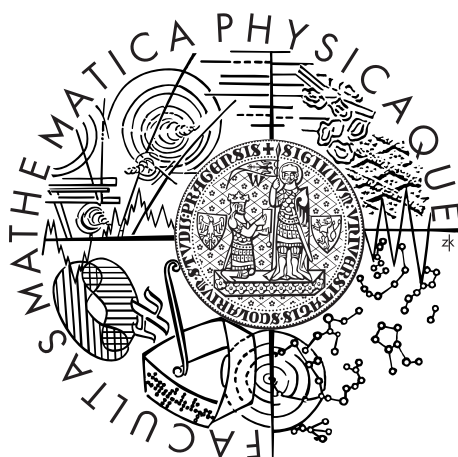


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tomáš Bárta

Dynamická diskonexe slunečních skvrn od jejich magnetických kořenů

Astronomický ústav Univerzity Karlovy v Praze

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Švanda, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2016

Chtěl bych poděkovat především svému vedoucímu, doc. Michalovi Švandovi, za veškerý čas, který mi ochotně věnoval, za rady a poznámky ke všem aspektům zde prezentované bakalářské práce. Dále bych rád poděkoval prof. Vítu Dolejšímu a dr. Miloslavu Vlasákovi z katedry numerické matematiky za cenné konzultace ohledně numerických metod. Největší dík ale patří mojí rodině, zejména rodičům, za bezvýhradnou podporu po celou dobu mého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Dynamická diskonexe slunečních skvrn od magnetických kořenů

Autor: Tomáš Bárta

Katedra: Astronomický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Švanda, Ph.D., Astronomický ústav UK

Abstrakt: Práce se ověřuje model dynamické diskonexe slunečních skvrn popsany ve článku The dynamical disconnection of sunspots from their magnetic roots (Schüssler & Rempel, 2005, Astron. Astrophys. 441, 337). Pro tento účel byla provedena numerická simulace, jejíž součástí byla i reprodukce modelu klidného Slunce. Postup byl shodný s postupem v referovaném článku. Model Slunce dobře odpovídal dnešním uznávaným modelům. V žádné ze simulací se ovšem nepodařilo plně reprodukovat výsledky odkazované publikace a dynamická diskonexe nebyla pozorována. Považuji proto za důležité předkládaný program podrobit dalším zevrubnějším testům.

Klíčová slova: magnetohydrodynamika, sluneční aktivita, magnetická pole, sluneční skvrny

Title: The dynamical disconnection of sunspots from their magnetic roots

Author: Tomáš Bárta

Department: Astronomical Institute of Charles University

Supervisor: Assoc. Prof. Michal Švanda, Astronomical Institute of Charles University in Prague

Abstract: The thesis tries to verify a model for dynamic disconnection of sunspots from their magnetic roots proposed in the publication "The dynamical disconnection of sunspots from their magnetic roots" (Schüssler & Rempel, 2005, Astron. Astrophys. 441, 337). In order to accomplish this task I conducted a numerical simulation, including a computation of a quiet Sun model using the OPAL opacity and equation of state tables. While simulating the time evolution of sunspot we retained the steps as are in the referred article. The quiet Sun model corresponded well with other quiet Sun models, which are considered to be state-of-the-art. However, I was not able to reproduce the results fully as I didn't observe the dynamic disconnection. I suggest a more thorough testing of the presented code.

Keywords: magnetohydrodynamics, solar activity, magnetic fields, sunspots

Obsah

Úvod	2
1 Slunce	3
1.1 Proč ho zkoumáme?	3
1.2 Stavba Slunce	3
1.3 Magnetické pole Slunce	3
2 Sluneční skvrny	5
2.1 Vznik slunečních skvrn	5
2.2 Struktura slunečních skvrn	5
2.2.1 Wilsonova deprese	5
2.2.2 Jemná struktura	5
2.3 Teoretické modely slunečních skvrn	6
2.3.1 Self-similar modely	6
3 Dynamická diskonexe	8
3.1 Model dynamické diskonexe a model konvekce	8
3.1.1 Model konvekce	8
3.1.2 Ekvipartiční pole	12
3.1.3 Magnetohydrostatická rovnováha	13
3.1.4 Časový vývoj	13
4 Simulace dynamické diskonexe	14
4.1 Model klidného Slunce	14
4.1.1 Rovnice přenosu energie	14
4.1.2 Hydrostatická rovnováha	14
4.1.3 Stavová rovnice	15
4.1.4 Numerické řešení	15
4.1.5 Výsledky	15
4.2 Simulace časového vývoje	16
4.2.1 Iniciální model	16
4.2.2 Numerické řešení	19
4.3 Technické aspekty numerické simulace	24
4.3.1 Zhlazování	24
4.3.2 Spodní hranice tlaku	25
4.4 Výsledky simulace	26
5 Diskuze	29
Diskuze	29
Závěr	30

Úvod

Bipolární sluneční skvrny vzniknou, když magnetická silotrubice spojená s jádrem Slunce vystoupí nad povrch do fotosféry. Skvrny mají opačnou polaritu a nejprve jejich společný pohyb odpovídá tomu, že jsou navázány na magnetické jádro. Chování skvrn po několika dnech ale naznačuje, že se skvrny od tohoto jádra odpojily.

V publikaci [1] byl navržen mechanismus, jakým k tomuto jevu může dojít. Začne docházet k ochlazení skvrny, které prostupuje do hloubky. V důsledku tohoto dojde k poklesu tlaku plynu a následnému zesílení magnetického pole blízko povrchu. V hloubce naopak do silotrubice přitéká nová hmota a tím se postupně vyrovnává tlak s okolím a magnetické pole se tedy oslabuje. V místě střetnutí těchto dvou jevů by mělo dojít k takovému oslabení pole, že magnetická silotrubice přestane odolávat okolním vlivům a rozpadne se. Autoři provedli 1D simulaci tohoto mechanismu.

Cílem této práce je tuto simulaci zreprodukovat a umožnit tak model doplnit o fyzikálně realističtější podmínky; tedy sestavit modulovatelný kód, pro který bude snadné nahradit části jako stavová rovnice, opacitní tabulky, nebo model konvekce.

1. Slunce

1.1 Proč ho zkoumáme?

Slunce je nejbližší hvězda, můžeme ji tedy pozorovat s vysokým prostorovým i časovým rozlišením a to jak dalekohledy z pozemských observatoří, tak umělými družicemi. Takového rozlišení nejsme u ostatních hvězd ani zdaleka schopni dosáhnout. Je to jediná hvězda, na jejímž povrchu můžeme pozorovat jevy a struktury. Studium Slunce je tedy velmi užitečné i pro výzkum ostatních hvězd. Sluneční aktivita má vliv na takzvané kosmické počasí, kterým následně ovlivňuje i naši atmosféru. Slunce je tvořeno převážně ionizovaným plynem – plazmatem, které vykazuje mnoho stejných vlastností, jako plazma uměle vytvořené na Zemi v tokamacích. Můžeme ho tedy využívat i jako laboratoř pro výzkum plazmatu.

1.2 Stavba Slunce

Zhruba vnitřní čtvrtinu poloměru Slunce tvoří jádro. Slunce získává svoji energii syntézou jader vodíku na hélium a dalšími jadernými reakcemi. Ty mohou probíhat pouze za velmi vysokých teplot a při vysokém tlaku – tyto podmínky jsou přítomné právě v jádru Slunce, kde je tlak zhruba $2.5 \cdot 10^{16}$ Pa a teplota $1.5 \cdot 10^7$ K [2].

Na jádro navazuje zóna záření. Jak název napovídá, tak v této zóně probíhá přenos tepla především zářením. Střední volná dráha fotonu je v této oblasti přibližně 1 mm [3]. Fotony, které jsou na začátku v rentgenovém, spektru se při cestě ke slunečnímu povrchu rozptýlí na mnoho fotonů ve viditelném spektru.

Kolem 0,72 poloměru (cca 490 000 km od středu) je teplota plynu zhruba 2 000 000 K, oproti 8 000 000 K na počátku zóny záření. To má za důsledek, že volné elektrony v plazmatu se opět spojují s jádry a vznikají atomy. Tím roste opacita plynu, ten se stává pro fotony neprůhledný a přenos energie zářením je již velmi neefektivní. Přenos energie v této oblasti probíhá prouděním, tedy konvekcí a tato oblast se nazývá konvektivní.

Vzhledem k tomu, že Slunce je koule plynu, nelze přesně určit, kde je jeho povrch. Stanovujeme ho tedy pomocí takzvané optické hloubky τ . Optická hloubka přibližně $\tau = 1$ odpovídá tomu, že foton se na své cestě ze Slunce průměrně rozptýlí méně, než jedenkrát. Optická hloubka $\tau = 1$ je tedy stanovena jako hloubka, kde přechází konvektivní vrstva ve fotosféru [4]. Fotosféra nakonec volně přechází v chromosféru, pro níž je typická její velmi nízká hustota, cca 10^4 krát menší, než ve fotosféře.

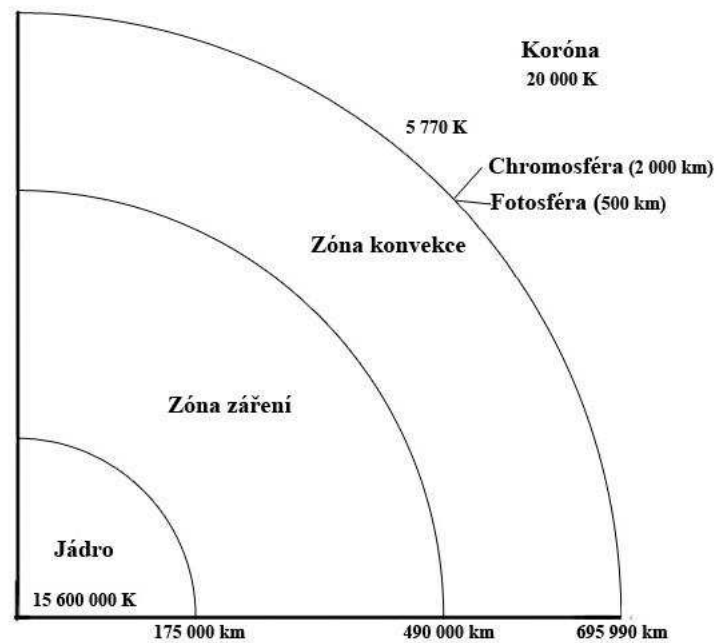
Jednoduché schéma struktury Slunce je na obr. 1.1.

1.3 Magnetické pole Slunce

Slunce má slabé dipólové magnetické pole, podobně jako Země. Magnetické pole je v ionizovaném plynu díky jeho vysoké permeabilitě zamrzlé a je unášeno spolu s tokem plynu.

Vlivem diferenciální rotace (pozorujeme, že ionizovaný plyn na rovníku rotuje rychleji, než v okolí osy rotace) a chaotických konvektivních pohybů je magnetické pole přetvarovááno a výrazně zesilováno.

Intenzita magnetického pole na povrchu Slunce se pohybuje přibližně v rozmezí 1 – 10 G, díky výše zmíněným jevům ovšem dochází k nestabilitám a může dojít ke vzniku takzvaných aktivních oblastí, kde intenzita pole dosahuje až 4000 G [5].



Obrázek 1.1: Schéma jednotlivých vrstev Slunce - obrázek převzat z [6]

2. Sluneční skvrny

2.1 Vznik slunečních skvrn

S magnetickým polem je spojena sluneční aktivita, jako sluneční erupce, výrony koronální hmoty a sluneční skvrny. K těmto jevům dochází v tzv. aktivních oblastech, kde je magnetické pole velmi silné (viz. 1.3). Magnetické pole v elektricky nabitém plynu doprovází magnetický tlak. V případě, že magnetická silotrubice vystoupí do fotosféry, dojde v místech, kde silotrubice vystupuje nad povrch, ke snížení tlaku plynu. Tlak plynu a magnetický tlak musí být v součtu stejný, jako tlak v okolí. Oblasti s nízkým tlakem se začnou ochlazovat a následně pozorujeme místa s nižší teplotou (3 000–4 000 K oproti 5 000–6 000 K ve zbytku fotosféry).

Místa, kde silotrubice vystupuje do fotosféry, jsou tedy chladnější a mají mnohonásobně (cca 4–5krát) menší zářivý výkon než okolí a pozorujeme je jako tmavá. V souladu s charakterem jejich původu pozorujeme sluneční skvrny ve většině případů v páru, jelikož silotrubice musí fotosféru protnout ve dvou místech. Typické rozměry slunečních skvrn se pohybují mezi 3 500–60 000 km.

Přesný mechanismus a příčiny pro výstup silotrubice do fotosféry ovšem stále nejsou zcela objasněny, i když rámcové představy jsou k dispozici [7].

2.2 Struktura slunečních skvrn

2.2.1 Wilsonova deprese

Pro sluneční skvrny je optické hloubky $\tau = 1$ dosaženo ve větší hloubce, než v klidném Slunci (zhruba o 0,5–2 Mm hlouběji). Znamená to tedy, že fotony mající původ ve sluneční skvrně, které opustí Slunce, jsou produkovány v průměrně větší hloubce, než fotony, které vidíme ze zbytku fotosféry. Tento jev se nazývá Wilsonovou depresí.

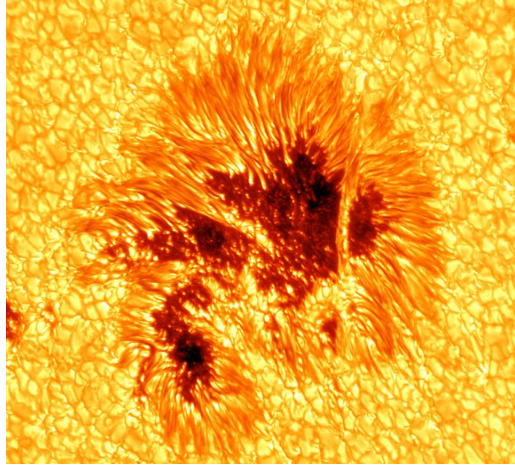
Důvodem je nižší teplota a tlak plynu, než je v okolí, což má za následek snížení opacity, která s optickou hloubkou přímo souvisí.

2.2.2 Jemná struktura

Nejvýraznějšími částmi sluneční skvrny jsou *umbrální jádro* a *penumbra*. Umbra je jádro sluneční skvrny. Je její nejchladnější a nejtmaší částí. Umbrální jádro obklopuje penumbra, která se skládá z protáhlých, převážně radiálně orientovaných struktur. Ty jsou důsledkem odklonu magnetického pole od kolmice v okolí umbrálního jádra. Teplota penumbry je již výrazně vyšší, než teplota umbrálního jádra; dosahuje hodnot pouze zhruba o 250–400 K nižších než je teplota okolí.

V umbrálním jádře jsou pozorovány světlé body, zvané *umbrální body*. Pravděpodobně jsou projevem konvekce uvnitř sluneční skvrny a dokazují, že zde stále dochází ke konvektivnímu přenosu energie (teorie magnetokonvekce předpokládá, že zde dochází ke konvekci i přes přítomnost magnetického pole; takzvaná *spaghetti* teorie naopak tvrdí, že umbrální body jsou místa, kde žádné magnetické pole není [8]). Světlé struktury, které z vnějšku zasahují do jádra či od sebe dvě jádra

oddělují, se nazývají *světelné mosty*. Vznikají při zániku slunečních skvrn z umbrálních bodů. Struktura sluneční skvrny je dobře vidět na obr. 2.1. Dobrý přehled jemných struktur poskytuje například [9].



Obrázek 2.1: Fotografie sluneční skvrny, pořízena v Big Bear Solar Observatory

2.3 Teoretické modely slunečních skvrn

Zjednodušené modely slunečních skvrn (jejich přehled např. v [10]) předpokládají, že skvrna je tvořena jednou osově symetrickou silotrubicí. Ve většině modelů je soustava v magnetohydrostatické rovnováze, která je předepsána rovnováhou mezi silami uvnitř a vně silotrubice a Maxwellovou rovnicí:

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla P - \rho \mathbf{g} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

Zde je \mathbf{B} magnetické pole, \mathbf{g} gravitační zrychlení, ρ a P hustota a tlak plynu. Předpoklad, že soustava je v každém okamžiku v hydrostatické rovnováze je většinou oprávněná, neboť vývoj slunečních skvrn probíhá v mnohem delších časových škálách, než je doba, po jakou se šíří vzruchy napříč silotrubicí.

2.3.1 Self-similar modely

Self-similar řešení jsou založena na předpokladu, že magnetické pole není zakroucené (tedy v cylindrických souřadnicích $B_\theta(r, z, \theta) = 0$), je axiálně symetrické a radiální závislost \mathbf{B} je v každé hloubce stejná až na škálovací faktor, který zajišťuje konstantní magnetický tok při rozšiřování nebo zužování silotrubice. Předpokládá se tedy následující:

$$B_z(r, z) = f(\zeta)B_0(z), \quad (2.3)$$

kde $B_0(z)$ je intenzita magnetického pole na ose symetrie, $\zeta = r\sqrt{B_0(z)}$ a $f(\zeta)$ je funkce určující tvar závislosti [11]. Z Maxwellovy rovnice pro divergenci magnetického pole (2.2) lze poté odvodit:

$$B_r(r, z) = -rf(\zeta)\frac{dB_0(z)}{dz} \quad (2.4)$$

Pro zachování konstantního magnetického toku Φ silotrubic je na funkci $f(\zeta)$ kladena podmínka

$$2\pi \int_0^{+\infty} f(\zeta)\zeta d\zeta = \Phi. \quad (2.5)$$

Je zvykem volit jako $f(\zeta) = \exp(-\zeta^2)$, která tuto podmínku splňuje.

Problém self-similar modelů může být, že jsou na magnetické pole kladeny příliš silné předpoklady. V modelech není skvrna vidět jako umbrální jádro obklopené penumbrou. Důkladnější modely navíc také ukazují, že podmínka soběpodobnosti ve skutečnosti nejspíše není splněna [8].

3. Dynamická diskonexe

Pozorování bipolárních slunečních skvrn nasvědčuje tomu, že pár dní po jejich vynoření se silotrubice, která je tvoří, odpojí od magnetického jádra Slunce. Důvody jsou následující:

- Velikost aktivních oblastí, kde skvrny vznikají, je mnohem rozsáhlejší, než je vzájemná vzdálenost dvou bipolárních skvrn. Kdyby tedy silotrubice byla dále napojena na magnetické jádro a vynořovala by se, očekávali bychom, že vzájemná vzdálenost skvrn bude odpovídat rozměrům dané aktivní oblasti. Vzdálenost skvrn ovšem v porovnání s velikostí aktivní oblasti zůstane nepatrná.
- Skvrny by se měly pohybovat směrem k pólům (tento jev nepozorujeme)
- Při vynořování na magnetickou silotrubici působí Coriolisova síla, která způsobí natočení spojnice skvrn vůči východo-západnímu směru. Poté, co vynořování skončí, Coriolisova síla přestává působit a očekáváme, že naklonění spojnice bude relaxovat zpět do jeho původní polohy; ani tento jev ovšem nepozorujeme.

Mechanismus navržený ve článku [1] se snaží vysvětlit, z jakého důvodu a jakým způsobem dojde k odpojení od magnetického jádra:

Po vynoření sluneční skvrny se její povrch začne ochlazovat, což je doprovázeno tokem plynu směrem ke středu Slunce. Tím dojde k poklesu tlaku v povrchové vrstvě skvrny doprovázeného zesílením magnetického pole. Zároveň v důsledku přítoku hmoty ze spodní hranice dochází ze shora k postupnému nárůstu tlaku, který naopak způsobí pokles magnetického pole. V důsledku těchto dvou tendencí by se mělo v hloubce 2 – 10 Mm vytvořit lokální minimum magnetického pole, které po několika dnech klesne až na hodnotu ekvipartičního pole (viz sekce 3.1.2).

Časový vývoj magnetického pole, jak byl získán v publikaci [1], je na obr. 3.1. Zde je patrné lokální minimum magnetického pole, které se postupně přibližuje k poli ekvipartičnímu, až po cca 40 hodinách dosáhne jeho hodnoty. V tento okamžik silotrubice přestane být schopna odolávat vnějším konvektivním pohybům a dojde k jejímu rozpojení.

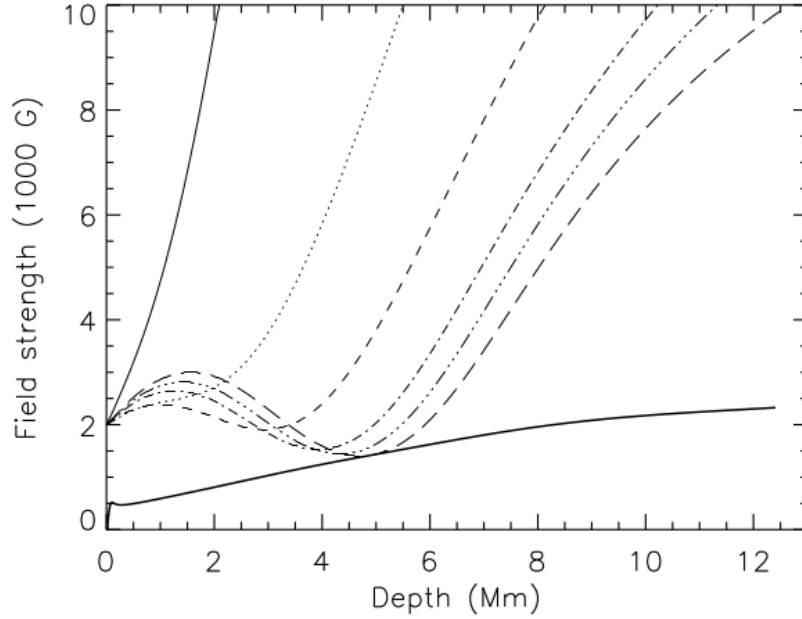
3.1 Model dynamické diskonexe a model konvekce

3.1.1 Model konvekce

Pozorování (viz. umbrální body) nasvědčuje tomu, že ve slunečních skvrnách nedochází pouze k radiativnímu přenosu energie, ale také ke konvektivnímu přenosu. Z rovnic hvězdného nitra vyplývá pro celkový tok a tok energie přenášený radiací

$$F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}} = \frac{16\sigma}{3} \frac{gT^4}{\kappa P} \nabla_{\text{rad}} \quad (3.1)$$

$$F_{\text{rad}} = \frac{16\sigma}{3} \frac{gT^4}{\kappa P} \nabla \quad (3.2)$$



Obrázek 3.1: Graf z [1] znázorňující diskonexi od magnetického pole. Pro tuto simulaci byla použita rychlost vtoku hmoty 700 ms^{-1} . Horní plná čára odpovídá stavu po 1 hodině, dále jsou průběhy postupně v pořadí 10 hodin, 20 hodin, 30 hodin, 35 hodin a 40 hodin. Tlustou čarou dole je vyobrazeno ekvipartiční pole klidného Slunce. Platí převodový vztah $10 \text{ kG} = 1 \text{ T}$

kde $\nabla_{\text{rad}} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{rad}}$ je logaritmický teplotní gradient potřebný pro to, aby energie byla přenášena pouze zářením, ∇ je skutečný logaritmický teplotní gradient, σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta, κ Rosselandova střední opacita. Při odvozování rovnic směšovacích délek se držíme postupu uvedeného v [12].

Pro pozdější účely se bude hodit vyjádřit F_{rad} bez použití logaritmických gradientů. Za tímto účelem nejprve definujeme tlakovou škálu:

$$H = \frac{dz}{d \ln P} = \frac{P}{\rho g}. \quad (3.3)$$

Nyní můžeme využít rovnosi

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{1}{T} \frac{dT}{d \ln P} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} \frac{dz}{d \ln P} = \frac{H}{T} \frac{dT}{dz} \quad (3.4)$$

$$= \frac{P}{\rho g T} \frac{dT}{dz} \quad (3.5)$$

a získáme vyjádření F_{rad} bez logaritmického gradientu:

$$F_{\text{rad}} = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz} \quad (3.6)$$

Skutečný teplotní gradient, a tedy i vztah pro tok energie přenášené konvekcí, záleží na použitém modelu konvekce. Pro astrofyzikální aplikace se velmi často používá model směšovacích délek (mixing length model) [13].

Tento zjednodušující model předpokládá, že energie je přenášena elementem hmoty, který se po určité době chová jako uzavřený systém o konstantním počtu

částic a po určité uražené vzdálenosti (směšovací délce l_m) difunduje do okolí. Definujme pro veličinu X operátor D :

$$DX = \left(\left(\frac{dX}{dz} \right)_e - \frac{dX}{dz} \right) \Delta r, \quad (3.7)$$

kde $\left(\frac{dX}{dz} \right)_e$ je změna veličiny uvnitř elementu způsobená zvětšováním objemu pro zachování stejného tlaku, jako je v okolí (tedy $Dp = 0$), a radiálními energetickými ztrátami. Potom bude po uražení vzdálenosti Δr rozdíl mezi teplotou elementu a teplotou okolí

$$DT = (\nabla_e - \nabla) \frac{T \Delta r}{H}, \quad (3.8)$$

kde ∇ a ∇_e jsou logaritmické gradienty teploty vztahované k logaritmu tlaku. Elementem o hustotě ρ , měrné tepelné kapacitě c_P pohybujícím se rychlostí v je čistě konvekcí přenesena energie $E_{\text{conv}} = \rho c_P DT$ a konvektivní energetický tok je tedy

$$F_{\text{conv}} = \rho c_P v DT. \quad (3.9)$$

Předpokládejme, že součin vDT bude nabývat své střední hodnoty poté, co element urazí vzdálenost $\frac{l}{2}$. Element bude v důsledku vztlaku urychlován silou, jejíž hustota je

$$k_r = -g \frac{D\rho}{\rho} = -g \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \frac{DT}{T} = -g \delta \frac{DT}{T}, \quad (3.10)$$

kde

$$\delta = \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}. \quad (3.11)$$

Práce vztahovaná na jednotku hmotnosti po uražení vzdálenosti $l_m/2$ je tedy

$$W = k_r \frac{l_m}{2} = \frac{1}{8} g \delta \frac{l_m^2}{H} (\nabla - \nabla_e). \quad (3.12)$$

Za předpokladu, že práce je z poloviny vynaložena na odpor prostředí a z poloviny na kinetickou energii, můžeme střední rychlost v určit ze vztahu

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} W \quad (3.13)$$

a tedy

$$F_{\text{conv}} = \rho c_P T \sqrt{g \delta} \frac{l_m^2}{4\sqrt{2}} H^{-3/2} (\nabla - \nabla_e)^{3/2}. \quad (3.14)$$

Nebýt radiativního ochlazování elementu, platilo by $\nabla_e = \nabla_{\text{ad}}$. Veličina ∇_{ad} je tzv. adiabatický teplotní gradient, který lze lokálně spočítat pomocí vztahu

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\delta P}{c_P \rho T}. \quad (3.15)$$

Hustotu toku energie, kterou element vyzařuje lze v difúzní aproximaci vyjádřit jako

$$f = \frac{-4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{dT}{dn}. \quad (3.16)$$

Normálový teplotní gradient $\frac{dT}{dn}$ můžeme pro kouli o průměru d aproximovat jako $\frac{dT}{d/2}$. Celkový zářivý výkon λ takové koule tedy je

$$\lambda = Sf \quad (3.17)$$

$$= \frac{8acT^3}{3\kappa\rho} DT \frac{S}{d}. \quad (3.18)$$

Odtud již můžeme určit odchylku od změny při adiabatickém ději, jelikož $\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dQ} \frac{dQ}{dt} \frac{dt}{dr}$. Proto

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_e - \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{ad}} = -\frac{\lambda}{\rho V c_P v} \quad (3.19)$$

$$\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} = \frac{8ac}{3\kappa} DT \frac{6}{d^2}. \quad (3.20)$$

Vydělením rovnicí (3.8):

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla - \nabla_e} = \frac{8acT^3}{\kappa\rho^2 v c_P} \left(\frac{l_m}{d^2}\right). \quad (3.21)$$

Element ovšem není dokonalá koule, a proto se člen $\frac{8l_m}{d^2}$ nahrazuje $\frac{6}{l_m}$. Pokud zavedeme veličinu

$$U = \frac{12\sigma T^3}{c_P \rho^2 \kappa l_m^2} \sqrt{\frac{8H}{g\delta}}, \quad (3.22)$$

lze získat vztah

$$\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} = 2U \sqrt{\nabla - \nabla_e}, \quad (3.23)$$

ze kterého získáme dvě vyjádření ∇_e , kde fyzikální smysl dává

$$\nabla_e = \nabla_{\text{ad}} - 2U^2 + 2U(\nabla - \nabla_{\text{ad}} + U^2)^{1/2}. \quad (3.24)$$

Pokud předpokládáme, že je splněna rovnice (3.1), můžeme dále odvodit vztah

$$(\nabla - \nabla_e)^{3/2} = \frac{8U}{9} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla), \quad (3.25)$$

který když dosadíme do (3.14), tak získáme vyjádření F_{conv} :

$$F_{\text{conv}} = \rho c_P T \sqrt{g\delta} \frac{l_m^2}{4\sqrt{2}} H^{-3/2} \frac{8U}{9} (\nabla_{\text{rad}} - \nabla). \quad (3.26)$$

V případě, že je známa závislost teploty na tlaku, lze z tohoto vzorce v každém bodě spočítat veličinu F_{conv} .

Je potřeba zdůraznit, že tento vztah (3.26) předpokládá, že je splněna rovnice (3.1). Tak tomu je například v klidném Slunci. Model dynamické diskonexe však naopak předpokládá, že magnetické pole proudění energie utlumí a v tomto případě nemáme žádné předpoklady o celkovém energetickém toku. Je tedy potřeba použít rovnici (3.14).

Zde bychom ještě rádi poukázali na mírnou nekonzistenci v sadě rovnic popísaných v publikaci [1]. Navrhovaná sada rovnic je následující:

$$\tilde{F}_{\text{conv}} = -b\sqrt{a} \left(\frac{R}{\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{l_m}{H}\right)^{1/2} \rho c_P T^{3/2} (\nabla - \nabla_e)^{3/2}$$

$$\nabla_e = \nabla_{\text{ad}} - 2u^2 + 2u(\nabla - \nabla_{\text{ad}} + u^2)$$

$$u = \frac{1}{f\sqrt{a}} \left(\frac{l_m}{H}\right)^{-2} \frac{12\sigma T^3}{c_P \rho} \kappa H^2 \left(\frac{H}{g}\right)^{1/2}$$

Zde R je molární plynová konstanta, μ je střední molekulová hmotnost a a , b a f jsou geometrické konstanty volené jako $a = 1/8$, $b = 1/2$ a $f = 3/2$. Konvektivní tok je psán s vlnkou, aby nedošlo k záměně.

Uvedené vztahy evidentně předpokládají idealitu plynu, tedy že δ z rovnice (3.11) je konstantní a rovno jedné. Pokud do rovnice (3.14) dosadíme $\delta = 1$ a do vyjádření \tilde{F}_{conv} dle [1] dosadíme vztah platný pro ideální plyn $\frac{R}{\mu} = \frac{P}{T\rho}$, skutečně dostaneme shodné výrazy.

V případě, že použitá stavová rovnice nebyla rovnice ideálního plynu, tak vynechání parametru δ je s touto rovnicí nekonzistentní. V publikaci je uvedeno, že veličiny byly interpolovány z předkompilované tabulky. Předpokládáme tedy, že o ideální plyn se pravděpodobně nejedná. Bližší informace nám bohužel nejsou dostupné, s jistotou to tedy tvrdit nemůžeme.

V naší simulaci byla veličina δ interpolována spolu s ostatními stavovými veličinami z tabulek [14].

V případě modelu klidného Slunce potřebujeme rovnice směšovacích délek vyřešit pro parametr ∇ . Definujme veličinu ξ jako

$$\xi = \sqrt{\nabla - \nabla_e} + U. \quad (3.27)$$

Pak můžeme takzvanou superadiabaticitu vyjádřit vztahem

$$\nabla - \nabla_{\text{ad}} = \xi^2 - U^2. \quad (3.28)$$

Zkombinováním těchto vztahů a dosazením do (3.25) obdržíme kubickou rovnici v ξ :

$$(\xi - U)^3 + \frac{8U}{9}(\xi^2 - U^2 - W) = 0, \quad (3.29)$$

kde $W = \nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}$. Z řešení této rovnice (jehož analytická forma je příliš komplikovaná pro uvedení zde) lze již snadno pomocí (3.28) dopočítat hodnotu logaritmického gradientu ∇ .

3.1.2 Ekvipartiční pole

Magnetické pole je zamrzlé v ionizovaném plynu, který neustále proudí. Pokud není dost silné, tak v důsledku konvektivních pohybů zanikne (je roztroušeno do okolí). Aby zůstalo magnetické pole zachováno, je třeba, aby se vzruchy v rámci silotrubice šířily rychleji, než jaká je rychlost konvektivních pohybů v_{conv} , což je právě rychlost ze vztahu (3.13). Platí pro ni tedy vztah:

$$v_{\text{conv}} = \sqrt{\frac{1}{8} g \delta \frac{l_m^2}{H} (\nabla - \nabla_e)} \quad (3.30)$$

Rychlost šíření vzruchu magnetickým polem je tzv. Alfvénova rychlost, která se vypočte ze vzorce

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (3.31)$$

Ekvipartiční pole je pole, kdy je Alfvénova rychlost právě rovna konvektivní rychlosti:

$$B = v_{\text{conv}} \sqrt{\mu_0 \rho} \quad (3.32)$$

3.1.3 Magnetohydrostatická rovnováha

Dosažením magnetického pole v soběpodobném tvaru podle rovnic (2.3) a (2.4) do rovnice pro magnetohydrostatickou rovnováhu (2.1) získáme následující dvě rovnice:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{B_z}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \quad (3.33)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{B_r}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \rho g \quad (3.34)$$

Zde také poukazujeme na špatně uvedené znaménko před členem ρg v [1]. První z těchto rovnic po integrování podle r od 0 do ∞ (pro konstantní z) přechází v rovnici

$$\frac{\Phi}{2\pi} y \frac{d^2 y}{dz^2} = y^4 - 2\mu_0(P_e - P_i), \quad (3.35)$$

kde $y = \sqrt{B_0(z)}$, Φ je magnetický tok silotrubic (nezávislý na hloubce), $P_e(z) = P(\infty, z)$ je vnější tlak a $P_i(z) = P(0, z)$ je tlak uvnitř silotrubice, který je dán podmínkou pro hydrostatickou rovnováhu:

$$\frac{dP_i}{dz} = \rho_i g \quad (3.36)$$

3.1.4 Časový vývoj

Jde o kvazistacionární model. Předpokládá se tedy, že v každém okamžiku je soustava v magnetohydrostatické rovnováze, která je určena rovnicemi (3.35) a (3.36). V důsledku přenosu energie se ovšem v průběhu mění teplota a v důsledku toku plynu směrem od středu Slunce na povrch se bude měnit také tlak.

Pro změnu teploty T_i v důsledku přenosu energie platí

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_i c_P} \frac{\partial}{\partial z} (F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}}), \quad (3.37)$$

kde F_{rad} a F_{conv} jsou dány vztahy (3.2) a (3.26).

Pokud uvažujeme magnetické pole B s magnetickým tokem Φ , můžeme definovat efektivní průřez $A_{\text{eff}} = \frac{\Phi}{B}$. Následně lze vypočítat hmotu uvnitř silotrubice jako

$$m = \int_0^{z_0} \rho_i A_{\text{eff}} dz = \Phi \int_0^{z_0} \frac{\rho_i}{B} dz, \quad (3.38)$$

kde z_0 je hranice hloubky, do které model řešíme. Pokud na této hranici z_0 vtéká hmota rychlostí v_0 , lze její změnu vyjádřit vzorcem

$$\Delta m = A_{\text{eff}} v_0 \rho_i \Delta t = \Phi \frac{\rho_i(z_0)}{B(z_0)} v_0 \Delta t. \quad (3.39)$$

Změna tlaku v hloubce z_0 za časový úsek Δt tedy musí být taková, aby bylo splněno

$$m[p_i(z_0) + \Delta p_i(z_0)] = m[p_i(z_0)] + \Phi \frac{\rho_i(z_0)}{B(z_0)} v_0 \Delta t. \quad (3.40)$$

4. Simulace dynamické diskonexe

4.1 Model klidného Slunce

Pro výpočet magnetického pole podle rovnice (3.35) je potřeba znát tlak plynu jako funkci hloubky v klidném Slunci $P_e(z)$. Za tímto účelem lze použít některý dostupných modelů. Výpočet byl ovšem v rámci práce pro přípovrchvé vrstvy proveden pro ověření správnosti použitého modelu konvekce a jeho implementace. Navíc je z důvodu konzistence vhodné, aby byl model klidného Slunce použitý pro výpočet získán za stejných podmínek, za kterých probíhá simulace.

4.1.1 Rovnice přenosu energie

V difúzní aproximaci lze logaritmický teplotní zářivý gradient ∇_{rad} vypočítat podle vztahu

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa P L_R}{16\pi a c G M_R T^4}, \quad (4.1)$$

kde L_R je celkový zářivý výkon Slunce ve vzdálenosti R od jeho středu, M_R je hmotnost části Slunce obalené slupkou o poloměru R . V přípovrchových vrstvách, kterými se v práci zabýváme, dochází již pouze k naprosto zanedbatelnému počtu jaderných reakcí, při kterých by byla produkována energie a které by ovlivnily celkový zářivý výkon. Proto byla pro výpočet tato hodnota nahrazena hodnotou L_{\odot} , tedy zářivým výkonem celého Slunce. Tento gradient určuje, jak by se měnila teplota v závislosti na tlaku, pokud bychom uvažovali pouze zářivý přenos energie.

Označme logaritmický teplotní gradient získaný z modelu konvekce jako ∇_{conv} . Podmínkou pro vznik konvekce [4] je

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}}. \quad (4.2)$$

Pro ∇_{conv} zároveň platí

$$\nabla_{\text{ad}} \leq \nabla_{\text{conv}} \leq \nabla_{\text{rad}}. \quad (4.3)$$

Skutečný gradient pak tedy lze určit jako

$$\nabla = \min(\nabla_{\text{rad}}, \nabla_{\text{conv}}). \quad (4.4)$$

4.1.2 Hydrostatická rovnováha

Tlak plynu ve Slunci je určen hydrostatickou rovnováhou, tedy

$$\frac{dP}{dz} = \rho g, \quad (4.5)$$

kde ρ je hustota a g gravitační zrychlení v daném bodě. Hodnota hustoty $\rho(T, p)$ je určena ze stavové rovnice. Pokud tedy známe počáteční podmínky, můžeme teplotní a tlakový hloubkový profil spočítat ze soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\frac{dP}{dz} = \rho(T, P)g(z) = \frac{P}{H(T, P, z)} \quad (4.6)$$

$$\frac{dT}{dz} = \nabla(T, P, z) \frac{T}{H(T, P, z)}. \quad (4.7)$$

Z důvodu lepší numerické stability byla jako nezávislá proměnná uvažována $\ln P$. Rovnice pak přecházejí na tvar

$$\frac{dz}{d \ln P} = H \quad (4.8)$$

$$\frac{dT}{d \ln P} = \nabla. \quad (4.9)$$

4.1.3 Stavová rovnice

Stavová rovnice ionizovaného plynu ve Slunci je uspokojivě reprezentována stavovou rovnicí ideálního plynu. Při výpočtu bylo ovšem interpolováno z předpočítaných tabulek OPAL [14], ve kterých jsou provedeny korekce na neidealitu plynu. Dále je ve stavové rovnici započtena ionizace atomů, která ovlivňuje střední molekulovou hmotnost.

4.1.4 Numerické řešení

Řešení bylo naprogramováno v programovacím jazyce Python za použití balíčků pro numerické a vědecké výpočty NumPy a SciPy [15]. Pro interpolaci v tabulkách pro stavovou rovnici byl využit kód dostupný spolu s tabulkami, psaný v jazyce FORTRAN. Kód byl upraven a zkompilován tak, aby byl použitelný jako modul pro Python.

Pro integraci rovnic byl použit řešič dopředu implementovaný v balíčku SciPy, používající Dormand-Princovu metodu; tedy Rungeovu-Kuttovu metodu s průběžnou kontrolou kroku.

Výpočty byly prováděny na clusteru Slunečního oddělení Astronomického ústavu, v.v.i., v Ondřejově.

4.1.5 Výsledky

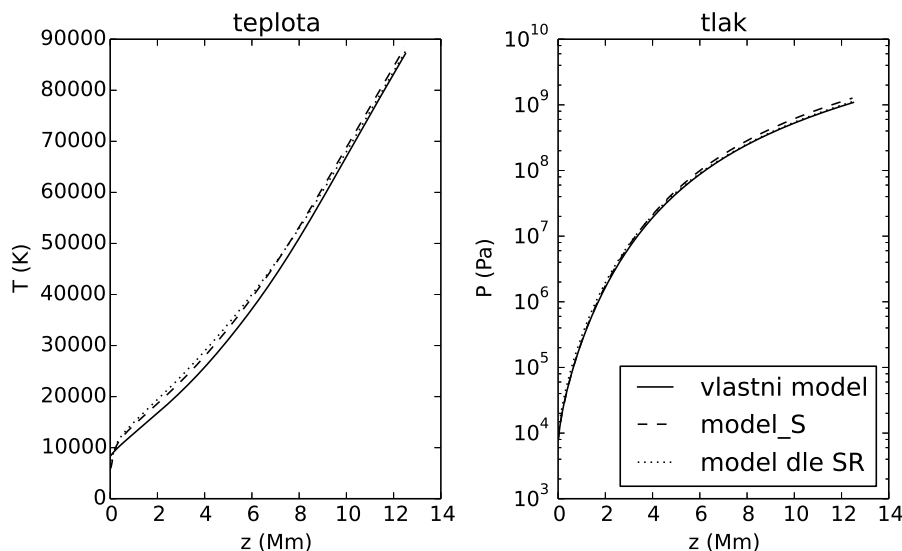
Jako počáteční podmínky u povrchu byly zvoleny tlak a teplota z referenčního modelu S [2], který je použit pro srovnání vypočtených hodnot s hodnotami obecně uznávanými. Na obrázku 4.1 je znázorněn průběh tlaku a teploty pro referenční model S, model od Matthiase Rempela¹ a náš vypočtený model klidného Slunce až do hloubky 12.5 Mm.

Na první pohled vypočtená teplota velmi dobře odpovídá průběhu z modelu S. Hodnoty se ale již od začátku mírně liší (viz přiblížení na obr. 4.2). Na vině je nejspíše fakt, že vypočtený model nebere v úvahu atmosféru, kde přestává platit difúzní aproximace.

Na obr. 4.3 je znázorněn skutečný logaritmický gradient a pro porovnání také radiativní gradient ∇_{rad} a adiabatický gradient ∇_{ad} . Ze začátku skutečný gradient sleduje ∇_{rad} , po překročení ∇_{ad} se ale začne odklánět a do přenosu energie se postupně začíná zapojovat konvekce. Kolem hloubky 1 Mm přenos energie konvekcí již dominuje.

¹Způsob získání iniciálního modelu - viz sekce 4.2.1 - nám byl natolik nejasný, že jsme se rozhodli kontaktovat autory článku [1]. Ti nám zaslali použitý iniciální model a model klidného Slunce.

V důsledku této nepřesnosti vznikají již znatelné rozdíly v tlakových profilech. Pokud ale přistoupíme na hypotézu, že tato nepřesnost je způsobena neošetřeným chováním blízko povrchu, lze předpokládat, že použité rovnice a použitý model konvekce jsou správně.



Obrázek 4.1: Porovnání modelu S, modelu zasláného autory [1] a vlastního modelu klidného Slunce

4.2 Simulace časového vývoje

4.2.1 Iniciální model

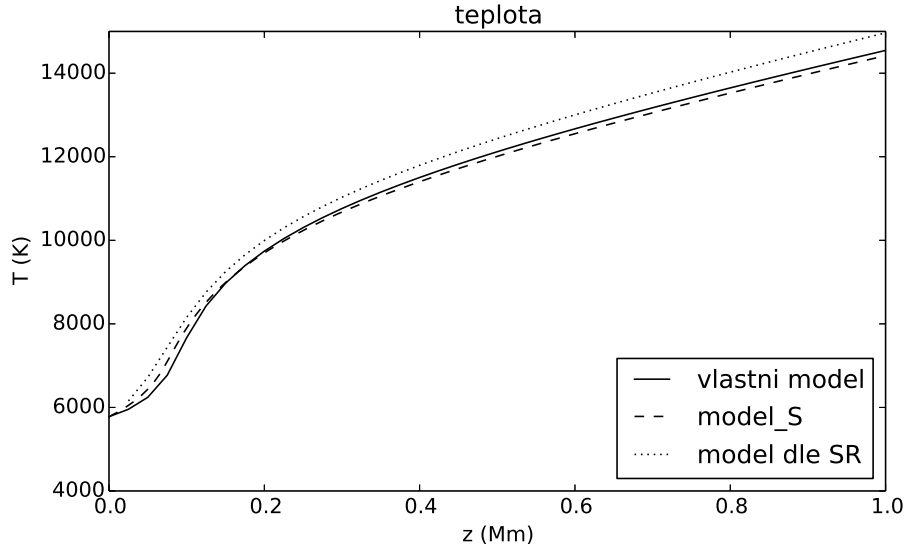
Cílem bylo postupovat stejně, jako v publikaci [1]. V té jsou na počáteční stav kladeny následující požadavky:

- Počáteční intenzita magnetického pole na spodním konci integrační domény (v hloubce 12,5 Mm) je volena přibližně 100 kG
- Počáteční stav je isentropický
- Entropie v hloubce 12,5 Mm je stejná, jako u klidného Slunce

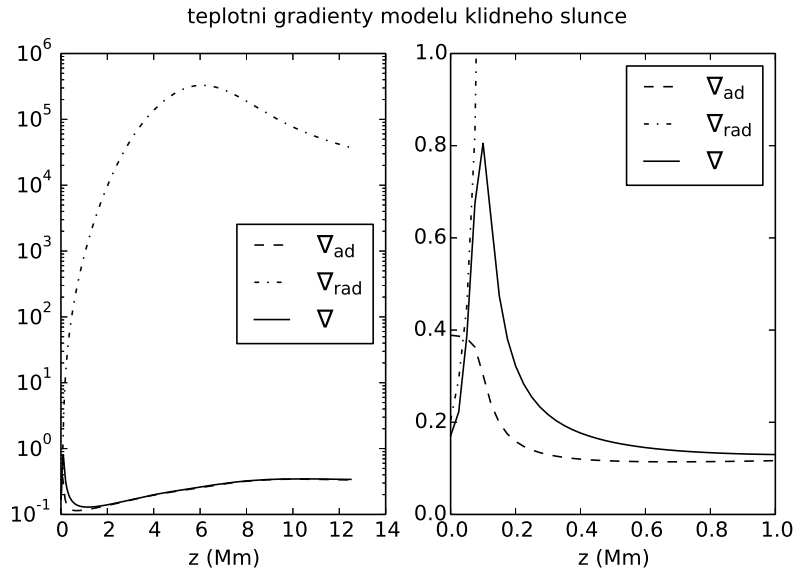
Z korespondence s autory článku [1] vyplynulo, že počáteční tlak u povrchu byl volen jako 90% tlaku v klidném Slunci. V této hloubce lze využít tzv. *thin flux tube* aproximaci, která předpokládá, že tlak magnetického pole $P_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ plně vyrovnává rozdíl tlaků uvnitř a vně silotrubice:

$$B^2 = 2\mu_0(P_e - P_i), \quad (4.10)$$

kde B je magnetická indukce, P_i je tlak v silotrubici a P_e je tlak okolí. Při volbě tlaku u povrchu lze při dané entropii dopočítat teplotu. Isentropický stav je následně



Obrázek 4.2: Porovnání teplotních profilů blízko povrchu



Obrázek 4.3: Teplotní gradienty vypočteného modelu klidného Slunce v celém zkoumaném úseku a přiblížení na oblast u povrchu. Skutečný logaritmický gradient je znázorněn tlustou čarou. Veličiny jsou bezrozměrné.

získán integrací rovnic:

$$\frac{dz}{d \ln P} = H \quad (4.11)$$

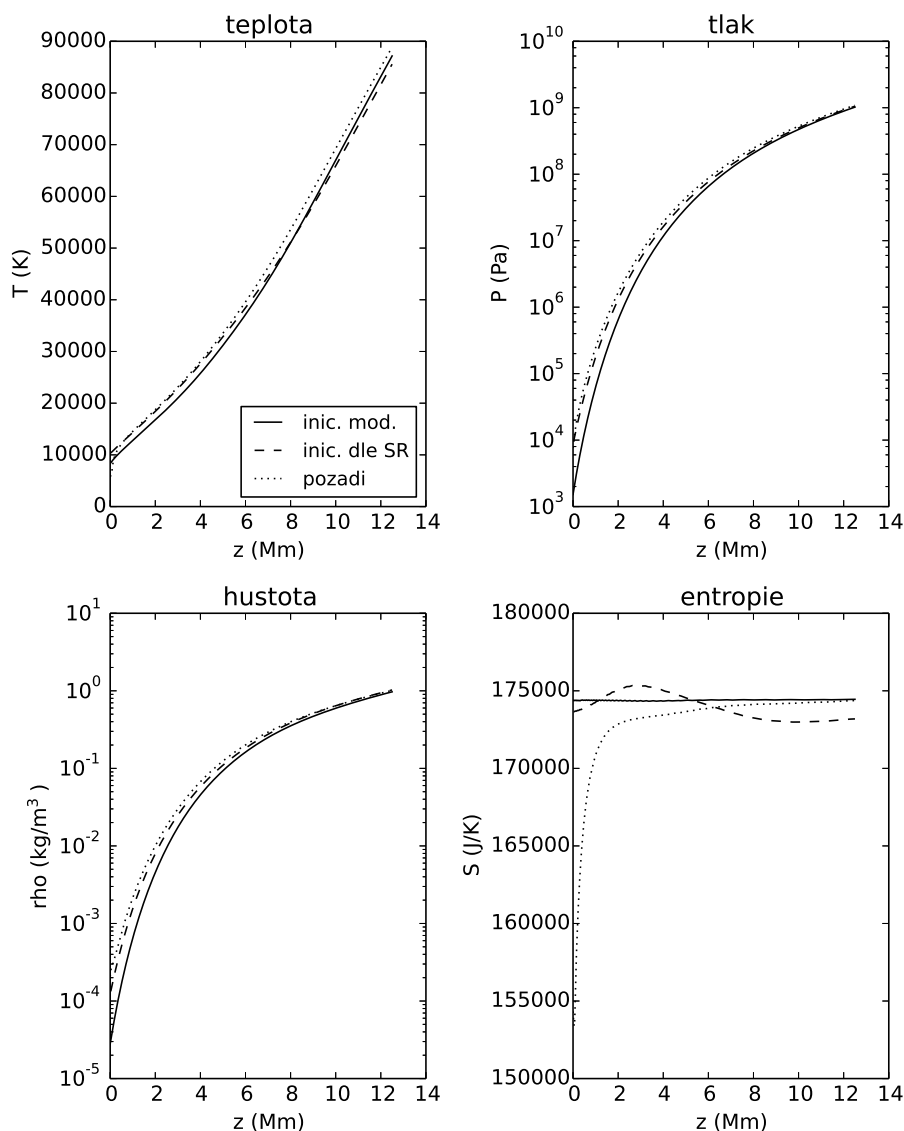
$$\frac{d \ln T}{d \ln P} = \nabla_{\text{ad}}. \quad (4.12)$$

V naší simulaci byla použita mírně odlišná stavová rovnice. Volba $P_1(0) = 0,9P_e(0)$ proto vedla k tomu, že

$$P_1(12,5 \text{ Mm}) > P_e(12,5 \text{ Mm}),$$

což je v rozporu s tím, že začínáme s magnetickým polem uvnitř silotrubice, viz (4.10). Z tohoto důvodu byl počáteční tlak stanoven jako $P_i(0) = 0,2P_e(0)$.

Na obr. 4.4 na průbězích entropie je dobře znatelná odlišnost použitých stavových rovnic. Na grafu je vidět, že dle námi použité stavové rovnice není originální model (který nám zaslal Matthias Rempel) isentropický, zatímco entropie našeho modelu je skutečně konstantní. Originální model se ovšem od isentropického odchyľuje pouze o cca 1%. Pro srovnání je vynesena ještě entropie klidného Slunce. Originální model v hloubce 12,5 Mm začíná na jiné hodnotě, jelikož vychází z odlišného modelu klidného Slunce.



Obrázek 4.4: Porovnání iniciálních modelů

V publikaci [1] jsou dále uvedeny okrajové podmínky, které je potřeba splnit:

- Teplota u povrchu je fixována na 3 500 K
- Na spodním konci integrační domény je gradient teploty adiabatický

Splnění těchto podmínek je problematické, jelikož z matematického hlediska jsou tyto podmínky přebytečné a pro vývoj teplotního profilu plně stačí rovnice (3.37-3.40). Z fyzikálního hlediska ovšem je potřeba teplotu u povrchu nějakým způsobem ošetřit. Teplota pozorovaná u slunečních skvrn je skutečně okolo 3 500 K, použitý model ovšem způsobí, že teplota bude stále klesat bez spodní hranice. Pro oba iniciální modely (náš i referenční) vychází teplota u povrchu kolem 9000 K. Není tedy jasné, jak by se tato podmínka měla zahrnout.

Skutečnost, že je potřeba teplotu uměle omezovat u povrchu ukazuje na nedostatek použitého modelu přenosu energie. Problém vzniká tím, že odvození rovnice (3.2) [16] pro výpočet F_{rad} předpokládá, že je splněna lokální termodynamická rovnováha a lze použít difúzní aproximaci – tedy že charakteristické škály, jako například tlaková škála H jsou výrazně delší, než střední volná dráha fotonů a interakce jsou dominovány srážkami. V důsledku klesající teploty u povrchu však klesá také opacita, plyn se stává pro fotony průhlednější, fotony začínají unikat ze Slunce a difúzní aproximace přestává platit.

4.2.2 Numerické řešení

Jeden časový krok simulace se skládal z následujících kroků:

1. Výpočet nového teplotního profilu, dle rovnice (3.37)
2. Úprava tlaku na spodním konci integrační domény, dle rovnice (3.40)
3. Výpočet nového tlakového a hustotního profilu

Výpočet nového teplotního profilu

Blízko povrchu je velikost F_{rad} velmi vysoká, použití explicitní metody by tedy vyžadovalo extrémně krátký časový krok. Z tohoto důvodu byla použita metoda semi-implicitní, tedy taková, která se k části výrazu pro F_{rad} chová jako k implicitnímu a k části jako explicitnímu.

Pro řešení byla použita metoda konečných diferencí. Použité značení je následující:

$$\delta_h[f](x) = f(x+h) - f(x-h) \quad (4.13)$$

$$\delta_h^2[f](x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \quad (4.14)$$

Za použití tohoto značení lze rovnici (3.37) přepsat na přibližný vztah

$$\rho_i c_P \frac{T^{(j+1)} - T^{(j)}}{\tau} = \frac{1}{2h} \delta_h [A^{(j)}] \frac{1}{2h} \delta_h [T^{(j+1)}] + \frac{1}{h^2} A^{(j)} \delta_h^2 [T^{(j+1)}] + \frac{1}{2h} \delta_h [F_{\text{conv}}^{(j)}], \quad (4.15)$$

kde

$$A = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}.$$

Ozávorkovaný horní index vyjadřuje, ve kterém čase je veličina uvažována. Obecně tedy

$$f^{(j)}(z) = f(z, j\tau),$$

kde τ je časový krok, který zde uvažujeme neměnný.

Semiimplicitnost metody je zajištěna tím, že derivaci teploty uvažujeme již v nadcházejícím časovém kroku.

Dosazením (4.13) a (4.14) do (4.15) získáme rovnici, která je lineární ve členech v čase $(j + 1)\tau$, tedy:

$$\mu_i T_{i-1}^{(j+1)} + \lambda T_i^{(j+1)} + \nu T_{i+1}^{(j+1)} = \frac{1}{h} \delta_h [F_{\text{conv}}] + \rho_i c_P \frac{T_i^{(j)}}{\tau}, \quad (4.16)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{1}{2h} \delta_h [A]_i - \frac{1}{h^2} A_i \\ \lambda_i &= -\frac{2}{h^2} A_i \\ \nu_i &= -\frac{1}{2h} \delta_h [A]_i - \frac{1}{h^2} A_i \end{aligned}$$

Spodním indexem i myslíme, že se jedná o i -tou hodnotu veličiny na mřížce s ekvidistantním dělením h , tedy $f_i = f(ih)$, $i \in \{0, \dots, n\}$.

V naší simulaci jsme (stejně jako v referovaném článku) problém řešili na mřížce se dělením 25 000 km, pro $z_0 = 12,5$ Mm je tedy $n = 500$.

Teplotní profil můžeme získat jako řešení soustavy rovnic (4.16), kde je třeba pouze ošetřit krajní body, jelikož pro T_0 a T_n nelze použít centrální diference.

Tato skutečnost by šla jednoduše korektně vyřešit počítáním jednostranných, namísto centrálních diferencí. Nabízí se zde však možnost zakomponovat výše zmíněné okrajové podmínky: teplota byla doplněna o 2 datové body:

- $T_{-1} = 3500$ K
- $T_{n+1} = T_n + \left(\frac{T}{H} \nabla_{\text{ad}}\right)_n h$

Volba T_{n+1} odpovídá požadavku na adiabatičnost na spodní hranici.

Další možností by bylo navázat na model za strany atmosféry polynom 2. stupně, který by nabýval svého minima při teplotě 3500 K. V naší simulaci jsme ovšem zůstali u verze $T_{-1} = 3500$ K.

Jeden časový krok vývoje teploty tedy odpovídal vyřešení soustavy rovnic, které odpovídá následující matici:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \nu_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & \lambda_1 & \nu_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & \lambda_2 & \nu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \mu_{n-1} & \lambda_{n-1} & \nu_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_n & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_0^{(j+1)} \\ T_1^{(j+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_n^{(j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 - T_{-1}\mu \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - T_{n+1}\nu \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

kde

$$f_i = \frac{1}{h} \delta_h [F_{\text{conv}}]_i + \left(\rho_i c_P \frac{T_i^{(j)}}{\tau} \right)_i \quad (4.18)$$

Úprava bázového tlaku

Rovnice (3.40) určuje, jak se má změnit váha hmoty uvnitř silotrubic při změně bázového tlaku. Byla řešena Newtonovou metodou implementovanou v softwarovém balíčku SciPy. Jako počáteční odhad bázového tlaku byla použita lineární extrapolace z předchozích dvou kroků, tedy

$$P_1^0(z_0; t + \Delta t) = 2P_1(z_0; t) - P_1(z_0; t - \Delta t) \quad (4.19)$$

Pro tento bázový tlak byla vyřešena rovnice hydrostatické rovnováhy (3.36) pro získání hloubkového profilu tlaku. Následně byla vyřešena rovnice magnetohydrodynamické rovnováhy (3.35) pro získání průběhu magnetického pole a posledním krokem byla integrace rovnice (3.39) pro spočtení celkové hmoty uvnitř silotrubic:

$$m = \Phi \int_0^{z_0} \frac{\rho_i}{B} dz. \quad (3.39 \text{ revisited})$$

Počáteční odhad bázového tlaku byl vždy poměrně dobrý, pro vyřešení tedy stačilo vždy pouze několik iterací.

Rovnice (3.35) je diferenciální rovnicí druhého řádu s Dirichletovou okrajovou podmínkou - tedy chceme nalézt řešení za podmínky, že známe $y(0)$ a $y(z_0)$. V našem případě je $y(0) = \sqrt{2000} \text{ G}$ a v hloubce $z_0 = 12,5 \text{ Mm}$ je využita aproximace pro tenkou silotrubici

$$B^2 = y^4 = 2\mu_0(P_e - P_i). \quad (4.20)$$

Tedy $y(z_0) = \sqrt[4]{2\mu_0(P_e(z_0) - P_i(z_0))}$.

Ve článku [1] je uvedena následující iterační metoda:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\epsilon}{y_n^3} \left[\frac{\Phi}{2\pi} y_n \frac{d^2 y_{n+1}}{dz^2} - y_n^3 y_{n+1} + 2\mu_0(P_e - P_i) \right], \quad (4.21)$$

kteřou lze získat linearizací rovnice (3.35). y_n značí n -tou iteraci celého průběhu funkce $y(z)$ v rámci jednoho časového kroku. Relaxační parametr ϵ je volen tak, aby rozdíl mezi jednotlivými iteracemi nebyl příliš velký. Tato metoda ovšem v našem případě nekonvergovala. Řešení tedy bylo získáno mírně odlišnou iterační metodou.

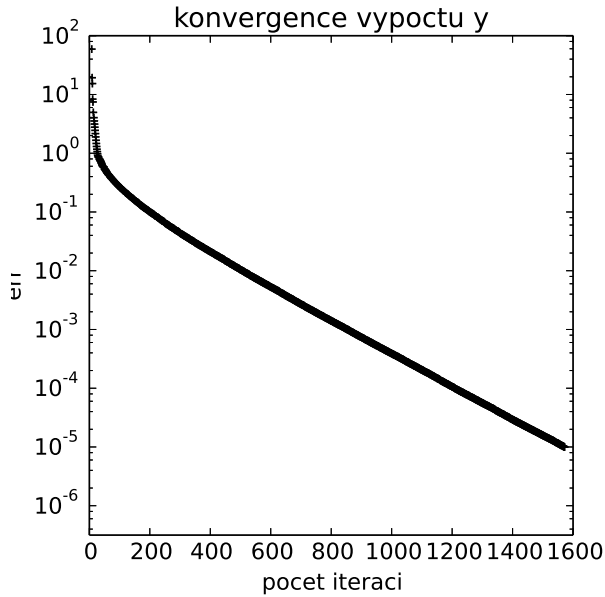
Použitá metoda je založena na předpokladu, že pokud linerizovanou rovnicí

$$\frac{\Phi}{2\pi} \frac{d^2 y_{n+1}}{dz^2} = y_n^3 - 2\mu_0 \Delta P / y_n \quad (4.22)$$

diskretizujeme a vyřešíme, tak za předpokladu, že y_n bylo dostatečně blízko skutečnému řešení, se průběh ke skutečnému řešení ještě přiblíží.

Rovnice byla tedy za využití konečných diferencí převedena na soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$Ay_{n+1} = y_n^3 - \frac{\Delta P}{y_n} = b_n, \quad (4.23)$$



Obrázek 4.5: Závislost chyby odhadu magnetického pole na počtu iterací metody. Vyneseny jsou pouze body, kdy byl nový průběh pole přijat, za iteraci je ovšem považován i nepřijatý průběh. Chyba je vynesena v logaritmicím měřítku. Je tedy zřetelné, že po prvních několika iteracích chyba klesá s exponenciálně rostoucí rychlostí.

kde A je matice druhých diferencí vynásobená koeficientem $\frac{\Phi}{2\pi}$:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Pro y_n platí:

$$Ay_n = b_n - r, \quad (4.25)$$

kde r je chybový vektor. Předpokládejme, že $y_{n+1} = y_n + \tilde{y}_n$. Potom můžeme opravu od původního řešení vyjádřit jako řešení soustavy rovnic:

$$A(y_n + \tilde{y}_n) = b_n \quad (4.26)$$

$$A\tilde{y}_n = r \quad (4.27)$$

Aby se jednotlivé průběhy funkce od sebe příliš nelišily, bylo y_{n+1} určeno jako

$$y_{n+1} = y_n + \varepsilon\tilde{y}_n, \quad (4.28)$$

ε je parametr, který byl dynamicky upravován tak, aby se v každém kroku snižovala chyba definovaná jako

$$e = \|A \cdot y_n - b_n\|_2 \quad (4.29)$$

Výpočet magnetického pole je popsán v následujícím zdrojovém kódu. Na obr. 4.5 je znázorněna rychlost konvergence metody.

```

def comp_mag(P, bcg_P, y0=None, tol=1e-5):
    # nejprve je spočteno magnetické pole na spodní
    # hranici dle aproximace pro tenké silotrubice
    B_bottom = sqrt(2*mu_0*(bcg_P[-1]-P[-1]))
    if y0 is None:
        # pokud není zadán výchozí magnetický pole,
        # je implicitně uvažována lineární funkce
        y0 = linspace(sqrt(B_top), sqrt(B_bottom), len(P))
    eps = 1

    A_, b_ = A(y0, P, bcg_P)
    # do A_ a b_ byl uložen tvar matice A a příslušné
    # pravé strany b
    # dále je porovnán součin A.y0 s pravou stranou,
    # pokud budou tyto vektory stejné,
    # diferenciální rovnice je vyřešena
    b_try = A_.dot(y0)
    err = norm(b_try-b_)
    while err>tol:
        # cyklus probíhá, dokud chyba definována
        # jako euklidovská norma chybového vektoru
        # neklesne pod hranici zadanou proměnnou tol
        diff = spsolve(A_, b_-b_try)
        diff[0] = diff[-1] = 0
        # posunuti je ve směru řešení rovnice
        # A.diff=b-b_try
        # řešení probíhá numericky, proto je dodatečně
        # stanoveno, že krajní body se nemohou posunout.
        # tento výsledek bychom získali i přesným
        # vyřešením, tímto pouze zabráníme akumulaci chyby
        y0_new = y0+eps*diff
        A_new,b_new = A(y0_new, P, bcg_P)
        b_try_new = A_.dot(y0)
        # pokud se snížila chyba odhadu, odhad přijmeme
        # a 1.1x prodloužíme velikost kroku pro příští
        # iterace. pokud chyba vzrostla, krok naopak
        # 2x zkrátíme a opakujeme iteraci
        if norm(b_try_new-b_new)<err:
            y0 = y0_new
            A_ = A_new
            b_ = b_new
            b_try = b_try_new
            err = norm(b_-b_try)
            eps = eps*1.1
        else:
            eps = eps/2.
    return y0

```

Uvedená metoda řešení rovnice s okrajovými podmínkami vyžaduje počáteční odhad na průběh magnetického pole. Metoda spolehlivě konverguje i z lineární funkce, která splňuje zadané počáteční podmínky. Aby však průběh zkonvergoval v pokud možno co nejnižším počtu iterací, byl počáteční průběh $y = \sqrt{B}$ zadán následovně:

$$y_{n+1}(z) = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)y_n(z) + \frac{z}{z_0} \sqrt[4]{2\mu_0(P_e(z) - P_i(z))} \quad (4.30)$$

Uvedený odhad tedy v hloubce z_0 splňuje vztah pro tenkou silotrubici, u povrchu je pole zachovááno konstantní, jak vyžadují okrajové podmínky. K tomuto tvaru jsme dospěli po zjištění, že při časovém vývoji se průběh magnetického pole u povrchu příliš nemění a v hloubce, kde se pole naopak s časem mění, splňuje aproximaci pro tenkou silotrubici.

Posledním krokem jedné iterace Newtonovy metody při řešení rovnice (3.40) byl výpočet hmoty v silotrubici dle rovnice (3.39). Integrace byla provedena podle složeného Simpsonova pravidla, tedy:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{n-1} + f_n). \quad (4.31)$$

Funkce $f(x)$ zde značí integrovanou funkci, pro níž známe funkční hodnoty f_0 až f_n v uzlech x_0 až x_n rozložených ekvidistantně na intervalu $\langle a, b \rangle$. Vzdálenost mezi dvěma uzly je h .

4.3 Technické aspekty numerické simulace

4.3.1 Zhlazování

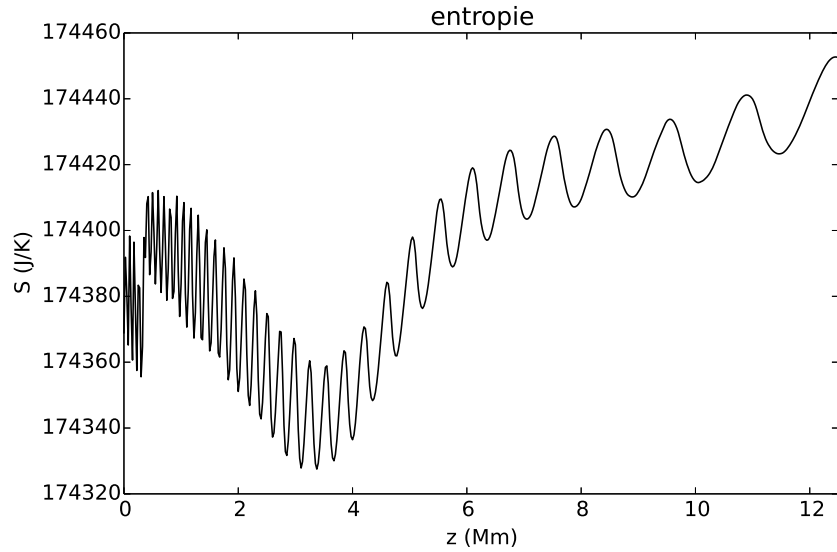
V důsledku numerických nepřesností není iniciální model plně isentropický. Toto je zřejmé například z obr. 4.6. Na grafu je vyobrazena entropie pro iniciální model. Ten by měl být isentropický. Pozorujeme však odchylky v řádu setin procenta, které jsou v rámci entropie zanedbatelné.

Nepřesnosti se ale projeví při výpočtu F_{conv} podle vztahu (3.26), kde se vyskytuje člen $\nabla - \nabla_e$, ve kterém se odečítají dvě velmi blízká čísla. Tento rozdíl by měl být pro iniciální model také nulový. V důsledku zmíněných nepřesností ovšem vykazuje podobné chování, jako entropie. Tyto chyby se v průběhu simulace zesilovaly, proto byly částečně odstraněny zhlazením výše zmíněného rozdílu konvolucí s křivkou s Gaussovským průběhem. Průběh $\nabla - \nabla_e$ před a po zhlazení je vyobrazen na obr. 4.7.

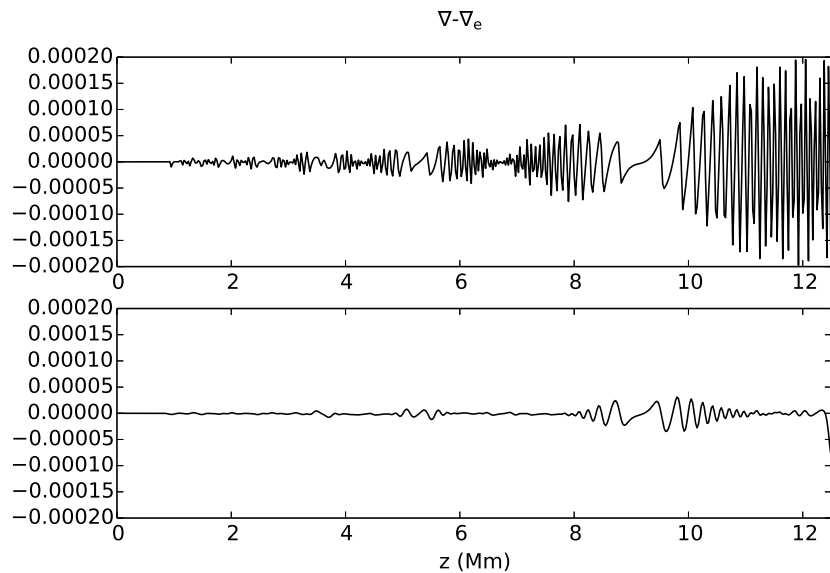
Průběh stále není hladký, především ve větších hloubkách. Rozdíl $\nabla - \nabla_e$ by nikdy neměl být záporný. Ve větších hloubkách navíc vznikaly oblasti s nenulovým F_{conv} , tyto chyby se akumulovaly a jejich vliv byl znatelný. Nenulovost F_{conv} je v rozporu s isentropií, která by měla být v hloubce zachována.

Pro vyrušení efektů vzniklých nenulovostí rozdílu $\nabla - \nabla_e$ bylo přistoupeno na heuristické ošetření, kdy bylo pole $\nabla - \nabla_e$ položeno rovno nule pro všechny indexy od prvního indexu, kde tato veličina nabývá záporné hodnoty a zároveň je v dané hloubce teplota vyšší než 20 000 K.

Očekáváme totiž pouze jednu kompaktní oblast s nenulovým F_{conv} . Podmínka na 20 000 K byla přidána z důvodu, že veličina nabývá záporných hodnot i blízko



Obrázek 4.6: Nekonstantnost entropie způsobená diskretizací



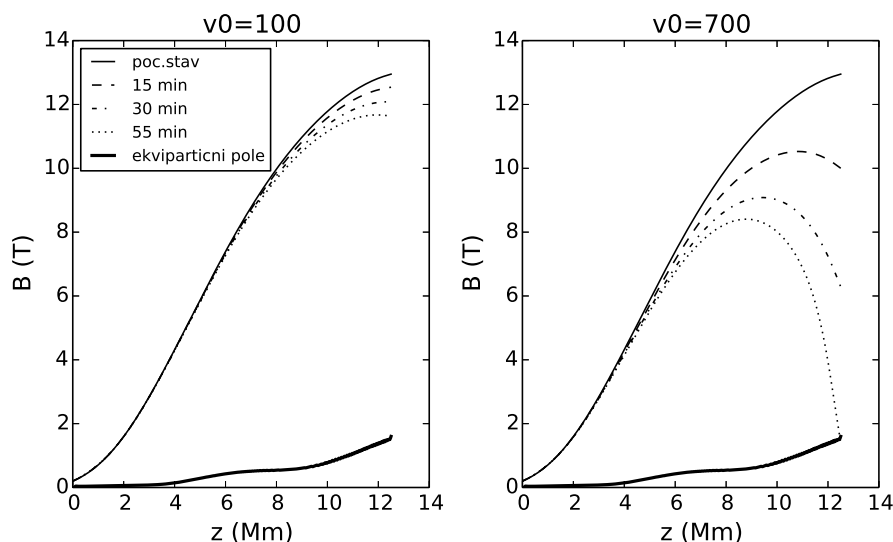
Obrázek 4.7: Rozdíl $\nabla - \nabla_e$ před a po konvoluci s gaussovskou křivkou

povrchu. Zde ale již F_{conv} počítané uvedeným vzorcem nemá smysl, jelikož není splněna difúzní aproximace.

4.3.2 Spodní hranice tlaku

V pokročilém stádiu byl u povrchu již velmi nízký tlak, pro který již nebylo možné interpolovat v tabulkách stavové veličiny. Proto byla stanovena jako spodní hranice pro tlak 1 Pa. U povrchu byl pro nás tlak důležitý pouze pro výpočet magnetického pole, kde vystupuje rozdíl mezi tlakem uvnitř silotrubice a vnějším tlakem.

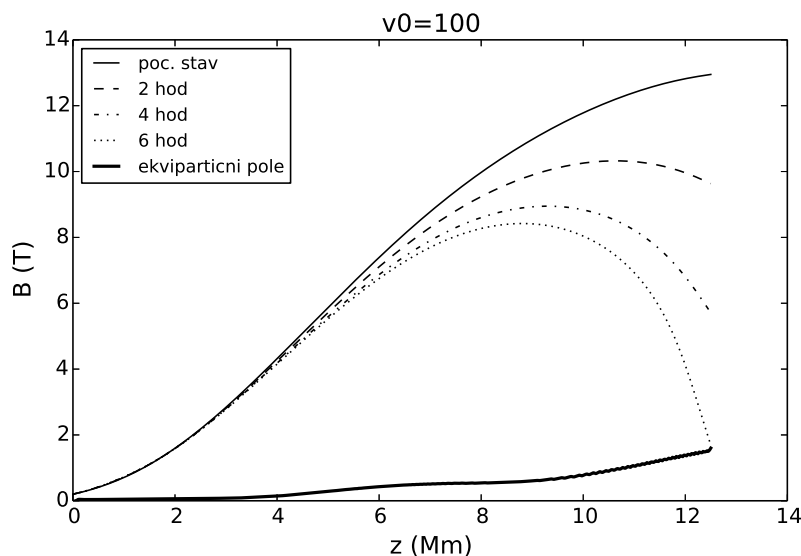
V oblasti, kde bylo potřeba k tomuto omezení přistoupit, byl tlak klidného Slunce v řádech desetitisíců Pascalů. Vliv omezení na rozdíl tlaků a následně na magnetické pole je zde tedy zanedbatelný.



Obrázek 4.8: Porovnání časového vývoje magnetického pole pro $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$ a $v_0 = 700 \text{ ms}^{-1}$

4.4 Výsledky simulace

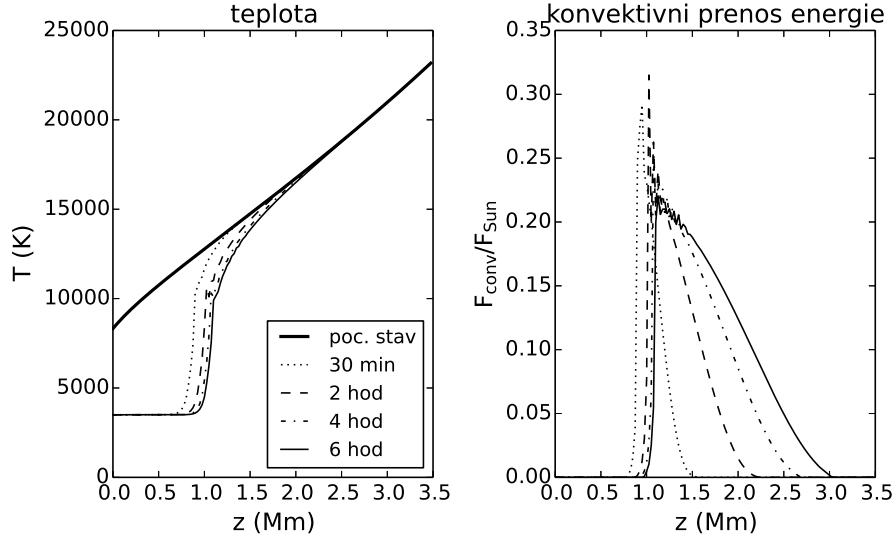
Simulace byla spouštěna s časovým krokem 10 sekund, pro počáteční stav s definovaný tlakem u povrchu $P_i(0) = 0.2P_e(0)$. Tomuto tlaku odpovídá teplota u povrchu 8319 K. Rozdíl tlaků v hloubce 12,5 Mm je v tomto případě přibližně 65 MPa, čemuž za využití aproximace pro tenké silotrubice odpovídá magnetické pole 13 T. Porovnávány byly simulace s rychlostí vtoku hmoty $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$ a $v_0 = 700 \text{ ms}^{-1}$.



Obrázek 4.9: Časový vývoj magnetického pole pro $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$

Ani v jednom z případů nebyla pozorována diskonexe. K diskonexi by dle [1] mělo dojít v hloubce 2–6 Mm, viz. obr. 3.1. Ovšem na tomto úseku byl pozorován pouze zanedbatelný vývoj magnetického pole. Největší změna magnetického pole byla vždy v důsledku snížení rozdílu tlaku uvnitř skvrny oproti tlaku okolí v

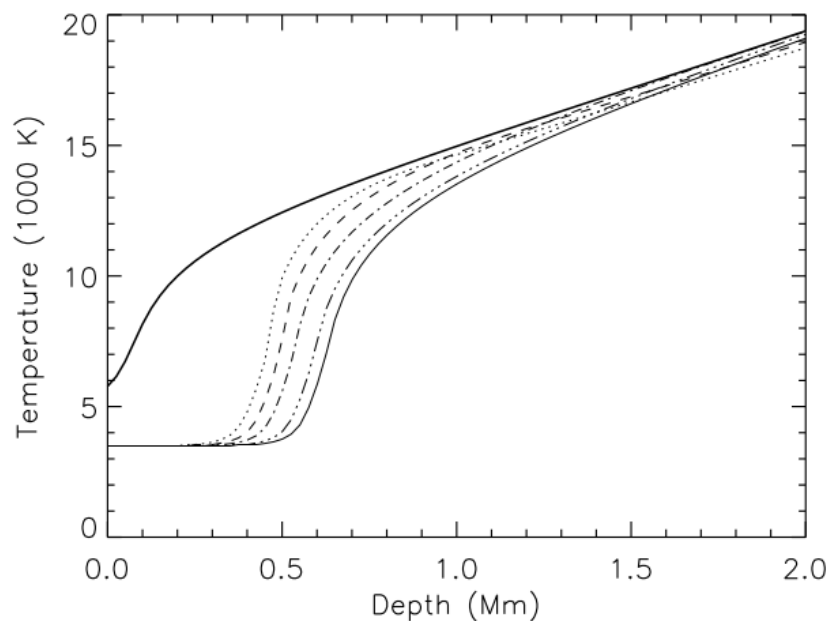
hloubce 12.5 Mm v důsledku přítoku hmoty. Vývoj magnetického pole pro rychlosti $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$ a $v_0 = 700 \text{ ms}^{-1}$ je zobrazen na grafech na obr. 4.8. Pro rychlost $v_0 = 700 \text{ ms}^{-1}$ došlo již během první hodiny k vyrovnání tlaků v hloubce $z_0 = 12.5 \text{ Mm}$. U simulace s $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$ pozorujeme podobnou tendenci, ale mnohem pomaleji. Viz. obr. 4.9.



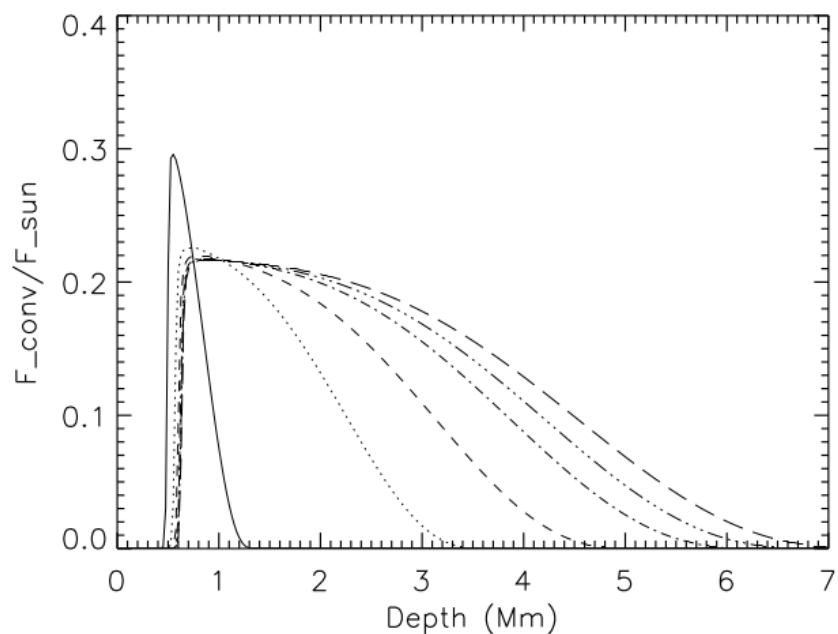
Obrázek 4.10: Časový vývoj teploty a F_{conv} pole pro $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$. Pro počáteční isentropický stav je F_{conv} všude nulové

Na obr. 4.10 je znázorněn vývoj teplotního profilu a konvektivního toku pro rychlost $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$.

Výsledek je kvalitativně srovnatelný s výsledkem ze článku [1], viz. obr. 4.11, s tím rozdílem, že radiativní ochlazování se v naší simulaci zastavilo v o něco větší hloubce, než v uvedeném článku. Kvantitativně lze tyto výsledky pouze obtížně srovnat, jelikož zde může hrát velkou roli volba počátečního stavu. Vývoj F_{conv} je opět srovnatelný. Průběh z naší simulace je kvůli numerickým nepřesnostem zubatý, viz. 4.3.1. Také je pozorovatelné pronikání konvektivního toku do hlubších vrstev, jako je tomu na obr. 4.12 (časový vývoj F_{conv} ze článku [1]).



Obrázek 4.11: Vývoj teploty ze článku [1]. $v_0 = 700 \text{ ms}^{-1}$. Plná čára znázorňuje klidné Slunce, dále průběhy znázorňují postupné ochlazování prostupující do hloubky v časech: 30 minut, 1 hodina, 4 hodiny, 15 hodin a 30 hodin.



Obrázek 4.12: Vývoj F_{conv} ze článku. $v_0 = 700 \text{ ms}^{-1}$. Plná čára odpovídá stavu po 1 hodině, dále jsou průběhy postupně v pořadí prostupujícím do větších hloubek: 10 hodin, 20 hodin, 30 hodin, 35 hodin a 40 hodin.

5. Diskuze

Výsledné průběhy naší simulace byly velmi blízké průběhům ze simulace provedené M. Schüsslerem a M. Rempeltem [1]. Pozorovali jsme ovšem výrazně rychlejší úbytek tlaku na spodní hranici. Vzhledem k tomu, že všechny ostatní veličiny dobře odpovídaly referované simulaci, byla především část výpočtu hmoty v silotrubici zevrubně kontrolována. I přes to připouštíme možnost, že zde je v naší simulaci implementační chyba.

Ideální by bylo, kdybychom mohli simulaci zopakovat za stejných podmínek, jako v referovaném článku. V tomto případě by bylo důležité znát především použitou stavovou rovnici, nebo ještě lépe porovnat celý postup výpočtu a zjistit, zda se výpočty liší i jinde, než v použité stavové rovnici.

Kód, který je součástí práce, umožňuje snadné nahrazení použité stavové rovnice za jinou. Při získání tabulek pro interpolaci stavových veličin použitých v referovaném článku by tedy bylo snadné simulaci zopakovat s danou stavovou rovnicí. Také by mohlo pomoci simulaci provést se stavovou rovnicí pro ideální plyn. Problematicčnost interpolování v tabulkách tkví v tom, že o stavové rovnici v tomto případě není možné provádět jakékoliv analytické úvahy. Použitím rovnice pro ideální plyn ztratíme určitou míru přesnosti, nicméně budeme mít mnohem větší přehled, co se během simulace děje.

Zřejmá odlišnost je i ve výpočtu magnetického pole. Pro zvolenou metodu však bylo názorně ukázáno, že konverguje ke správnému řešení. Ovšem i v případě, že by se průběhy magnetického pole kvalitativně lišily, nemohlo by to způsobit řádově odlišnou rychlost poklesu tlaku na spodní hranici simulace.

Závěr

Pokusili jsme se o zreprodukování výsledků ze článku [1]. Nejprve se podařilo vyřešit rovnice přenosu energie a hydrostatické rovnováhy a získat tak model klidného Slunce. Ten velmi dobře odpovídal modelu ze článku [2], který jsme považovali pro klidné Slunce za referenční.

Mírné odchylky byly zaznamenány u povrchové oblasti. Náš model uvažoval, že je v celé zkoumané hloubce splněna termodynamická rovnováha. Toto nemusí být nutně pravda a pro přesný výpočet by bylo potřeba začít započítávat jevy probíhající v atmosféře, kde použité rovnice již neplatí.

Po komunikaci s M. Schüsslerem a M. Rempel, autory článku [1], se nám podařilo sestavit iniciální model, který kvalitativně odpovídal iniciálnímu modelu v referovaném článku.

Především kvůli nedostatečnému popsání způsobu získání iniciálního modelu (který jsme nakonec získali až při komunikaci s autory) a nepopsání použité stavové rovnice považujeme výsledky uváděné v publikaci [1] za velmi obtížně reprodukovatelné.

Iniciální model jsme nechali vyvíjet v čase pro dvě různé hodnoty rychlosti přítoku hmoty na spodní hranici – $v_0 = 100 \text{ ms}^{-1}$ a $v_0 = 700 \text{ ms}^{-1}$. Ani v jednom z případů ovšem nebyla pozorována dynamická diskonexe, tedy vyrovnání magnetického pole s polem ekvipartičním v hloubce mezi 2 – 10 Mm. Důvodem byl příliš rychlý pokles rozdílu tlaků mezi silotrubicí a okolím. I přes důkladnou kontrolu připouštíme, že může být chyba v použitém algoritmu pro úpravu bazového tlaku.

Jako další směr vývoje si představujeme důkladné podrobení kódu nezávislým testům, jako je například použití různých stavových rovnic. Kód je na tuto úpravu dobře připravený. Vytvořený kód také pouze s minimální úpravou umožňuje použití jiných modelů konvekce, jako je například [17]. To může být důležité, jelikož právě konvekce ve zkoumaném modelu diskonexe hraje významnou roli.

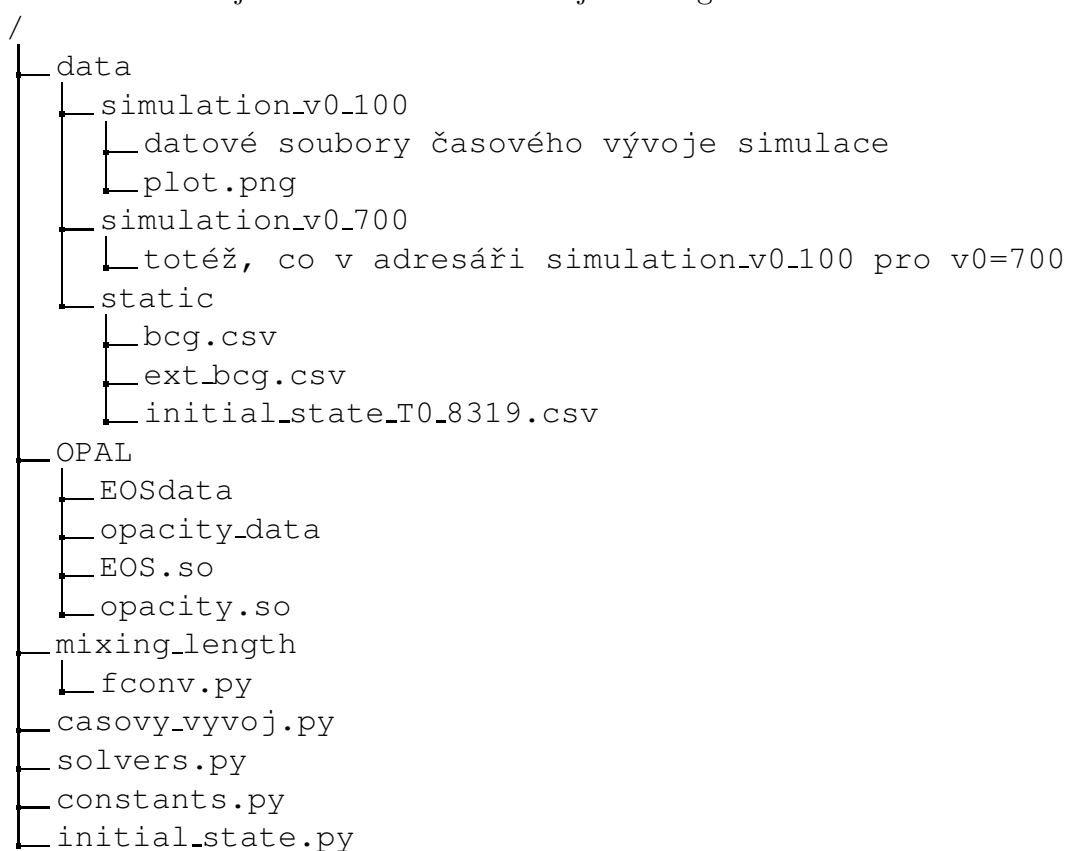
Dalším možným směrem výzkumu je rozšíření simulace do více rozměrů. Omezení se pouze na hloubkový průběh nám zabraňuje zahrnout jevy, jako je například přenos energie v horizontálním směru.

Popis programu

Kód byl napsán v programovacím jazyce Python 2.7. Kromě balíčků, které jsou součástí standardní knihovny využívá balíčky NumPy, SciPy a Pandas, které usnadňují numerické výpočty a práci s datovými tabulkami. V průběhu simulace jsou vykreslovány grafy, aby bylo možno zkontrolovat její stav bez načítání dat. V případě zájmu o tuto funkčnost je potřeba mít navíc nainstalovaný balíček matplotlib

Pro interpolaci v tabulkách stavové rovnice OPAL [14] byl využit kód, který je dostupný spolu s tabulkami, psaný v jazyce FORTRAN. Tento kód byl mírně upraven a zkompileován do podoby, ve které je použitelný jako modul pro jazyk Python.

Struktura kódu je znázorněna na následujícím diagramu



Simulace se spouští z příkazové řádky příkazem

```
python casovy_vyvoj.py -v0 '$v0' -tau '$tau' -p0 '$p0'
```

Tímto způsobem lze simulaci spouštět s různými rychlostmi přítoku hmoty na spodní hranici, různými časovými kroky a různými iniciálními modely. Plánované je rozšíření o volbu stavové rovnice. Iniciální model je zadán poměrem tlaku u povrchu k tlaku pozadí u povrchu. Výchozí parametry jsou:

```
v0 = 100
tau = 10
p0 = 0.2
```

Stručný popis jednotlivých souborů:

- `initial_state.py` ... spočte isentropický počáteční stav
- `casovy_vyvoj.py` ... hlavní spouštěcí skript, volá jednotlivá řešení pro nastolení magnetohydrostatické rovnováhy a vyvíjí řešení v čase
- `solvers.py` ... obsahuje funkce pro řešení jednotlivých obyčejných diferenciálních rovnic (hydrostatická rovnováha, výpočet magnetického pole) a pro úpravu teploty v jednom časovém kroku
- `constants.py` ... zde jsou uloženy všechny konstanty, které jsou neměnné a sdílené skrz celý program
- `OPAL/` ... zde jsou všechny soubory a data potřebná pro interpolaci v tabulkách stavové rovnice OPAL. Zkompilované kódy pro interpolaci jsou uloženy v adresářích `EOSdata` a `opacity_data`. Soubory `EOS.so` a `opacity.so` slouží pouze pro účel formátování vstupu a výstupu do požadovaného tvaru a jednotek.
- `mixing_length/fconv.py` ... výpočet konvektivního toku energie v aproximaci směšovacích délek
- `data/` ... sem se ukládají výsledky simulace do `.csv` souborů opatřených hlavičkou

Seznam použité literatury

- [1] M. Schüssler and M. Rempel. The dynamical disconnection of sunspots from their magnetic roots. *Astronomy and Astrophysics*, 441, 2005.
- [2] J. Christensen-Dalsgaard, W. Dappen, S. V. Ajukov, E. R. Anderson, H. M. Antia, S. Basu, V. A. Baturin, G. Berthomieu, B. Chaboyer, S. M. Chitre, A. N. Cox, P. Demarque, J. Donatowicz, W. A. Dziembowski, M. Gabriel, D. O. Gough, D. B. Guenther, J. A. Guzik, J. W. Harvey, F. Hill, G. Houdek, C. A. Iglesias, A. G. Kosovichev, J. W. Leibacher, P. Morel, C. R. Proffitt, J. Provost, J. Reiter, E. J. Rhodes, Jr., F. J. Rogers, I. W. Roxburgh, M. J. Thompson, and R. K. Ulrich. The Current State of Solar Modeling. *Science*, 272:1286–1292, May 1996.
- [3] R. Mitalas and K. R. Sills. On the photon diffusion time scale for the sun. *Astrophysical journal*, 401:759, December 1992.
- [4] P. Harmanec and M. Brož. *Stavba a vývoj hvězd*. MATFYZPRESS, 2011.
- [5] P. A. P. Nghiem, R. A. García, and S. J. Jiménez-Reyes. Solar mean magnetic field near the surface and its variation during a cycle. In *Proceedings of SOHO 18/GONG 2006/HELAS I, Beyond the spherical Sun*, volume 624 of *ESA Special Publication*, page 70.1, October 2006.
- [6] Slunce jako hvězda. <http://http://slunce.astronomie.cz/>. Přístup: 2016-05-23.
- [7] L. van Driel-Gesztelyi and L. M. Green. Evolution of Active Regions. *Living Reviews in Solar Physics*, 12, September 2015.
- [8] M. Rempel and R. Schlichenmaier. Sunspot Modeling: From Simplified Models to Radiative MHD Simulations. *Living Reviews in Solar Physics*, 8, September 2011.
- [9] J. M. Borrero and K. Ichimoto. Magnetic Structure of Sunspots. *Living Reviews in Solar Physics*, 8, September 2011.
- [10] H. Moradi, C. Baldner, A. C. Birch, D. C. Braun, R. H. Cameron, T. L. Duvall, L. Gizon, D. Haber, S. M. Hanasoge, B. W. Hindman, J. Jackiewicz, E. Khomenko, R. Komm, P. Rajaguru, M. Rempel, M. Roth, R. Schlichenmaier, H. Schunker, H. C. Spruit, K. G. Strassmeier, M. J. Thompson, and S. Zharkov. Modeling the Subsurface Structure of Sunspots. *Sol. Phys.*, 267:1–62, November 2010.
- [11] W. Deinzer. On the Magneto-Hydrostatic Theory of Sunspots. *Astrophysical journal*, 141:548, February 1965.
- [12] John Lattanzio. Monash University, M4111: The Sun, lecture notes. <http://users.monash.edu.au/~johnl/M4111/MLT.pdf>. Přístup: 2016-05-23.

- [13] E. Böhm-Vitense. Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen. *ZAp*, 46:108, 1958.
- [14] F. J. Rogers, F. J. Swenson, and C. A. Iglesias. OPAL Equation-of-State Tables for Astrophysical Applications. *Astrophysical journal*, 456:902, January 1996.
- [15] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson, et al. SciPy: Open source scientific tools for Python, 2001–. [Online; accessed 2016-05-23].
- [16] Norbert Langer . Universität Bonn, Stars and Stellar Evolution, lecture notes. <https://astro.uni-bonn.de/~nlangner/>. Přístup: 2016-05-23.
- [17] S. Pasetto, C. Chiosi, M. Cropper, and E. K. Grebel. Theory of stellar convection: removing the mixing-length parameter. *MNRAS*, 445:3592–3609, December 2014.