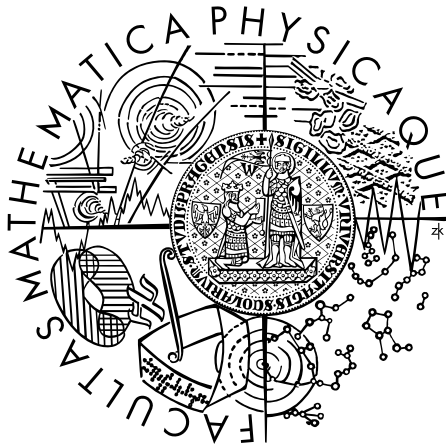


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# Diplomová práce



Martin Růžička

*Interakce nestlačitelné tekutiny a obtékaných těles*

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

Studijní program: Matematické a počítačové modelování ve fyzice a technice

Především bych chtěl poděkovat vedoucímu diplomové práce Prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc. za odborné vedení, rady a pomoc nejen v oblasti teoretické. Dále děkuji RNDr. Petru Sváčkovi, PhD. za poskytnutí programového vybavení a za konzultaci při programování některých metod.

Poděkovat chci též Mgr. Zdeňku Pekárkovi za pomoc se sazbou v systému L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 20.4.2005

Martin Růžička

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Teoretické základy</b>	<b>8</b>
2.1	Matematická formulace problému . . . . .	8
2.2	Odvození rovnic . . . . .	9
2.2.1	ALE metoda . . . . .	9
2.2.2	Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE popisu . . . . .	10
2.2.3	Odvození rovnic pro pohyb letecké profilu . . . . .	17
2.2.4	Výpočet síly a momentu síly působící na profil . . . . .	23
2.3	Okrajové a počáteční podmínky . . . . .	24
2.4	Diskretizace problému (numerická část) . . . . .	25
2.4.1	Diskretizace v čase . . . . .	25
2.4.2	Diskretizace v prostoru . . . . .	26
2.4.3	Stabilizace metody konečných prvků . . . . .	30
2.4.4	Numerický výpočet síly $L_2$ a momentu síly $M$ . . . . .	31
2.4.5	Rovnice pro zobecněné souřadnice . . . . .	33
2.4.6	Konstrukce ALE zobrazení . . . . .	34
2.4.7	Řešení nelineárního problému . . . . .	34
2.4.8	Řešení Oseenova problému . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Numerická realizace - software</b>	<b>38</b>
3.1	Realizace ALE zobrazení . . . . .	38
3.1.1	Realizace ALE zobrazení pomocí Laplaceovy rovnice . . . . .	38
3.1.2	Realizace ALE zobrazení pomocí geometrických úvah . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Výsledky</b>	<b>43</b>
4.1	Experiment . . . . .	43
4.1.1	Popis experimentu - experimentální uspořádání . . . . .	43
4.1.2	Geometrie problému . . . . .	43
4.1.3	Výsledky experimentu . . . . .	44
4.2	Numerické výpočty . . . . .	45
4.2.1	Bezrozměrné veličiny . . . . .	45
4.2.2	Frekvenční analýza . . . . .	46
4.2.3	Volba oblasti . . . . .	47
4.2.4	Triangulace oblasti . . . . .	47

---

4.2.5	Řešení bez vlivu tekutiny . . . . .	48
4.2.6	Náběžná rychlost $0\text{ms}^{-1}$ . . . . .	50
4.2.7	Náběžná rychlost $17.5\text{ms}^{-1}$ - Re 140000 . . . . .	51
4.2.8	Náběžná rychlost $40\text{ms}^{-1}$ - Re 320000 . . . . .	53
4.3	Shrnutí a porovnání výsledků . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Diskuze</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>56</b>
<b>A</b>	<b>Vstupní parametry modelu - souhrn</b>	<b>57</b>
<b>B</b>	<b>Zdrojové kódy použitých modulů</b>	<b>58</b>
<b>C</b>	<b>Obrázky</b>	<b>60</b>

*Název práce:* Interakce nestlačitelné tekutiny a obtékaných těles

*Autor:* Martin Růžička

*Katedra (ústav):* Katedra numerické matematiky

*Vedoucí diplomové práce:* Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

*E-mail vedoucího:* feist@karlin.mff.cuni.cz

*Abstrakt:* Obsahem této práce je numerická simulace interakce dvoudimenzionálního proudění nestlačitelné vazké tekutiny a vibrujícího leteckého profilu. Uvažujeme pevný letecký profil se dvěma stupni volnosti, který může rotovat kolem elastické osy a oscilovat ve vertikálním směru. Numerická simulace je dána řešením Navierových-Stokesových rovnic metodou konečných prvků a numerickým řešením systému obyčejných diferenciálních rovnic popisujících pohyb leteckého profilu. Časově závislá výpočetní oblast a pohybující se výpočetní síť je popsána pomocí Arbitrary Lagrangian-Euler (ALE) formulace Navierových-Stokesových rovnic. Režimy s velkými Reynoldsovými čísly řádově  $10^6$  vyžadují aplikaci vhodné stabilizace metody konečných prvků. Numerické testy ukazují, že výsledná metoda je dostatečně přesná a robustní.

*Klíčová slova:* aeroelasticita, metoda konečných prvků, ALE formulace, stabilizace pro velká Reynoldsova čísla

*Title:* Interaction of incompressible fluid and moving bodies

*Author:* Martin Růžička

*Department:* Department of Numerical Mathematics

*Supervisor:* Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

*Supervisor's e-mail address:* feist@karlin.mff.cuni.cz

*Abstract:* The subject of this thesis is the numerical simulation of the interaction of two-dimensional incompressible viscous flow and a vibrating airfoil. A solid airfoil with two degrees of freedom, which can rotate around the elastic axis and oscillate in the vertical direction, is considered. The numerical simulation consists of the finite element solution of the Navier-Stokes equations coupled with the system of ordinary differential equations describing the airfoil motion. The time dependent computational domain and a moving grid are taken into account with the aid of the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation of the Navier-Stokes equations. High Reynolds numbers up to  $10^6$  require the application of a suitable stabilization of the finite element discretization. Numerical tests prove that used method is sufficiently accurate and robust.

*Keywords:* aeroelasticity, finite element method, Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation, stabilization for high Reynolds numbers

# 1 Úvod

Interakce tekutiny a obtékaných těles hraje důležitou úlohu v mnoha technických oborech. Uved' me zejména letecký průmysl. Zde se mj. zkoumá deformace křídél. Dosažených výsledků se užívá pro návrh konstrukcí s lepšími aerodynamickými vlastnostmi, které se umí lépe vypořádat s nežádoucí deformací. Dalšími odvětvími, kde se uplatňuje interakce tekutiny a obtékaného tělesa a kde můžeme tuto interakci modelovat pro lepší návrh, jsou strojírenství (turbíny, kompresory, pumpy) a stavitelství (stabilita mostů), atd. Dostupný komerční software, jako např. NASTRAN, FLUENT nebo ANSYS, je schopen řešit pouze úzký okruh problémů aeroelasticity nebo hydroelasticity. Většinou jsme v tomto programovém vybavení omezeni jen na linearizované modely. Z tohoto důvodu nemůže být touto cestou dosaženo přesných výsledků pro velké amplitudy vibrací obtékaného tělesa.

Chvění ve větších deformacích obtékaného tělesa může být studováno analytickými metodami pouze ve speciálních případech. Nicméně, skutečné situace respektive modely blížící se více realitě jsou obvykle mnohem složitější a nemohou být analyticky vyřešeny. Je to především díky tomu, že v reálnějších modelech uvažujeme vazkou tekutinu, časově proměnnou oblast proudění, turbulentní jevy, nelineární chování obtékaných těles a především řešení pohybu obtékaného tělesa je úzce spjato s řešením pohybu tekutiny. Interakce je tedy oboustranná, tj. obtékané těleso ovlivňuje tekutinu (např. změnou oblasti vyplněné tekutinou) a naopak, což je dáno silou a momentem síly, kterou proudící tekutina působí na obtékané těleso. Řešení obou částí problému musí probíhat současně.

V našem případě se zaměříme na numerické řešení aeroelastického problému dvojrozměrného vazkého nestlačitelného proudění kolem leteckého profilu se dvěma stupni volnosti. Letecký profil bude v našem modelu reprezentován tuhým tělesem, které může vykonávat vertikální a torzní vibrace.

Matematický model tekutiny je tvořen systémem sestávajícím z dvojrozměrných nestacionárních Navierových-Stokesových rovnic a rovnice kontinuity, které jsou doplněny počátečními podmínkami a smíšenými okrajovými podmínkami. Nestlačitelné proudění zahrnuje celou škálu komplikací typických pro numerické řešení singulárně perturbovaných parciálních diferenciálních rovnic. Existuje velký počet numerických technik pro řešení Navierových-Stokesových rovnic. V případě oblastí s komplikovanou oblastí nebo smíšených okrajových podmínek se za nejvhodnější řešení jeví použití metody konečných prvků. Tato metoda je použita i v této práci. Metoda konečných prvků určená pro numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic však vyžaduje platnost tzv. Babuškovy-Breeziho podmínky,

kteřá zaručuje stabilitu schématu. Prostory konečných prvků pro rychlost a tlak musí být tedy vhodně zvoleny, aby tato podmínka byla splněna.

Pro Reynolsova čísla vyšší než  $10^4$  je nezbytné použít stabilizaci ve schématech metody konečných prvků. Stabilizace byla realizována tzv. metodou SUPG (streamline upwind Petrov-Galerkin method). Zde použijeme „streamline-diffusion“ metodu.

Dále je nezbytné zabývat se vhodnou volbou výpočetní sítě, aby bylo dosaženo co nejlepší přesnosti při co nejnižším počtu použitých elementů. Používáme anizotropní adaptivní techniku pro konstrukci sítě a její adaptivní zjemňování.

Vzhledem k pohybuujícímu se leteckému profilu je výpočetní oblast časově závislá. Tento problém vyžaduje určit vhodnou techniku pro simulaci na pohybujících se výpočetních sítích. Za vhodnou techniku byla zvolena Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) metoda, na jejímž základě byly přeformulovány Navierovy-Stokesovy rovnice.

Použití metody konečných prvků vede k velkému diskrétnímu systému nelineárních algebraických rovnic. Jako vhodné řešení diskretních Navierových-Stokesových rovnic se nabízí Oseenova iterativní metoda. Ta nám umožňuje řešit nelineární Navierovy-Stokesovy rovnice pomocí soustav lineárních rovnic. K tomuto účelu jsou vhodné některé přímé řešiče pro lineární soustavy, které pracují dostatečně účinně až do  $10^5$  neznámých. Pro větší soustavy je třeba ablikovat několik iteračních kroků.

Matematický model pro letecký profil je dán soustavou dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Numerické řešení této části problému je realizováno pomocí Runge-Kuttových metod.

Východiskem pro realizaci numerických výpočtů bylo programové vybavení vypracované RNDr. Petrem Sváčkem, PhD. Tento software je napsán v jazyce C. Modifikací některých jeho částí byl vypracován software vhodný pro vybrané konkrétní problémy, které jsou zkoumány experimentálně Ústavem termomechaniky Akademie věd České republiky. V práci je provedena numerická analýza těchto problémů a provedeno porovnání s experimentálními výsledky.

## 2 Teoretické základy

### 2.1 Matematická formulace problému

V této práci se budeme zabývat dvojrozměrným modelem vazké, nestačitelné tekutiny, která působí na pohybující se letecký profil. Profil je považován za tuhé těleso se dvěma stupni volnosti, jež zachycují vertikální a torzní oscilace profilu. Jedná se tedy o úlohu s časově proměnnou hranicí a tudíž i časově proměnnou výpočetní oblastí. Pro matematický popis tekutiny v oblasti s měnící se hranicí použijeme ALE popis, který bude později zaveden. Tomuto popisu odpovídají i modifikované Navierovy-Stokesovy rovnice, které budou odvozeny v této práci také. Hlavním parametrem vyskytujícím se v Navierových-Stokesových rovnicích je koeficient  $\nu > 0$ , což je kinematická vazkost. Tato veličina charakterizuje tekutinu, která bude obtékat profil. Další veličinou zachycující charakter proudění je bezrozměrné Reynoldsovo číslo definované vztahem

$$Re = \frac{L^*U^*}{\nu}, \quad (1)$$

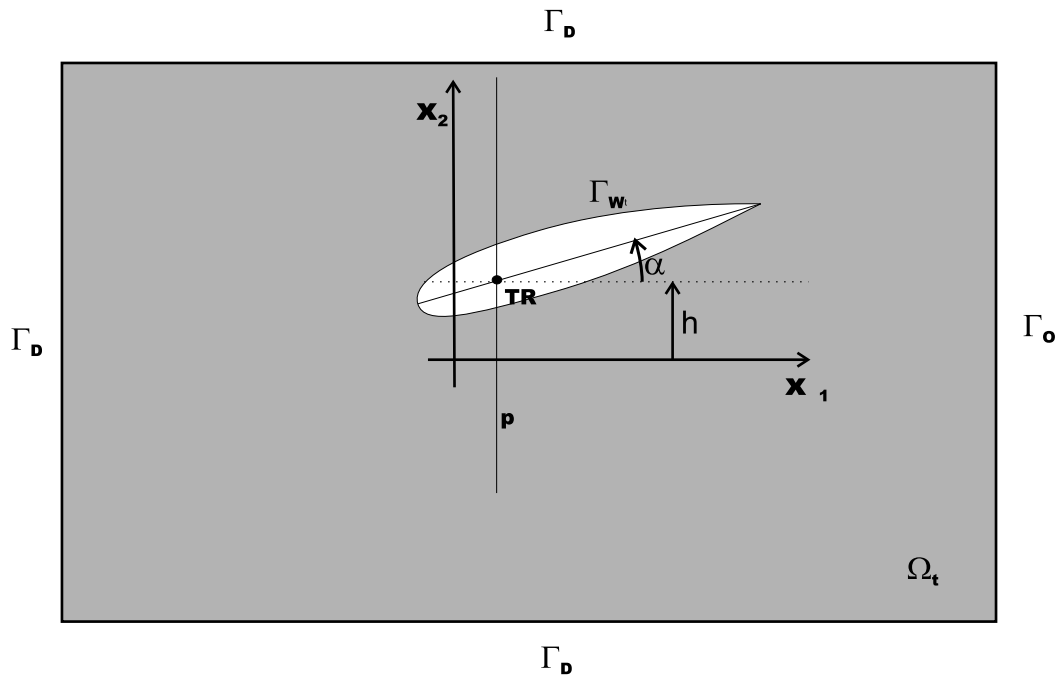
kde  $U^*$  je charakteristická rychlost a  $L^*$  charakteristická délka. Při simulaci obtékání leteckého profilu budeme pracovat s Reynoldsovými čísly řádově  $10^6$ . Pro tyto hodnoty parametru  $Re$  se objevuje tzv. Gibbsův jev, projevující se nefyzikálními oscilacemi v numerickém řešení. Tento problém bude eliminován zavedením tzv. stabilizace do numerických schémat.

Pohyb profilu je dán soustavou dvou obyčejných diferenciálních rovnic pro dva stupně volnosti  $\alpha$  a  $h$ . Jelikož se jedná o mechanickou úlohu s vazbami, budou tyto rovnice odvozeny za pomoci formalismu zobecněných souřadnic a Lagrangových rovnic 2. druhu známých z teoretické mechaniky.

Proudění uvažujme v časovém intervalu  $[0, T]$ , kde  $T > 0$ . Dále  $\Omega_t$  necht' je výpočetní oblast vyplněná tekutinou v čase  $t$ . Hranice  $\partial\Omega_t = \Gamma_D \cup \Gamma_O \cup \Gamma_{W_t}$ , kde množiny  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_O$  a  $\Gamma_{W_t}$  jsou navzájem disjunktní a budou na nich zadány okrajové podmínky různých typů. Symbolem  $\Gamma_D$  budeme značit vstup (inlet), kterým tekutina vtéká do oblasti  $\Omega_t$ , a pevné, nepropustné stěny,  $\Gamma_O$  představuje výstup (outlet), kterým tekutina vytéká a  $\Gamma_{W_t}$  je hranice profilu v čase  $t$ . Předpokládáme, že  $\Gamma_D$  a  $\Gamma_O$  nezávisí na čase na rozdíl od  $\Gamma_{W_t}$ . Proudění je charakterizováno rychlostí  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$  a kinematickým tlakem<sup>1</sup>  $p = p(x, t)$ ,  $x \in \Omega_t$  a  $t \in [0, T]$ . Dále budeme hledat funkce  $\alpha(t)$  a  $h(t)$ , popisující oscilace profilu. Jak odvodíme v dalších kapitolách a jak je patrné z obr. 1,  $\Omega_t$  závisí na  $\alpha(t)$  a  $h(t)$ . Tento obrázek nám ukazuje schéma našeho modelu. TR je zde torzní osou, která se pohybuje jen po přímce p.

<sup>1</sup>Kinematický tlak je dynamický tlak dělený hustotou tekutiny





Obrázek 1: Schéma modelu

V dodatku A je detail profilu, pro který budou realizovány výpočty.

## 2.2 Odvození rovnic

Problém obtékání oscilujícího profilu můžeme popsat pomocí systému Navierových-Stokesových rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2)$$

a rovnice kontinuity

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

v Eulerově popisu. Tento popis je však pro náš problém nevhodný stejně jako popis Lagrangeův, protože se v rámci těchto metod špatně pracuje s časově proměnnou výpočetní oblastí. Východiskem je zavedení tzv. Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) popisu.

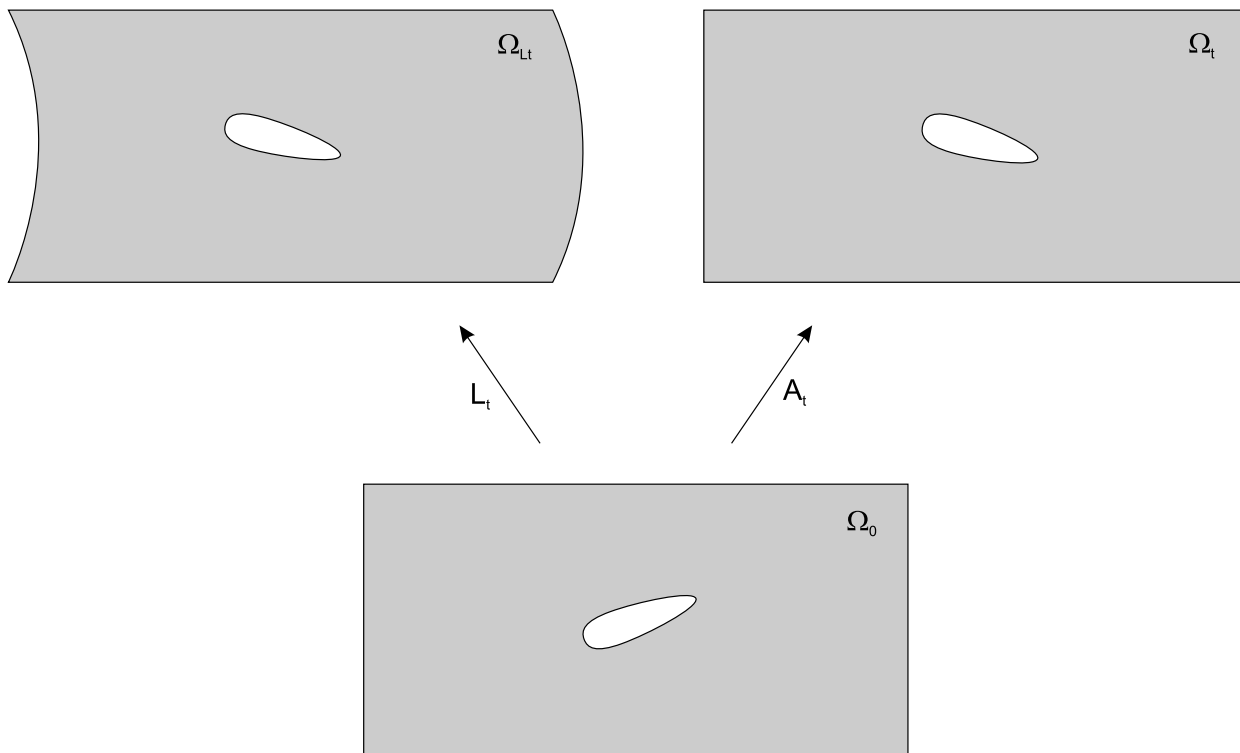
### 2.2.1 ALE metoda

ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) popis je zprostředkován hladkým zobrazením

$$\mathbf{A}_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_t, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{A}_t(\mathbf{X}). \quad (4)$$

Pro každý čas  $t \in I = [0, T]$  představuje  $\mathbf{A}_t$  hladké zobrazení referenční oblasti  $\Omega_0$  na oblast  $\Omega_t$ , která je totožná s referenční oblastí  $\Omega_0$  v místech hranice, kde nedochází k interakci s

obtákaným tělesem a tedy i k deformaci (pohybu) hranice<sup>2</sup>. Referenční oblast  $\Omega_0$  je totožná s oblastí vyplněnou tekutinou v pevném čase  $t = 0$ . Souřadnice  $\mathbf{x}$  budeme nazývat prostorovými souřadnicemi a  $\mathbf{X}$  ALE souřadnicemi, tj. referenčními souřadnicemi. Je nutné podotknout, že toto zobrazení nemá nic společného se skutečným pohybem tekutiny, jako tomu je při Lagrangovu popisu<sup>3</sup>, ale reflektuje pouze deformaci výpočtní oblasti tak jak to ukazuje obr. 2.



Obrázek 2: Lagrangova transformace (vlevo) a ALE transformace (vpravo)

### 2.2.2 Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE popisu

V ALE popisu mají Navierovy-Stokesovy rovnice poněkud jiný tvar. Kvůli jeho odvození zavedeme některé pojmy a pomocné veličiny. Nejprve definujme rychlost ALE zobrazení (tzv. „domain velocity“) následujícím způsobem

$$\tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \mathbf{X}). \quad (5)$$

Tuto rychlost můžeme vyjádřit v prostorových souřadnicích jako

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{X}) \circ \mathbf{A}_t^{-1}, \quad \text{tj. } \mathbf{w}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{A}_t^{-1}(\mathbf{x})). \quad (6)$$

<sup>2</sup>Např. fiktivní hranice = inlet, outlet

<sup>3</sup>Lagrangova transformace  $L_t : \Omega_0 \mapsto \Omega_{L_t}$  přímo popisuje pohyb tekutiny z referenční konfigurace v čase.

Definujeme ALE trajektorii  $T_{\mathbf{X}}$  pro každé  $X \in \Omega_0$  jako množinu bodů

$$T_{\mathbf{X}} = \{(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}))\}, \quad t \in I. \quad (7)$$

Mějme funkci  $f : M \mapsto \mathbb{R}$ , kde  $\mathbb{R}$  jsou reálná čísla a  $\tilde{f} = f \circ \mathbf{A}_t$  a  $M = \{(t, \mathbf{x}); t \in I, \mathbf{x} \in \Omega_t\}$ . Nyní zavedeme ALE derivaci funkce  $f$  jako časovou derivaci podél trajektorie  $T_{\mathbf{X}}$ . Tzn., že ALE derivace reprezentuje velikost změny veličiny  $f$  podél trajektorie  $T_{\mathbf{X}}$ ,

$$\frac{D^A}{Dt} f : M \mapsto \mathbb{R}, \quad \frac{D^A}{Dt} f(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (8)$$

ALE derivace je tedy analogická k materiálové derivaci v Lagrangeově popisu. Aplikací pravidla o derivaci složené funkce dostáváme

$$\frac{D^A}{Dt} f = \frac{df}{dt}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} w_i, \quad (9)$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\frac{D^A}{Dt} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla f. \quad (10)$$

Pro vektorovou veličinu (funkci)  $\mathbf{f} : I \times \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^2$  se tato derivace dá zapsat

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{f}, \quad (11)$$

kde  $(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{f}$  je vektor, jehož komponenty jsou

$$((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{f})_i = \sum_{j=1}^2 w_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Další nezbytnou veličinou pro kinematický popis kontinua je ALE deformační gradient  $\widehat{\mathbf{H}}_t^4$ , který definujeme pro každé  $t \in I$  jako

$$\widehat{\mathbf{H}}_t : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \widehat{\mathbf{H}}_t = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}_t = \frac{D\mathbf{x}(t, \mathbf{X})}{D\mathbf{X}}, \quad (13)$$

kde  $\nabla_{\mathbf{X}}$  značí, že derivace v gradientu se provádí podle referenční proměnné  $\mathbf{X}$ . Vyjádřeno ve složkách

$$\widehat{\mathbf{H}}_{t,ij} = \frac{\partial x_i(t, \mathbf{X})}{\partial X_j}. \quad (14)$$

Determinant ALE deformačního gradientu

$$\widehat{J}^{\mathbf{A}_t} = \det \widehat{\mathbf{H}}_t \quad (15)$$

---

<sup>4</sup>Tento deformační gradient nepopisuje deformaci tekutiny, ale deformaci výpočetní oblasti, podobně jako v poznámce 3.

je Jakobiánem zobrazení  $\mathbf{A}_t$ . Podle [7, strana 39] můžeme předpokládat, že

$$\hat{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) > 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0, \quad (16)$$

protože ALE zobrazení je surjektivní pro všechna  $t \in I$  a pro čas  $t = 0$  je ALE zobrazení identitou  $\mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X} \in \Omega_0$ .

Podle [7] platí následující vztah,

$$\frac{D^A}{Dt} J^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{x}) = J^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x}), \quad (17)$$

kde  $\operatorname{div}$  je diferenciální operátor zvaný divergence a má následující tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \quad (18)$$

Vztah (17) se dá odvodit podobně jako analogický vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, \mathbf{x}) = J(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad (19)$$

používaný k odvození Navierových-Stokesových rovnic v Eulerově popisu. Tento původní vztah je vyjádřen v Eulerových souřadnicích (jsou to taktéž prostorové souřadnice, ale v našem případě by se jednalo o jinou oblast, jak je vidno z obrázku 2, kde  $\Omega_{L_t}$  je oblast Eulerových prostorových souřadnic a  $\Omega_t$  je oblast ALE prostorových souřadnic). Vystupuje zde  $\mathbf{v}$  na místo  $\mathbf{w}$  a jedná se o skutečnou rychlost tekutiny a na místo ALE časové derivace je použita klasická časová derivace (tj. změna veličiny za jednotku času v místě  $\mathbf{x}$ ). Dále je zde  $J$ , což je Jakobián Lagrangeova zobrazení  $L$  a zároveň determinant skutečného deformačního gradientu. Tento původní vztah je odvozen například v [3, strana 28].

Nyní se dostáváme k nejdůležitějšímu bodu odvození Navierových-Stokesových rovnic v ALE popisu, kterým je transportní teorém v tomto popisu. Pro Eulerův popis je tento teorém odvozen např. v [3, strana 29].

**Věta 1:** Transportní teorém v ALE popisu

Nechť  $V_0 \subset \Omega_0$  je omezená oblast a  $V_t \subset \Omega_t$  je obraz oblasti  $V_0$  při zobrazení  $\mathbf{A}_t$ . Nechť  $f : I \times \Omega_t \mapsto \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelné zobrazení v obou proměnných. Pak

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left( \frac{D^A}{Dt} f + f \operatorname{div} \mathbf{w} \right) d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left( \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div} (f \mathbf{w}) \right) d\mathbf{x} = \int_{V_t} \frac{\partial}{\partial t} f d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}. \quad (20)$$

**Důkaz:** Na základě věty o substituci můžeme psát

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \tilde{f}(t, \mathbf{X}) \hat{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} =$$

$$= \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \tilde{f}(t, \mathbf{X}) \tilde{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) \right] d\mathbf{X} = \int_{V_0} \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \mathbf{X}) \tilde{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) + \tilde{f}(t, \mathbf{X}) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) \right] d\mathbf{X},$$

kde jsme v integrálu využili substituci referenčních proměnných  $\mathbf{X}$  za prostorové proměnné  $\mathbf{x}$ . V integrálu, který je počítán v referenčních proměnných můžeme aplikovat pravidlo o derivaci integrálu závislého na parametru, protože oblast  $V_0$ , přes kterou integrujeme, již nezávisí na proměnné  $t$ , podle které chceme derivovat, tedy je časově nezávislá. V prvním integrandu předešlého integrálu využijeme definici ALE časové derivace (8). Můžeme tedy psát

$$\int_{V_0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \mathbf{X}) \tilde{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_{V_t} \frac{D^A f}{Dt}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

V druhém integrandu použijeme výsledek (17), který zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) = \frac{D^A}{Dt} J^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{x}) = \tilde{J}^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{X}) \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}(t, \mathbf{X}), t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(t, \mathbf{X}).$$

První rovnost plyne z definice ALE derivace (8) pro veličinu vyjádřenou v ALE souřadnicích. Dále máme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{V_t} \frac{D^A f}{Dt}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{V_0} \tilde{f}(t, \mathbf{X}) J^{\mathbf{A}_t}(\mathbf{x}(t, \mathbf{X})) \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}(t, \mathbf{X})) d\mathbf{X} = \\ &= \int_{V_t} \frac{D^A f}{Dt}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{V_t} f(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{V_t} \frac{D^A f}{Dt}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + f(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde jsme provedli zpětnou substituci. Druhá rovnost v (20) je důsledkem definice ALE časové derivace a třetí rovnost v (20) se získá použitím Greenovy věty. Tím je důkaz dokončen. ■

Pohybové Navierovy-Stokesovy rovnice jsou odvozeny ze zákonů zachování. Nejprve se zabýváme zákonem zachování hmoty. Pracujeme s nestlačitelnou tekutinou, pro níž je hustota tekutiny  $\rho$  konstantní. Proto v Eulerově popisu má tento zákon vyjádření

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega_t \quad \forall t \in I, \quad (21)$$

kde  $\mathbf{u}$  je rychlost tekutiny. Jelikož se v (21) nevyskytují problematické členy jako je např. časová derivace, zůstane tato rovnice v platnosti i pro ALE popis.

Dále je zapotřebí zabývat se zákonem zachování hybnosti, který tvrdí dle [9, strana 9], že okamžitá změna celkové hybnosti objemu tekutiny tvořeného v každém čase stejnými částicemi vyplňujícího v čase  $t$  objem  $W_t$  je rovna celkové síle působící na  $W_t$ . V našem případě objem  $V_t$  není materiálový, tj. není v každém čase  $t \in I$  tvořen stejnými částicemi. Proto musíme přejít k jiné formulaci známou z [2, strana 113], kde na místo časové derivace (okamžité změny) celkové hybnosti tekutiny materiálového objemu  $W_t$  použijeme materiálovou časovou derivaci

nemateriálového objemu  $V_t$ . Materiálovou derivací veličiny  $\phi = \phi(V_t, \varphi) = \int_{V_t} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$  budeme značit  $\dot{\phi} = \overline{\dot{\phi}(V_t, \varphi)} = \overline{\int_{V_t} \dot{\varphi}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}}$ . Podle tzv. prvního Reynoldsova transportního teorému ve znění dle [2, strana 110] se materiálová derivace množství veličiny  $\phi$  v objemu  $V_t$  skládá ze dvou členů

$$\overline{\int_{V_t} \dot{\varphi} d\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \varphi(t, \mathbf{x}) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (22)$$

kde první člen na pravé straně je časová změna veličiny  $\phi$  v objemu  $V_t$ , druhý člen je dodatečný tok přes plochu  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  je jednotková vnější normála na ploše  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{u}$  je rychlost tekutiny a  $\mathbf{v}$  rychlost nemateriálové plochy, což v našem případě není nic jiného než rychlost ALE zobrazení  $\mathbf{w}$ . Platí tedy

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] ds = \mathbf{F}_{V_t}, \quad (23)$$

kde  $\mathbf{F}_{V_t}$  je celková síla působící na objem  $V_t$ , která je dána součtem síly objemové a síly plošné, jak je psáno v [3, strana 33]. Síla plošná je dána interakcí od okolí objemu  $V_t$  a působí přes povrch  $\partial V_t$

$$\mathbf{F}_{V_t} = \int_{V_t} \rho \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) ds, \quad (24)$$

kde  $\mathbf{f}$  je hustotou vnější síly,  $\mathbf{t}$  je hustotou plošné síly a nazývá se vektorem napětí. Vektor napětí závisí na vnější jednotkové normále  $\mathbf{n}$  tímto způsobem

$$\mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (25)$$

pro všechna  $t \in I$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_t$  a  $\mathbf{n} \in S_1 = \{\mathbf{n} \in R^2, \|\mathbf{n}\| = 1\}$ , kde  $\mathbf{T}$  je tenzor napětí mající komponenty  $T_{ij}$ . Veličina  $\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$  je vektor se složkami

$$(\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})_i = \sum_{j=1}^2 T_{ij} n_j, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Vztah (23) můžeme díky (24) a (25) zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] ds = \int_{V_t} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (27)$$

Zde první člen upravíme podle ALE transportního teorému (20) a poslední člen podle věty o divergenci. Dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \int_{V_t} \left( \frac{D^A}{Dt} \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] ds \\ = \int_{V_t} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{V_t} \operatorname{div} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (28)$$

kde divergence tenzoru  $\mathbf{T}$  je vektor, jehož složky jsou

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{T}_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2.$$

Nyní budeme upravovat současně druhý člen v prvním integrálu a druhý integrál ve vzorci (28).

Užitím Greenovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{V_t} (\rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\partial V_t} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] ds \\ &= \int_{V_t} (\rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{V_t} \rho [(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla] \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{V_t} \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} (\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (29) \\ &= \int_{V_t} \rho [(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla] \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{V_t} \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Jelikož se jedná o nestlačitelnou tekutinu, pro níž  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , je poslední člen v (29) roven nule.

Celkově tedy dostáváme

$$\int_{V_t} \frac{D^A}{Dt} \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{V_t} \rho [(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla] \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{V_t} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{V_t} \operatorname{div} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (30)$$

Jelikož toto platí pro libovolný objem  $V_t \in \Omega_t$ , musí platit

$$\frac{D^A}{Dt} \rho \mathbf{u} + \rho [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T} \quad \text{v } \Omega_t \quad \forall t \in I. \quad (31)$$

Poslední zákon zachování, který se užívá v odvození Navierových-Stokesových rovnic, je zákon zachování momentu hybnosti. Jeho důsledkem je symetrie tenzoru napětí

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \quad (32)$$

jak je odvozeno např. v [3] na straně 42.

Systém rovnic (21), (31), (32) není úplný, je nutné ho doplnit o tzv. konstitutivní vztah, který popisuje závislost mezi tenzorem napětí a ostatními kinematickými veličinami proudící tekutiny. V dalším budeme uvažovat tzv. Newtonovu nestlačitelnou tekutinu<sup>5</sup>. V tomto modelu je tenzor napětí lineární funkcí derivace rychlosti, která má tvar

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (33)$$

<sup>5</sup>Dosud jsme se zabývali obecnou nestlačitelnou tekutinou

kde  $P$  je skalární funkce zvaná tlak,  $\mathbf{I}$  je jednotkový tenzor a  $\mu$  je vazkost.  $\nabla \mathbf{u}$  je tenzor, jehož složky jsou

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Zavádíme tenzorovou veličinu, zvanou tenzor rychlosti deformace

$$\mathbf{D} = \frac{(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)}{2}, \quad (34)$$

se složkami

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (35)$$

Rovnici (33) zapíšeme tedy v tenzorovém tvaru

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (36)$$

Jak je patrné, tato volba konstitutivního vztahu zachovává platnost symetrie tenzoru napětí (32). V dalším nebudeme uvažovat tzv. ne-Newtonovské tekutiny, tj.  $\mu$  nebude záviset na dalších kinematických veličinách proudění a bude to kladná konstanta.

Nyní začleníme konstitutivní vztah (36) do rovnice (31). V rovnici (31) se vyskytuje divergence tenzoru napětí. Výsledkem je vektor

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\operatorname{div} P\mathbf{I} + \operatorname{div} 2\mu\mathbf{D}. \quad (37)$$

Rozpisem do složek dostaneme

$$(-\operatorname{div} P\mathbf{I})_i = -\sum_{j=1}^2 \frac{\partial P\mathbf{I}_{ij}}{\partial x_j} = -\sum_{j=1}^2 \frac{\partial P\delta_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i},$$

což zapsáno ve vektorovém vyjádření není nic jiného než

$$-\operatorname{div} P\mathbf{I} = -\nabla P.$$

Nyní vypočteme divergenci tenzoru rychlosti deformace. Užitím záměnnosti derivací 2.řádu a vztahu  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  dostaneme

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{D})_i &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \\ &= \frac{1}{2} \Delta u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \Delta u_i. \end{aligned}$$



Celkově tedy máme

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (38)$$

Pomocí (31) a (21) dostaneme Navierovy-Stokesovy rovnice ve tvaru

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega_t,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega_t. \quad (39)$$

V dalším budeme zanedbávat objemovou sílu  $\mathbf{f}$  a zavedeme tzv. kinematický tlak

$$p = \frac{P}{\rho} \quad (40)$$

a kinematickou vazkost

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (41)$$

Dostáváme tak Navierovy-Stokesovy rovnice, se kterými budeme nadále pracovat:

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega_t,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega_t. \quad (42)$$

### 2.2.3 Odvození rovnic pro pohyb letecké profilu

V dalším se budeme zabývat interakcí proudící tekutiny a leteckého profilu. Profil budeme považovat za tuhé těleso se dvěma stupni volnosti. Tento profil vyplňuje oblast, kterou budeme značit  $\Pi_t$ . Rovnice pro pohyb leteckého profilu odvodíme z Lagrangeových rovnic 2. druhu pro zobecněné souřadnice  $h = q^1$  a  $\alpha = q^2$ . V našem případě následující odvození povede na soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé  $\alpha$  a  $h$ . Tyto dvě zobecněné souřadnice nám jednoznačně určují umístění a sklon profilu jak je patrné z obr. 1 nebo z obr. 3. Do pohybových rovnic je zapotřebí začlenit všechny síly působící na profil. V našem případě se jedná o sílu danou působením tekutiny na profil. Tato síla působí ve všech místech povrchu profilu, což nám bude trochu činit obtíže při transformaci této síly do prostoru zobecněných souřadnic. Výslednici tohoto silového působení budeme označovat  $\vec{L}$ . Dále se zde účastní síla odporová vertikální  $\vec{M}$  a odporová torzní síla  $\vec{N}$ . Poslední dvě zmiňované jsou síly potenciální. Nesmíme však opomenout sílu vazkého tlumení  $\vec{O}$ . Je to síla třecí, která je uměrná rychlosti profilu v tekutině. Celková síla je dána součtem sil dílčích a my ji budeme značit

$\vec{F} = \vec{L} + \vec{M} + \vec{N} + \vec{O}$ . Gravitační sílu záměrně neuvažujeme z důvodu zjednodušení modelu, které si můžeme dovolit, pokud těžiště není příliš vzdáleno od torzní osy. Navíc předpokládáme, že interakce s tekutinou a se silami, které profil tlačí do rovnovážné polohy, je daleko silnější povahy a tudíž si dovolujeme gravitační sílu zcela zanedbat.

Nejobecnější tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu pro mechanické systémy lze podle [1, strana 61] zapsat následujícím způsobem:

$$Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial T}{\partial q^j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (43)$$

$T$  je kinetická energie profilu a  $Q_j$  je  $j$ -tá složka zobecněné celkové síly, která odpovídá  $j$ -té zobecněné souřadnici.  $\vec{Q}$  je průmětem vektoru síly  $\vec{F}$  z prostoru kartézských souřadnic  $x_1, x_2$ , která je pevně spojená s referenční konfigurací  $\Omega_0$  (budeme ji nazývat referenční souřadnou soustavou), do prostoru zobecněných souřadnic  $h = q^1$  a  $\alpha = q^2$ . Průmětem je zde míněna transformace

$$Q_j = \sum_{i=1}^2 F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \quad (44)$$

Zavádíme ještě jednu kartézskou souřadnou soustavu  $x'_1, x'_2$  pevně spojenou s profilem. Tato soustava bude mít počátek v torzní ose, viz. obr. 3, kde  $TR_0$  je torzní osa v rovnovážné poloze a  $TR_t$  v čase  $t$ . Dále  $x_{01}, x_{02}$  jsou souřadnice torzní osy v rovnovážné poloze. Předpokládáme dále, že osa  $x'_1$  prochází jak torzní osou, tak i těžištěm profilu.

Nyní se blíže zabýváme vztahem mezi souřadnými systémy. Libovolný, ale pevný bod  $\mathbf{x}$  na profilu má souřadnice  $[x_1, x_2]$  v soustavě referenční a  $[x'_1, x'_2]$  v soustavě pevně spojené s profilem. Dále profil zaujímá polohu danou zobecněnými souřadnicemi  $[h, \alpha]$ . Máme následující transformační vztahy mezi souřadnými systémy pro tento bod

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha + x_{01}, \\ x_2 &= x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha + h + x_{02}, \end{aligned} \quad (45)$$

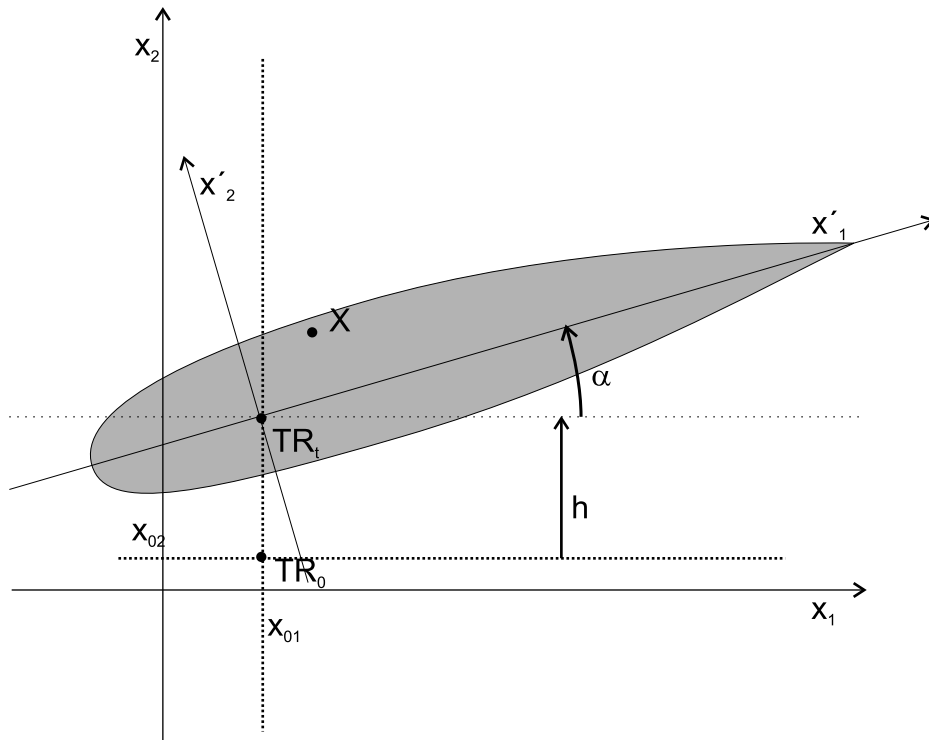
kde  $x_{01}$  a  $x_{02}$  jsou souřadnice torzní osy v rovnovážné poloze. Pro časové derivace těchto souřadnic dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-x'_1 \sin \alpha - x'_2 \cos \alpha) \dot{\alpha}, \\ \dot{x}_2 &= (x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha) \dot{\alpha} + \dot{h}, \end{aligned} \quad (46)$$

kde jsme podle souřadnic pevně spojených s profilem nederivovali, protože  $\mathbf{x}$  je pevným bodem v této soustavě souřadné.

Pro celkovou rychlost  $v_{\mathbf{x}}$  bodu  $\mathbf{x}$  v referenční soustavě máme

$$v_{\mathbf{x}}^2 = (x'^2_1 + x'^2_2) \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2 + 2(x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha) \dot{h} \dot{\alpha}. \quad (47)$$



Obrázek 3: Letecký profil a souřadné soustavy

Odtud se integrací přes všechny body profilu dostáváme ke kinetické energii v referenční soustavě

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') v_{\mathbf{x}'}^2 d\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \dot{h}^2 \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') (x_1'^2 + x_2'^2) d\mathbf{x}' \\
 &\quad + \dot{h} \dot{\alpha} \cos \alpha \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') x_1' d\mathbf{x}' + \dot{h} \dot{\alpha} \sin \alpha \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') x_2' d\mathbf{x}' \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \dot{h} \dot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_1} + \dot{h} \dot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_2} + \frac{1}{2} I_{\alpha} \dot{\alpha}^2,
 \end{aligned} \tag{48}$$

kde jsme použili označení

$$I_{\alpha} = \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') (x_1'^2 + x_2'^2) d\mathbf{x}', \tag{49}$$

což je veličina nazývaná se moment setrvačnosti kolem elastické osy. Dále veličina

$$m = \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \tag{50}$$

která je hmotností profilu. A nakonec

$$S_{\alpha x_1} = \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') x_1' d\mathbf{x}',$$

$$S_{\alpha x_2} = \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') x_2' d\mathbf{x}'. \tag{51}$$

Ve vzorcích (49), (50), (51) integrujeme v souřadné soustavě pevně spojené s profilem. Oblast  $\Pi_t$  je v této soustavě nezávislá na čase. Veličiny (49), (50), (51) jsou tedy konstanty, které nám budou charakterizovat profil a v následujícím ukážeme jejich souvislost s ostatními parametry profilu.

Pro náš model budeme uvažovat následující působení sil odporových. Nejprve se zabývejme vertikální odporovou silou. Tato síla působí tak, aby profil zaujímal rovnovážnou polohu ve vertikálním směru, která je dána souřadnicí  $h = 0$ . Užijeme nejjednodušší možnou závislost, kdy vertikální odporová síla bude lineární v souřadnici  $h$  a nebude závislá na souřadnici  $\alpha$ . Můžeme tedy rovnou psát tuto sílu vyjádřenou v zobecněných souřadnicích ve tvaru

$$\vec{M}_{zob.sou.} = [M_h, M_\alpha] = [-k_{hh}h, 0], \quad (52)$$

kde  $k_{hh}$  bude parametr modelu zvaný vertikální tuhost. K této síle přísluší potenciál

$$V_M = \frac{1}{2}k_{hh}h^2, \quad (53)$$

který se silou souvisí vztahem

$$\vec{M}_{zob.sou.} = [M_h, M_\alpha] = - \left[ \frac{\partial V_M}{\partial h}, \frac{\partial V_M}{\partial \alpha} \right],$$

neboli

$$M_{q^j} = - \frac{\partial V_M}{\partial q^j} \quad j = 1, 2. \quad (54)$$

Podobně jako výše namodelujeme působení odporové síly torzní. Tato síla bude závislá pouze na zobecněné souřadnici  $\alpha$  a to opět lineárně. Dostáváme

$$\vec{N}_{zob.sou.} = [N_h, N_\alpha] = [0, -k_{\alpha\alpha}\alpha] \quad (55)$$

a příslušný potenciál má tvar

$$V_N = \frac{1}{2}k_{\alpha\alpha}\alpha^2. \quad (56)$$

Zde  $k_{\alpha\alpha}$  je parametrem modelu, který budeme nazývat torzní tuhostí.

Síly vazkého tlumení jsou závislé na rychlosti pohybu profilu v tekutině. Zjednodušeně v zobecněných souřadnicích budeme uvažovat lineární závislost na zobecněných rychlostech ve tvaru

$$\vec{O}_{zob.sou.} = [D_{hh}\dot{h} + D_{h\alpha}\dot{\alpha}, D_{\alpha h}\dot{h} + D_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}], \quad (57)$$

kde parametry  $D_{hh}$ ,  $D_{\alpha\alpha}$ ,  $D_{h\alpha}$  a  $D_{\alpha h}$  jsou rozvňž konstantní parametry modelu.

Nyní se dostáváme k nejdělikátnějšímu problému odvození rovnic pro profil. Musíme se ještě vypořádat se silou  $\vec{L}$  danou interakcí obtékané tekutiny. Je zapotřebí tuto sílu přetransformovat do zobecněných souřadnic, což bude činit obtíže. Tato interakce působí přes povrch

profilu a to v každém bodě povrchu, přičemž toto silové působení je v každém bodě různé. Navíc transformace je rovněž různá v různých místech povrchu.  $\vec{L}$  je tedy pouze celková interakční síla daná vztahem

$$\vec{L} = \int_{\partial\Pi_t} \vec{l}(\mathbf{x}) ds, \quad (58)$$

kde  $\vec{l}(\mathbf{x})$  je hustotou síly  $\vec{L}$  a  $s$  je parametrizací profilu. Nyní budeme hustotu síly transformovat do zobecněných souřadnic dle vztahu (44). Potom tuto transformovanou hustotu síly zintegrujeme přes povrch profilu. Musíme postupovat tímto způsobem, jelikož transformace (44) je v každém místě povrchu profilu různá a není možné jednoduše transformovat pouze vektor  $\vec{L}$ .

Pro libovolný bod  $\mathbf{x} \in \partial\Pi_t$  je tedy třeba přetransformovat vektor  $\vec{l}(\mathbf{x})$  do souřadnic  $h = q^1, \alpha = q^2$ . Transformovanou hustotu síly budeme značit  $\vec{l}(\mathbf{x})_{zob.sou.}$ . Podle vzorce (44) platí

$$l_j(\mathbf{x})_{zob.sou.} = \sum_{i=1}^{n=2} l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial x_i}{\partial q^j} \quad j = 1, 2. \quad (59)$$

Z rovnic (45) plyne

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial h} &= 0, & \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} &= h - x_2, \\ \frac{\partial x_2}{\partial h} &= 1, & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} &= x_1. \end{aligned} \quad (60)$$

Tudíž

$$l_1(\mathbf{x})_{zob.sou.} = l_2(\mathbf{x}),$$

$$l_2(\mathbf{x})_{zob.sou.} = l_1(\mathbf{x})(h - x_2) + l_2(\mathbf{x})x_1. \quad (61)$$

Síla  $\vec{L}$  v zobecněných souřadnicích vyjádřená po složkách je

$$\begin{aligned} L_{1\ zob.sou.} &= \int_{\mathbf{x} \in \partial\Pi_t} l_2(\mathbf{x}) ds = L_2, \\ L_{2\ zob.sou.} &= \int_{\mathbf{x} \in \partial\Pi_t} (l_1(\mathbf{x})(h - x_2) + l_2(\mathbf{x})x_1) ds \\ &= \int_{\mathbf{x} \in \partial\Pi_t} l_1(\mathbf{x})(h - x_2) ds + \int_{\mathbf{x} \in \partial\Pi_t} l_2(\mathbf{x})x_1 ds = -M, \end{aligned} \quad (62)$$

kde  $M$  je moment síly  $\vec{L}$  vzhledem k torzní ose v referenčních soustavě souřadné.

Celková síla vyjádřená ve zobecněných souřadnicích má tvar

$$\vec{Q} = [Q_1, Q_2] = [L_2, -M] - \left[ \frac{\partial V_M}{\partial h}, \frac{\partial V_M}{\partial \alpha} \right] - \left[ \frac{\partial V_N}{\partial h}, \frac{\partial V_N}{\partial \alpha} \right]$$

$$+ [D_{hh}\dot{h} + D_{h\alpha}\dot{\alpha}, D_{\alpha h}\dot{h} + D_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}]. \quad (63)$$

Nyní zahrneme uvedené výsledky do Lagrangových rovnic a dostaneme rovnice

$$L_j \text{ zob.sou.} + O_j \text{ zob.sou.} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial(T - V_M - V_N)}{\partial q^j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (64)$$

Z (48) plyne, že

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = m\dot{h} + \dot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_1} + \dot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = I_\alpha \dot{\alpha} + \dot{h} \cos \alpha S_{\alpha x_1} + \dot{h} \sin \alpha S_{\alpha x_2}. \quad (65)$$

Nyní tento dílčí výsledek zderivujeme podle času

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = m\ddot{h} + \ddot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_1} - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha S_{\alpha x_1} + \ddot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_2} + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha S_{\alpha x_2},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = I_\alpha \ddot{\alpha} + \ddot{h} \cos \alpha S_{\alpha x_1} - \dot{h} \dot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_1} + \ddot{h} \sin \alpha S_{\alpha x_2} + \dot{h} \dot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_2}. \quad (66)$$

Třetí člen v (64) upravujeme následovně:

$$\frac{\partial(T - V_M - V_N)}{\partial h} = -k_{hh}h,$$

$$\frac{\partial(T - V_M - V_N)}{\partial \alpha} = -\dot{h} \dot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_1} + \dot{h} \dot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_2} - k_{\alpha\alpha} \alpha. \quad (67)$$

Dosazením (66) a (67) do (64) dostaneme soustavu

$$m\ddot{h} + D_{hh}\dot{h} + D_{h\alpha}\dot{\alpha} + \ddot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_1} - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha S_{\alpha x_1} + \ddot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_2} + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha S_{\alpha x_2} + k_{hh}h = -L_2,$$

$$I_\alpha \ddot{\alpha} + D_{\alpha h}\dot{h} + D_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} + \ddot{h} \cos \alpha S_{\alpha x_1} - \dot{h} \dot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_1} + \ddot{h} \sin \alpha S_{\alpha x_2} + \dot{h} \dot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_2} \quad (68)$$

$$+ \dot{h} \dot{\alpha} \sin \alpha S_{\alpha x_1} - \dot{h} \dot{\alpha} \cos \alpha S_{\alpha x_2} + k_{\alpha\alpha} \alpha = M.$$

Dále upravíme vyjádření veličin  $S_{\alpha x_1}$  a  $S_{\alpha x_2}$  pomocí vzorečku pro výpočet těžiště, který je známý z teoretické mechaniky

$$S_{\alpha x_1} = \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') x'_1 d\mathbf{x}' = x'_1{}^T m = x_{CG} m = S_\alpha,$$

$$S_{\alpha x_2} = \int_{\Pi_t} \rho(\mathbf{x}') x'_2 d\mathbf{x}' = x'_2{}^T m = 0, \quad (69)$$

kde  $x'^T$  je poloha těžiště. Veličina  $S_\alpha$  se nazývá statický moment kolem elastické osy. V důsledku zavedení souřadného systému  $x'_1, x'_2$  máme  $x_2'^T = 0$ , a  $x_1'^T = x_{CG}$ , kde  $x_{CG}$  je parametr modelu vyjadřující vzdálenost torzní osy od těžiště profilu. Parametr  $x_{CG}$  je kladný pokud je těžiště umístěno dál od náběžné hrany než elastická osa a záporný v opačném případě, jak je zřejmé se zavedení souřadné soustavy  $x'_1, x'_2$ , resp. její orientace. Stejná úvaha je platná pro parametr  $S_\alpha$ . Z rovnic (68) tudíž dostáváme výsledné nelinearizované rovnice pro pohyb profilu:

$$m\ddot{h} + D_{hh}\dot{h} + D_{h\alpha}\dot{\alpha} + S_\alpha\ddot{\alpha}\cos\alpha - S_\alpha\dot{\alpha}^2\sin\alpha + k_{hh}h = -L_2,$$

$$I_\alpha\ddot{\alpha} + D_{\alpha h}\dot{h} + D_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} + S_\alpha\ddot{h}\cos\alpha + k_{\alpha\alpha}\alpha = M. \quad (70)$$

Za předpokladu, že úhlové výchylky  $\alpha$  a její derivace  $\dot{\alpha}$  jsou malé ( $\sin\alpha \approx \alpha$ ,  $\cos\alpha \approx 1$ ,  $\dot{\alpha}\alpha \approx 0$ ,  $\dot{\alpha}^2\alpha \approx 0$ ) dostáváme linearizované rovnice:

$$m\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} + D_{hh}\dot{h} + D_{h\alpha}\dot{\alpha} + k_{hh}h = -L_2,$$

$$S_\alpha\ddot{h} + I_\alpha\ddot{\alpha} + D_{\alpha h}\dot{h} + D_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} + k_{\alpha\alpha}\alpha = M, \quad (71)$$

což jsou pro  $D_{hh} = 0$ ,  $D_{\alpha\alpha} = 0$ ,  $D_{h\alpha} = 0$  a  $D_{\alpha h} = 0$  známé rovnice uvedené např. v [8, strana 53], se kterými budeme nadále pracovat. V maticovém zápisu mají tvar

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{d}(t) + \hat{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{d}}(t) + \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{d}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(t), \quad (72)$$

který je také uveden v [15] a kde konstantní matice tuhosti  $\hat{\mathbf{K}}$ , vazkého trmení  $\hat{\mathbf{B}}$  a hmotnosti  $\hat{\mathbf{M}}$  jsou

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} k_{hh} & 0 \\ 0 & k_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} D_{hh} & D_{h\alpha} \\ D_{\alpha h} & D_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{pmatrix}$$

a vektory síly  $\hat{\mathbf{f}}$  a zobecněných souřadnic  $\mathbf{d}$  jsou

$$\hat{\mathbf{f}}(t) = \begin{pmatrix} -L_2(t) \\ M(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} h(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

#### 2.2.4 Výpočet síly a momentu síly působící na profil

Zde budeme počítat vertikální nestacionární sílu  $L_2$  a nestacionární moment síly  $M$  působící na profil. Pro hustotu síly  $\vec{l}$  působící na povrch profilu platí

$$\vec{l} = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \quad (73)$$

kde  $\mathbf{n}$  je vnější normála k povrchu profilu, tj. směřující do profilu,  $\mathbf{T}$  je tenzor napětí. Veličiny  $L_2$  a  $M$  jsme zavedli v předchozí kapitole. Dosadíme-li (73) do (62), obdržíme

$$L_2 = - \int_{\Gamma_{Wt}} \sum_{j=1}^2 T_{2j} n_j ds, \quad (74)$$

$$M = - \int_{\Gamma_{Wt}} \sum_{i,j=1}^2 T_{ij} n_j (-1)^i (x_i - x_i^{EO}) ds, \quad (75)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotková vnější normála k  $\partial\Omega_t$  na  $\Gamma_{Wt}$ .  $x_1, x_2$  jsou sořadnice bodu na  $\Gamma_{Wt}$ , tj. bodu na hranici profilu a  $x_i^{EO}$ ,  $i = 1, 2$ , jsou souřadnice elastické osy  $\mathbf{x}^{EO}$  v referenční soustavě souřadné. Dále platí, že  $\Gamma_{Wt} = \partial\Pi_t$  a

$$T_{ij} = \rho \left[ -p\delta_{ij} + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (76)$$

### 2.3 Okrajové a počáteční podmínky

Navierovy-Stokesovy rovnice musí být doplněny počáteční podmínkou

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (77)$$

a okrajovými podmínkami. Část hranice  $\Gamma_D$  reprezentuje vstup a nepropustné pevné stěny. Na této hranici předepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku.

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_D \quad (78)$$

Část hranice  $\Gamma_O$  je výstup, kde předepisujeme tzv. „do-nothing“ okrajovou podmínku

$$-(p - p_{ref})\mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{na } \Gamma_O, \quad (79)$$

kde  $\mathbf{n}$  je vnější normála k hranici a  $p_{ref}$  je zadaný referenční tlak.

Další částí hranice je povrch profilu  $\Gamma_{Wt}$  v čase  $t$ . Zde předpokládáme, že rychlost tekutiny  $\mathbf{u}$  je totožná s rychlostí profilu  $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma$  a ta je rovna rychlosti ALE transformace  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{Wt}} = \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{Wt}} = \mathbf{w}|_{\Gamma_{Wt}}. \quad (80)$$

Ještě je zapotřebí dodat počáteční podmínky pro rovnice (70) s (71)

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \dot{\alpha}(0) = \alpha_1,$$

$$h(0) = h_0, \quad \dot{h}(0) = h_1, \quad (81)$$

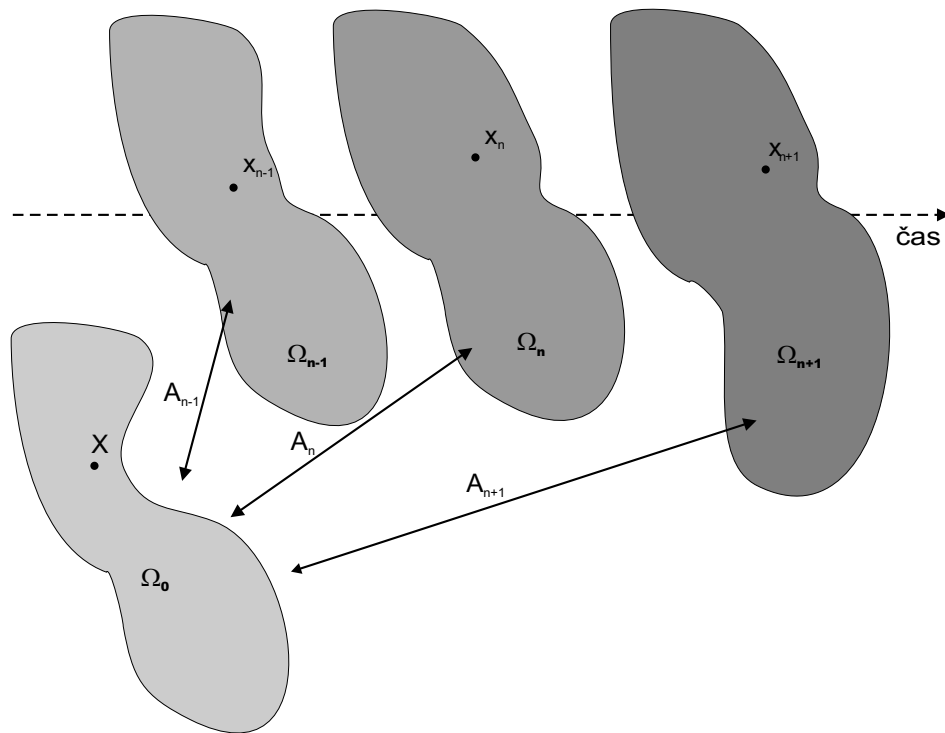
kde  $\alpha_0, \alpha_1, h_0, h_1$  jsou opět vstupními parametry modelu.



## 2.4 Diskretizace problému (numerická část)

### 2.4.1 Diskretizace v čase

Nejprve se budeme zabývat diskretizací problému v čase. Budeme používat ekvidistantní dělení časového intervalu  $[0, T]$ . Máme tedy  $0 = t_0 < t_1 < \dots < T$ ,  $t_k = k\tau$ , kde  $\tau > 0$  je použitý časový krok. Na každé časové vrstvě  $t_n$  zavedeme aproximaci řešení  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{x} \in \Omega_{t_n}$ . Pro jednoduchost zápisu tuto aproximaci budeme označovat  $\mathbf{u}^n$ . Pro časovou diskretizaci uijeme implicitní dvoukrokové schéma 2. řádu. Ze dvou předchozích časových vrstev  $t_{n-1}$  a  $t_n$  získáme vzorec pro výpočet aproximace řešení na časové vrstvě  $t_{n+1}$ , tj. z již vypočtených aproximací  $\mathbf{u}^{n-1}$  v  $\Omega_{t_{n-1}}$  a  $\mathbf{u}^n$  v  $\Omega_{t_n}$  odvodíme schéma pro  $\mathbf{u}^{n+1}$  v  $\Omega_{t_{n+1}}$ .



Obrázek 4: Diskretizace v čase a ALE transformace

My zde užíváme ALE popis, kde je časová derivace ve tvaru

$$\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}(t, \mathbf{X}) \quad (82)$$

a  $\tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{X})$  je rychlost vyjádřená v referenční konfiguraci  $\Omega_0$  a  $\mathbf{X}$  je pevný a libovolný bod z této konfigurace. Tuto rychlost vyjádříme v aktuální konfiguraci pomocí ALE transformace  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{A}_t^{-1}(\mathbf{x}))$ , což je ekvivalentní se vztahem  $\mathbf{u}(t, \mathbf{A}_t(\mathbf{X})) = \tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{X})$ . Pro diskrétní časové okamžiky  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  a  $t_{n+1}$  v časovém intervalu  $[0, T]$  budeme značit

$$\mathbf{A}_{t_{n-1}}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}^{n-1}, \quad \mathbf{A}_{t_n}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}^n, \quad \mathbf{A}_{t_{n+1}}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}^{n+1}, \quad (83)$$

pro daný pevný bod  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  (odpovídající např. uzlu triangulace). Definujme tedy aproximaci ALE derivace v čase  $t_{n+1}$  a bodě  $\mathbf{x}^{n+1} \in \Omega_{t_{n+1}}$

$$\begin{aligned} \frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}^{n+1}, t_{n+1}) &\approx \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{X}) - 4\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{X}) + \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}(\mathbf{X})}{2\tau} = \\ &= \frac{3\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - 4\mathbf{u}^n(\mathbf{x}^n) + \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}^{n-1})}{2\tau}. \end{aligned} \quad (84)$$

Užitím této aproximace v (42) se dostáváme k problému pro neznámé funkce  $\mathbf{u}^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \mapsto \mathbb{R}^2$  a  $p^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \mapsto \mathbb{R}$  takové, že

$$\begin{aligned} \frac{3\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - 4\mathbf{u}^n(\mathbf{x}^n) + \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}^{n-1})}{2\tau} + ((\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})) \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \\ - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) + \nabla p^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0,$$

kde  $\mathbf{w}^{n+1}$  aproximuje  $\mathbf{w}(t_{n+1})$ .

Tyto rovnice doplníme okrajovými podmínkami (78), (79), (80) na  $\partial\Omega_{t_{n+1}}$ . Provedeme ještě formální úpravu těchto rovnic. Převědeme tyto rovnice do konfigurace odpovídající času  $t_{n+1}$ , takže prostorová proměnná bude pouze z oblasti  $\Omega_{t_{n+1}}$ . Využijeme k tomu skutečnost, že  $\mathbf{A}_{t_{n+1}}(\mathbf{A}_{t_i}^{-1}(\mathbf{x}^i)) \in \Omega_{t_{n+1}}$  a tudíž můžeme psát  $\hat{\mathbf{u}}^i = \mathbf{u}^i \circ \mathbf{A}_{t_i} \circ \mathbf{A}_{t_{n+1}}^{-1}$ , kde funkce  $\hat{\mathbf{u}}^i$  je již definovaná na  $\Omega_{t_{n+1}}$ . Dostáváme se k problému najít funkce  $\mathbf{u}^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \mapsto \mathbb{R}^2$  a  $p^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \mapsto \mathbb{R}$  takové, že

$$\begin{aligned} \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0 \quad \text{v } \Omega_{t_{n+1}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{v } \Omega_{t_{n+1}}. \end{aligned} \quad (86)$$

Tuto soustavu rovnic opět uvažujeme s okrajovými podmínkami (78), (79), (80).

### 2.4.2 Diskretizace v prostoru

Východiskem pro prostorovou diskretizaci je tzv. slabá formulace předchozí úlohy na každé časové vrstvě  $t_{n+1}$ . Tzn., že budeme definovat slabé řešení coby prvek vhodného prostoru funkcí, splňující integrální identitu ekvivalentní s původní rovnicí. Prostor, v němž hledáme slabé řešení, budeme potom aproximovat nějakým konečnědimenzionálním podprostorem a použijeme Galerkinovu metodu pro nalezení přibližného řešení na časové vrstvě  $t_{n+1}$ .

Za tímto účelem definujeme Lebesgueův prostor  $L^2(\Omega)$  měřitelných funkcí v oblasti  $\Omega$  integrovatelných s kvadrádem přes  $\Omega$  a Sobolevův prostor

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega); \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2\}.$$

Dále zaved' me následující označení:  $\Omega := \Omega_{t_{n+1}}$ ,  $\mathbf{u} := \mathbf{u}^{n+1}$ ,  $p := p^{n+1}$  a definujme prostory pro rychlost  $W = (H^1(\Omega))^2$ ,  $X = \{\mathbf{v} \in W; \mathbf{v}|_{\Gamma_D \cup \Gamma_{W_i}} = 0\}$  a tlak  $M = L^2(\Omega)$ . Rovnice (86) přepíšeme do tvaru

$$\frac{3}{2\tau} \mathbf{u} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}) \quad \text{v } \Omega,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega. \quad (87)$$

První rovnici vynásobíme skalárně<sup>6</sup> testovací funkcí  $\mathbf{v} \in X$  a druhou rovnici vynásobíme testovací funkcí  $q \in M$  a obě rovnice zintegrujeme přes oblast  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\tau} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ = \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Dále upravíme třetí člen v první rovnici pomocí Greenovy věty následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= -\nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} v_j \, d\mathbf{x} \\ &= \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} - \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j n_i \, ds = \\ &= \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} - \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_O} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j n_i \, ds \\ &= \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_O} (p - p_{ref}) v_j n_j \, ds, \end{aligned}$$

kde jsme využili skutečnost, že  $\mathbf{v} \in X$  je nulová na množině  $\Gamma_D \cup \Gamma_{W_i}$  a použili jsme okrajovou podmínku (79). Dále upravíme čtvrtý člen první identity (88). Dostaneme

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, d\mathbf{x} = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_O} p v_i n_i \, ds.$$

<sup>6</sup>Tj. jde o skalární součin

Označíme-li symbolem  $(\cdot, \cdot)$  skalární součin v prostoru  $(L_2(\Omega))^2$ , tj.  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (L_2(\Omega))^2$ , kde  $\cdot$  mezi funkcemi  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  v integrandu značí skalární součin v  $\mathbb{R}^2$ , a podobně označíme skalární součin v  $L_2(\Omega)$ , dále označíme-li symbolem  $((\cdot, \cdot))$  bilineární formu v prostoru  $(H^1(\Omega))^2$  definovanou vztahem

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, d\mathbf{x},$$

můžeme (88) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ & -(p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2\tau}(4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_0} p_{ref} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ & (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Tuto soustavu můžeme napsat ve tvaru jediné rovnice<sup>7</sup>. Dále zavedeme označení

$$\begin{aligned} a(U^*, U, V) &= \frac{3}{2\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ & -(p, \nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, q), \\ f(V) &= \frac{1}{2\tau}(4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds, \end{aligned} \quad (90)$$

kde

$$U = (\mathbf{u}, p) \in W \times M \quad U^* = (\mathbf{u}^*, p) \in W \times M \quad V = (\mathbf{v}, q) \in X \times M$$

Ted' je již jednoduché definovat slabé řešení  $U = (\mathbf{u}, p)$  problému (88). Je to taková dvojice  $U = (\mathbf{u}, p)$ , která splňuje podmínky

$$U \in W \times M \quad a(U, U, V) = f(V), \quad \forall V = (\mathbf{v}, q) \in X \times M, \quad (91)$$

a  $\mathbf{u}$  splňuje okrajové podmínky (78) na  $\Gamma_D$  a (80) na  $\Gamma_{W_i}$  ve smyslu stop.

Nyní přistoupíme k definici přibližného řešení. Postupujeme tak, že prostory  $W$ ,  $X$ ,  $M$  aproximujeme jejich konečnědimenzionálními podprostory  $W_h$ ,  $X_h$ ,  $M_h$ ,  $h \in (0, h_0)$ ,  $h_0 > 0$ , kde

$$X_h = \{\mathbf{v} \in W_h; \mathbf{v}|_{\Gamma_D \cup \Gamma_{W_i}} = 0\}.$$

<sup>7</sup>Takto se standartně postupuje při definici slabého řešení soustav. Řešení pak bude z prostoru  $W \times M$ , což je kartézský součin prostorů  $W$  a  $M$ . Dá se ukázat ekvivalence definice slabého řešení soustavy, kde jedna z rovnic dává podmínku pro element z  $W$  a druhá pro elementu z  $M$ , s definicí slabého řešení, která vznikla součtem rovnic soustavy (89). V tomto případě nám tato rovnice dává podmínku pro řešení z prostoru  $X \times M$ .

Tzn., že ke každému  $h \in (0, h_0)$  přiřadíme konečnědimenzionální podprostory  $W_h, X_h, M_h$ , s dimenzemi  $\dim W_h = n_W(h)$ ,  $\dim X_h = n_X(h)$ ,  $\dim M_h = n_M(h)$ . Pro funkce  $n_W(h)$ ,  $n_X(h)$ ,  $n_M(h)$  platí, že jsou nerostoucí na  $(0, h_0)$  a dále, že mají limitu  $\infty$  pro  $h \rightarrow 0+$ . Přibližné řešení definujeme jako dvojici  $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in W_h \times M_h$  takovou, že  $\mathbf{u}_h$  splňuje vhodnou aproximaci okrajových podmínek (78) a (80) a identitu

$$a(U_h, U_h, V_h) = f(V_h), \quad \forall V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times M_h. \quad (92)$$

Zde  $X_h \times M_h$  je prostor konečných prvků, který musí splňovat Babuškovu-Brezziho (BB) podmínku, která garantuje stabilitu použitého schématu (viz. [3, strana 592]).

Prostory konečných prvků budeme konstruovat následovně. Předpokládejme, že  $\Omega$  je polygonální oblast, což je oblast, jejíž hranice je tvořena úsečkami. Dále  $T_h$  je její regulární triangulace. Triangulace dané polygonální oblasti je systém dělení této oblasti na trojúhelníky  $K_i, i = 1, \dots, k$ . Přitom dva trojúhelníky jsou buď disjunktní, nebo mají společný jeden vrchol nebo společnou celou jednu stranu. Dále necht'  $h_i$ , (resp.  $\rho_i$ ) značí průměr (resp. maximum z průměru vepsaných kruhů do  $K_i$ ). Každému takovému dělení přiřadíme dvě čísla:  $h$ ,  $\rho$ , kde  $h = \max h_i$ ,  $\rho = \min \rho_i$ . Triangulace  $T_h$  je regulární, jestliže existuje konstanta  $\beta > 0$  nazvávislá na  $h$  taková, že

$$\frac{h}{\rho} \leq \beta \quad \text{pro } h \in (0, h_0).$$

Prostor  $M$  pro tlak je aproximován prostorem spojitých funkcí po částech polynomiálních stupně  $\leq k$ :

$$p \approx p_h \in M_h = \{q \in M \cap C(\overline{\Omega}); q|_K \in P^k(K), \forall K_i \in T_h\}. \quad (93)$$

Prostor  $W$  pro rychlosti je aproximován podobně, tedy prostorem spojitých funkcí po částech polynomiálních stupně  $\leq k + 1$ :

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h \in M_h = \{\mathbf{v} \in W \cap (C(\overline{\Omega}))^2; \mathbf{v}|_K \in (P^{k+1}(K))^2, \forall K_i \in T_h\}. \quad (94)$$

Takto zvolená dvojice prostorů  $(X_h, M_h)$  splňuje BB podmínku, jak je psáno v [6]. Mluvíme o tzv. Taylorových-Hoodových  $P_{k+1}/P_k$  elementech.

Je zřejmé, že trilineární forma  $a(\cdot, \cdot, \cdot)$  ze vzorce (90) se bude konstruovat jen přibližně. Toto přiblížení budeme značit  $a_h(\cdot, \cdot, \cdot)$  a bude závislé na použité síti a také na použitých kvadraturních formulích pro numerickou integraci. Stejná uvaha je platná i pro funkcionál  $f$  ze vzorce (90). Jeho aproximaci budeme označovat  $f_h$ .

### 2.4.3 Stabilizace metody konečných prvků

Standartní aplikace metody konečných prvků, zvláště při velkých Reynoldsových číslech vede k numerickým schémátům, která dávají nefyzikální výsledky. Objevuje se tzv. Gibbsův jev, reprezentovaný nefyzikálními oscilacemi. V závislosti na transportní rychlosti proudění  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^* - \mathbf{w}$  a vazkosti  $\nu$  Navierovy-Stokesovy rovnice mohou přecházet do limitních případů, kde buď převládá difuzní (tj.  $\frac{|\bar{\mathbf{w}}|}{\nu} \ll 1$ ) nebo konvektivní člen (tj.  $\frac{|\bar{\mathbf{w}}|}{\nu} \gg 1$ ). V případě převládajícího konvektivního členu mluvíme o singularně perturbované konvektivně-difuzní rovnici. V případě  $\nu = 0$  se rovnice stane hyperbolickou. Charakter rovnic se odráží i v jejich řešení. V případě, že  $\frac{|\bar{\mathbf{w}}|}{\nu} \gg 1^8$  se okrajové podmínky stavají neregulárními, protože jsou zavedeny pro nepertubovanou (parabolickou) rovnici, kdežto skutečný charakter rovnice se blíží k hyperbolické rovnici. Abychom se vyhnuli tomuto jevu, použijeme stabilizaci pomocí tzv. streamline-diffusion/Petrov-Galerkinovy techniky převzatou z [5] nebo [3].

Definujme stabilizační členy

$$L_h(U^*, U, V) = \sum_{K_i \in T_h} \delta_K \left( \frac{3}{2\tau} \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p, (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_{K_i} \quad (95)$$

$$F_h(V) = \sum_{K_i \in T_h} \delta_K \left( \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}), (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_{K_i},$$

kde

$$U = (\mathbf{u}, p) \quad U^* = (\mathbf{u}^*, p) \quad V = (\mathbf{v}, q)$$

a  $\delta_K \geq 0$ ,  $K_i \in T_h$ , jsou vhodné parametry,  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}$  je transportní rychlost a  $(\cdot, \cdot)_{K_i}$  je skalární součin v  $L^2(K_i)$ .

Dále zavedeme stabilizační členy pro tlak ve tvaru

$$P_h(U, V) = \sum_{K_i \in T_h} \tau_{K_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_{K_i}, \quad U = (\mathbf{u}, p) \quad V = (\mathbf{v}, q), \quad (96)$$

s vhodnými parametry  $\tau_K \geq 0$  pro  $K_i \in T_h$ .

Stabilizovaný diskretní problém formulujeme následujícím způsobem: Hledáme  $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in W_h \times M_h$  takové, že  $\mathbf{u}_h$  splňuje aproximaci okrajových podmínek (78) na  $\Gamma_D$  a (80) na  $\Gamma_{W_f}$  a

$$a_h(U_h, U_h, V_h) + L_h(U_h, U_h, V_h) + P_h(U_h, V_h) = f(V_h) + F_h(V_h), \quad \forall V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times M_h. \quad (97)$$

<sup>8</sup>Velká transportní rychlost  $\bar{\mathbf{w}}$  nebo (a zároveň) malá vazkost  $\nu$ .

Nyní věnujme pozornost volbě parametrů  $\delta_K$  a  $\tau_K$ . Použijeme metodu popsanou v [4]. Rychlost proudění je v různých místech oblasti  $\Omega_0$  různá, proto oblast proudění se dělí na dvě podoblasti. Na jedné převládá difuzní člen a na druhé převládá konvektivní člen. Na těchto dvou podoblastech budeme tyto parametry volit různým způsobem. Parametr  $\delta_K$  je definován na základě transportní rychlosti  $\bar{\mathbf{w}}$  a samozřejmě vazkosti  $\nu$ , která je však konstantní v celé oblasti  $\Omega_0$ . Klademe

$$\delta_K = \delta^* \frac{h_K}{2\|\bar{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(K)}} \xi(Re^{\bar{\mathbf{w}}}), \quad (98)$$

kde

$$Re^{\bar{\mathbf{w}}} = \frac{h_K \|\bar{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(K)}}{2\nu} \quad (99)$$

je tzv. lokální Reynoldsovo číslo a  $h_K$  je velikost elementu  $K$  měřená ve směru  $\bar{\mathbf{w}}$ . Funkce  $\xi(\cdot)$  je neklesající v závislosti na  $Re^{\bar{\mathbf{w}}}$  tak, že pro lokální konvektivní dominanci ( $Re^{\bar{\mathbf{w}}} > 1$ )  $\xi \rightarrow 1$  a pro lokální difuzní dominanci ( $Re^{\bar{\mathbf{w}}} < 1$ )  $\xi \rightarrow 0$ . Parametr  $\delta^* \in (0, 1]$  je volitelný parametr. Funkci  $\xi(\cdot)$  definujeme např. vztahem

$$\xi(Re^{\bar{\mathbf{w}}}) = \min\left(\frac{Re^{\bar{\mathbf{w}}}}{6}, 1\right). \quad (100)$$

Výběr parametru  $\tau_K$  je opět různý v oblastech, kde převládá difuzní nebo konvektivní člen.  $\tau_K$  volíme

$$\tau_K = \tau^* h_K \|\bar{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(K)} \quad a \quad \tau_K = 0 \quad (101)$$

pro lokální konvektivní dominanci a lokální difuzní dominanci. Symbol  $\tau^*$  značí volitelný parametr z  $(0, 1]$ .

#### 2.4.4 Numerický výpočet síly $L_2$ a momentu síly $M$

Numerický výpočet síly  $L_2$  a momentu síly  $M$  v čase  $t = t_{n+1}$  z přibližného řešení  $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$  vypočteného jako řešení stabilizovaného diskrétního problému (97) může být proveden dvěma způsoby.

a) Jako první možnost se nabízí výpočet složek  $T_{ij}$  tenzoru napětí v čase  $t = t_{n+1}$  ze vzorce (76) na elementech  $K_i \in T_h$  přilehlých k leteckému profilu  $\Gamma_{Wt}$  extrapolací hodnot  $T_{ij}$  na profil  $\Gamma_{Wt}$  a následně výpočet  $L_2$  a  $M$  numerickou integrací podél  $\Gamma_{Wt}$  podle vzorců (74) a (75).

b) Druhá a zároveň přesnější možnost, která je vhodnější s ohledem na slabou formulaci problému, je dána následujícím způsobem. Vyjdeme z Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE

formulaci diskretizované v čase pro čas  $t = t_{n+1}$  vyjádřené po složkách jako

$$\frac{3u_i - 4\hat{u}_i^n + \hat{u}_i^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla)u_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j},$$

$$\text{v } \Omega_{t_{n+1}}, \quad i = 1, 2. \quad (102)$$

Definujme množinu

$$\Omega_{\Gamma_{W_t}} = \bigcup \{K_i \in T_h; K_i \cap \Gamma_{W_t} \neq \emptyset\}, \quad (103)$$

která reprezentuje jednovrstvý pás kolem leteckého profilu tvořený konečnými prvky. Násobením rovnice (102) pro  $i = 2$  funkcí  $\varphi \in W_h$ , pro kterou platí

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 \text{ pro } x \in \Gamma_{W_t}, \\ \varphi &= 0 \text{ pro } x \in \Omega_t \setminus \Omega_{\Gamma_{W_t}}, \end{aligned}$$

a integrací přes množinu  $\Omega_{\Gamma_{W_t}}$  dostáváme

$$\int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left( \frac{3u_2 - 4\hat{u}_2^n + \hat{u}_2^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla)u_2 \right) \varphi \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (104)$$

Aplikací Greenovy věty a užitím vlastností funkce  $\varphi$  na pravé straně (104) obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left( \frac{3u_2 - 4\hat{u}_2^n + \hat{u}_2^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla)u_2 \right) \varphi \, d\mathbf{x} = \\ \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} T_{2j} n_j \, ds - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} T_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (105)$$

kde je  $\mathbf{n}$  vnější normála na profilu  $\Gamma_{W_t}$ , tj. směřující do profilu. Použitím vzorce (74) můžeme vyjádřit sílu  $L_2$ :

$$L_2 = - \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left( \frac{3u_{h2} - 4\hat{u}_{h2}^n + \hat{u}_{h2}^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h^{n+1}) \cdot \nabla)u_{h2} \right) \varphi \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} T_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}, \quad (106)$$

kde jsme navíc přesné řešení  $\mathbf{u}$  nahradili vypočteným přibližným řešením  $\mathbf{u}_h$  pro časové vrstvy  $n-1, n, n+1$  a rychlost oblasti  $\mathbf{w}^{n+1}$  v čase  $t = t_{n+1}$  jsme nahradili aproximací  $\mathbf{w}_h^{n+1}$ .

Napíšeme-li systém (102) ve vektorovém tvaru a vynásobíme skalárně vektorovou funkcí  $\mathbf{v}^{ort} = (v_1^{ort}, v_2^{ort})$ , pro kterou platí

$$v_i^{ort} = (-1)^i (x_i - x_i^{EO}) \varphi \quad i = 1, 2,$$



můžeme odvodit vyjádření pro moment  $M$ . Postupujme podobně jako v předchozím. Tzn., že výsledný součin zintegrujeme přes množinu  $\Omega_{\Gamma_{W_t}}$ , dále aplikací Greenovy věty a pomocí vzorce (75) se dostáváme k vyjádření pro výpočet  $M$ :

$$M = - \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left( \frac{3u_{h2} - 4\widehat{u}_{h2}^n + \widehat{u}_{h2}^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h^{n+1}) \cdot \nabla) u_{h2} \right) \cdot \mathbf{v}^{ort} d\mathbf{x} - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} T_{ij} \frac{\partial v_i^{ort}}{\partial x_j} d\mathbf{x}. \quad (107)$$

#### 2.4.5 Rovnice pro zobecněné souřadnice

Soustavu rovnic (71) převedeme na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu následujícími upravami. Nejprve soustavu rovnic (71) zapíšeme ve tvaru

$$m\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} = -L_2 - k_{hh}h - D_{hh}\dot{h} - D_{h\alpha}\dot{\alpha},$$

$$S_\alpha\ddot{h} + I_\alpha\ddot{\alpha} = M - k_{\alpha\alpha}\alpha - D_{\alpha h}\dot{h} - D_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}. \quad (108)$$

Na tento zápis můžeme nahlížet jako na lineární soustavu dvou rovnic pro neznámé  $\ddot{h}$ ,  $\ddot{\alpha}$ . Jejím řešením dostaneme

$$\ddot{h} = \frac{1}{D} [-I_\alpha L_2 - S_\alpha M - I_\alpha k_{hh}h + S_\alpha k_{\alpha\alpha}\alpha + (S_\alpha D_{\alpha h} - I_\alpha D_{hh})\dot{h} + (S_\alpha D_{\alpha\alpha} - I_\alpha D_{h\alpha})\dot{\alpha}],$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{D} [S_\alpha L_2 + mM + S_\alpha k_{hh}h - m k_{\alpha\alpha}\alpha + (S_\alpha D_{hh} - m D_{\alpha h})\dot{h} + (S_\alpha D_{h\alpha} - m D_{\alpha\alpha})\dot{\alpha}],$$

kde

$$D = mI_\alpha - S_\alpha^2.$$

Tato soustava rovnic je ekvivalentní se soustavou (71) pokud  $D \neq 0$ . Transformace  $y_1 = h$ ,  $y_2 = \dot{h}$ ,  $y_3 = \alpha$ ,  $y_4 = \dot{\alpha}$  dává soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y}(t))$$

$$= \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{1}{D} (-I_\alpha L_2 - S_\alpha M - I_\alpha k_{hh}y_1 + S_\alpha k_{\alpha\alpha}y_3 + (S_\alpha D_{\alpha h} - I_\alpha D_{hh})y_2 + (S_\alpha D_{\alpha\alpha} - I_\alpha D_{h\alpha})y_4) \\ y_4 \\ \frac{1}{D} (S_\alpha L_2 + mM + S_\alpha k_{hh}y_1 - m k_{\alpha\alpha}y_3 + (S_\alpha D_{hh} - m D_{\alpha h})y_2 + (S_\alpha D_{h\alpha} - m D_{\alpha\alpha})y_4) \end{pmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{Y} + \mathbf{R},$$

kde matice  $\hat{\mathbf{Q}}$  a vektor  $\mathbf{R}$  jsou

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{I_\alpha k_{hh}}{D} & \frac{S_\alpha D_{\alpha h} - I_\alpha D_{hh}}{D} & \frac{S_\alpha k_{\alpha\alpha}}{D} & \frac{S_\alpha D_{\alpha\alpha} - I_\alpha D_{h\alpha}}{D} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{S_\alpha k_{hh}}{D} & \frac{S_\alpha D_{hh} - m D_{\alpha h}}{D} & -\frac{m k_{\alpha\alpha}}{D} & \frac{S_\alpha D_{h\alpha} - m D_{\alpha\alpha}}{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 0 \\ -I_\alpha L_2 - S_\alpha M \\ 0 \\ S_\alpha L_2 + m M \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Tato soustava diferenciálních rovnic bude řešena Ruge-Kuttovou metodou druhého řádu. Pro výpočet vektoru  $\mathbf{Y}$  na časové vrstvě  $t_{n+1}$  použijeme

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \tau \mathbf{f}(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{Y}_n + \frac{1}{2} \tau \mathbf{f}(t_n, \mathbf{Y}_n)). \quad (110)$$

Z řešení  $U_h$  na předchozích časových vrstvách  $t_n$  a  $t_{n-1}$  budou vypočteny hodnoty  $L_{2,n-1}$ ,  $L_{2,n}$  síly  $L_2$  a  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  momentu  $M$  na těchto časových vrstvách. Z těchto hodnot získáme lineární extrapolaci  $L_2$  a  $M$  na časové vrstvě  $t_n + \frac{\tau}{2}$ :

$$L_{2,n+\frac{1}{2}} = L_{2,n-1} + \frac{1}{2}(L_{2,n} - L_{2,n-1}),$$

$$M_{n+\frac{1}{2}} = M_{n-1} + \frac{1}{2}(M_n - M_{n-1}),$$

kteří potřebujeme pro vyčíslení vektorové funkce  $\mathbf{f}(t_{n+\frac{1}{2}}, \cdot)$ .

#### 2.4.6 Konstrukce ALE zobrazení

V předchozím jsme ukázali, jak získat aproximace  $h_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1}$ , funkcí  $h$ ,  $\alpha$  v čase  $t_{n+1}$ . Nyní již můžeme definovat aproximaci ALE zobrazení (4) pro časovou vrstvu  $t_{n+1}$ , kterou budeme značit  $\mathbf{A}_{n+1}$ . Její numerickou realizaci uvedeme ve 3. kapitole.

Zobrazení  $\mathbf{A}_{n+1}$  jednoznačně určuje oblast  $\Omega_{n+1}$  a dovoluje nám zkonstruovat aproximaci rychlosti  $\mathbf{w}^{n+1}$  pro libovolný bod  $\mathbf{x}_{n+1} \in \Omega_{n+1}$  jako

$$\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) = \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{A}_n(\mathbf{A}_{n+1}^{-1}(\mathbf{x}_{n+1}))}{\tau}. \quad (111)$$

Nyní již můžeme řešit problém (86) a vypočítat řešení  $U_h$  na časové vrstvě  $t_{n+1}$ .

#### 2.4.7 Řešení nelineárního problému

Výpočet přibližného řešení  $U_h$  na časové vrstvě  $t_{n+1}$  představuje obtížný problém vzhledem k nelinearitě rovnice (97). Nejjednodušší možností je rovnici (97) linearizovat. Nelineární konvektivní člen v (71) nahradíme lineárním přiblížením

$$[(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} \approx [(2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u}.$$

Toto zjednodušení vede k řešení jednoho lineárního Oseenova problému na každé časové vrstvě.

My však použijeme přesnější Oseenovu iterativní metodu, která je dána formulí

$$\begin{aligned} a_h(U_{h,m}^{n+1}, U_{h,m+1}^{n+1}, V_h) + L_h(U_{h,m}^{n+1}, U_{h,m+1}^{n+1}, V_h) + P_h(U_{h,m+1}^{n+1}, V_h) \\ = f_h(V_h) + F_h(V_h), \quad \forall V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times M_h. \end{aligned} \quad (112)$$

Tudíž, máme předpis pro konstrukci posloupnosti  $U_{h,m}^{n+1}$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , která konverguje k řešení  $U_h^{n+1}$  rovnice (86). Jako nultý prvek této posloupnosti budeme volit  $U_{h,0}^{n+1} = U_h^n = (\mathbf{u}_h^n, p_h^n)$  nebo  $U_{h,0}^{n+1} = 2U_h^n - U_h^{n-1} = (2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, 2p_h^n - p_h^{n-1})$ . Touto volbou nultého prvku posloupnosti se řešení předchozí metodou dá považovat za první iteraci v Oseenově iterativní metodě. V každé  $m$ -té iteraci řešíme opět Oseenův lineární problém, v němž vypočteme  $U_{h,m+1}^{n+1}$  z  $U_{h,m}^{n+1}$  podle předpisu (112). Pro dostatečně přesné řešení na každé časové vrstvě typicky postačí 5 – 8 Oseenových iterací.

#### 2.4.8 Řešení Oseenova problému

Nechť  $\mathbf{u}_h^+$  je zatím libovolná funkce, pro kterou platí  $\mathbf{u}_h^+ \in W_h$  a  $\mathbf{u}_h^+$  splňuje přibližně okrajové podmínky (78) na  $\Gamma_D$  a (80) na  $\Gamma_{W_i}$  pro čas  $t_{n+1}$ . Dále necht' systém funkcí  $\{\mathbf{w}_i^*\}_{i=1}^{n_X}$  tvoří bázi prostoru  $X_h$  a systém funkcí  $\{q_j^*\}_{j=1}^{n_M}$  je báze prostoru  $M_h$ . Položme  $U_{h,m+1}^{n+1} = (\mathbf{u}_{h,m+1}, p_{h,m+1})$ . Řešení  $U_{h,m+1}^{n+1}$  budeme hledat ve tvaru:

$$\mathbf{u}_{h,m+1} = \mathbf{u}_h^+ + \sum_{j=1}^{n_X} U_j \mathbf{w}_j^*, \quad U_j \in \mathbf{R}, j = 1, \dots, n_X,$$

$$p_{h,m+1} = \sum_{j=1}^{n_M} P_j q_j^*, \quad P_j \in \mathbf{R}, j = 1, \dots, n_M.$$

Dosazením do (112) dostáváme soustavu lineárních rovnic o  $n_X + n_M$  neznámých

$$\sum_{j=1}^{n_X} a_{ij} U_j + \sum_{k=1}^{n_M} b_{ik} P_k = F_i \quad i = 1, \dots, n_X,$$

$$\sum_{j=1}^{n_X} b_{jl} U_j = G_l \quad l = 1, \dots, n_M,$$

kde koeficienty  $a_{ij}$ ,  $b_{ik}$ ,  $F_i$ ,  $G_l$  mají tvar

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \frac{3}{2\tau} (\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) + \nu((\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*)) + (((\mathbf{u}_{h,m}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) \\ & + \sum_{K \in T_h} \delta_K \left( \frac{3}{2\tau} \mathbf{w}_j^* - \nu \Delta \mathbf{w}_j^* + ((\mathbf{u}_{h,m}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, ((\mathbf{u}_{h,m}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K \\ & + \sum_{K \in T_h} \tau_K (\nabla \cdot \mathbf{w}_j^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^*)_K, \end{aligned}$$

$$b_{ik} = (q_k^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^*),$$

$$\begin{aligned} F_i = & \frac{1}{2\tau}(4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{w}_i^*) - \int_{\Gamma_O} \mathbf{w}_i^* \cdot \mathbf{n} ds + \sum_{K \in T_h} \delta_K \left( \frac{1}{2\tau}(4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}), ((\mathbf{u}_{h,n+1}^m - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K \\ & - \frac{3}{2\tau}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{w}_i^*) + \nu((\mathbf{u}_h^+, \mathbf{w}_i^*)) + (((\mathbf{u}_{h,m}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^+, \mathbf{w}_i^*) \\ & - \sum_{K \in T_h} \delta_K \left( \frac{3}{2\tau} \mathbf{u}_h^+ - \nu \Delta \mathbf{u}_h^+ + ((\mathbf{u}_{h,m}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^+, ((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K \\ & - \sum_{K \in T_h} \tau_K (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^+, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^*)_K, \end{aligned}$$

$$G_l = (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^+, q_l^*).$$

V každé Oseenově iteraci řešíme soustavu tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix},$$

kde vektor  $(\mathbf{U}, \mathbf{P}) \in \mathbb{R}^{n_X + n_M}$  vyjadřuje řešení  $U_{h,m+1}^{n+1}$  vzhledem k bázi

$$S = \{ \{(\mathbf{w}_i^*, 0)\}_{i=1}^{n_X}, \{(0, q_j^*)\}_{j=1}^{n_M} \}$$

prostoru  $X_h \times M_h$ . Soustava je nesymetrická a řídká a je řešena pomocí řešiče UMFPACK, který využívá nesymetrickou multifrontální metodu. Tato metoda je přímá, viz. [12].

Nyní se zabývejme otázkou, kdy Oseenovy iterace ukončit. Jelikož se snažíme docílit, aby podmínka (97) byla pro  $U_{h,m+1}^{n+1}$  co nejpřesněji splněna, klademe na poslední iteraci  $U_h^{n+1}$  požadavek

$$|a_h(U_h^{n+1}, U_h^{n+1}, V_h) + L_h(U_h^{n+1}, U_h^{n+1}, V_h) + P_h(U_h^{n+1}, V_h) - f(V_h) - F_h(V_h)| \leq \theta,$$

$$\forall V_h \in S, \tag{113}$$

kde  $|\cdot|$  je absolutní hodnota a  $\theta$  je parametr numerické části našeho modelu reprezentující požadovanou přesnost<sup>9</sup>. Oseenovy iterace ukončíme v případě, že  $U_{h,m+1}^{n+1}$  splňuje (113), načež položíme  $U_h^{n+1} = U_{h,m+1}^{n+1}$ . Výraz (113) neznamená nic jiného než, že vektor  $(\mathbf{U}, \mathbf{P})$  vyhovuje rovnici (97) v námi definované absolutní přesnosti v normě  $\|\mathbf{g}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n_X + n_M} (|g_i|)$  pro vektor  $\mathbf{g}$  z prostoru  $\mathbb{R}^{n_X + n_M}$ . V některých případech je rozumné absolutní přesnost nahradit přesností relativní nebo kontrolovat oba druhy přesností a ukončit iterace v případě, že podmínka (113) je splněna alespoň pro jeden druh přesnosti. Další modifikací (113) je  $\|\cdot\|_\infty$  v prostoru  $\mathbb{R}^{n_X + n_M}$  nahradit normou jinou, např. kartézskou  $\|\mathbf{g}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_X + n_M} |g_i|^2}$ . Pro reziduum  $R$  tedy musí platit

<sup>9</sup>Jde o absolutní přesnost

$$R = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{A}^D \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}^D \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \right\| \leq \max(\theta, \vartheta) \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \right\|,$$

kde  $\|\cdot\|$  je nějaká norma na prostoru  $\mathbf{R}^{n_x+n_M}$  a  $\vartheta$  je relativní přesnost. Matice  $\mathbf{A}^D$  a vektor  $\mathbf{F}^D$  vzniknou z  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{F}$  dosazením  $\mathbf{u}_{h,m}^{n+1} = \mathbf{u}_{h,m+1}^{n+1}$ .

### 3 Numerická realizace - software

#### 3.1 Realizace ALE zobrazení

Je několik možností jak realizovat ALE zobrazení. Navzájem se liší přesností, složitostí implementace, časovou náročností při numerické realizaci nebo rozsahem použití. Samozřejmě je nutné jako v celé aplikované numerické matematice zvolit vhodný kompromis mezi těmito cíly, které jdou proti sobě. Tzn., že není možné navrhnout postup, který by byl zároveň velice přesný, časově nenáročný a obecný, tj. zahrnující velkou škálu modifikací problému, např. při větší změně geometrie problému. Nejprve si ukážeme elegantní a obecný postup, použitelný pro geometrie různých typů. Jeho relativně složitější implementace a hlavně časová náročnost při numerické realizaci výpočtů nás přivádí k jednodušší možnosti, která má však omezené použití. Je ale časově nenáročná a co je stejně důležité, je dostatečně přesná.

##### 3.1.1 Realizace ALE zobrazení pomocí Laplaceovy rovnice

Naším úkolem je nyní zkonstruovat hladké zobrazení (4) oblasti  $\Omega_0$  na oblast  $\Omega_t$ , přičemž tyto oblasti jsou již známé. Rovněž již víme, jak vypadá zobrazení  $\mathbf{A}_t$  pro  $\mathbf{X} \in \partial\Omega_0$ . V našem případě z  $\alpha$  a  $h$  umíme zkonstruovat  $\mathbf{A}_t$  pro  $\mathbf{X} \in \Gamma_{W_0}$ . Jde o body na okraji profilu, které se transformují

$$\begin{aligned} x_1 &= (X_1 - X_{01}) \cos \alpha + (X_2 - X_{02}) \sin \alpha + X_{01} \\ x_2 &= -(X_1 - X_{01}) \sin \alpha + (X_2 - X_{02}) \cos \alpha + h + X_{02} \end{aligned} \quad (114)$$

kde  $X_{01}, X_{02}$  jsou ALE souřadnice torzní osy v rovnovážné poloze. Dále pro  $\mathbf{X} \in \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{W_0}$  je zobrazení  $\mathbf{A}_t$  identitou, jak vyplývá z obr. 2. Pro body  $\mathbf{X} \in \text{Int}\Omega_0$  budeme zobrazení  $\mathbf{A}_t$  hledat tak, aby  $\mathbf{A}_t$  splňovalo Laplaceovu rovnici

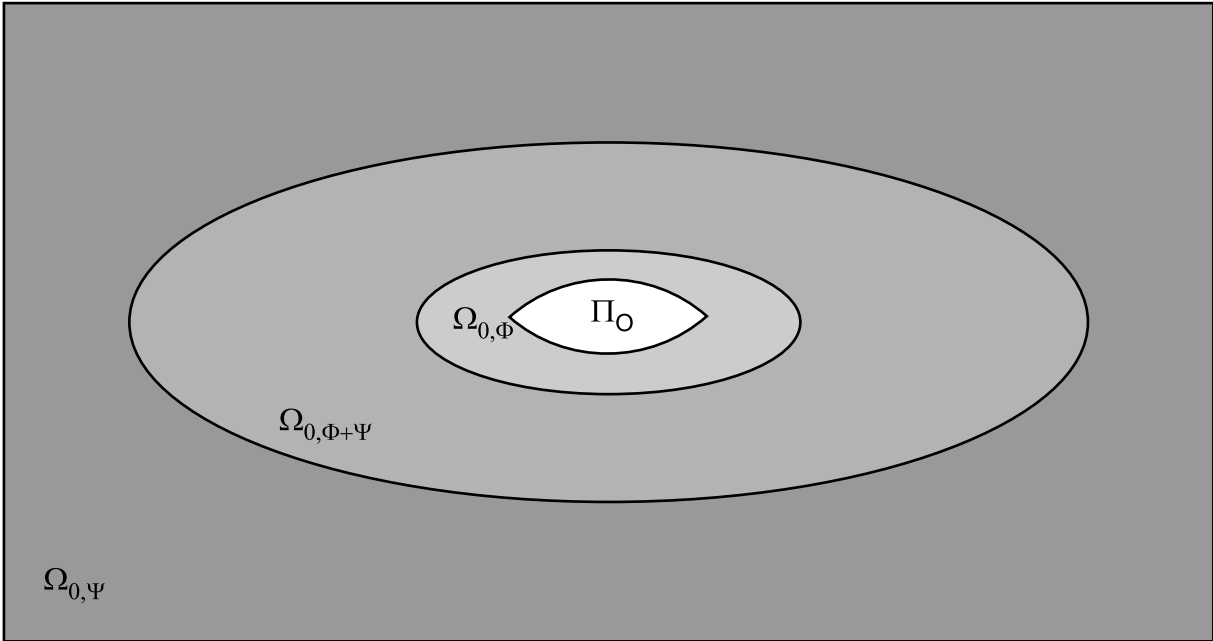
$$\Delta_{\mathbf{X}} \mathbf{A}_t = 0 \quad \mathbf{X} \in \Omega_0. \quad (115)$$

Okrajové podmínky jsou zřejmé z požadavků na zobrazení  $\mathbf{A}_t$  na  $\partial\Omega_0$ . Numericky se řešení problému (115) bude hledat jen na uzlech triangulace. K tomu nám postačí použít konečné prvky typu  $P_1$ . Pro výpočet rychlosti transformace  $\mathbf{w}_t$  použijeme vztah (111). Je zřejmé, že zobrazení  $\mathbf{A}_t$  nalezené tímto způsobem je na celé oblasti  $\Omega_0$  hladké.

Tato metoda je elegantní a obecná, její použití však není příliš praktické a proto se pokusíme této metodě vyhnout.

### 3.1.2 Realizace ALE zobrazení pomocí geometrických úvah

V dalším budeme uvažovat letecký profil v aerodynamickém tunelu. Pro tento případ navrhne metodu konstrukce ALE zobrazení pomocí geometrických úvah. Stejně jako v předchozím je zapotřebí pro hodnoty  $h, \alpha$  zkonstruovat zobrazení  $\mathbf{A}_t$  pro uzly triangulace. Oblast  $\Omega_0$  rozdělíme na tři podoblasti viz. obr. 5, které budeme transformovat různým způsobem. Nejprve části



Obrázek 5: Rozdělení oblasti  $\Omega_0$

oblasti  $\Omega_0$ , která je v blízkosti profilu budeme transformovat stejně jako povrch profilu, tj. jedná se pouze o otočení a posunutí, tuto podmnožinu  $\Omega_0$  budeme označovat  $\Omega_{0,\Phi}$ . Můžeme tedy psát

$$\mathbf{A}_t(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}) \quad \text{pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi},$$

kde zobrazení  $\Phi$  je afinní a dá se zapsat stejným způsobem jako (114). Část oblasti  $\Omega_0$ , která se nachází kolem stěn aerodynamického tunelu, případně v blízkosti vstupu a výstupu, budeme značit  $\Omega_{0,\Psi}$ . Pro tuto oblast platí

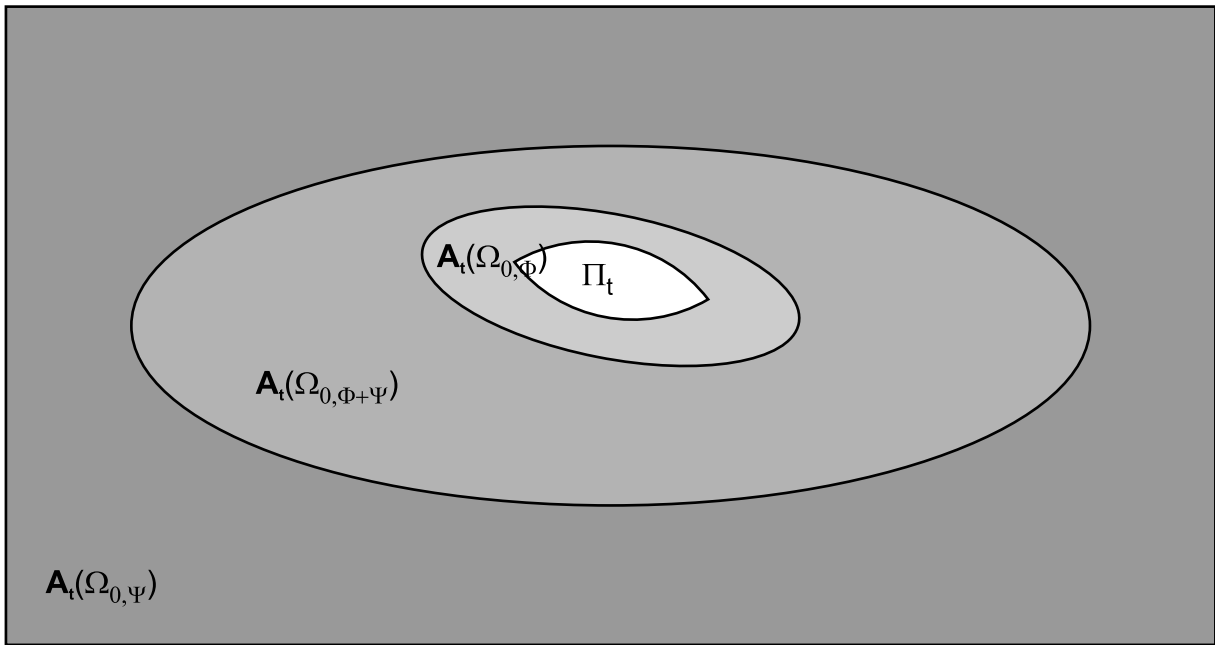
$$\mathbf{A}_t(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{I}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \quad \text{pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Psi}.$$

Zbytek oblasti  $\Omega_{0,\Phi+\Psi} = \Omega_0 \setminus (\Omega_{0,\Phi} \cup \Omega_{0,\Psi})$  budeme transformovat

$$\mathbf{A}_t(\mathbf{X}) = (\alpha\Phi + \beta\Psi)(\mathbf{X}) \quad \text{pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi+\Psi}, \quad (116)$$

kde platí

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in [0, 1], \quad \alpha + \beta = 1. \quad (117)$$

Obrázek 6: Rozdělení oblasti  $A_t(\Omega_0)$  v čase  $t$ 

Reálná čísla  $\alpha$ ,  $\beta$  nebudou konstantní na  $\Omega_{0,\Phi+\Psi}$ , ale budou záviset na poloze bodu  $\mathbf{X}$  vhodným způsobem tak, aby zobrazení  $\mathbf{A}_t$  vyhovovalo v jistém přiblížení požadované vlastnosti, tj., aby  $\mathbf{A}_t$  bylo na celé oblasti  $\Omega_0$  hladké. Zobrazení  $\mathbf{A}_t$  se konstruuje opět pouze na uzlech triangulace.

Označme množinu, která je hranicí mezi oblastmi  $\Omega_{0,\Phi}$  a  $\Omega_{0,\Phi+\Psi}$ , jako  $\Gamma_{0,\Phi}$ . Dále necht' hranice mezi oblastmi  $\Omega_{0,\Phi+\Psi}$  a  $\Omega_{0,\Psi}$  je nadále označena jako  $\Gamma_{0,\Psi}$ . Pro jednoduchost implementace je vhodné, aby  $\Gamma_{0,\Phi}$  a  $\Gamma_{0,\Psi}$  byly elipsami, které jsou navzájem podobné, tj.

$$\frac{a_\Psi}{b_\Psi} = \frac{a_\Phi}{b_\Phi},$$

kde  $a_\Psi$  (resp.  $a_\Phi$ ) je délka hlavní poloosy elipsy  $\Gamma_{0,\Psi}$  (resp.  $\Gamma_{0,\Phi}$ ) a  $b_\Psi$  (resp.  $b_\Phi$ ) je délka vedlejší poloosy elipsy  $\Gamma_{0,\Psi}$  (resp.  $\Gamma_{0,\Phi}$ ). Dále necht' obě elipsy mají společný střed umístěný v torzní ose profilu. Každému bodu  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  přiřadíme reálné číslo  $C(\mathbf{X})$  podle předpisu

$$C(\mathbf{X}) = \sqrt{\frac{1}{a_\Phi^2}(X_1 - X_{01})^2 + \frac{1}{b_\Phi^2}(X_2 - X_{02})^2}.$$

Pro body  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  platí, že

$$C(\mathbf{X}) < 1 \text{ pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi}$$

$$C(\mathbf{X}) > 1 \text{ a } C(\mathbf{X}) < \frac{a_\Psi}{a_\Phi} \text{ pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi+\Psi}$$

$$C(\mathbf{X}) > \frac{a_\Psi}{a_\Phi} \text{ pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Psi}$$

a

$$C(\mathbf{X}) = 1 \text{ pro } \mathbf{X} \in \Gamma_{0,\Phi}$$

$$C(\mathbf{X}) = \frac{a_\Psi}{a_\Phi} \text{ pro } \mathbf{X} \in \Gamma_{0,\Psi}$$



Pro body  $\mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi+\Psi}$  klademe reálná čísla  $\alpha, \beta$  z (117) jako

$$\begin{aligned}\beta(\mathbf{X}) &= \frac{1}{\frac{a\Psi}{a\Phi} - 1} \min(\max(C(\mathbf{X}) - 1, 0), \frac{a\Psi}{a\Phi} - 1) \\ \alpha(\mathbf{X}) &= 1 - \beta(\mathbf{X})\end{aligned}$$

Tudíž již máme zkonstruované zobrazení  $\mathbf{A}_t$ . Implementace v jazyce C je umístěna v dodatku B.

Je zřejmé, že tato metoda je implementačně i časově nenáročná. Její použití nás však omezuje na malou amplitudu funkcí  $\alpha(t)$  a  $h(t)$  a dostatečně velké umístění profilu od stěn tunelu.

Pro tento případ se budeme ještě zabývat otázkou, jak přesněji vypočítat rychlost ALE transformace  $\tilde{\mathbf{w}}$ . Je zřejmé, že

$$\tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Psi} \text{ a } t \in [0, T].$$

Dále platí, že

$$\tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(t, \mathbf{X}) \\ \tilde{w}_2(t, \mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(X_1 - X_{01}) \sin \alpha(t) + (X_2 - X_{02}) \cos \alpha(t) \dot{\alpha}(t) \\ -(X_1 - X_{01}) \cos \alpha(t) - (X_2 - X_{02}) \sin \alpha(t) \dot{\alpha}(t) + \dot{h}(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi} \text{ a } t \in [0, T],$$

čehož jsme dosáhli derivováním rovnice (114). Jelikož zobrazení  $\mathbf{A}_t(\mathbf{X})$  pro  $\mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi+\Psi}$  je dáno vzorcem (116), díky vzorci (5) pro rychlost ALE zobrazení platí

$$\tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_t(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(\mathbf{X})\Phi(t, \mathbf{X}) + \beta(\mathbf{X})\Psi(t, \mathbf{X})) =$$

$$\alpha(\mathbf{X}) \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{X})}{\partial t} + \beta(\mathbf{X}) \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{X})}{\partial t} = \alpha(\mathbf{X}) \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{X})}{\partial t} + \beta(\mathbf{X}) \overbrace{\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}}^{\mathbf{0}}.$$

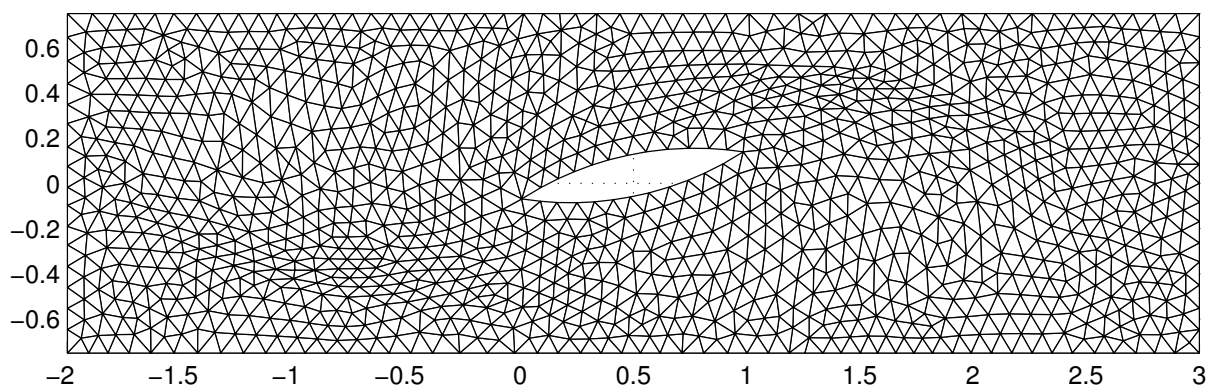
Tudíž

$$\tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(t, \mathbf{X}) \\ \tilde{w}_2(t, \mathbf{X}) \end{bmatrix} = \alpha(\mathbf{X}) \begin{bmatrix} -(X_1 - X_{01}) \sin \alpha(t) + (X_2 - X_{02}) \cos \alpha(t) \dot{\alpha}(t) \\ -(X_1 - X_{01}) \cos \alpha(t) - (X_2 - X_{02}) \sin \alpha(t) \dot{\alpha}(t) + \dot{h}(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{pro } \mathbf{X} \in \Omega_{0,\Phi+\Psi} \text{ a } t \in [0, T].$$

Implementace v jazyce C je rovněž umístěna v dodatku B.

obrazky/snap02.epsoobrazky/snap03.epsoobrazky/snap04.eps



Obrázek 7: Realizace ALE zobrazení pro izotropní síť

Obr. (7) názorně ukazuje realizaci této metody pro izotropní síť a pro čtyři různé hodnoty  $\alpha$ ,  $h$ . Veličina  $h$  a použité souřadnice pro oblast  $\Omega_t$  jsou bezrozměrné. Ukázka ALE transformace v čase je rovněž na přiloženém CD nosiči jako video soubor pod názvem ALETransformation-InTime.mpeg.

## 4 Výsledky

V této části práce se zaměříme na problém, který je experimentálně studován Ústavem termomechaniky Akademie věd České republiky. Tento problém se pokusíme řešit numerický a samozřejmě provedeme porovnání dosažených výsledků obou přístupů.

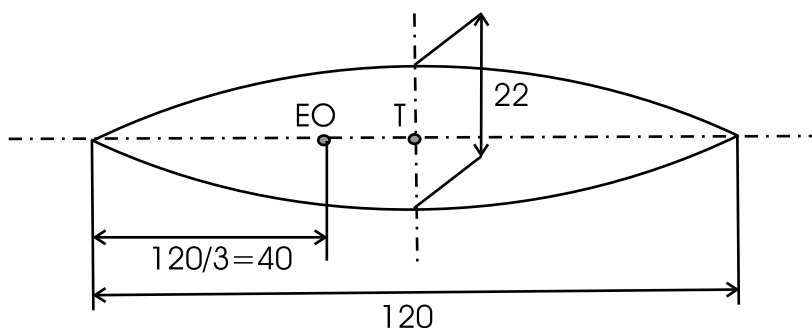
### 4.1 Experiment

#### 4.1.1 Popis experimentu - experimentální uspořádání

Experiment studuje vibrace profilu, umístěného v aerodynamickém tunelu. Jelikož jde o základní výzkum, byl vybrán profil, který se poměrně jednoduše konstruuje, avšak nemá přímé použití v praxi. Profil je upevněn v torzní ose a má dva stupně volnosti. Je mu umožněno pohybovat se vertikálně a taktéž konat torzní pohyb. Rovnovážná poloha profilu v tunelu je různá. Bude se měnit vzdálenost od středu tunelu. Experiment rovněž umožňuje měnit šířku tunelu a rychlost vstupního proudu vzduchu. Buzení vibrací profilu bylo realizováno mechanicky pulzním miniaturním kladívkem - viz [15].

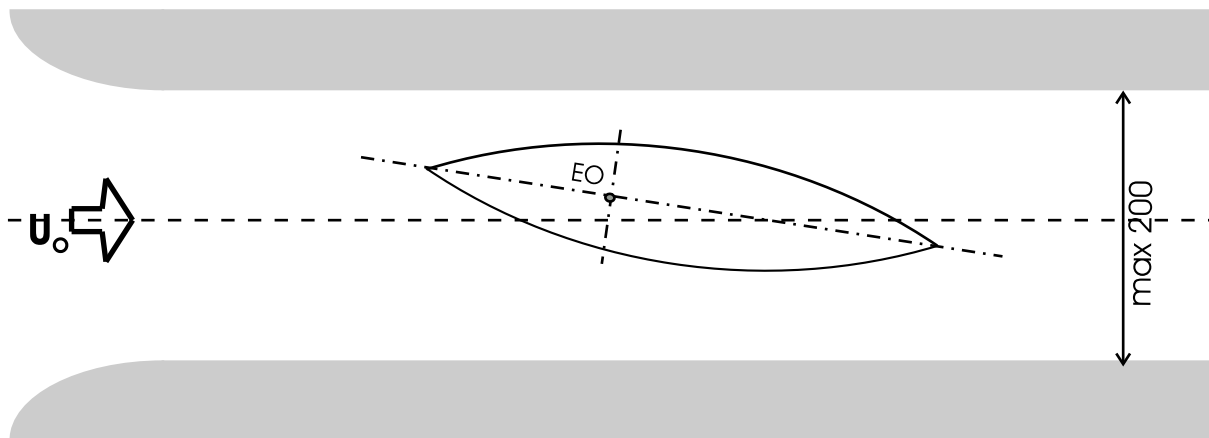
#### 4.1.2 Geometrie problému

Profil se skládá ze dvou kruhových oblouků s parametry uvedenými na obr. 8. Uvedené rozměry jsou v milimetrech. T je těžiště profilu, o jehož přesném umístění se dovíme z parametru  $S_\alpha$ . Dále EO je elastická osa profilu, která je umístěna v jedné třetině profilu od náběžné hrany profilu.



Obrázek 8: Profil

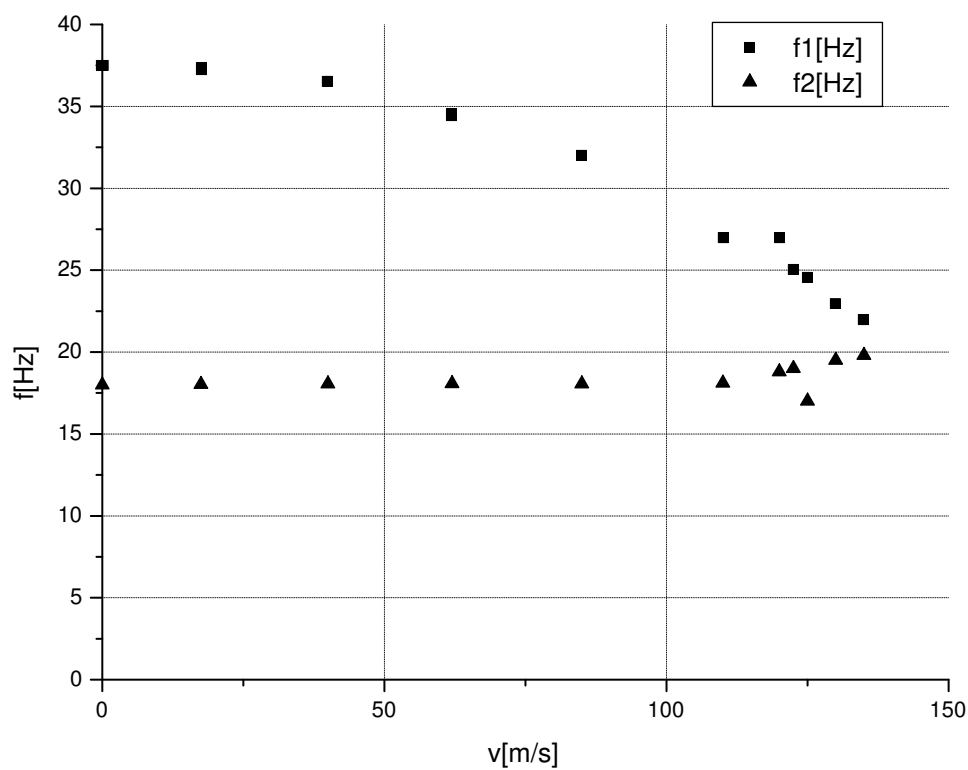
Aerodynamický tunel je znázorněn na obr. 9. Uvedené rozměry jsou opět v milimetrech. Šířka tunelu je maximálně 200 mm.  $U_0$  je náběžná rychlost proudění vzduchu, která je zároveň charakteristickou rychlostí. Zde provedeme výpočty pro šířku tunelu 180 mm a pro případ, kdy je elastická osa profilu v rovnovážné poloze vzdálena od obou stěn tunelu stejně.



Obrázek 9: Aerodynamický tunel

#### 4.1.3 Výsledky experimentu

V experimentu bylo dosaženo následujících výsledků, viz obr. 10 a taktéž [14], kde jsou vyne-



Obrázek 10: Výsledky experimentu

seny rezonanční (významné) frekvence  $f_1$  a  $f_2$  pro systém funkcí  $\alpha$  a  $h$  v závislosti na vstupní

rychlosti vzduchu. V rámci experimentálního zkoumání byly rovněž určeny parametry

$$k_{hh} = 1711.6N/m, k_{\alpha\alpha} = 4.5Nm/rad, m = 0.082kg, S_{\alpha} = -0.00013kgm, I_{\alpha} = 0.000095kgm^2,$$

$$D_{hh} = 3.5Ns/m, D_{\alpha\alpha} = 0.0024Nms/rad, D_{h\alpha} = 0.0021Ns/rad, D_{\alpha h} = 0.0021Ns/m, \quad (118)$$

kteří jsou citovány v [15]. Parametr  $S_{\alpha} < 0$ , což znamená, že těžiště se nachází blíže náběžné hraně profilu než elastická osa.

## 4.2 Numerické výpočty

Nejprve zavedeme veličiny, které použijeme v numerické části pro popis proudění.

### 4.2.1 Bezrozměrné veličiny

V této části se budeme zabývat zavedením bezrozměrných veličin užívaných v popisu dynamických, kinematických a geometrických vlastností problému. Tyto bezrozměrné veličiny jsou důležité, protože použitý software dává výstupní vypočítané hodnoty právě v těchto veličinách. Opíráme se tak o zákon podobnosti, uvedený např. v [11, strana 627]. Dalším využitím problému podobnosti v hydrodynamice je, že experimentální výzkum lze provádět na (zmenšených) modelech skutečných těles. Bezrozměrné rovnice vzniknou vhodnou úpravou Navierových-Stokesových rovnic (42). Nejprve zavedeme bezrozměrnou polohu bodu  $\mathbf{x}'$

$$\mathbf{x} = L^* \mathbf{x}', \quad (119)$$

kde  $L^*$  je charakteristický rozměr. V našem případě to bude délka profilu. Další bezrozměrnou veličinou je bezrozměrná rychlost proudění  $\mathbf{u}'$

$$\mathbf{u} = U^* \mathbf{u}', \quad (120)$$

kde  $U^*$  je charakteristická rychlost, kterou položíme velikosti náběžné rychlosti proudění vzduchu  $\mathbf{U}_0$ . Těmito rovnicemi je již určen i poměr obou časových stupnic. Je-li bezrozměrný čas  $t'$  dán vztahem

$$t = T^* t', \quad (121)$$

kde  $T^*$  je konstanta, pak z rovnic (119) a (120) plyne

$$U^* \mathbf{u}' = \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{L^*}{T^*} \frac{d\mathbf{x}'}{dt'}.$$

Tudíž,

$$T^* = \frac{L^*}{U^*}.$$

Bezrozměrný tlak  $p'$  je dán vztahem

$$p = P^* p', \quad (122)$$

kde za  $P^*$  klademe

$$P^* = \frac{1}{L^*} (U^*)^2.$$

Dosažením (119), (120), (121) a (122) do (42) dostáme

$$\frac{D^A}{Dt'} \mathbf{u}' + [(\mathbf{u}' - \mathbf{w}') \cdot \nabla] \mathbf{u}' + \nabla p' - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}' = 0 \quad \text{v } \Omega_t,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0 \quad \text{v } \Omega_t, \quad (123)$$

kde  $Re$  je definováno vztahem (1). Tímto převedeme problém proudění v aerodynamickém tunelu na geometricky podobný problém proudění, kde bude délka profilu  $l^{10}$  a rychlost vstupního proudu vzduchu rovněž 1. Hlavním kritériem podobnosti je již zmíněné Reynoldsovo číslo  $Re$ .

#### 4.2.2 Frekvenční analýza

Jelikož jsme jako výsledek experimentů obdrželi pouze významné frekvence signálů, musíme před porovnáním provést s numericky obdrženými daty stejnou operaci, tj. Fourierovu transformaci. K frekvenční analýze jsme nemohli použít diskrétní Fourierovu transformaci viz [16] danou vzorcem

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N},$$

kteřá zobrazuje  $N$  komplexních čísel  $h_k$  na  $N$  komplexních čísel  $H_n$ , protože ta nám dává hodnoty Fourierovy transformace ekvidistantně v několika málo bodech frekvence v intervalu  $[-f_c, f_c]$ , kde  $f_c$  je Nyquistova kritická frekvence daná formulí

$$f_c = \frac{1}{2\Delta},$$

přičemž  $\Delta$  je vzorkování signálu, tj. rozdíl dvou po sobě jdoucích časových bodů v signálu. Počet bodů v obraze odpovídá počtu bodů v signálu. Tj. např. pro  $\Delta = 0.0001$  s a aproximaci signálu v 1000 bodech (1000 časových kroků) dostaneme aproximaci Fourierovy transformace

<sup>10</sup>Uvedená konstanta je záměrně bez rozměru.

ve frekvencích na intervalu  $[0, 50]$  Hz pouze v 5 bodech. Proto jsme použili klasický vzorec pro Fourierovu transformaci

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi i f_n t/N} dt,$$

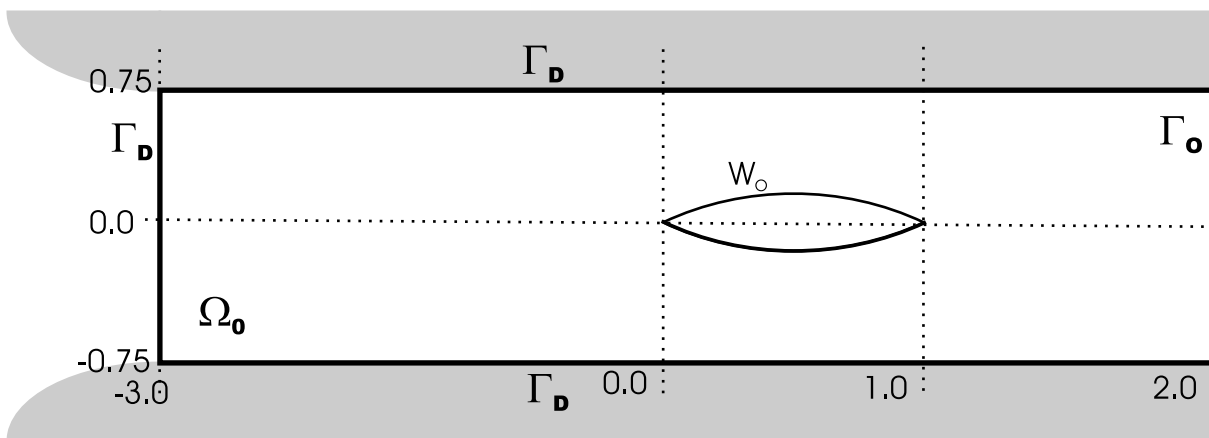
který jsme numericky vyřešili pomocí lichoběžníkové formule

$$H(f_n) = \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(t_k)e^{2\pi i f_n t_k/N} dt,$$

pro dostatečné množství bodů  $f_n$ . V grafech frekvenční analýzy vynášíme  $|H(f_n)| = \sqrt{\text{Re}^2(H(f_n)) + \text{Im}^2(H(f_n))}$ .

### 4.2.3 Volba oblasti

Zde již budeme veličiny uvažovat v bezrozměrném tvaru. Volba oblasti je na obr. (11)



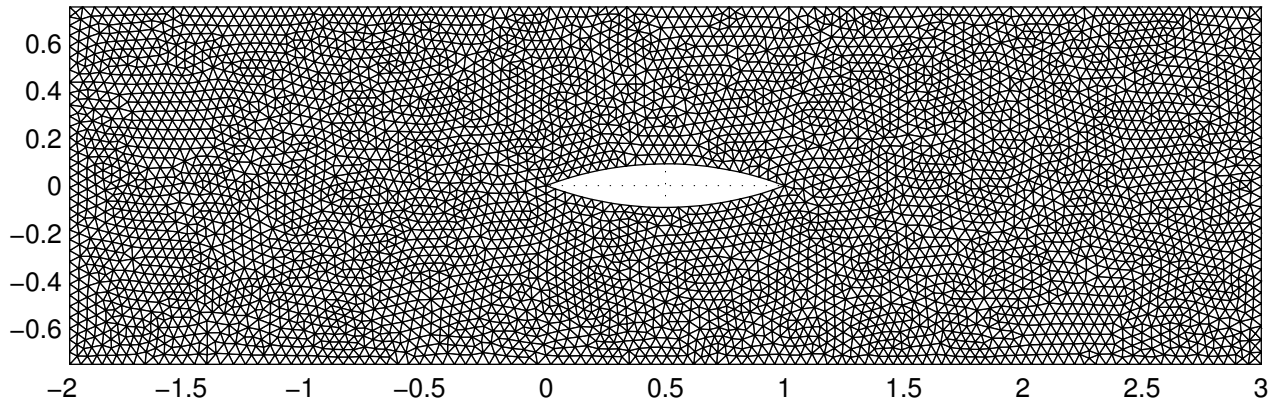
Obrázek 11: Volba oblasti

Dirichletova okrajová podmínka pro rychlost na  $\Gamma_D$  je na vstupu 1 a 0 na stěnách aerodynamického tunelu.

### 4.2.4 Triangulace oblasti

Triangulaci oblasti budeme provádět pomocí programu ANGENER viz [13]. Tento program lze použít jak pro první izotropní triangulaci, tak pro anizotropní adaptivní zjemňování. Jelikož pracujeme s vazkou tekutinou, vzniká v blízkosti obtékaných těles mezní vrstva a za obtékaným profilem se objevuje odtržení a úplav, které je třeba zachytit dostatečně přesně v řešení. Tudíž, tyto problematické oblasti potřebujeme více zjemnit. I tento problém lze uspokojivě řešit pomocí tohoto programu (resp. jeho úpravou). Velikost mezní vrstvy je však závislá

na Reynoldsovém čísle (resp. rychlosti náběžného proudu vzduchu). Musíme proto adaptaci provádět pro každé Reynoldsovo číslo zvlášť.



Obrázek 12: Izotropní triangulace výpočetní oblasti, 4978 bodů a 9625 elementů

Výpočty budeme provádět pro konečné prvky typu  $P_2/P_1$  s následujícími stabilizačními parametry

$$\delta^* = 0.025, \tau^* = 1$$

a bezrozměrným časovým krokem

$$\tau_{bez.roz.} = 0.025.$$

#### 4.2.5 Řešení bez vlivu tekutiny

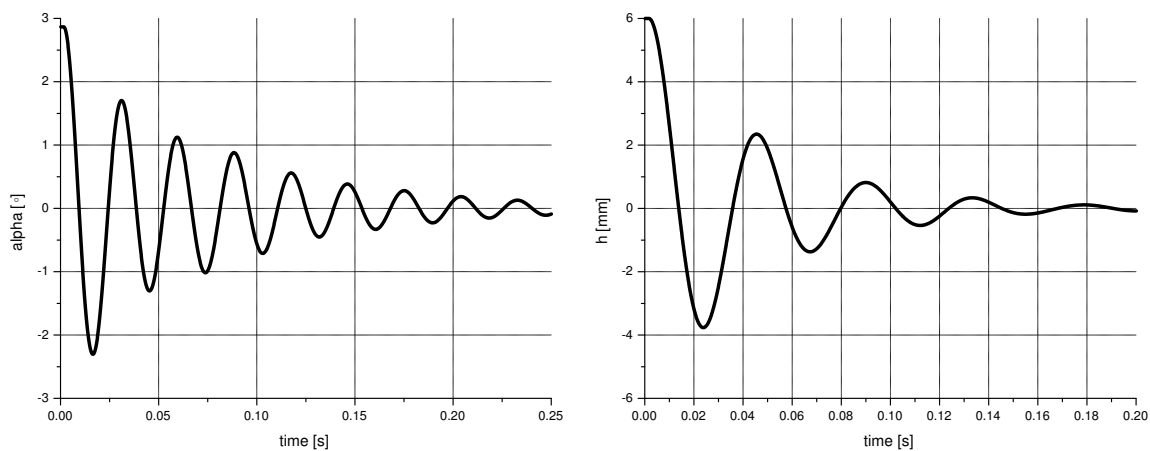
Zde budeme uvažovat, že vliv tekutiny na pohyb profilu není žádný, tj. vertikální síla  $L_2$  a moment  $M$  jsou nulové. Řešíme tedy pouze rovnice (71) pro pohyb profilu s nulovou pravou stranou. Pro tento systém obyčejných diferenciálních rovnic dostáváme vlastní čísla

$$s_{1,3} = -22.3966903 \pm 142.6377047i, \quad s_{2,4} = -12.84639161 \pm 217.6365864i,$$

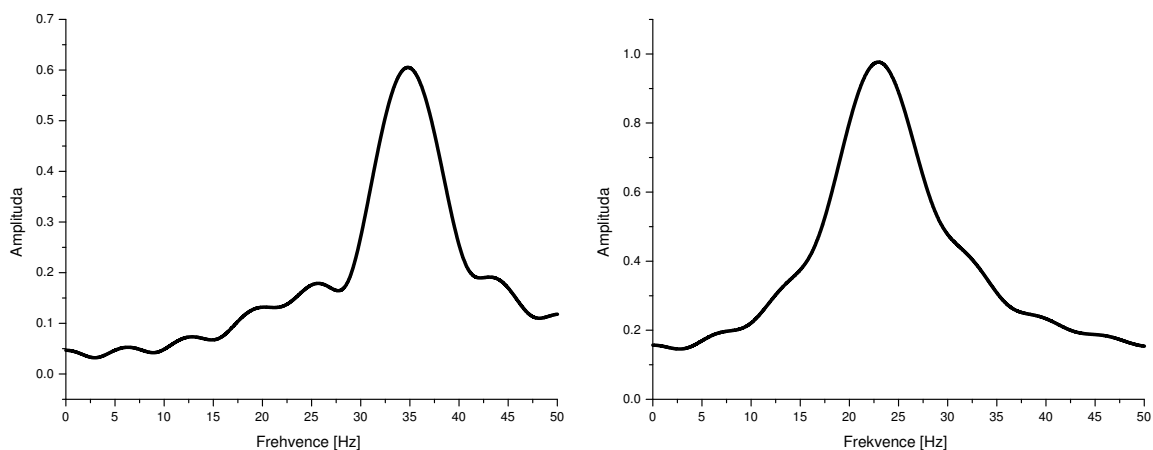
která jsou vlastními čísly matice  $\hat{\mathbf{Q}}$  z (109), do které dosadíme parametry (118). Tomuto odpovídají rezonanční frekvence  $f_1 = 22.7$  Hz a  $f_2 = 34.64$  Hz, které jsou dány podle vzorce  $f_1 = \frac{Im(s_1)}{2\pi}$  a analogicky pro  $f_2$ . Numerický výpočet pro funkce  $\alpha(t)$  a  $h(t)$  je na obr. 13 a frekvenční analýza je na obr. 14, která dává rezonanční frekvence 22.95 Hz a 34.8 Hz.

Buzení budeme realizovat tak, že profil fixujeme do nerovnovážné polohy v obou souřadnicích  $\alpha \neq 0$  a  $h \neq 0$ , konkrétně  $\alpha = 2.86479^\circ$  a  $h = 6\text{mm}$  a po jisté době profil uvolníme, tj. jeho pohyb se začne řídit soustavou rovnic (71). Stejným způsobem budeme budít vibrace profilu i pro výpočty s vlivem tekutiny.

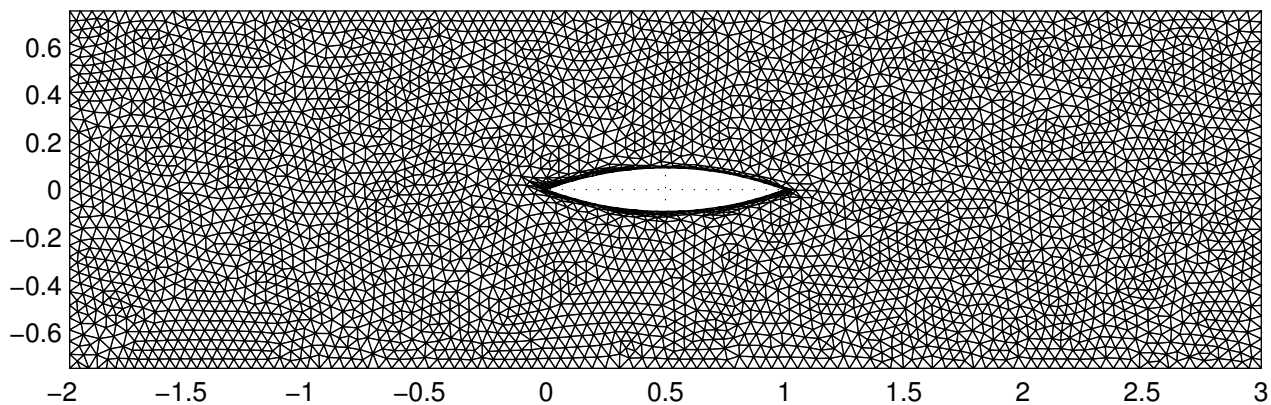




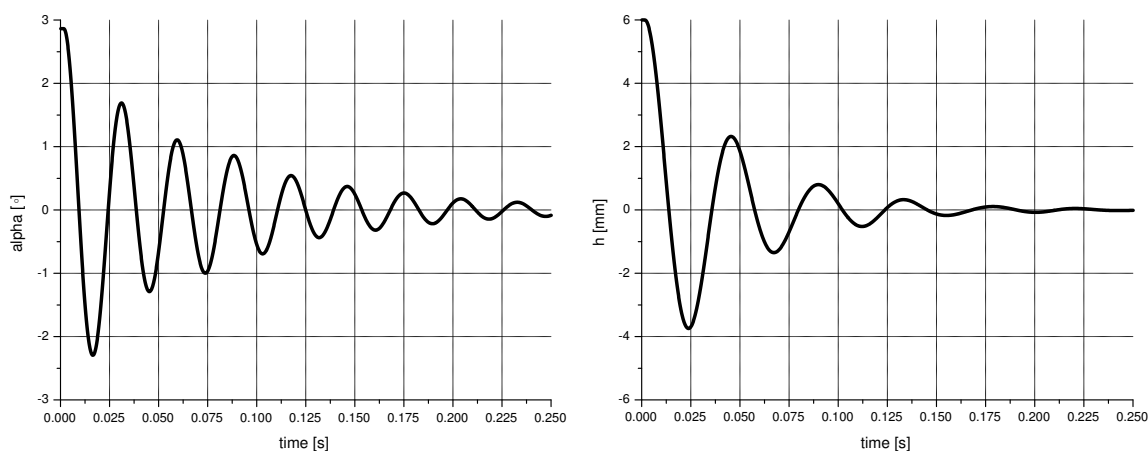
Obrázek 13:  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro výpočet bez vlivu tekutiny



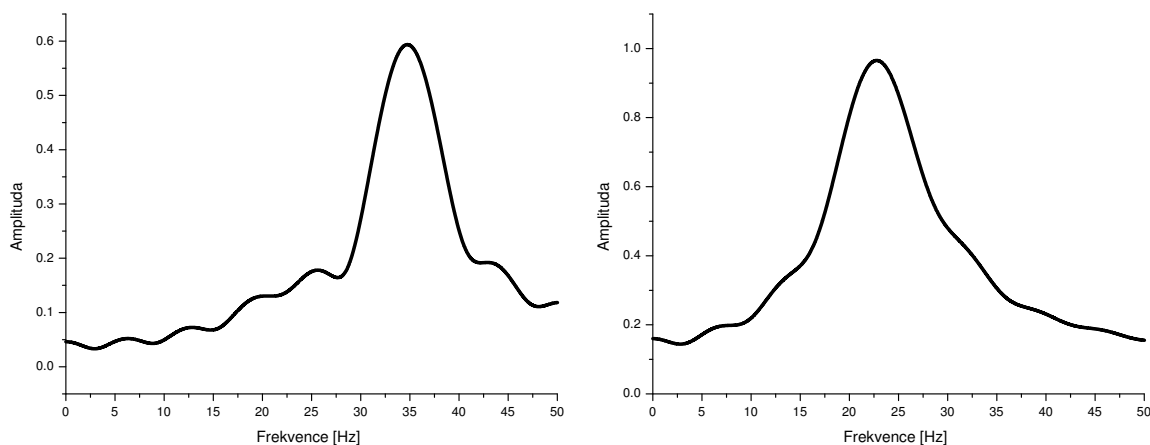
Obrázek 14: Frekvenční spektrum pro  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro výpočet bez vlivu tekutiny



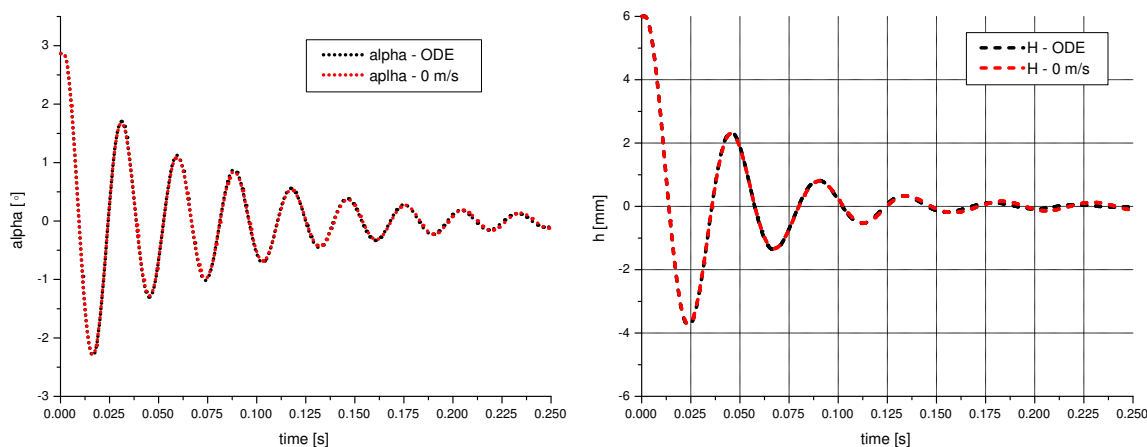
Obrázek 15: Anizotropní adaptovaná síť pro  $0\text{ms}^{-1}$ , 3996 bodů a 7670 elementů

4.2.6 Náběžná rychlost  $0\text{ms}^{-1}$ Obrázek 16:  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro náběžnou rychlost vzduchu  $0\text{ms}^{-1}$ 

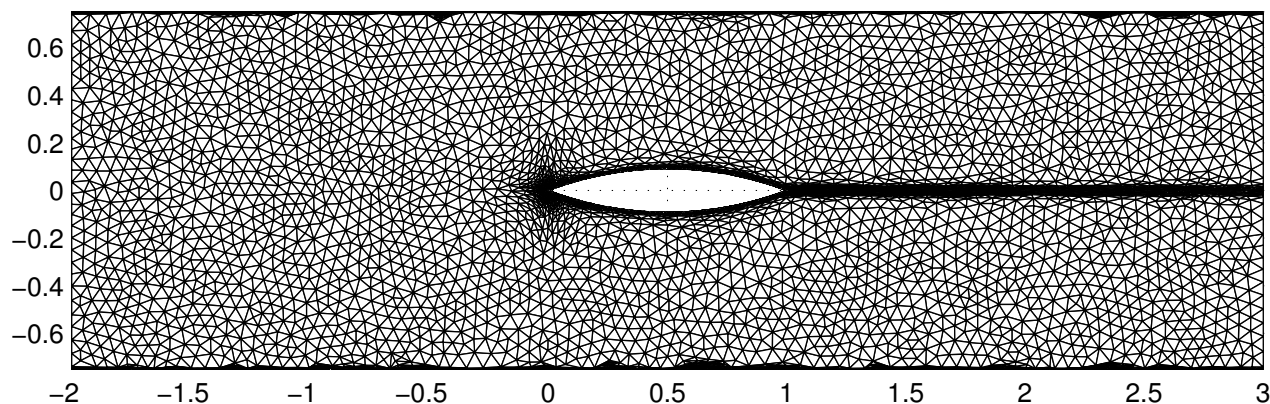
Pro náběžnou rychlost vzduchu  $0\text{ms}^{-1}$  zjmníme síť pouze kolem profilu viz. obr. 15. Profil nejprve fixujeme do polohy odpovídající souřadnicím  $\alpha = 2.86479^\circ$  a  $h = 6\text{mm}$ .

Obrázek 17: Frekvenční spektrum pro  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro náběžnou rychlost vzduchu  $0\text{ms}^{-1}$ 

V numerickém experimentu jsme dosáhli pro  $\alpha$  a  $h$  signálů vnesených na obr. 16. Frekvenční analýzou - viz obr. 17 dostáváme pro rezonanční frekvence hodnoty 22.8 Hz a 34.75 Hz. Na obr. 18 se můžeme přesvědčit, že vliv tekutiny je pro nulovou náběžnou rychlost malý.



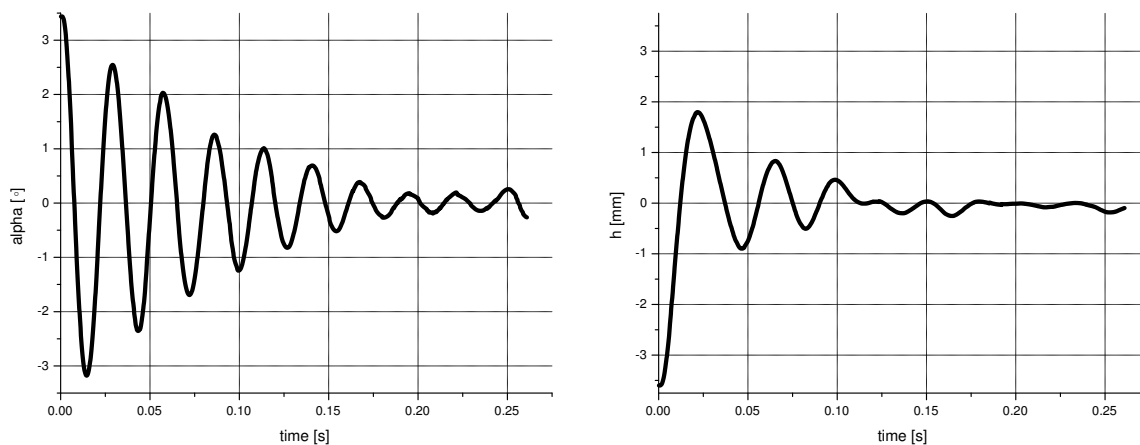
Obrázek 18: Porovnání vlivu tekutiny při nulové rychlosti tekutiny

Obrázek 19: Anizotropní adaptovaná síť pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$ , 10151 bodů a 18647 elementů

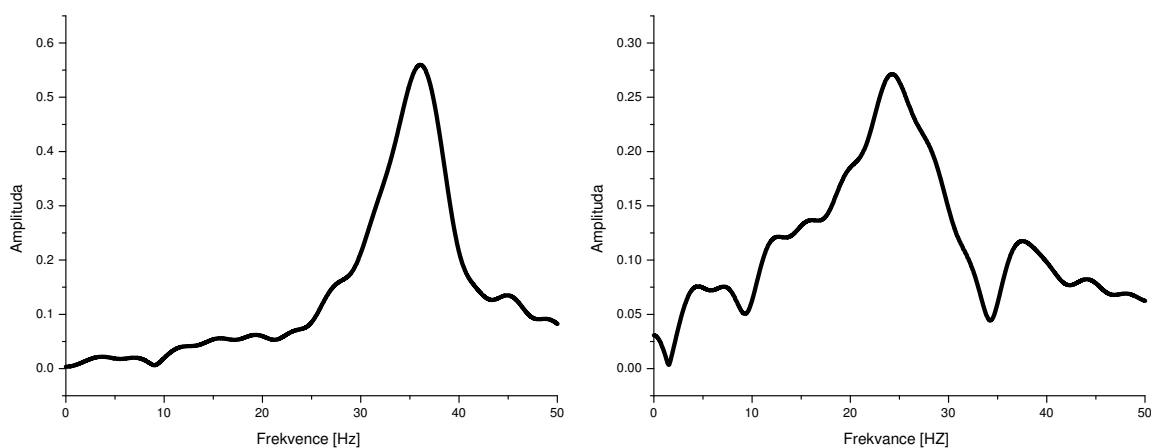
#### 4.2.7 Náběžná rychlost $17.5 \text{ ms}^{-1}$ - $\text{Re } 140000$

Začneme izotropní triangulací z obr. 12. Na této síti provedeme výpočty na fixovaném profilu a získané výsledky použijeme pro adaptaci pomocí upraveného programu ANGENER. Opakováním tohoto postupu dostáváme síť na obr.19, která je vhodná k výpočtům na profilu, na kterém budeme zkoumat vibrace. Vhodnost této sítě budeme ověřovat na modelu, kde je pohyb předepsán pomocí harmonického kmitání v obou stupních volnosti a to v očekávaných frekvencích - viz Výsledky experimentu. Profil nejprve fixujeme do polohy odpovídající souřadnicím  $\alpha = 3.43775^\circ$  a  $h = -3.6 \text{ mm}$ .

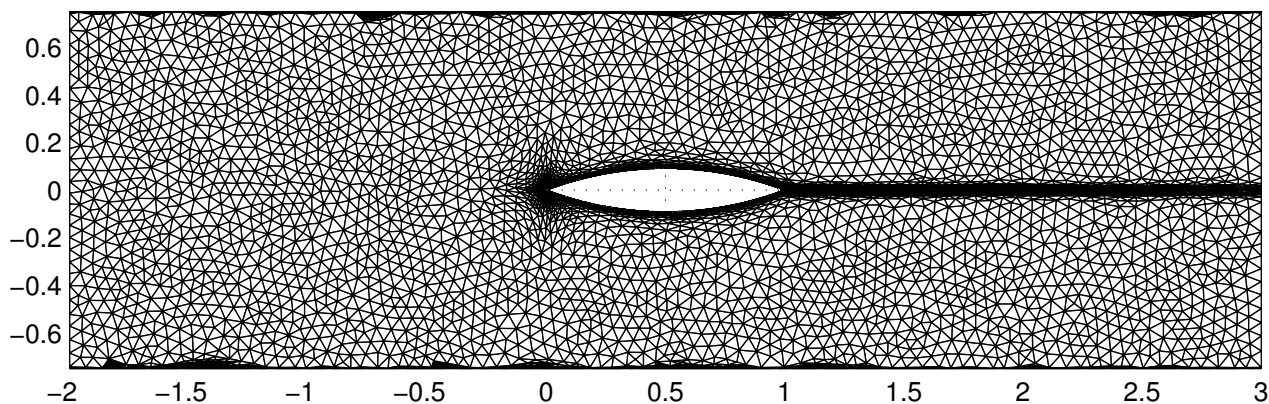
V numerickém experimentu jsme dosáhli pro  $\alpha$  a  $h$  signálů vynesných na obr. 20. Frekvenční analýzou - viz obr. 21 dostáváme rezonanční frekvence 36.0 Hz a 24.25 Hz.



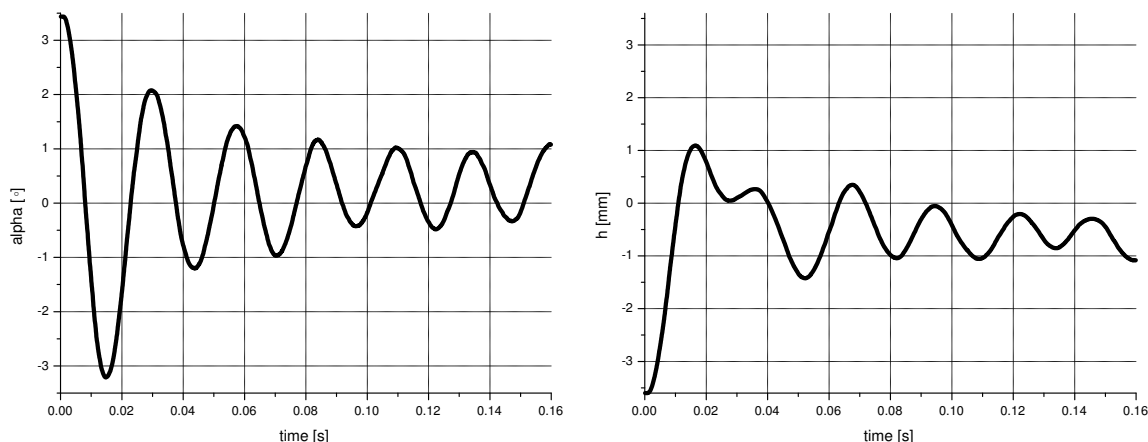
Obrázek 20:  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro náběžnou rychlost vzduchu  $17.5 \text{ ms}^{-1}$



Obrázek 21: Frekvenční spektrum pro  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro náběžnou rychlost vzduchu  $17.5 \text{ ms}^{-1}$



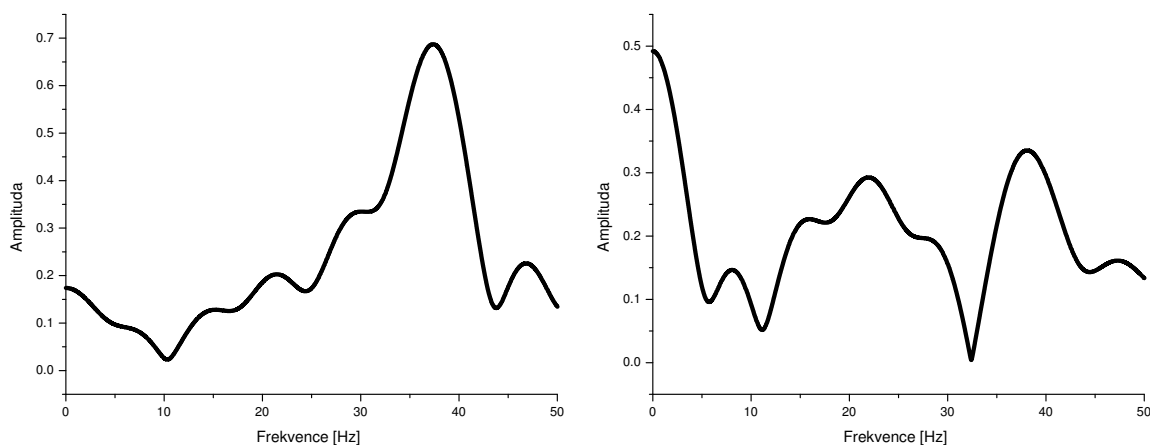
Obrázek 22: Anizotropní adaptovaná síť pro  $40 \text{ ms}^{-1}$ , 9967 bodů a 18200 elementů



Obrázek 23:  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro náběžnou rychlost vzduchu  $40 \text{ ms}^{-1}$

#### 4.2.8 Náběžná rychlost $40 \text{ ms}^{-1}$ - Re 32000

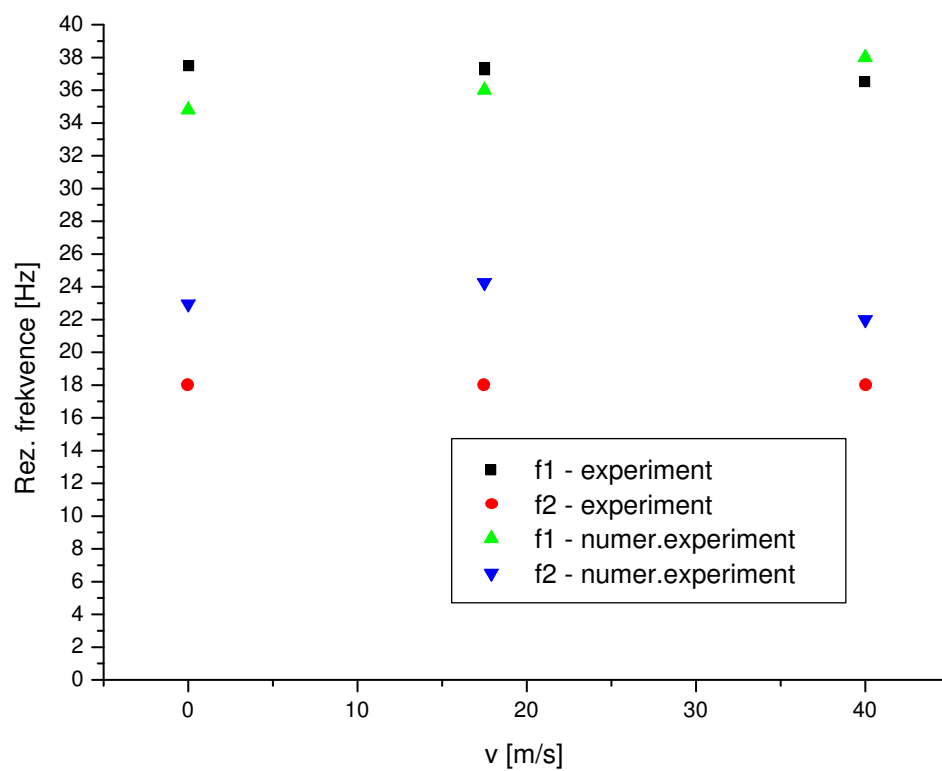
Profil nejprve fixujeme do polohy odpovídající souřadnicím  $\alpha = 3.43775^\circ$  a  $h = -3.6 \text{ mm}$ . V numerickém experimentu jsme dosáhli pro  $\alpha$  a  $h$  signálů vynesných na obr. 23. Frekvenční analýzou viz. obr. 24 dostáváme rezonanční frekvence 22.0 Hz a 37.4 Hz.



Obrázek 24: Frekvenční spektrum pro  $\alpha(t)$  (vlevo) a  $h(t)$  (vpravo) pro náběžnou rychlost vzduchu  $40 \text{ ms}^{-1}$

### 4.3 Shrnutí a porovnání výsledků

Na obr. 25 je vyneseno porovnání v rezonančních frekvencích pro experiment a numericky dosaženého řešení.



Obrázek 25: Porovnání numerických výsledků a experimentu - rezonanční frekvence

## 5 Diskuze

Nejprve se zabývejme porovnáním výsledků dosažených pomocí experimentu a numerických metod. Z obr. 25 je patrné, že pro významné frekvence došlo k významnější neshodě zejména pro  $f_2$ . Jelikož je tato neshoda stejná i pro náběžnou rychlost vzduchu  $0 \text{ ms}^{-1}$  resp. pro problém bez vlivu tekutiny, tuto chybu bych přisoudil nepřesnosti vstupních parametrů. Vstupní parametry se získávají pomocí dynamických experimentů a takto získaná data se „fitují“ na náš model. Dále bychom chtěli upozornit na fakt, že s rostoucí náběžnou rychlostí vzduchu se nám nepodařilo zachytit klesající charakter ve významných frekvencích  $f_1$ . Experiment ukázal, že tato frekvence klesá až do určité kritické rychlosti. Tato chyba by se zřejmě dala zmenšit, ne-li odstranit zvýšením přesnosti celého modelu, tj. větším zjemněním sítě, větším počtem nelineárních Oseenových iterací na jednom časovém kroku a zmenšením časového kroku. To by samozřejmě vedlo k dalším časovým nárokům.

Chtěl bych ještě upozornit na skutečnost, kterou dokládá obr. 18. Tekutina nemá téměř žádný vliv na chování profilu při nulové náběžné rychlosti tekutiny.

## 6 Závěr

V této práci jsme ukázali, že poměrně jednoduchými způsoby lze odvodit popis vhodný pro kontinuum s proměnnou geometrií. Dále jsme odvodili rovnice pro chování tekutiny a pevného tělesa. To vše jsme numericky řešili pro konkrétní problémy, které jsou zároveň studovány experimentálně a ukázali jsme dále, že souhrn použitých metod je dostatečně robustní a vhodný pro daný typ úloh. Ke zlepšení přesnosti modelu může přispět začlenění turbuletního modelu do naší metody. Samozřejmě lze postupovat i hrubou silou a tím by bylo zjemňování sítě a časového kroku, resp. zvýšení řádu konečných prvků. Ovšem za cenu větších časových nároků, které by se daly zmírnit sofistikovanými způsoby, jak řešit vzniklé lineární soustavy. Můžeme zmínit zejména techniku domain decomposition nebo multigrid metodu.



## A Vstupní parametry modelu - souhrn

maximum of time iterations =	10000
maximum of nonlinear iterations=	8
epsilon nonlinear =	1e-5
epsilon nonlinear relative =	1e-5
elements type =	1( $P_2/P_1$ )
time step =	0.025
[stabilization]	
stabilize delta =	0.025
stabilize sigma =	1.0
[fluid]	
viscosity =	1.5e-5 air viscosity, ms-2
kinematic viscosity density =	1.28 ; air density
reference length =	0.12 ; [m]
reference depth =	0.08 ; [m]
reference velocity =	17.5 ; [m/s]
[fluid-structure]	
release profile at =	0.5;
profilex =	0.3333333333
profiley =	0.0
airfoil weight =	0.082;[kg]
airfoil stiffness =	1711.6 ;[N/m]
airfoil torsional stiffness =	4.5;[N m/rad]
airfoil torsional first moment =	0.00013;[kg m]
airfoil torsional second moment =	-0.000095;[kg m2]
damping of airfoil bending =	3.69
damping of airfoil torsion =	0.0024
damping of airfoil bending torsion =	0.0021
damping of airfoil torsion bending =	0.0021
[ALE]	
ALE hlavní poloosa =	0.7
ALE vedlejší poloosa =	0.2
ALE podobnost elips =	3.0

## B Zdrojové kódy použitých modulů

```

void MoveGrid () {

    long i;
    double c, alpha, beta;
    double a, b, d;
    a = 2; //a je delka hlavni poloosy elipsy
    b = 0.5; //a je delka vedlejsi poloosy elipsy
    d = 2.2; //d je parametr podobnosti elips = a2/a = b2/b
    double _xh, _yh;
    double dxh, dyh, pom;

    for (i=0; i<NPoints; i++) {
        _xh=xh[i]; _yh=yh[i];
        dxh=_xh-xhc; dyh=_yh-yhc;
        c=sqrt(dxh*dxh/(a*a)+dyh*dyh/(b*b));
        beta=c-1.0;
        beta=(beta>0) ? beta : 0;
        beta=(beta>(d-1.0)) ? 1 : (beta/(d-1.0));
        alpha=1.0-beta;
        //pom =
        pom=cos(angle)*dxh+sin(angle)*dyh+xhc;
        x[i]=alpha*pom+beta*_xh;
        pom=-sin(angle)*dxh+cos(angle)*dyh+yhc+cofheight;
        y[i]=alpha*pom+beta*_yh;
    }
}

void GridVelocity(double *VGx, double *VGy, double _xh, double _yh) {
    double c, alpha, beta;
    double a, b, d;
    a = 2; b = 0.5; d = 2.2;

```

```
double dxh, dyh;
```

```
dxh=_xh-xhc; dyh=_yh-yhc;
```

```
c=sqrt (dxh*dxh/ (a*a)+dyh*dyh/ (b*b) );
```

```
beta=c-1.0;
```

```
beta= (beta>0) ? beta : 0;
```

```
beta= (beta>(d-1.0)) ? 1 : (beta/ (d-1.0)) ;
```

```
alpha=1.0-beta;
```

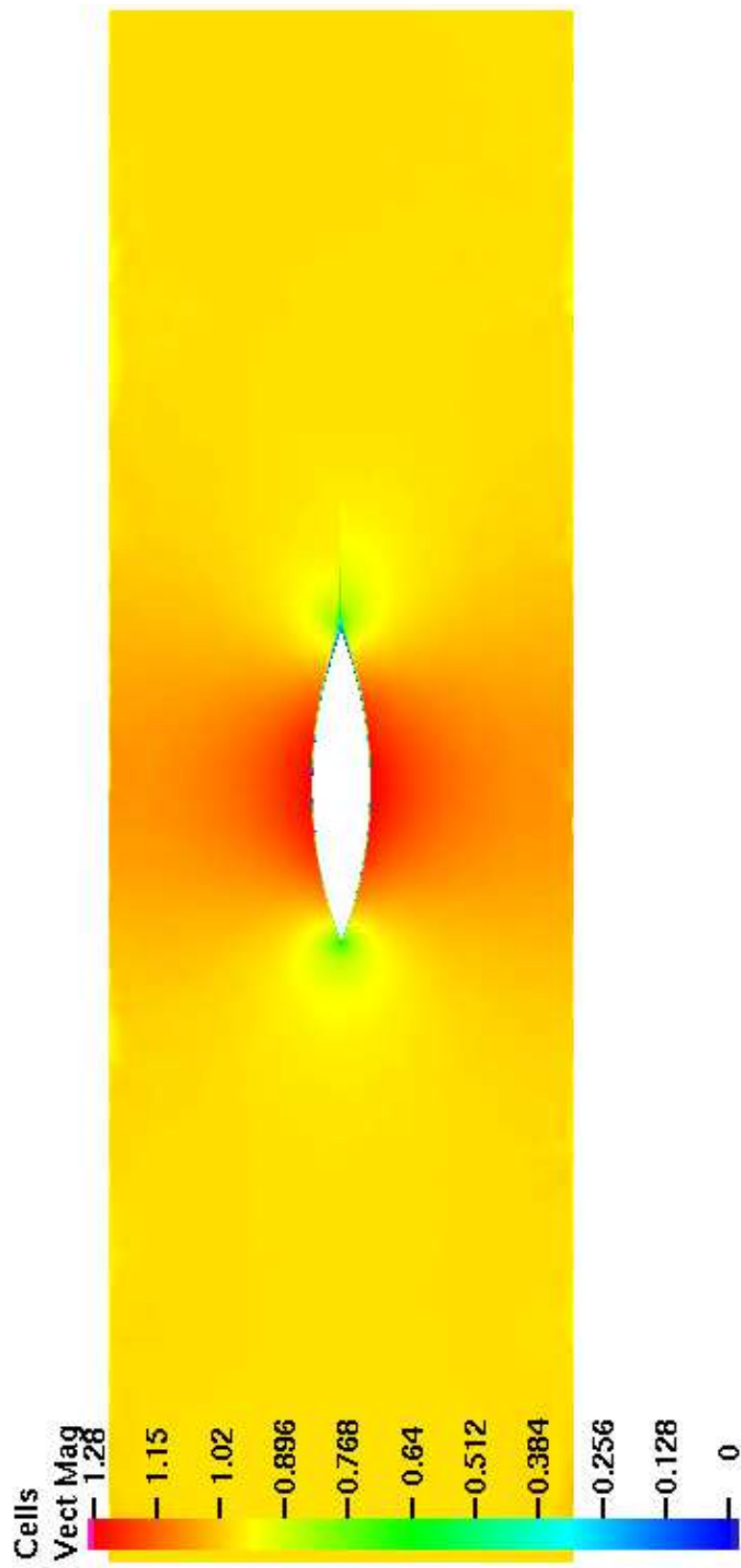
```
*VGx=alpha*angularvelocity* (-sin (angle) *dxh+cos (angle) *dyh) ;
```

```
*VGy=alpha*yvelocity-aplha*angularvelocity* (cos (angle) *dxh+sin (angle) *dyh) ;
```

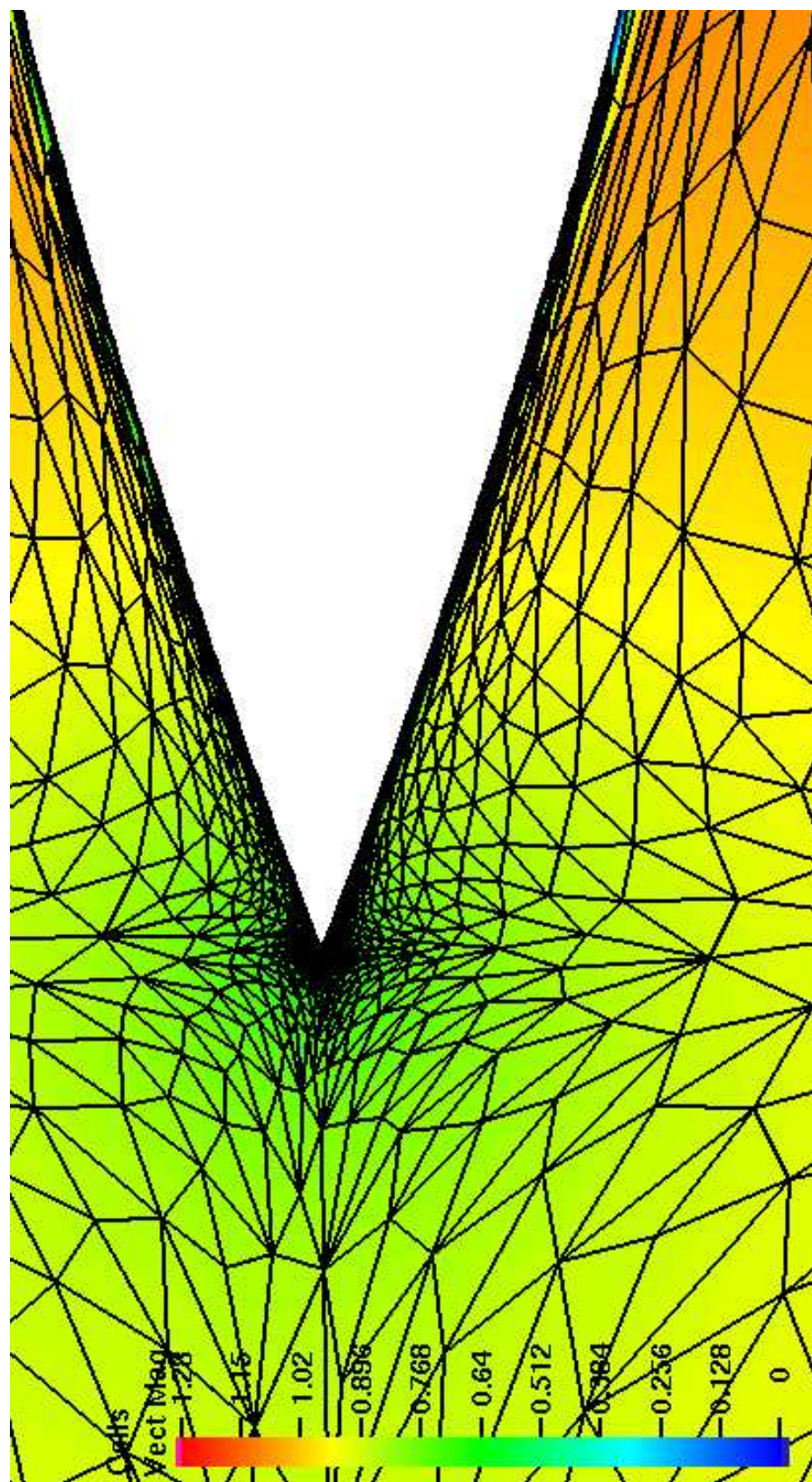
```
}
```

## **C Obrázky**

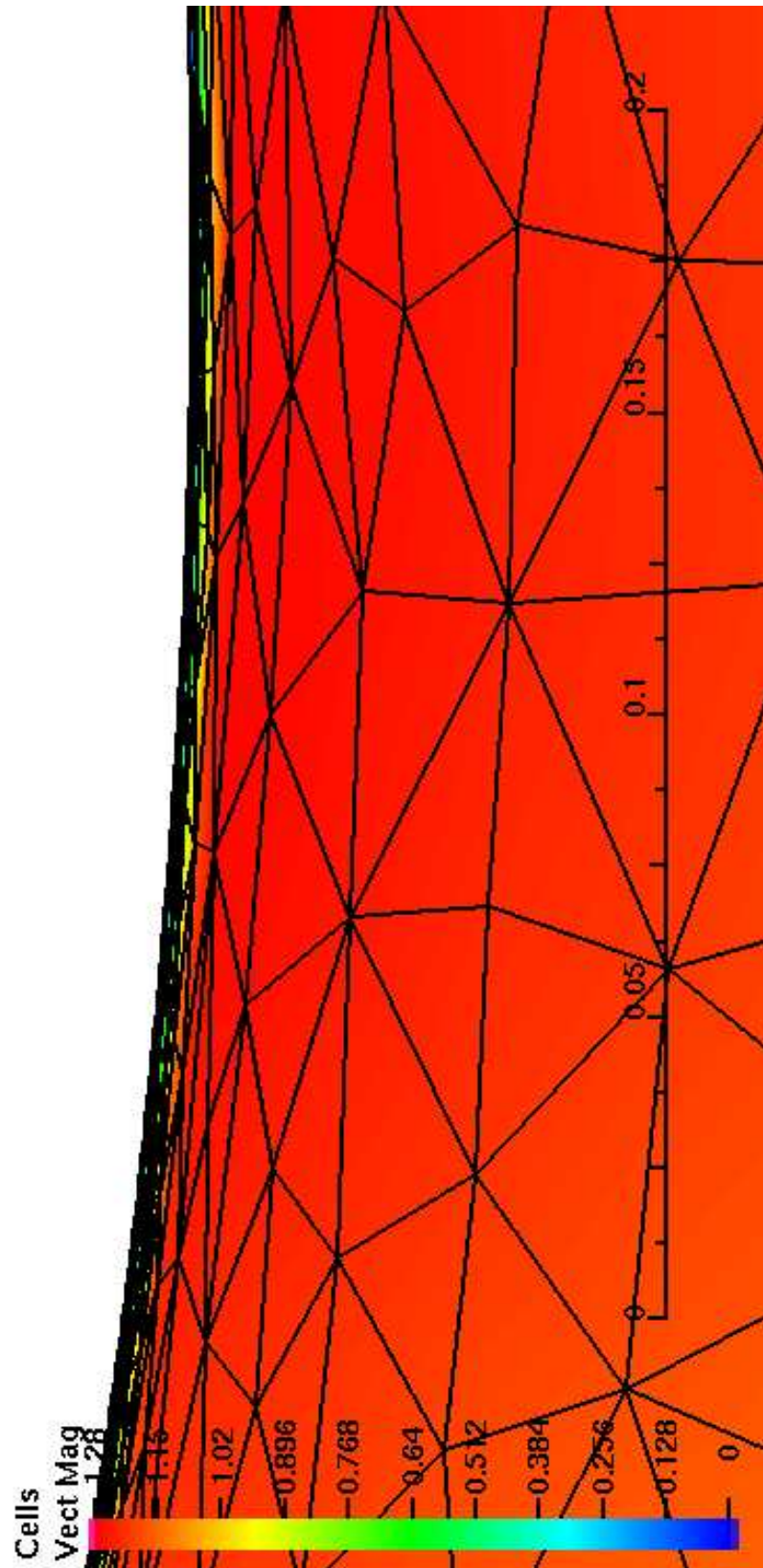
Obrázky byly pořízeny pomocí programu General Mesh Viewer. Další jsou umístěny na příloženém CD nosiči.



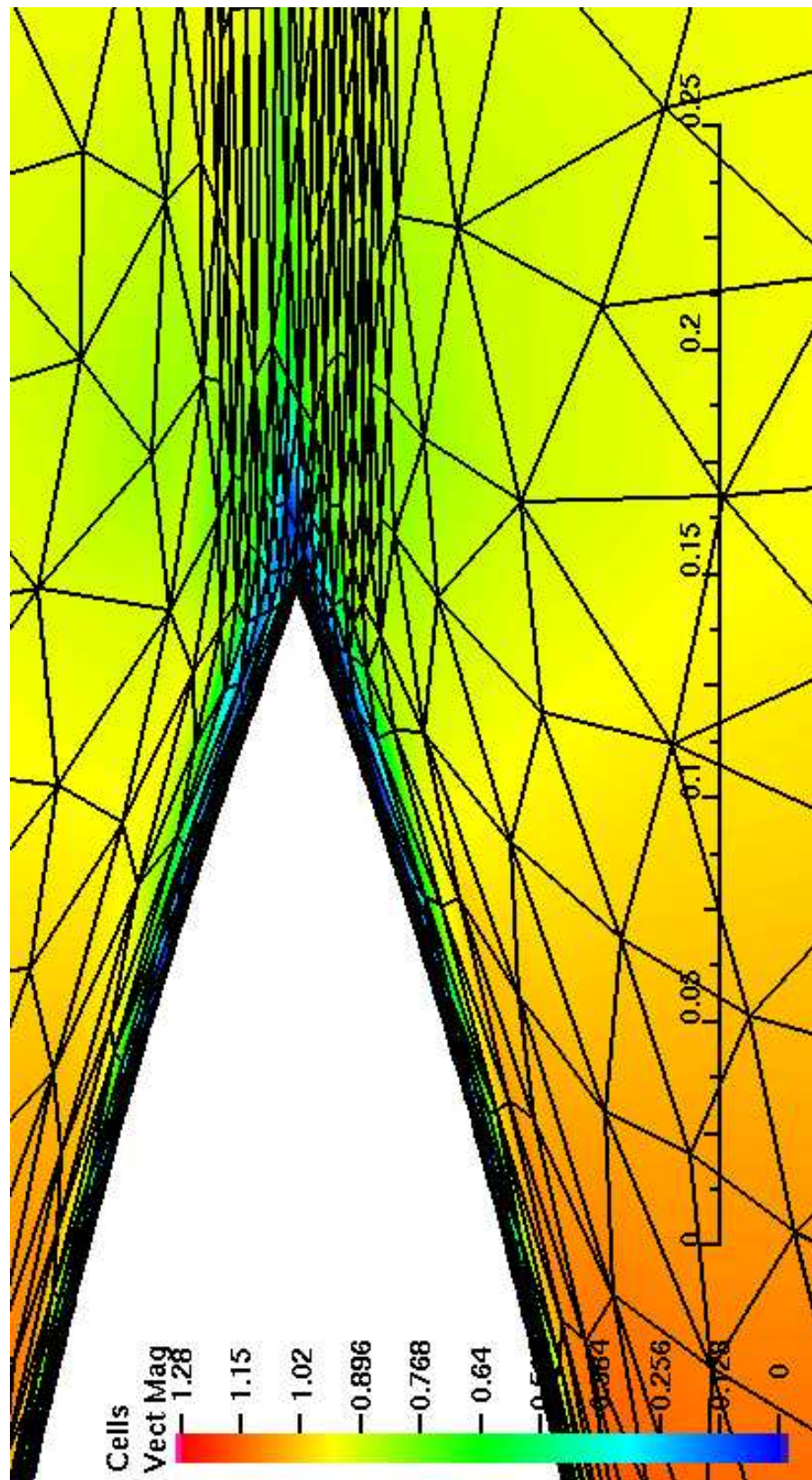
Obrázek 26: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$



Obrázek 27: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$  - detail triangulace náběžné hrany

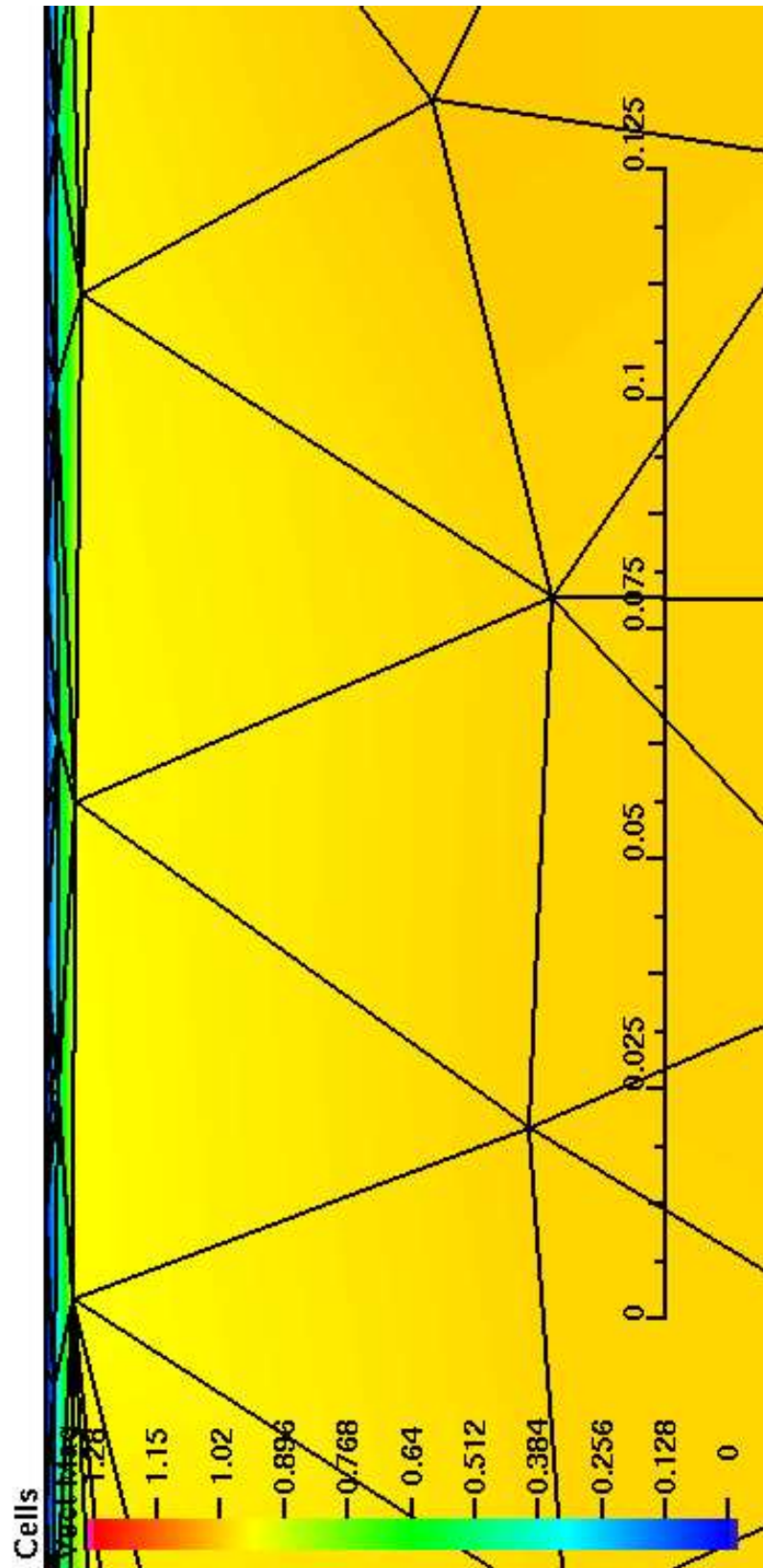


Obrázek 28: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$  - detail triangulace mezní vrstvy na stěně profilu

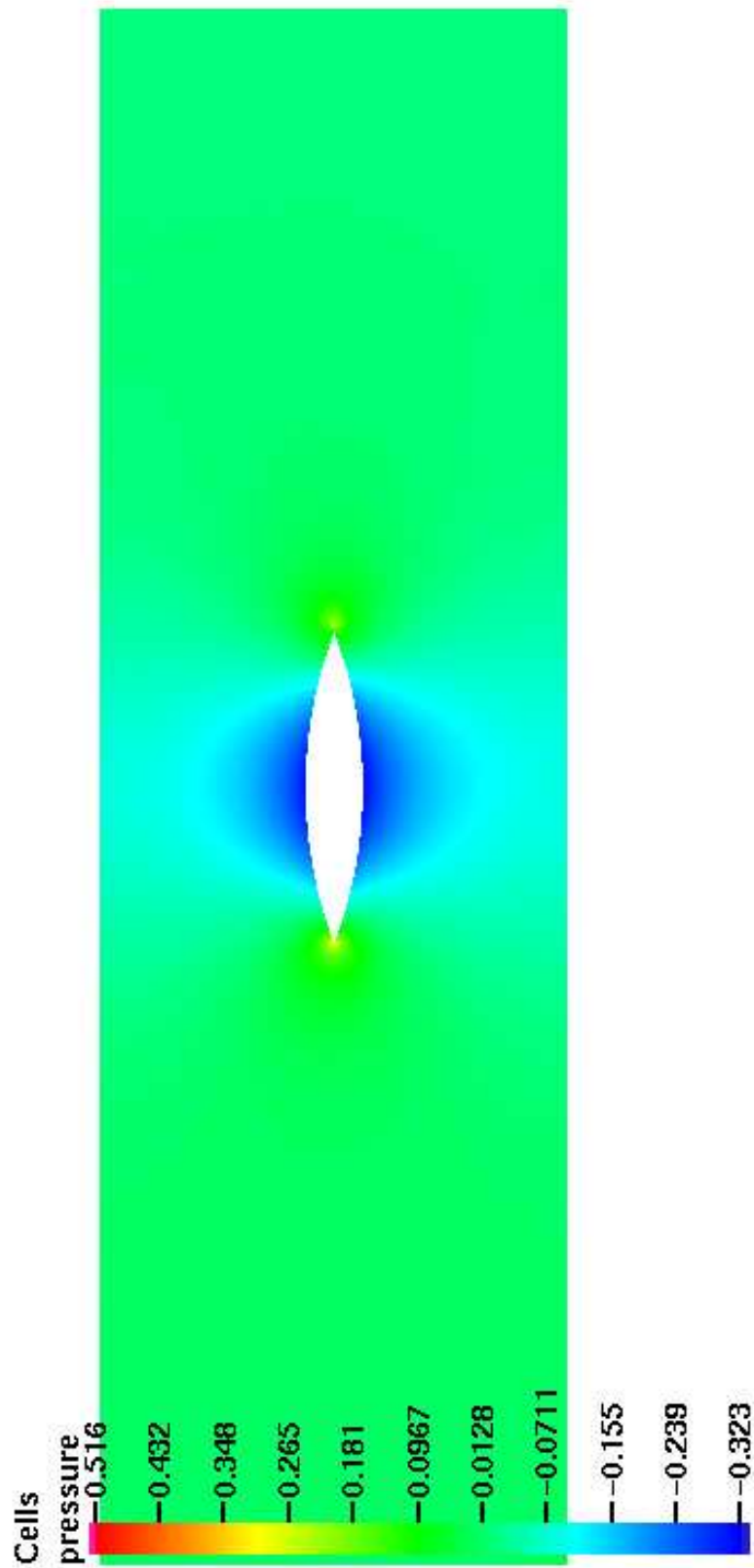


Obrázek 29: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$  - detail triangulace úplavu

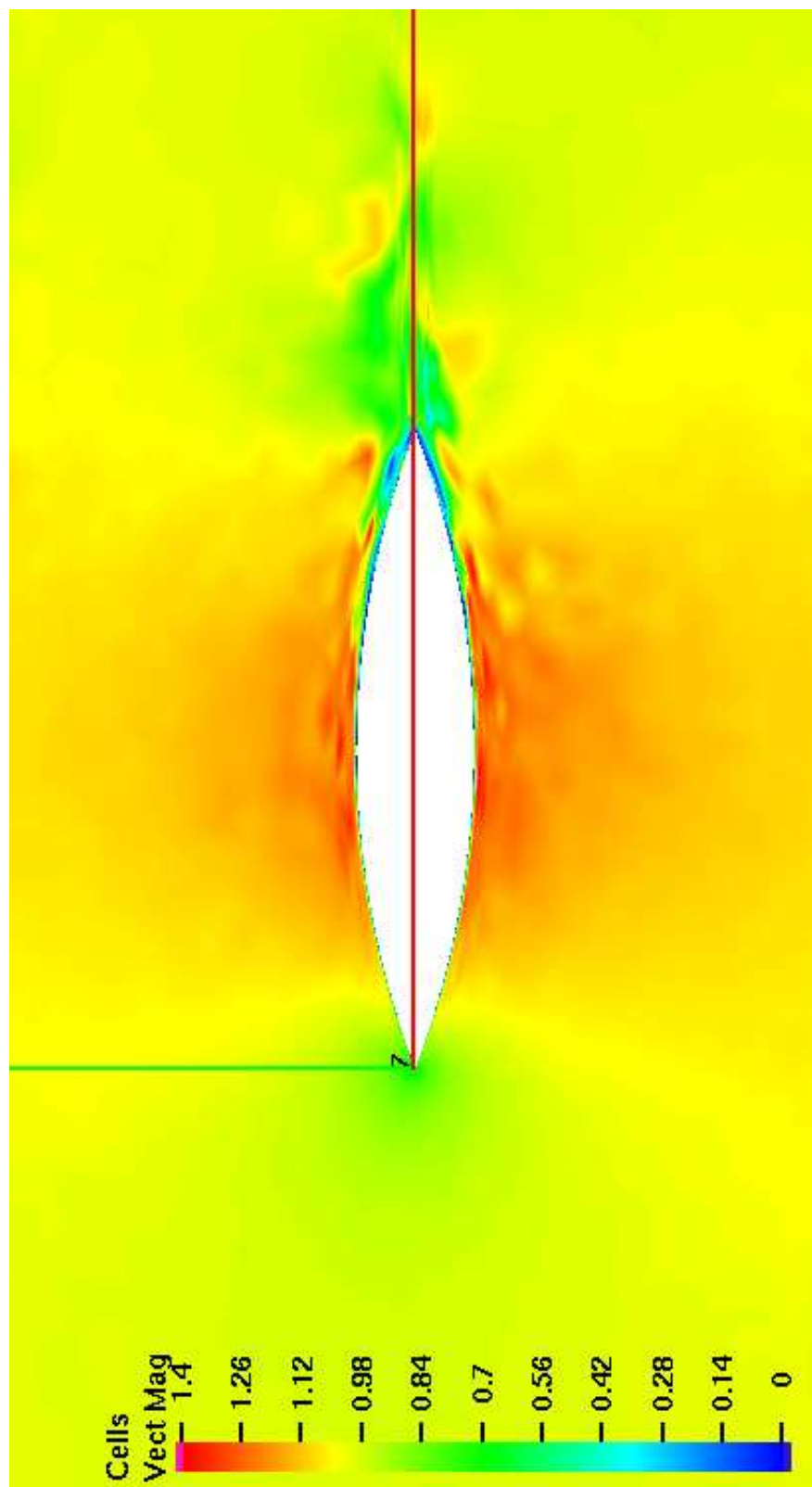




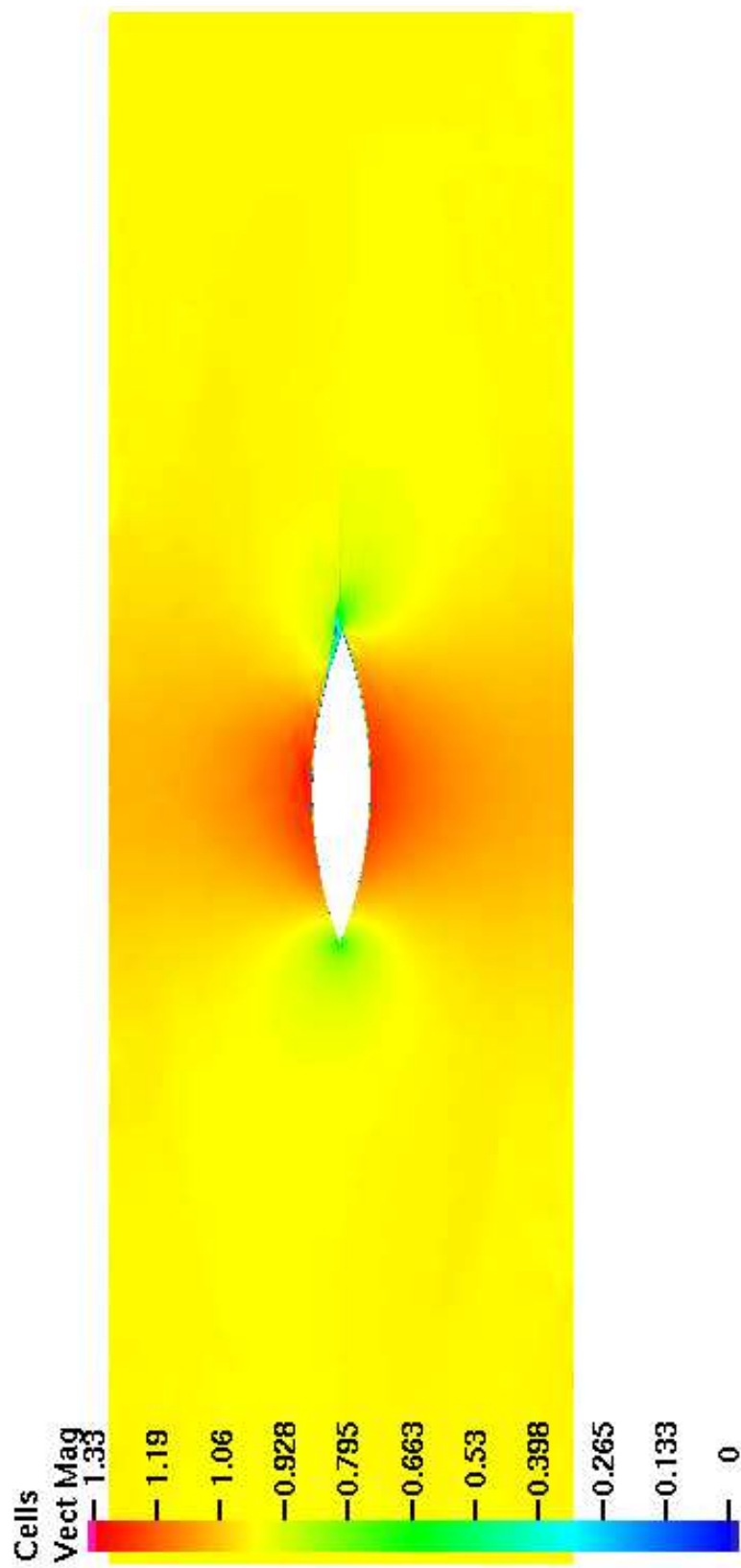
Obrázek 30: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$  - detail triangulace mezní vrstvy na stěně tunelu



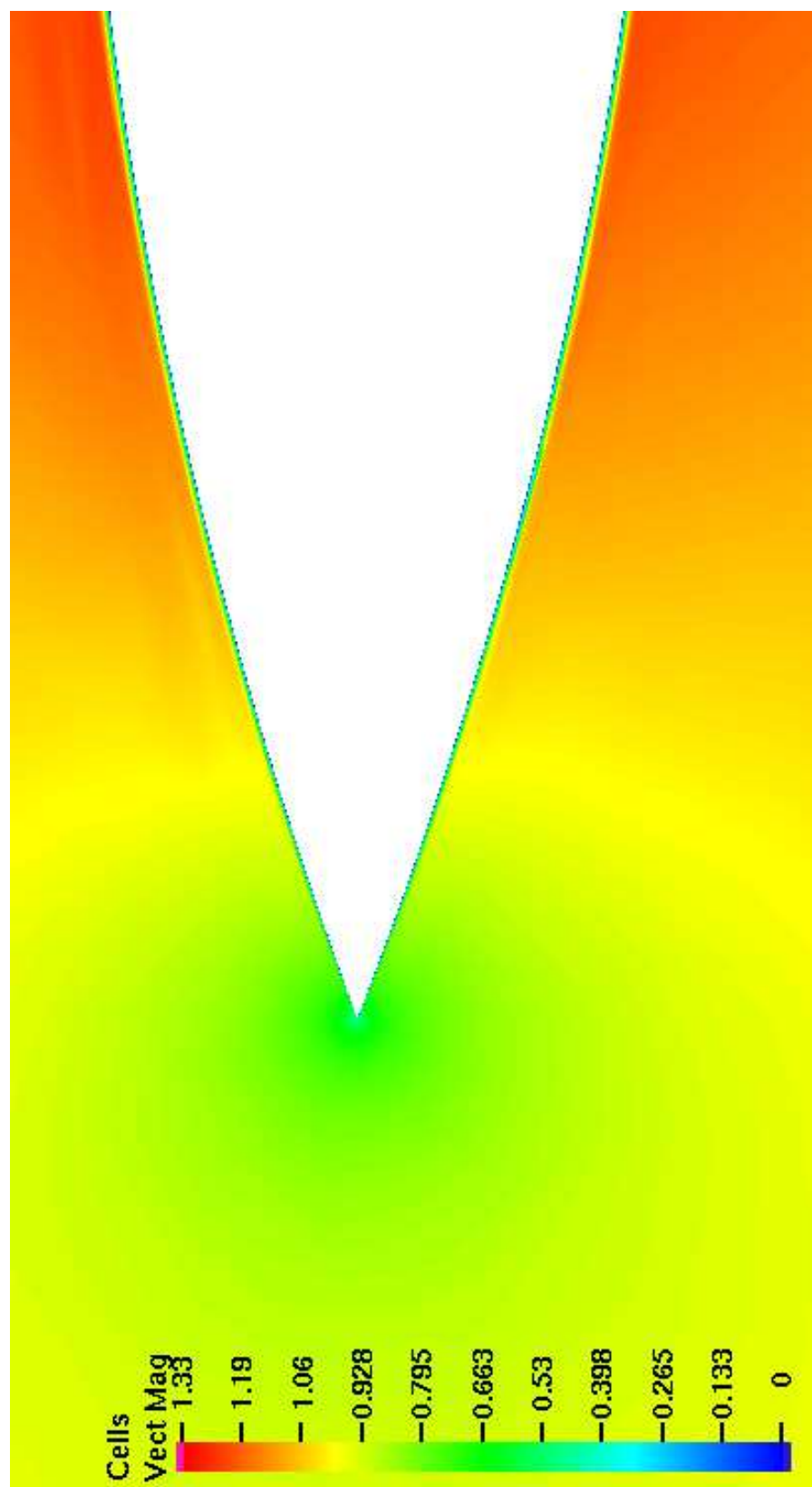
Obrázek 31: Velikost bezrozměrného tlaku pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$



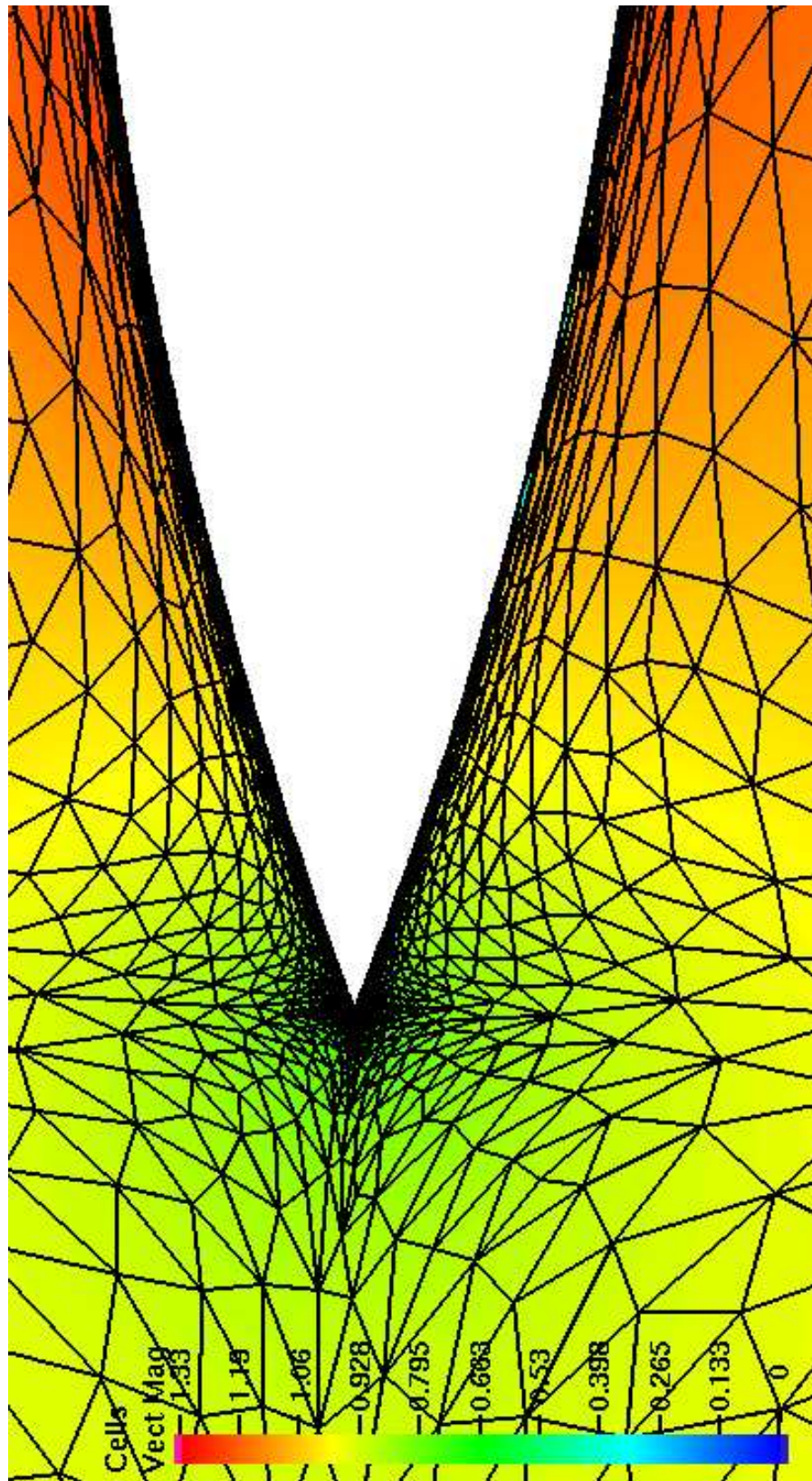
Obrázek 32: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $17.5 \text{ ms}^{-1}$  - detail odtržení, které vzniká po určité době



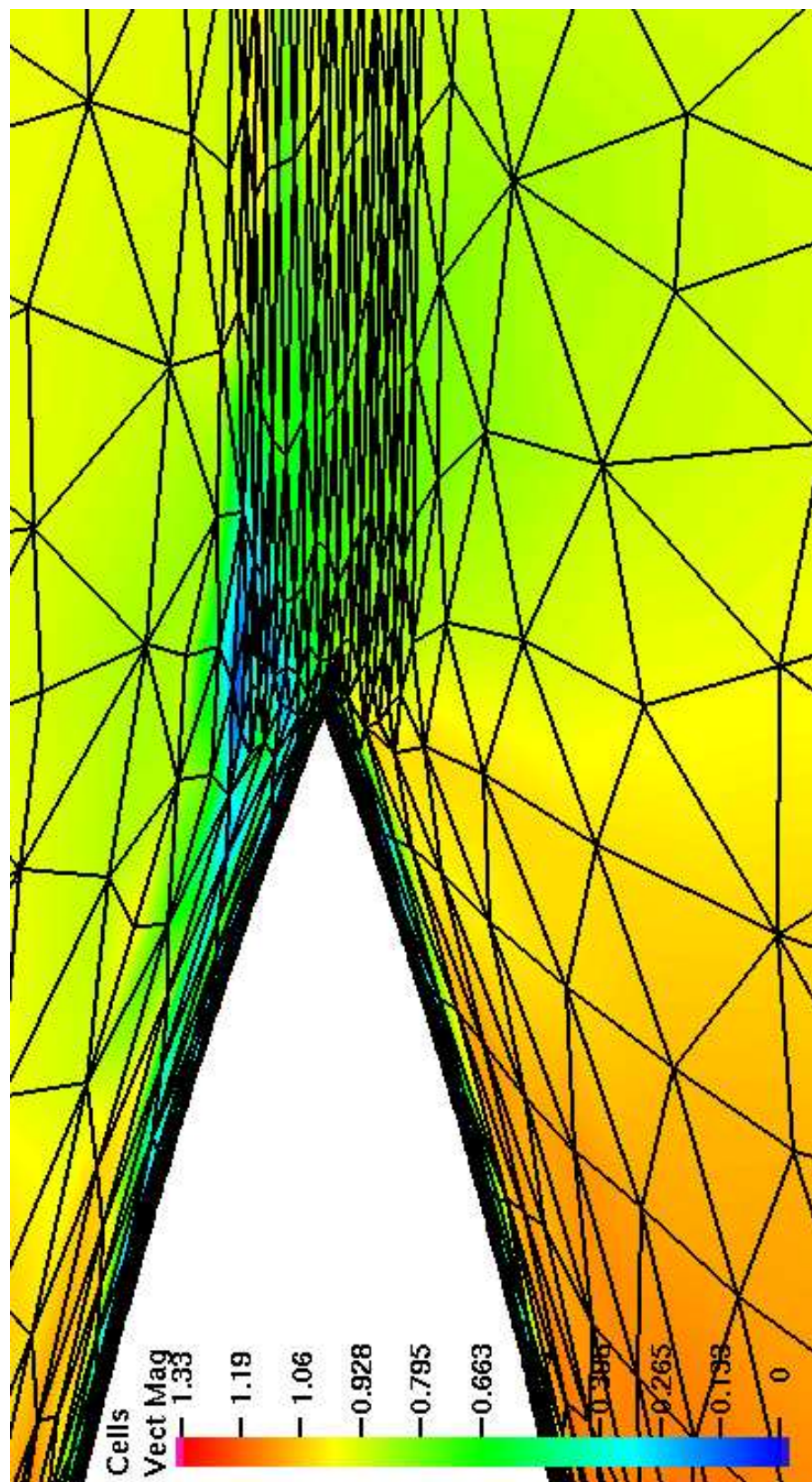
Obrázek 33: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $40 \text{ ms}^{-1}$



Obrázek 34: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $40 \text{ ms}^{-1}$  - detail náběžné hrany



Obrázek 35: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $40 \text{ ms}^{-1}$  - detail triangulace náběžné hrany



Obrázek 36: Velikost bezrozměrné rychlosti pro  $40 \text{ ms}^{-1}$  - detail triangulace úplavu

## Reference

- [1] Jan Horský, Jan Novotný, Milan Štefaník: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha, 2001.
- [2] František Maršík: *Termodynamika kontinua*, Academia, Praha, 1999.
- [3] Miloslav Feistauer: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Academia, Praha, 1993.
- [4] G.Lube: *Stabilized Galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems*, Num. Anal. and Math. Model., Banach Center publications (29), Warszawa, 1994.
- [5] M.Feistauer, V.Dolejší, P.Knobloch, K.Najzar: *Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH 2003*, Springer, Berlin, 2004, 796-805.
- [6] Petr Sváček, Miloslav Feistauer: *Numerical Solution of Fluid Flow over a Moving Profile*, Preprint.
- [7] Alfio Quarteroni: *Lecture Notes from Euro Summer School in Simulation of Fluid and Structure Interaction*, Praha, 2001.
- [8] Jaromír Horáček: *Nelineární formulace kmitání profilu pro aero-hydroelastické výpočty*, Praha, 2003.
- [9] Jiří Felcman: *Matematické modelování ve fyzice*, KNM Press, Praha, 2004.
- [10] Petr Sváček, Miloslav Feistauer, Jaromír Horáček: *Numerical simulation of flow induced airfoil vibrations with large amplitudes*, zasláno do Journal of Fluids and Structures, 2004.
- [11] Miroslav Brdička, Ladislav Samek, Bruno Sopko: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000.
- [12] Timothy A. Davis: *UMFPACK V4.0*, <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/> University of Florida.
- [13] Vít Dolejší: *ANGENER V3.0*, <http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~dolejsi/angen/angen.htm> Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy.
- [14] Jaromír Horáček, Martin Luxa, František Vaněk, Jan Veselý, Václav Vlček: *Návrh experimentálního zařízení pro studium nestacionárních 2D aeroelastických jevů optickými metodami*, Výzkumná zpráva Ústavu termomechaniky AV ČR č. Z 1347/04, listopad 2004.
- [15] Jaromír Horáček, Jan Kozánek, Jan Veselý: *Dynamic and stability properties of an aeroelastic model*, Inženýrská mechnika 2005.
- [16] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University press 2002.