = 0$), kterému bude odpovídat matice \mathcal{M} , lze mu přiřadit nabitě řešení popsané maticí \mathcal{M}' .

Tedy, vyjdeme-li z řešení popsaného metrikou

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} ds_3^2, \quad (78)$$

získáme tak elektricky nabitě řešení

$$ds^2 = -e^{2V} dt^2 + e^{-2V} ds_3^2, \quad (79)$$

pro nějž platí

$$e^{2V} = e^{2U} \frac{4C^2 \bar{\delta}}{(1 - \bar{\delta} e^{2U})^2}, \quad A_e = \chi dt, \quad \chi = \frac{4C \bar{\delta}}{e^{-2U} - \bar{\delta}}, \quad (80)$$

kde

$$\bar{\delta} = \frac{c^2}{a^2}, \quad C = \frac{1}{2ac}. \quad (81)$$

Tento postup generace nabitěho řešení autoři nazývají *Weylovou metodou přidání náboje*.

D2: Složky Riemannova tenzoru

Zde uvádíme všechny složky Riemannova tenzoru pro metriku (4.1):

$$\begin{aligned}
R^0_{001} &= -\frac{fe,x}{4c}(ba,x - ee,x) - \frac{fe,y}{4d}(ba,y - ee,y) \\
&\quad + \frac{fa,x}{4c}(be,x - eb,x) + \frac{fa,y}{4d}(be,y - eb,y), \\
R^0_{002} &= 0, \\
R^0_{003} &= 0, \\
R^0_{012} &= 0, \\
R^0_{013} &= 0, \\
R^0_{023} &= \left(\frac{f}{2}(ba,y - ee,y)\right)_{,x} - \left(\frac{f}{2}(ba,x - ee,x)\right)_{,y} \\
&\quad + \frac{f^2}{4}(ba,x - ee,x)(ba,y - ee,y) \\
&\quad + \frac{f^2}{4}(be,x - eb,x)(-ea,y + ae,y) \\
&\quad - \frac{f^2}{4}(ba,y - ee,y)(ba,x - ee,x) \\
&\quad - \frac{f^2}{4}(be,y - eb,y)(-ea,x + ae,x), \\
R^0_{101} &= -\frac{fb,x}{4c}(ba,x - ee,x) - \frac{fb,y}{4d}(ba,y - ee,y) \\
&\quad + \frac{fe,x}{4c}(be,x - eb,x) + \frac{fe,y}{4d}(be,y - eb,y), \\
R^0_{102} &= 0, \\
R^0_{103} &= 0, \\
R^0_{112} &= 0, \\
R^0_{113} &= 0, \\
R^0_{123} &= \left(\frac{f}{2}(be,y - eb,y)\right)_{,x} - \left(\frac{f}{2}(be,x - eb,x)\right)_{,y} \\
&\quad + \frac{f^2}{4}(ba,x - ee,x)(be,y - eb,y) \\
&\quad + \frac{f^2}{4}(be,x - eb,x)(-ee,y + ab,y) \\
&\quad - \frac{f^2}{4}(ba,y - ee,y)(be,x - eb,x) \\
&\quad - \frac{f^2}{4}(be,y - eb,y)(-ee,x + ab,x), \\
R^0_{201} &= 0, \\
R^0_{202} &= -\left(\frac{f}{2}(ba,x - ee,x)\right)_{,x} \\
&\quad + \frac{fc,x}{4c}(ba,x - ee,x) - \frac{fc,y}{4d}(ba,y - ee,y) \\
&\quad - \frac{f^2}{4}(ba,x - ee,x)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{f^2}{4}(be_{,x} - eb_{,x})(-ea_{,x} + ae_{,x}), \\
R^0_{203} &= -\left(\frac{f}{2}(ba_{,x} - ee_{,x})\right)_{,y} \\
& + \frac{fc_{,y}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) + \frac{fd_{,x}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(ba_{,y} - ee_{,y})(ba_{,x} - ee_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(be_{,y} - eb_{,y})(-ea_{,x} + ae_{,x}), \\
R^0_{212} &= -\left(\frac{f}{2}(be_{,x} - eb_{,x})\right)_{,x} \\
& + \frac{fc_{,x}}{4c}(be_{,x} - eb_{,x}) - \frac{fc_{,y}}{4d}(be_{,y} - eb_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(ba_{,x} - ee_{,x})(be_{,x} - eb_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(be_{,x} - eb_{,x})(-ee_{,x} + ab_{,x}), \\
R^0_{213} &= -\left(\frac{f}{2}(be_{,x} - eb_{,x})\right)_{,y} \\
& + \frac{fc_{,y}}{4c}(be_{,x} - eb_{,x}) + \frac{fd_{,x}}{4d}(be_{,y} - eb_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(ba_{,y} - ee_{,y})(be_{,x} - eb_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(be_{,y} - eb_{,y})(-ee_{,x} + ab_{,x}), \\
R^0_{223} &= 0, \\
R^0_{301} &= 0, \\
R^0_{302} &= -\left(\frac{f}{2}(ba_{,y} - ee_{,y})\right)_{,x} \\
& + \frac{fc_{,y}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) + \frac{fd_{,x}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(ba_{,x} - ee_{,x})(ba_{,y} - ee_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(be_{,x} - eb_{,x})(-ea_{,y} + ae_{,y}), \\
R^0_{303} &= -\left(\frac{f}{2}(ba_{,y} - ee_{,y})\right)_{,y} \\
& - \frac{fd_{,x}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) + \frac{fd_{,y}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(ba_{,y} - ee_{,y})^2 \\
& - \frac{f^2}{4}(be_{,y} - eb_{,y})(-ea_{,y} + ae_{,y}), \\
R^0_{312} &= -\left(\frac{f}{2}(be_{,y} - eb_{,y})\right)_{,x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{fc,y}{4c}(be,x - eb,x) + \frac{fd,x}{4d}(be,y - eb,y) \\
& - \frac{f^2}{4}(ba,x - ee,x)(be,y - eb,y) \\
& - \frac{f^2}{4}(be,x - eb,x)(-ee,y + ab,y), \\
R^0_{313} & = - \left(\frac{f}{2}(be,y - eb,y) \right)_{,y} \\
& - \frac{fd,x}{4c}(be,x - eb,x) + \frac{fd,y}{4d}(be,y - eb,y) \\
& - \frac{f^2}{4}(ba,y - ee,y)(be,y - eb,y) \\
& - \frac{f^2}{4}(be,y - eb,y)(-ee,y + ab,y), \\
R^0_{323} & = 0, \\
R^1_{001} & = - \frac{fe,x}{4c}(-ea,x + ae,x) - \frac{fe,y}{4d}(-ea,y + ae,y) \\
& + \frac{fa,x}{4c}(-ee,x + ab,x) + \frac{fa,y}{4d}(-ee,y + ab,y), \\
R^1_{002} & = 0, \\
R^1_{003} & = 0, \\
R^1_{012} & = 0, \\
R^1_{013} & = 0, \\
R^1_{023} & = \left(\frac{f}{2}(-ea,y + ae,y) \right)_{,x} - \left(\frac{f}{2}(-ea,x + ae,x) \right)_{,y} \\
& + \frac{f^2}{4}(-ea,x + ae,x)(ba,y - ee,y) \\
& + \frac{f^2}{4}(-ee,x + ab,x)(-ea,y + ae,y) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ea,y + ae,y)(ba,x - ee,x) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ee,y + ab,y)(-ea,x + ae,x), \\
R^1_{101} & = - \frac{fb,x}{4c}(-ea,x + ae,x) - \frac{fb,y}{4d}(-ea,y + ae,y) \\
& + \frac{fe,x}{4c}(-ee,x + ab,x) + \frac{fe,y}{4d}(-ee,y + ab,y), \\
R^1_{102} & = 0, \\
R^1_{103} & = 0, \\
R^1_{112} & = 0, \\
R^1_{113} & = 0, \\
R^1_{123} & = \left(\frac{f}{2}(-ee,y + ab,y) \right)_{,x} - \left(\frac{f}{2}(-ee,x + ab,x) \right)_{,y} \\
& + \frac{f^2}{4}(-ea,x + ae,x)(be,y - eb,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f^2}{4}(-ee_{,x} + ab_{,x})(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ea_{,y} + ae_{,y})(be_{,x} - eb_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ee_{,y} + ab_{,y})(-ee_{,x} + ab_{,x}), \\
R^1_{201} & = 0, \\
R^1_{202} & = - \left(\frac{f}{2}(-ea_{,x} + ae_{,x}) \right)_{,x} \\
& + \frac{fc_{,x}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) - \frac{fc_{,y}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ea_{,x} + ae_{,x})(ba_{,x} - ee_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ee_{,x} + ab_{,x})(-ea_{,x} + ae_{,x}), \\
R^1_{203} & = - \left(\frac{f}{2}(-ea_{,x} + ae_{,x}) \right)_{,y} \\
& + \frac{fc_{,y}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) + \frac{fd_{,x}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ea_{,y} + ae_{,y})(ba_{,x} - ee_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ee_{,y} + ab_{,y})(-ea_{,x} + ae_{,x}), \\
R^1_{212} & = - \left(\frac{f}{2}(-ee_{,x} + ab_{,x}) \right)_{,x} \\
& + \frac{fc_{,x}}{4c}(-ee_{,x} + ab_{,x}) - \frac{fc_{,y}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ea_{,x} + ae_{,x})(be_{,x} - eb_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ee_{,x} + ab_{,x})^2, \\
R^1_{213} & = - \left(\frac{f}{2}(-ee_{,x} + ab_{,x}) \right)_{,y} \\
& + \frac{fc_{,y}}{4c}(-ee_{,x} + ab_{,x}) + \frac{fd_{,x}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ea_{,y} + ae_{,y})(be_{,x} - eb_{,x}) \\
& - \frac{f^2}{4}(-ee_{,y} + ab_{,y})(-ee_{,x} + ab_{,x}), \\
R^1_{223} & = 0, \\
R^1_{301} & = 0, \\
R^1_{302} & = - \left(\frac{f}{2}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \right)_{,x} \\
& + \frac{fc_{,y}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) + \frac{fd_{,x}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{f^2}{4}(-ea_{,x} + ae_{,x})(ba_{,y} - ee_{,y}) \\
& -\frac{f^2}{4}(-ee_{,x} + ab_{,x})(-ea_{,y} + ae_{,y}), \\
R^1_{303} &= -\left(\frac{f}{2}(-ea_{,y} + ae_{,y})\right)_{,y} \\
& -\frac{fd_{,x}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) + \frac{fd_{,y}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \\
& -\frac{f^2}{4}(-ea_{,y} + ae_{,y})(ba_{,y} - ee_{,y}) \\
& -\frac{f^2}{4}(-ee_{,y} + ab_{,y})(-ea_{,y} + ae_{,y}), \\
R^1_{312} &= -\left(\frac{f}{2}(-ee_{,y} + ab_{,y})\right)_{,x} \\
& +\frac{fc_{,y}}{4c}(-ee_{,x} + ab_{,x}) + \frac{fd_{,x}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& -\frac{f^2}{4}(-ea_{,x} + ae_{,x})(be_{,y} - eb_{,y}) \\
& -\frac{f^2}{4}(-ee_{,x} + ab_{,x})(-ee_{,y} + ab_{,y}), \\
R^1_{313} &= -\left(\frac{f}{2}(-ee_{,y} + ab_{,y})\right)_{,y} \\
& -\frac{fd_{,x}}{4c}(-ee_{,x} + ab_{,x}) + \frac{fd_{,y}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& -\frac{f^2}{4}(-ea_{,y} + ae_{,y})(be_{,y} - eb_{,y}) \\
& -\frac{f^2}{4}(-ee_{,y} + ab_{,y})^2, \\
R^1_{323} &= 0, \\
R^2_{001} &= 0, \\
R^2_{002} &= \left(\frac{a_{,x}}{2c}\right)_{,x} - \frac{fa_{,x}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) - \frac{fe_{,x}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) \\
& +\frac{a_{,x}c_{,x}}{4c^2} + \frac{a_{,y}c_{,y}}{4cd}, \\
R^2_{003} &= \left(\frac{a_{,x}}{2c}\right)_{,y} - \frac{fa_{,x}}{4c}(ba_{,y} - ee_{,y}) - \frac{fe_{,x}}{4c}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \\
& +\frac{a_{,x}c_{,y}}{4c^2} - \frac{d_{,x}a_{,y}}{4cd}, \\
R^2_{012} &= \left(\frac{e_{,x}}{2c}\right)_{,x} - \frac{fe_{,x}}{4c}(ba_{,x} - ee_{,x}) - \frac{fb_{,x}}{4c}(-ea_{,x} + ae_{,x}) \\
& +\frac{c_{,x}e_{,x}}{4c^2} + \frac{c_{,y}e_{,y}}{4cd}, \\
R^2_{013} &= \left(\frac{e_{,x}}{2c}\right)_{,y} - \frac{fe_{,x}}{4c}(ba_{,y} - ee_{,y}) - \frac{fb_{,x}}{4c}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \\
& +\frac{e_{,x}c_{,y}}{4c^2} - \frac{d_{,x}e_{,y}}{4cd}, \\
R^2_{023} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2_{101} &= 0, \\
R^2_{102} &= \left(\frac{e,x}{2c}\right)_{,x} - \frac{fa,x}{4c}(be,x - eb,x) - \frac{fe,x}{4c}(-ee,x + ab,x) \\
&\quad + \frac{c,x e,x}{4c^2} + \frac{c,y e,y}{4cd}, \\
R^2_{103} &= \left(\frac{e,x}{2c}\right)_{,y} - \frac{fa,x}{4c}(be,y - eb,y) - \frac{fe,x}{4c}(-ee,y + ab,y) \\
&\quad + \frac{c,y e,x}{4c^2} - \frac{d,x e,y}{4cd}, \\
R^2_{112} &= \left(\frac{b,x}{2c}\right)_{,x} - \frac{fe,x}{4c}(be,x - eb,x) - \frac{fb,x}{4c}(-ee,x + ab,x) \\
&\quad + \frac{c,x b,x}{4c^2} + \frac{c,y b,y}{4cd}, \\
R^2_{113} &= \left(\frac{b,x}{2c}\right)_{,y} - \frac{fe,x}{4c}(be,y - eb,y) - \frac{fb,x}{4c}(-ee,y + ab,y) \\
&\quad + \frac{c,y b,x}{4c^2} - \frac{d,x b,y}{4cd}, \\
R^2_{123} &= 0, \\
R^2_{201} &= -\frac{fa,x}{4c}(be,x - eb,x) - \frac{fe,x}{4c}(-ee,x + ab,x) \\
&\quad + \frac{fe,x}{4c}(ba,x - ee,x) + \frac{fb,x}{4c}(-ea,x + ae,x), \\
R^2_{202} &= 0, \\
R^2_{203} &= 0, \\
R^2_{212} &= 0, \\
R^2_{213} &= 0, \\
R^2_{223} &= \left(\frac{c,y}{2c}\right)_{,x} - \left(\frac{c,x}{2c}\right)_{,y}, \\
R^2_{301} &= -\frac{fa,x}{4c}(be,y - eb,y) - \frac{fe,x}{4c}(-ee,y + ab,y) \\
&\quad + \frac{fe,x}{4c}(ba,y - ee,y) + \frac{fb,x}{4c}(-ea,y + ae,y), \\
R^2_{302} &= 0, \\
R^2_{303} &= 0, \\
R^2_{312} &= 0, \\
R^2_{313} &= 0, \\
R^2_{323} &= -\left(\frac{d,x}{2c}\right)_{,x} - \left(\frac{c,y}{2c}\right)_{,y} - \frac{c,x d,x}{4c^2} + \frac{c,y d,y}{4cd} - \left(\frac{c,y}{2c}\right)^2 + \frac{(d,x)^2}{4cd}, \\
R^3_{001} &= 0, \\
R^3_{002} &= \left(\frac{a,y}{2d}\right)_{,x} - \frac{fa,y}{4d}(ba,x - ee,x) - \frac{fe,y}{4d}(-ea,x + ae,x) \\
&\quad - \frac{a,x c,y}{4cd} + \frac{a,y d,x}{4d^2}, \\
R^3_{003} &= \left(\frac{a,y}{2d}\right)_{,y} - \frac{fa,y}{4d}(ba,y - ee,y) - \frac{fe,y}{4d}(-ea,y + ae,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_{,x}d_{,x}}{4cd} + \frac{a_{,y}d_{,y}}{4d^2}, \\
R^3_{012} &= \left(\frac{e_{,y}}{2d}\right)_{,x} - \frac{fe_{,y}}{4d}(ba_{,x} - ee_{,x}) - \frac{fb_{,y}}{4d}(-ea_{,x} + ae_{,x}) \\
& - \frac{c_{,y}e_{,x}}{4cd} + \frac{d_{,x}e_{,y}}{4d^2}, \\
R^3_{013} &= \left(\frac{e_{,y}}{2d}\right)_{,y} - \frac{fe_{,y}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) - \frac{fb_{,y}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}) \\
& + \frac{d_{,x}e_{,x}}{4cd} + \frac{d_{,y}e_{,y}}{4d^2}, \\
R^3_{023} &= 0, \\
R^3_{101} &= 0, \\
R^3_{102} &= \left(\frac{e_{,y}}{2d}\right)_{,x} - \frac{fa_{,y}}{4d}(be_{,x} - eb_{,x}) - \frac{fe_{,y}}{4d}(-ee_{,x} + ab_{,x}) \\
& - \frac{e_{,x}c_{,y}}{4cd} + \frac{e_{,y}d_{,x}}{4d^2}, \\
R^3_{103} &= \left(\frac{e_{,y}}{2d}\right)_{,y} - \frac{fa_{,y}}{4d}(be_{,y} - eb_{,y}) - \frac{fe_{,y}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& + \frac{e_{,x}d_{,x}}{4cd} + \frac{e_{,y}d_{,y}}{4d^2}, \\
R^3_{112} &= \left(\frac{b_{,y}}{2d}\right)_{,x} - \frac{fe_{,y}}{4d}(be_{,x} - eb_{,x}) - \frac{fb_{,y}}{4d}(-ee_{,x} + ab_{,x}) \\
& - \frac{b_{,x}c_{,y}}{4cd} + \frac{b_{,y}d_{,x}}{4d^2}, \\
R^3_{113} &= \left(\frac{b_{,y}}{2d}\right)_{,y} - \frac{fe_{,y}}{4d}(be_{,y} - eb_{,y}) - \frac{fb_{,y}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& + \frac{b_{,x}d_{,x}}{4cd} + \frac{b_{,y}d_{,y}}{4d^2}, \\
R^3_{123} &= 0, \\
R^3_{201} &= -\frac{fa_{,y}}{4d}(be_{,x} - eb_{,x}) - \frac{fe_{,y}}{4d}(-ee_{,x} + ab_{,x}) \\
& + \frac{fe_{,y}}{4d}(ba_{,x} - ee_{,x}) + \frac{fb_{,y}}{4d}(-ea_{,x} + ae_{,x}), \\
R^3_{202} &= 0, \\
R^3_{203} &= 0, \\
R^3_{212} &= 0, \\
R^3_{213} &= 0, \\
R^3_{223} &= \left(\frac{d_{,x}}{2d}\right)_{,x} + \left(\frac{c_{,y}}{2d}\right)_{,y} - \frac{(c_{,y})^2}{4cd} + \left(\frac{d_{,x}}{2d}\right)^2 - \frac{c_{,x}d_{,x}}{4cd} + \frac{c_{,y}d_{,y}}{4d^2}, \\
R^3_{301} &= -\frac{fa_{,y}}{4d}(be_{,y} - eb_{,y}) - \frac{fe_{,y}}{4d}(-ee_{,y} + ab_{,y}) \\
& + \frac{fe_{,y}}{4d}(ba_{,y} - ee_{,y}) + \frac{fb_{,y}}{4d}(-ea_{,y} + ae_{,y}), \\
R^3_{302} &= 0, \\
R^3_{303} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{312}^3 &= 0, \\R_{313}^3 &= 0, \\R_{323}^3 &= \left(\frac{d,y}{2d}\right)_{,x} - \left(\frac{d,x}{2d}\right)_{,y}.\end{aligned}$$

Přílohy