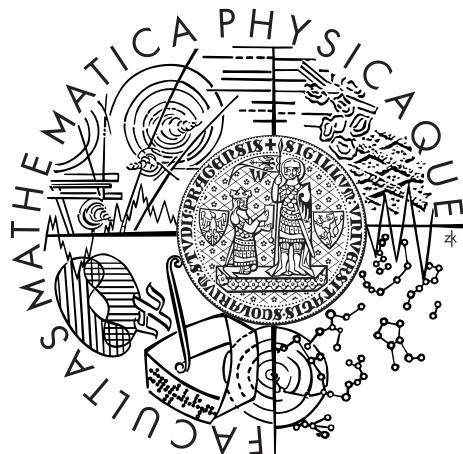


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Michal Nožička

## Základní přístupy k robustifikaci podmíněné hodnoty v riziku

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2016

Na tomto místě si dovoluji poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce RNDr. Martinu Brandovi, Ph.D. za trpělivost, ochotu a rady, které mi v průběhu vypracovávání uděloval.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 16. května 2016

Michal Nožička

Název práce: Základní přístupy k robustifikaci podmíněné hodnoty v riziku

Autor: Michal Nožička

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Abstrakt:** Práce pojednává o podmíněné hodnotě v riziku, její robustifikaci vzhledem k pravděpodobnostnímu rozdělení výnosů a využití při hledání optimální skladby portfolia. V první kapitole je zadefinována podmíněná hodnota v riziku a její robustní zobecnění včetně motivace. Druhá kapitola pojednává o základních vlastnostech podmíněné hodnoty v riziku, zejména koherenci a spojitosti podle parametru hladiny. Také je zde ukázáno, že se některé tyto vlastnosti zachovají i po robustifikaci. Třetí kapitola je věnována formulaci optimalizačních úloh hledání optimální skladby portfolia na základě podmíněné hodnoty v riziku a její robustifikace. Tato práce se věnuje jen speciálním případům, které vedou na úlohu lineárního programování. Poslední čtvrtá kapitola popisuje konkrétní numerické výsledky použití těchto metod na reálných datech z finančních trhů.

**Klíčová slova:** podmíněná hodnota v riziku, robustifikace, nejnepříznivější podmíněná hodnota v riziku, koherence, lineární programování

Title: Basic approaches to robust conditional value at risk

Author: Michal Nožička

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

**Abstract:** The work describes conditional value at risk, its robustification with respect to the probability distribution of yields of assets and its applications to optimal portfolio selection. In chapter one there are definitions of conditional value at risk and its generalization through robustification and also motivation to these definitions. The basic properties of conditional value at risk, mainly coherence and continuity with respect to the parameter of confidence level, are discussed in chapter two. There is also shown that some of these properties are preserved after robustification. The third chapter is dedicated to the derivation of optimization problems of optimal portfolio selection on the basis of conditional value at risk and its robustification. This thesis describes only special cases so that the final problems are solvable by the means of linear programming. The fourth chapter describes particular utilization of these methods with usage of real data from financial markets.

**Keywords:** conditional value at risk, robustification, worst case conditional value at risk, coherence, linear programming

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Metody měření rizika</b>	<b>3</b>
1.1 Matematický model . . . . .	3
1.2 Nejčastěji používané míry rizika . . . . .	4
1.3 Robustifikace . . . . .	5
<b>2 Podmíněná hodnota v riziku a její robustifikace</b>	<b>7</b>
2.1 Formule pro výpočet CVaR . . . . .	7
2.2 Základní vlastnosti CVaR . . . . .	10
2.3 Kohherence WCVaR . . . . .	12
<b>3 Využití CVaR a WCVaR v optimálním rozhodování</b>	<b>14</b>
3.1 Optimalizace na základě CVaR . . . . .	14
3.2 Optimalizace na základě WCVaR . . . . .	18
<b>4 Ukázky aplikací na reálná data</b>	<b>25</b>
4.1 Optimalizace na základě CVaR . . . . .	26
4.2 Optimalizace na základě WCVaR . . . . .	27
4.3 Porovnání CVaR a WCVaR . . . . .	31
<b>Závěr</b>	<b>34</b>
<b>Literatura</b>	<b>35</b>
<b>Seznam použitých symbolů</b>	<b>36</b>
<b>Přílohy</b>	<b>38</b>

# Úvod

V praxi se při investičních rozhodnutích často stává, že budoucí výnosy investice nejsou deterministické a je tedy potřeba je považovat za náhodnou veličinu. Přirozená otázka, kterou si investor klade, potom zní, jak vybrat optimální skladbu investičního portfolia.

Nejprve je potřeba popsat matematické modely, které slouží k popisu takovýchto situací. Nejzákladnějším modelem je tzv. Markowitzův model (často také zvaný mean-variance model). V tomto modelu je za optimální portfolio označeno takové portfolio, které splní požadavek na minimální velikost střední hodnoty výnosu, kterou si předem předepíšeme, a současně má mezi takovýmto portfolii minimální rozptyl výnosů. Tento model mimo jiné předpokládá, že výnosy investice se řídí normálním rozdělením, což ale v mnohých případech není oprávněný předpoklad. Ukazuje se, že Markowitzův model je přílišné zjednodušení reálné situace, a je tedy potřeba hledat lepší modely.

V této práci se budeme zabývat modely, které Markowitzův model v určitém smyslu zobecňují. Budeme se zabývat problémem hledání takové skladby portfolia, aby stejně jako v Markowitzově modelu byla splněna podmínka na minimální požadovanou střední hodnotu výnosu, ale místo minimalizace rozptylu výnosu portfolia si předepíšeme podmínu minimalizace míry rizika, které budeme měřit jinými způsoby než pouze rozptylem výnosu portfolia.

Je zřejmé, že různě zadefinované míry rizika budou mít různé vlastnosti. V tomto textu budeme za míru rizika volit podmíněnou hodnotu v riziku a její zobecnění pomocí robustifikace, tedy nejnepříznivější podmíněnou hodnotu v rizku, u kterých si popíšeme jejich základní vlastnosti. Tyto modely se často nazývají mean-CVaR, resp. mean-WCVaR modely.

Naším hlavním cílem potom bude formulovat optimalizační úlohy minimalizace míry rizika za podmínky na minimální předepsanou střední hodnotu výnosu s použitím podmíněné hodnoty v riziku a nejnepříznivější podmíněné hodnoty v riziku jako měr rizika. V této práci budeme uvažovat pouze takové speciální případy, aby bylo zajištěno, že výsledná úloha bude řešitelná pomocí lineárního programování, což umožní efektivní numerické řešení.

Na závěr si také ukážeme aplikace těchto postupů na reálných datech z finančních trhů.

# Kapitola 1

## Metody měření rizika

Cílem této kapitoly je představit matematický model používaný při investičním rozhodování za neurčitosti a uvést definice nejčastěji používaných měr rizika včetně řádné motivace.

### 1.1 Matematický model

K popisu budoucích výnosů a ztrát spojených s investičním rozhodnutím budeme používat ztrátovou funkci, což bude funkce dvou reálných vektorových proměnných představujících konkrétní volbu investičního portfolia a budoucí výnosy aktiv v portfoliu. V celé této práci budeme obě tyto proměnné chápat jako reálné  $n$ -rozměrné<sup>1</sup> vektory vyjadřující váhy zastoupení jednotlivých aktiv v portfoliu, resp. procentuální výnosy jednotlivých aktiv.

**Definice 1** (ztrátová funkce). *Ztrátovou funkcí rozumíme reálnou funkci  $2n$  reálných proměnných  $f(x, y) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  vyjadřující jakou ztrátu při investici utrpíme, kde  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  vyjadřuje konkrétní volbu portfolia a  $y \in \mathbb{R}^n$  vyjadřuje budoucí procentuální výnosy aktiv. Množina  $X$  označuje omezení na skladbu portfolia.*

Budeme uvažovat případ, ve kterém budoucí výnosy aktiv  $y$  nejsou dopředu známé. Budeme je v našem modelu považovat za reálný náhodný vektor dimenze  $n$ , který budeme dále značit  $\mathbb{Y}$ . Tento náhodný vektor bude zobrazení z nějakého pravděpodobnostního prostoru<sup>2</sup>  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  do  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ .

V důsledku toho i výše zadefinovaná ztrátová funkce přejde v náhodnou veličinu  $f(x, \mathbb{Y})$  definovanou na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  závislou na konkrétní volbě portfolia  $x \in X$ . Nadále budeme pod pojmem ztrátová funkce rozumnět právě tuto náhodnou veličinu. Dále budeme také potřebovat pracovat s distribuční funkcí této náhodné veličiny, kterou zavedeme vztahem

$$\Psi(x, \zeta) = P(f(x, \mathbb{Y}) \leq \zeta),$$

kde  $x \in X$  je konkrétní volba portfolia.

---

<sup>1</sup> $n \in \mathbb{N}$  v tomto případě vyjadřuje počet aktiv, které při investičním rozhodování uvažujeme.

<sup>2</sup>Elementy množiny  $\Omega$  si můžeme představovat jako stavy všech proměnných, které ovlivňují cenu aktiv (tj. stav ekonomiky, počasí, aktivity ostatních obchodníků atd.). Přesná podoba množiny  $\Omega$  je příliš složitá na to, abyhom ji uměli nějak lépe popsat. O pravděpodobnostní míře  $P$  zpravidla moc informací také nemáme.

Při snaze o optimální volbu portfolia budeme tedy řešit problém, jakou zvolit skladbu portfolia  $x \in X$ , aby měla ztrátová funkce  $f(x, \mathbb{Y})$  v určitém smyslu nejlepší vlastnosti. Nás bude zajímat střední hodnota ztrátové funkce a míra rizika. Nejprve si tedy korektně zavedeme, co budeme rozumět pod pojmem míra rizika.

Představme si, že známe náhodnou veličinu popisující výnosy a ztráty z určité investice (tj. ztrátovou funkci) a chceme popsat, jaké riziko je s touto investicí spojeno. Mírou rizika budeme rozumět zobrazení, které ztrátové funkci přiřadí reálné číslo (nebo nevlastní hodnotu  $\pm\infty$ ) vyjadřující, jak je daná investice rizikantní.

**Definice 2** (míra rizika). *Nechť  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor. Potom mírou rizika budeme rozumět zobrazení z prostoru reálných náhodných veličin definovaných na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  do  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .*

**Poznámka.** Výhodou této definice je, že bude existovat uspořádání investic, tedy reálných náhodných veličin vyjadřujících výnosy a ztráty dané investice (tj. ztrátových funkcí), podle určité míry rizika. Bude tedy smysluplné mluvit o tom, že jedno investiční rozhodnutí je rizikovější nebo naopak méně rizikové než druhé.

## 1.2 Nejčastěji používané míry rizika

Riziko spojené s investičním rozhodnutím lze měřit mnoha různými způsoby, zde si uvedeme ty nejčastěji používané.

**Definice 3** (hodnota v riziku). *Nechť  $f(x, \mathbb{Y})$  je ztrátová funkce a  $\alpha \in (0, 1)$ . Potom definujeme hodnotu v riziku na hladině  $\alpha$  spojenou s výběrem portfolia  $x \in X$  jako*

$$\text{VaR}_\alpha(x) = \min\{\zeta : \Psi(x, \zeta) \geq \alpha\}.$$

(viz Rockafellar a Uryasev (2002), definition 1.)

**Poznámka.** Díky spojitosti zprava distribuční funkce  $\Psi(x, \cdot)$  máme zaručeno, že se minima na pravé straně výrazu vždy nabýde a definice je tedy korektní.

**Poznámka.** Značení hodnoty v riziku  $\text{VaR}_\alpha(x)$  pochází z anglického výrazu pro hodnotu v riziku value at risk.

Na tomto místě je důležité poznamenat, že v případě, že pro dané  $\alpha \in (0, 1)$  existuje  $\zeta_0$  takové, že platí  $\Psi(x, \zeta_0) = \alpha$  (tedy  $\zeta_0$  je  $\alpha$ -kvantil náhodné veličiny  $f(x, \mathbb{Y})$ ) a distribuční funkce  $\Psi(x, \zeta)$  je ostře rostoucí v proměnné  $\zeta$  na nějakém okolí bodu  $\zeta_0$ , potom platí  $\text{VaR}_\alpha(x) = \zeta_0$ . V ostatních případech se definice  $\text{VaR}_\alpha$  nedá takto zjednodušit.

Hodnota v riziku vyjadřuje, jakou minimální ztrátu utrpíme v nejhorších možných případech, jejichž pravděpodobnost výskytu je menší nebo rovna  $(1 - \alpha)$ . Nejčastěji se za  $\alpha$  volí hodnoty 0,9, 0,95 nebo 0,99. Tato informace může být v určitých situacích užitečná, ale musíme si uvědomit, že hodnota v riziku nepodává žádnou informaci o rozsahu ztráty v nejhorších přídadech, které jsou méně pravděpodobné než  $(1 - \alpha)$ .

**Definice 4** (podmíněná hodnota v riziku). *Nechť  $f(x, \mathbb{Y})$  je ztrátové funkce a  $\alpha \in (0, 1)$ . Potom definujeme podmíněnou hodnotu v riziku spojenou s volbou portfolia  $x \in X$  jako*

$$\text{CVaR}_\alpha(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E} [f(x, \mathbb{Y}) \cdot \mathbb{I}_{(f(x, \mathbb{Y}) \geq \text{VaR}_\alpha(x))}] .$$

(viz Rockafellar a Uryasev (2002), definition 3.)

**Poznámka.** Značení podmíněné hodnoty v riziku  $\text{CVaR}_\alpha(x)$  pochází z anglického výrazu pro podmíněnou hodnotu v riziku conditional value at risk.

Všimněme si, že  $\text{CVaR}_\alpha(x)$  není zadefinována jako podmíněná střední hodnota  $f(x, \mathbb{Y})$  za podmínky  $f(x, \mathbb{Y}) \geq \text{VaR}_\alpha(x)$ , což je způsobeno tím, že dělíme výrazem  $(1 - \alpha)$  a nikoliv výrazem  $\mathbb{P}(f(x, \mathbb{Y}) \geq \text{VaR}_\alpha(x))$ , což by odpovídalo výše popsané podmíněné střední hodnotě. Právě díky této definici má CVaR mnoho pěkných vlastností, o kterých pojednává druhá kapitola této práce.

Podmíněná hodnota v riziku uvádí, jakou máme očekávat ztrátu za podmínky, že nastane některý z nejhorších případů, jejichž pravděpodobnost výskytu je menší nebo rovna  $(1 - \alpha)$ . Oproti hodnotě v riziku má tu výhodu, že vyjadřuje jakou ztrátu bychom v nejhorších případech měli očekávat. Hodnoty parametru  $\alpha$  se stejně jako v případě  $\text{VaR}_\alpha$  nejčastěji volí jako 0,9, 0,95 nebo 0,99.

Na tomto místě uvedeme základní tvrzení o vztahu hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku.

**Věta 1.** *Nechť  $f(x, \mathbb{Y})$  je ztrátová funkce a  $\alpha \in (0, 1)$ . Potom pro všechna  $x \in X$  platí*

$$\text{VaR}_\alpha(x) \leq \text{CVaR}_\alpha(x).$$

(viz Rockafellar a Uryasev (2002), corollary 7.)

**Důkaz.** Platnost této nerovnosti plyne přímo z definic podmíněné hodnoty v riziku a hodnoty v riziku. □

Dále se budeme věnovat robustifikaci měr rizika, zejména podmíněné hodnoty v riziku.

### 1.3 Robustifikace

Nyní uvedeme způsob, kterým se dají dosud definované míry rizika zobecnit. Dosud jsme předpokládali, že rozdelení budoucích výnosů aktiv je zcela známé, nyní se budeme zabývat případem, kdy tomu tak není. Předpokládejme, že máme nějakou míru rizika a nějakou množinu možných rozdělení budoucích výnosů aktiv a chtěli bychom zadefinovat novou míru rizika tak, aby vypovídala o tom, jaké hodnoty by nabyla původní míra rizika v případě, že skutečné rozdělení budoucích výnosů aktiv je to nejhorší možné z těch, které jsme uvažovali. Tímto dochází k robustifikaci původní míry rizika vzhledem k pravděpodobnostnímu rozdělení budoucích výnosů aktiv.

Matematicky budeme výše popsanou situaci modelovat tak, že náhodný vektor budoucích výnosů aktiv  $\mathbb{Y}$  budeme chápat jen jako měřitelné zobrazení z prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  do prostoru  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ , přičemž na prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  budeme uvažovat různé pravděpodobnostní míry. Tímto způsobem dostaneme různá rozdělení budoucích výnosů aktiv.

**Definice 5** (robustifikace míry rizika). *Nechť  $M$  je libovolná neprázdná množina pravděpodobnostních mér na prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $Z : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  je měřitelné zobrazení vyjadřující ztráty utrpené při určité investici.  $Z_P : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  nechť jsou náhodné veličiny, které vznikly ze zobrazení  $Z$  pouze přidáním pravděpodobnostní míry  $P \in M$  k prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Nechť dále  $\rho$  je libovolná míra rizika, potom zadefinujeme robustní míru rizika  $\rho_w$ <sup>3</sup> jako*

$$\rho_w(Z) = \sup_{P \in M} \rho(Z_P). \quad (1.1)$$

(viz Zhu a Fukushima (2009), chapter 2)

**Poznámka.** Striktně vzato, zobrazení  $\rho_w$  definované výše není mírou rizika ve smyslu definice 2. Pro jednoduchost ovšem ve zbytku této práce budeme takto definovaná zobrazení také označovat jako míry rizika.

Na tomto místě zadefinujeme, jak přesně vypadá robustifikace podmíněné hodnoty v riziku.

**Definice 6** (nejnepříznivější podmíněná hodnota v riziku). *Nechť  $M$  je libovolná neprázdná množina pravděpodobnostních mér na prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $\mathbb{Y}$  nechť je měřitelné zobrazení z prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  do  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  vyjadřující budoucí výnosy aktiv a  $\alpha \in (0,1)$ . Potom zadefinujeme nejnepříznivější podmíněnou hodnotu v riziku spojenou s výběrem portfolia  $x \in X$  na hladině  $\alpha$  jako*

$$\text{WCVaR}_\alpha(x) = \sup_{P \in M} \text{CVaR}_\alpha(x). \quad (1.2)$$

(viz Zhu a Fukushima (2009), definition 1)

**Poznámka.** Značení nejnepříznivější podmíněné hodnoty v riziku  $\text{WCVaR}_\alpha(x)$  pochází z anglického výrazu pro nejnepříznivější podmíněnou hodnotu v riziku worst case conditional value at risk.

Nejnepříznivější podmíněnou hodnotu v riziku jsme zavedli z důvodu, aby chom se uměli vypořádat s případem, kde neznáme přesné rozdělení ztrátové funkce. Lze snadno nahlédnout, že pokud zvolíme množinu  $M$  jednobodovou, přejde nejnepříznivější podmíněná hodnota v riziku na podmíněnou hodnotu v riziku. Jak už název napovídá, nejnepříznivější podmíněná hodnota v riziku vyjadřuje, jaká bude podmíněná hodnota v riziku v případě, že skutečné rozdělení budoucích cen aktiv je to nejhorskí možné z těch, které připouštíme.

V další části tohoto textu ukážeme, že nejnepříznivější podmíněná hodnota v riziku si zachová některé důležité vlastnosti podmíněné hodnoty v riziku, zejména koherenci.

---

<sup>3</sup>dolní index  $w$  z anglického worst case tj. nejhorský případ

# Kapitola 2

## Podmíněná hodnota v riziku a její robustifikace

V této kapitole se budeme věnovat základním vlastnostem podmíněné hodnoty v riziku a její robustifikaci. Ukážeme, jak je možné převést hledání CVaR na řešení úlohy minimalizace konvexní funkce v jedné proměnné. Ukážeme, že CVaR je spojitá v parametru hladiny  $\alpha$ . Definujeme, co znamená koherence míry rizika a vyšetříme koherentnost CVaR i WCVaR.

### 2.1 Formule pro výpočet CVaR

Nechť  $f(x, \mathbb{Y})$  je ztrátová funkce s konečným prvním momentem a  $\alpha \in (0, 1)$ . Potom zadefinujeme pomocnou funkci

$$F_\alpha(x, \zeta) = \zeta + \frac{1}{1-\alpha} E [|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+], \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

kde využíváme značení  $|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+ = \max \{0, f(x, \mathbb{Y}) - \zeta\}$ . Tuto pomocnou funkci následně využijeme při hledání hodnoty  $\text{CVaR}_\alpha(x)$ , o čemž mluví následující věta.

**Věta 2** (minimalizační formule CVaR). *Nechť  $f(x, \mathbb{Y})$  je ztrátová funkce s konečným prvním momentem pro všechna  $x \in X$  a nechť  $\alpha \in (0, 1)$ . Potom funkce  $F_\alpha(x, \zeta)$  zadefinovaná výrazem (2.1) je konvexní a spojitá v proměnné  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Navíc platí*

$$\text{CVaR}_\alpha(x) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta) \quad (2.2)$$

*a  $\arg\min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta)$  je neprázdný uzavřený interval, jehož levý krajní bod je  $\text{VaR}_\alpha(x)$ .*

*(viz Rockafellar a Uryasev (2002), theorem 10, převzato včetně důkazu.)*

**Důkaz.** Nejprve ukážeme, že  $F_\alpha(x, \zeta)$  je korektně zadefinována pro všechna  $x \in X$  a všechna  $\zeta \in \mathbb{R}$ . To je ovšem jednoduchý důsledek předpokladu o konečnosti střední hodnoty ztrátové funkce  $f$ , neboť střední hodnota na pravé straně je konečná pro všechna  $x \in X$  a všechna  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Funkce  $F_\alpha(x, \zeta)$  je tedy korektně zadefinována.

Nyní se zaměříme na konvexnost a spojitost  $F_\alpha(x, \cdot)$ . Konvexnost  $F_\alpha(x, \cdot)$  plyne z konvexnosti funkce  $|f(x, y) - \zeta|^+$  v proměnné  $\zeta$ . Pro všechny  $\lambda \in (0, 1)$  a  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$  platí vztah

$$\lambda |f(x, y) - \zeta_1|^+ + (1 - \lambda) |f(x, y) - \zeta_2|^+ \geq |f(x, y) - \lambda\zeta_1 - (1 - \lambda)\zeta_2|^+.$$

Potom bude také nutně platit

$$\begin{aligned} E[\lambda |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta_1|^+] + E[(1 - \lambda) |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta_2|^+] &\geq \\ &\geq E[|f(x, \mathbb{Y}) - \lambda\zeta_1 - (1 - \lambda)\zeta_2|^+], \end{aligned}$$

což je vlastně ověření konvexnosti funkce  $E[|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+]$  v proměnné  $\zeta$ . Funkce  $F_\alpha(x, \cdot)$  je součtem lineární (a tedy konvexní) funkce a konvexní funkce, musí tedy být také konvexní. Nakonec využijeme faktu, že každá reálná konvexní funkce definovaná na celém  $\mathbb{R}$  už je nutně spojitá a navíc má konečné jednostranné derivace, což budeme dále v důkazu používat.

Pro důkaz samotného vzorce (2.2) budeme potřebovat vyjádření těchto jednostranných derivací. Začneme s vyjádřením derivačního podílu pro  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta \neq \zeta'$

$$\frac{F_\alpha(x, \zeta') - F_\alpha(x, \zeta)}{\zeta' - \zeta} = 1 + \frac{1}{1 - \alpha} E \left[ \frac{|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta'|^+ - |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+}{\zeta' - \zeta} \right], \quad (2.3)$$

kde jsme pouze dosadili za  $F_\alpha(x, \zeta)$  z definice (2.1) a vzniklý výraz jsme upravili. Nyní se zaměříme na výraz uvnitř střední hodnoty a budeme zkoumat, jakých hodnot může nabývat. Nejprve se zaměříme na případ, kdy platí  $\zeta' > \zeta$ . Je snadné nahlédnout, že platí

$$\frac{|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta'|^+ - |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+}{\zeta' - \zeta} \begin{cases} = -1, & \text{pokud } f(x, \mathbb{Y}) > \zeta', \\ = 0, & \text{pokud } f(x, \mathbb{Y}) \leq \zeta, \\ \in [-1, 0), & \text{pokud } \zeta < f(x, \mathbb{Y}) \leq \zeta'. \end{cases}$$

Dále si musíme uvědomit, že platí vztahy

$$\begin{aligned} P(\zeta < f(x, \mathbb{Y}) \leq \zeta') &= \Psi(x, \zeta') - \Psi(x, \zeta), \\ P(f(x, \mathbb{Y}) > \zeta') &= 1 - \Psi(x, \zeta'), \end{aligned}$$

z čehož plyne, že pro každé  $\zeta' > \zeta$  existuje  $\rho(\zeta, \zeta') \in [0, 1]$  takové, že platí

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta'|^+ - |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+}{\zeta' - \zeta} \right] &= \\ &= -(1 - \Psi(x, \zeta')) - \rho(\zeta, \zeta') [\Psi(x, \zeta') - \Psi(x, \zeta)]. \end{aligned}$$

Díky spojitosti zprava distribuční funkce  $\Psi$  dostáváme

$$\lim_{\zeta' \searrow \zeta} \Psi(x, \zeta') = \Psi(x, \zeta)$$

a můžeme tedy vypočítat limitu

$$\lim_{\zeta' \searrow \zeta} E \left[ \frac{|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta'|^+ - |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+}{\zeta' - \zeta} \right] = -(1 - \Psi(x, \zeta)). \quad (2.4)$$

Zkombinováním rovnic (2.3) a (2.4) dostáváme vyjádření derivace zprava funkce  $F_\alpha(x, \zeta)$  jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) &= \lim_{\zeta' \searrow \zeta} \frac{F_\alpha(x, \zeta') - F_\alpha(x, \zeta)}{\zeta' - \zeta} = 1 + \frac{1}{1-\alpha} [\Psi(x, \zeta) - 1] = \\ &= \frac{\Psi(x, \zeta) - \alpha}{1-\alpha}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Nyní se zaměříme na případ, kdy  $\zeta' < \zeta$ , a budeme postupovat analogicky. Nejprve nahlédneme, že platí

$$\frac{|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta'|^+ - |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+}{\zeta' - \zeta} \begin{cases} = -1, & \text{pokud } f(x, \mathbb{Y}) \geq \zeta, \\ = 0, & \text{pokud } f(x, \mathbb{Y}) \leq \zeta', \\ \in [-1, 0), & \text{pokud } \zeta' < f(x, \mathbb{Y}) < \zeta. \end{cases}$$

Podobně jako v předchozím případě platí vztahy

$$\begin{aligned}P(\zeta' < f(x, \mathbb{Y}) < \zeta) &= \Psi(x, \zeta^-) - \Psi(x, \zeta'), \\ P(f(x, \mathbb{Y}) \geq \zeta) &= 1 - \Psi(x, \zeta^-),\end{aligned}$$

z čehož plyne, že pro každé  $\zeta' < \zeta$  existuje  $\rho(\zeta, \zeta') \in (0, 1)$  takové, že platí

$$\begin{aligned}E \left[ \frac{|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta'|^+ - |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+}{\zeta' - \zeta} \right] &= \\ &= -(1 - \Psi(x, \zeta^-)) - \rho(\zeta, \zeta') [\Psi(x, \zeta^-) - \Psi(x, \zeta')],\end{aligned}$$

a můžeme tedy vypočítat limitu

$$\lim_{\zeta' \nearrow \zeta} E \left[ \frac{|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta'|^+ - |f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+}{\zeta' - \zeta} \right] = -(1 - \Psi(x, \zeta^-)). \quad (2.6)$$

Zkombinováním rovnic (2.3) a (2.6) dostáváme vyjádření derivace zleva funkce  $F_\alpha(x, \zeta)$  jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) &= \lim_{\zeta' \nearrow \zeta} \frac{F_\alpha(x, \zeta') - F_\alpha(x, \zeta)}{\zeta' - \zeta} = 1 + \frac{1}{1-\alpha} [\Psi(x, \zeta^-) - 1] = \\ &= \frac{\Psi(x, \zeta^-) - \alpha}{1-\alpha}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Díky konvexitě funkce  $F_\alpha(x, \cdot)$  máme zaručeno, že bude pro všechna  $\zeta \in \mathbb{R}$  a všechna  $x \in X$  platit

$$\frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) \leq \frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta)$$

a navíc z odvozených vzorců pro jednostranné derivace plynou následující limity

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) = 1, \\ \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) = -\frac{\alpha}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Využitím znalosti o konvexitě funkce  $F_\alpha(x, \cdot)$  dostáváme, že pro každé  $c \in \mathbb{R}$  je úrovňová množina této funkce

$$\{\zeta : F_\alpha(x, \zeta) \leq c\} \quad (2.8)$$

konvexní. Navíc díky kladné limitě jednostranných derivací funkce  $F_\alpha(x, \cdot)$  v nekonečnu a záporné limitě jednostranných derivací funkce  $F_\alpha(x, \cdot)$  v mínu nekonečnu víme, že se jedná o uzavřené omezené intervaly. Funkce  $F_\alpha(x, \cdot)$  tedy nabývá svého minima na uzavřeném omezeném intervalu, jehož všechny body musí splňovat podmínu

$$\frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta) \leq 0 \leq \frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \zeta}(x, \zeta).$$

S využitím odvozených vztahů (2.5) a (2.7) pro jednostranné derivace funkce  $F_\alpha(x, \cdot)$  lze tuto podmínu upravit na

$$\Psi(x, \zeta^-) \leq \alpha \leq \Psi(x, \zeta). \quad (2.9)$$

Z definice hodnoty v riziku je vidět, že levý krajní bod tohoto intervalu musí být  $\text{VaR}_\alpha(x)$ .

Ze vztahu (2.9) plyne, že platí

$$\begin{aligned} \min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta) &= F_\alpha(x, \text{VaR}_\alpha(x)) = \text{VaR}_\alpha(x) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} [|f(x, \mathbb{Y}) - \text{VaR}_\alpha(x)|^+] = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} [f(x, \mathbb{Y}) \cdot \mathbb{I}_{(f(x, \mathbb{Y}) \geq \text{VaR}_\alpha(x))}] = \text{CVaR}_\alpha(x), \end{aligned}$$

kde poslední rovnost je přímo definice  $\text{CVaR}_\alpha(x)$ . Ukázali jsme tedy platnost vztahu (2.2), čímž je důkaz věty dokončen. □

Ukázali jsme tedy, že výpočet VaR a CVaR lze převést na hledání minima konvexní funkce jedné proměnné. Tato minimalizační formule je velmi důležitá pro formulaci optimalizačních úloh hledání portfolia s minimálním CVaR, čehož budeme dále využívat ve 3. kapitole.

## 2.2 Základní vlastnosti CVaR

Mezi nejzákladnější vlastnosti CVaR patří spojitost dle parametru hladiny  $\alpha$  a koherence. Těmito dvěma vlastnostmi se nyní budeme zabývat.

**Věta 3** (spojitost CVaR).  $\text{CVaR}_\alpha(x)$  jako funkce proměnných  $x \in X$  a  $\alpha \in (0, 1)$  je spojitá v proměnné  $\alpha$ .

(viz Rockafellar a Uryasev (2002), Proposition 13, převzato včetně důkazu.)

**Důkaz.** Uvažujme pevné  $x \in X$  a funkci

$$\theta_\zeta(\gamma) = \zeta + \gamma \mathbb{E} [|f(x, \mathbb{Y}) - \zeta|^+].$$

Potom bude dle věty 2 platit

$$\text{CVaR}_\alpha(x) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} \theta_\zeta \left( \frac{1}{1-\alpha} \right).$$

Jelikož pro každé pevné  $\zeta \in \mathbb{R}$  je funkce  $\theta_\zeta(\gamma)$  affinní, bude platit, že funkce

$$\theta(\gamma) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} \theta_\zeta(\gamma)$$

je konkávní. Každá konkávní funkce definovaná na  $\mathbb{R}$  už je nutně spojitá. Dostáváme tedy, že funkce  $\theta(\gamma)$  je spojitá. Ze vztahu

$$\text{CVaR}_\alpha(x) = \theta \left( \frac{1}{1 - \alpha} \right)$$

už s využitím faktu, že složení spojitých funkcí je spojitá funkce, plyne spojitost  $\text{CVaR}_\alpha(x)$  v proměnné  $\alpha$ . □

**Poznámka.** Na tomto místě je vhodné poznamenat, že  $\text{VaR}_\alpha(x)$  není spojitá v proměnné  $\alpha$ . Jako příklad může posloužit libovolná ztrátová funkce, jejíž distribuční funkce nabývá na nějakém nedegenerovaném intervalu konstantní hodnoty  $\alpha_0$  z intervalu  $(0, 1)$ . Potom  $\text{VaR}_\alpha(x)$  jako funkce parametru  $\alpha$  zřejmě není spojitá v bodě  $\alpha_0$ .

Další důležitou vlastností měr rizika je koherence. Nejprve zde uvedeme definici koherentní míry rizika a následně ukážeme, že CVaR a WCVaR jsou koherentní míry rizika.

**Definice 7** (koherentní míra rizika). *Nechť  $Q$  je prostor reálných náhodných veličin vyjadřujících ztrátovou funkci a funkcionál  $\rho : Q \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  nechť je míra rizika. Potom řekneme, že  $\rho$  je koherentní míra rizika, pokud splňuje následující čtyři podmínky:*

*Monotonie: Pokud  $Y, Z \in Q$  jsou dvě ztrátové funkce, pro které platí  $Y \leq Z$ , potom musí platit*

$$\rho(Y) \leq \rho(Z).$$

*Subaditivita: Pokud  $Y, Z \in Q$  jsou dvě ztrátové funkce, potom musí platit*

$$\rho(Y + Z) \leq \rho(Y) + \rho(Z).$$

*Pozitivní homogenita: Pokud  $Y \in Q$  je ztrátová funkce a  $\lambda \geq 0$  je reálné číslo, potom musí platit*

$$\rho(\lambda Y) = \lambda \rho(Y).$$

*(Pro účely této definice uvažujeme  $0 \cdot \infty = 0$ .)*

*Nezávislost na posunutí: Pokud  $Y \in Q$  je ztrátová funkce a  $\lambda \in \mathbb{R}$ , potom musí platit*

$$\rho(Y + \lambda) = \rho(Y) + \lambda.$$

*(viz Artzner a kol. (1999), definition 2.4)*

**Poznámka.** Koherence zaručuje, že se míra rizika chová v určitém smyslu hezky. Zejména je dobré si uvědomit, že díky splnění podmínky subaditivity a pozitivní homegenity bude portfolio, vybrané na základě minimalizace koherentní míry rizika, dobře diverzifikované. Je to způsobeno tím, že volně řečeno podmínky subaditivity a pozitivní homogenity říkají, že riziko držení konvexní kombinace více aktiv je menší nebo rovno než součet rizik držení aktiv samostatně.

Je důležité ukázat, zda míry rizika, které jsme definovali v první kapitole a které budeme nadále používat, jsou koherentní. Vzhledem k omezenému rozsahu této práce některá tvrzení uvedeme bez důkazu, pouze poskytneme odkazy na literaturu, kde jsou podrobné důkazy uvedeny.

**Věta 4** (Nekoherence VaR). VaR není koherentní mírou rizika.

**Důkaz.** VaR nesplňuje podmínu subadditivity, podrobný protipříklad uveden například v Artzner a kol. (1999), chapter 3.3. □

**Věta 5** (koherence CVaR). CVaR je koherentní mírou rizika.

**Důkaz.** Důkaz uveden například v Rockafellar a Uryasev (2002), corollary 12. □

## 2.3 Koherence WCVaR

V této podkapitole si ukážeme, že WCVaR je také koherentní mírou rizika. Toho dosáhneme pomocí obecnějšího tvrzení, ze kterého už bude přímo plynout koherentnost WCVaR.

**Věta 6** (robustifikace a koherence). Nechť  $M$  je libovolná neprázdná množina pravděpodobnostních měr na prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  a  $\rho$  nechť je nějaká koherentní míra rizika. Potom také robustifikace míry rizika  $\rho$  zadefinovaná vztahem

$$\rho_w(Z) = \sup_{P \in M} \rho(Z_P),$$

kde  $Z$  je libovolné měřitelné zobrazení z prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  do  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  a  $Z_P$  je příslušná náhodná veličina vzniklá doplněním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  pravděpodobnostní mírou  $P \in M$ , je koherentní míra rizika.

(viz Zhu a Fukushima (2009), proposition 1, převzato včetně důkazu.)

**Důkaz.** Nechť  $U, V$  jsou dvě měřitelná zobrazení z prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  do  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  a  $U_P, V_P$  jsou příslušné náhodné veličiny. Dokážeme, že pro  $\rho_w$  platí všechny podmínky z definice koherentní míry rizika.

Monotonie: Pokud  $U \leq V$ , potom musí platit

$$\rho_w(U) = \sup_{P \in M} \rho(U_P) \leq \sup_{P \in M} \rho(V_P) = \rho_w(V),$$

kde využíváme monotonie  $\rho$ . Tímto je dokázána monotonie  $\rho_w$ .

Subadditivita: Musí platit

$$\begin{aligned} \rho_w(U + V) &= \sup_{P \in M} \rho(U_P + V_P) \leq \sup_{P \in M} (\rho(U_P) + \rho(V_P)) \leq \\ &\leq \sup_{P \in M} \rho(U_P) + \sup_{P \in M} \rho(V_P) = \rho_w(U) + \rho_w(V), \end{aligned}$$

kde ve druhé úpravě využíváme subaddititu  $\rho$  a následně aritmetiku suprému. Tímto je dokázáno, že  $\rho_w$  je subadditivní.

Pozitivní homogenita: Nechť  $\lambda > 0$ , potom musí platit

$$\rho_w(\lambda U) = \sup_{P \in M} \rho(\lambda U_P) = \lambda \sup_{P \in M} \rho(U_P) = \lambda \rho_w(U),$$

kde využíváme pozitivní homogenity  $\rho$ . V případě  $\lambda = 0$  požadovaná rovnost platí triviálně. Tímto je dokázána pozitivní homogenita  $\rho_w$ .

Nezávislost na posunutí: Nechť  $\lambda \in \mathbb{R}$ , potom musí platit

$$\rho_w(U + \lambda) = \sup_{P \in M} \rho(U_P + \lambda) = \sup_{P \in M} (\rho(U_P) + \lambda) = \lambda + \sup_{P \in M} \rho(U_P) = \rho_w(U) + \lambda,$$

kde využíváme nezávislosti na posunutí  $\rho$ . Tímto je dokázána nezávislost na posunutí  $\rho_w$ .

Ověřili jsme tedy, že  $\rho_w$  splňuje všechny podmínky z definice koherentní míry rizika.

□

**Důsledek.** Triviálním důsledkem vět 5 a 6 je tvrzení, že WCVaR je koherentní mírou rizika.

# Kapitola 3

## Využití CVaR a WCVaR v optimálním rozhodování

V této kapitole se budeme věnovat zejména úlohám hledání optimální skladby portfolia. Jak už bylo popsáno v úvodu, naším cílem bude formulovat úlohu hledání portfolia s požadovanou střední hodnotou výnosu a nejmenší možnou mírou rizika (jako míry rizika budeme uvažovat CVaR, resp. WCVaR) jako úlohu lineárního programování.

Pro formulaci vět v této kapitole je důležitý předpoklad o konečném prvním momentu uvažované ztrátové funkce  $f(x, \mathbb{Y})$ , proto nadále v této kapitole budeme uvažovat pouze ztrátové funkce s konečným prvním momentem. Pro jednoduchost zápisu už tento předpoklad nebudeme u každého tvrzení zvlášť uvádět, ale budeme ho považovat za splněný. Také budeme potřebovat používat jedno tvrzení z teorie optimalizace, které na tomto místě uvedeme bez důkazu, pouze uvedeme odkaz na literaturu, kde je důkaz podán.

**Lemma 7.** *Nechť  $X \subset \mathbb{R}^n$  a  $Y \subset \mathbb{R}^m$  jsou kompaktní konvexní množiny a nechť reálná funkce  $n + m$  reálných proměnných  $\psi(x, y)$  je konvexní v proměnné  $x$  pro všechna  $y \in Y$  a konkávní v proměnné  $y$  pro všechna  $x \in X$ . Potom platí*

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \psi(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \psi(x, y).$$

**Důkaz.** Důkaz uveden například v Fan (1953), theorem 1. □

### 3.1 Optimalizace na základě CVaR

Nejprve si musíme odvodit, jak najít optimální skladbu portfolia  $x^* \in X$  tak, aby byla  $\text{CVaR}_\alpha(x^*)$  minimální. O tom hovoří následující věta.

**Věta 8** (minimalizace CVaR). *Nechť  $X \subset \mathbb{R}^n$  a  $\alpha \in (0, 1)$ . Potom platí*

$$\min_{x \in X} \text{CVaR}_\alpha(x) = \min_{(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta),$$

kde  $F_\alpha(x, \zeta)$  je stejná funkce jako ve větě 2. Navíc platí

$$\begin{aligned} (x^*, \zeta^*) \in \operatorname{argmin}_{(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in X} \operatorname{CVaR}_\alpha(x) \text{ a současně } \zeta^* \in \operatorname{argmin}_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x^*, \zeta). \end{aligned}$$

(viz Rockafellar a Uryasev (2002), theorem 14, převzato včetně důkazu.)

**Důkaz.** První část věty plyne ze skutečnosti, že pokud chceme minimalizovat funkci více proměnných, můžeme minimalizovat tuto funkci nejprve v jedné proměnné a poté vzniklou funkci minimalizovat ve zbylých proměnných. Konkrétně v našem případě z věty 2 víme, že

$$\operatorname{CVaR}_\alpha(x) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta).$$

Jako důsledek dostáváme

$$\min_{x \in X} \operatorname{CVaR}_\alpha(x) = \min_{x \in X} \min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta) = \min_{(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta),$$

kde poslední rovnost plyne z výše uvedeného.

Druhá část tvrzení už je jen triviální důsledek první části. □

Ačkoliv někdy může být užitečné umět najít portfolio s nejmenší  $\operatorname{CVaR}_\alpha$ , v praxi obvykle chceme přidat omezení na minimální požadovanou střední hodnotu výnosu portfolia. Toho docílíme přidáním podmínky

$$\mu \leq \mathbb{E}[x^T \mathbb{Y}], \quad (3.1)$$

kde  $\mu \in \mathbb{R}$  vyjadřuje právě minimální požadovanou střední hodnotu výnosu portfolia. Snadno si uvědomíme, že výraz na pravé straně nerovnosti (3.1) je právě střední hodnota výnosu portfolia. Nyní můžeme formulovat následující důsledek.

**Důsledek.** Nechť  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Potom je úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizovat } \operatorname{CVaR}_\alpha(x) \text{ za podmínek } x \in X, \\ &\mu \leq \mathbb{E}[x^T \mathbb{Y}] \end{aligned}$$

ekvivalentní úloze

$$\begin{aligned} &\text{minimalizovat } \theta \text{ za podmínek } x \in X, \\ &\theta \geq F_\alpha(x, \zeta), \\ &\mu \leq \mathbb{E}[x^T \mathbb{Y}]. \end{aligned}$$

**Důkaz.** Z věty 2 máme, že

$$\operatorname{CVaR}_\alpha(x) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta).$$

Nyní si musíme uvědomit, že důsledkem tohoto platí, že pro libovolné pevné  $x \in X$  je tvrzení

$$\operatorname{CVaR}_\alpha(x) \leq \theta$$

ekvivalentní tvrzení

$$\exists \zeta^* \in \mathbb{R} : F_\alpha(x, \zeta^*) \leq \theta.$$

Z tohoto už přímo plyne tvrzení důsledku. □

Na tomto místě se budeme věnovat výpočetním aspektům takto formulované optimalizační úlohy. Zavedeme dva další omezující předpoklady s cílem převést tuto optimalizační úlohu do lineárního tvaru.

Zaprvé budeme za ztrátovou funkci uvažovat pouze výnosy portfolia s opačným znaménkem, tedy  $f$  bude mít nadále tvar

$$f(x, \mathbb{Y}) = -x^T \mathbb{Y}.$$

Zadruhé budeme o vektoru budoucích výnosů aktiv  $\mathbb{Y}$  předpokládat, že má diskrétní rozdělení s konečnou množinou možných hodnot

$$H = \{Y_1, \dots, Y_K\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{pro nějaké } K \in \mathbb{N}.$$

Na tomto místě si musíme uvědomit, že zavedení takovýchto předpokladů není pro reálné aplikace příliš omezující. Naše volba ztrátové funkce je velmi intuitivní a v praxi použitelná. Jelikož tyto optimalizační úlohy budeme chtít aplikovat na data z finančních trhů, musíme si uvědomit, že ceny finančních aktiv nejsou na burzách kótovány spojitě, nýbrž diskrétně. Proto ani náš druhý předpoklad není v praxi příliš omezující.

Použitím těchto předpokladů přejde nerovnost

$$\theta \geq F_\alpha(x, \zeta)$$

v nerovnost

$$\theta \geq \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^K \pi_k |f(x, Y_k) - \zeta|^+,$$

kde  $\pi_k = P(\mathbb{Y} = Y_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Tímto jsme stále nezískali lineární nerovnost, ale snadno se můžeme přesvědčit, že tuto nerovnost můžeme v zadání optimalizační úlohy ekvivalentně nahradit soustavou lineárních nerovností

$$\begin{aligned} \theta &\geq \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^K \pi_k u_k, \\ u_k &\geq f(x, Y_k) - \zeta, \quad k = 1, \dots, K, \\ u_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

kde jsme si zavedli nové pomocné nezáporné reálné proměnné  $u_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Podobně přejde nerovnost

$$\mu \leq E[x^T \mathbb{Y}]$$

na nerovnost

$$\mu \leq \sum_{k=1}^K \pi_k x^T Y_k,$$

což je také lineární nerovnost.

Pokud ještě navíc zvolíme množinu  $X \in \mathbb{R}^n$  v takovém tvaru, aby se dala zadat pomocí konečného počtu lineárních omezení, přejde výše uvedená úloha na úlohu lineárního programování. V našem případě budeme uvažovat množinu  $X$  ve tvaru

$$X = \mathbb{R}_+^n,$$

což odpovídá možnosti při investování zaujmout jen nezáporných pozic.

Nakonec přidáme ještě podmínu na počáteční součet vah jednotlivých aktiv v portfoliu  $w_0 \in (0, \infty)$ , která bude mít následující tvar

$$w_0 = e_n^T x,$$

kde  $e_n$  je vektor samých jednotek délky  $n$ .

Na tomto místě už můžeme formulovat znění optimalizační úlohy v lineárním tvaru, která je aplikovatelná na reálné situace. Následující tvrzení vyjadřuje pouze znění důsledku věty 8 se zavedením dvou výše uvedených doplňujících předpokladů.

**Tvrzení 9** (minimalizace CVaR jako úloha lineárního programování). *Nechť náhodný vektor  $\mathbb{Y}$  má konečné diskrétní rozdělení, ztrátová funkce nechť má tvar  $f(x, \mathbb{Y}) = -x^T \mathbb{Y}$  a dále nechť jsou určeny konstanty  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  a  $w_0 \in (0, \infty)$  vyjadřující požadovanou minimální střední hodnotu výnosu portfolia, hladinu CVaR, resp. počáteční součet vah aktiv v portfoliu. Potom z věty 8 a výše uvedeného plynne, že úloha*

$$\begin{aligned} & \text{minimalizovat } \text{CVaR}_\alpha(x) \text{ za podmínek } x \geq 0, \\ & w_0 = e_n^T x, \\ & \mu \leq \mathbb{E}[x^T \mathbb{Y}] \end{aligned}$$

je ekvivalentní úloze

$$\text{minimalizovat } \theta \text{ za podmínek } x \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\theta \geq \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^K \pi_k u_k, \quad (3.3)$$

$$\mu \leq \sum_{k=1}^K \pi_k x^T Y_k, \quad (3.4)$$

$$w_0 = e_n^T x, \quad (3.5)$$

$$u_k \geq -x^T Y_k - \zeta, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.6)$$

$$u_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.7)$$

což je úloha lineárního programování.

Toto tvrzení je přímo aplikovatelné na řešení reálných situací a ve čtvrté kapitole této práce budou některé výsledky těchto aplikací ukázány.

## 3.2 Optimalizace na základě WCVaR

Nyní si popíšeme, jak formulovat optimalizační úlohu výběru optimální skladby portfolia v případě, že jako míru rizika budeme používat WCVaR. Na začátku zavedeme stejné omezující předpoklady jako v podkapitole 3.1, tedy budeme uvažovat pouze náhodné vektory budoucích výnosů aktiv  $\mathbb{Y}$ , které mají diskrétní rozdělení s konečnou množinou možných hodnot

$$H = \{Y_1, \dots, Y_K\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{pro nějaké } K \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Také budeme uvažovat ztrátovou funkci pouze ve tvaru

$$f(x, \mathbb{Y}) = -x^T \mathbb{Y} \quad (3.9)$$

a podobně jako v předchozí části, budeme uvažovat množinu  $X$  ve tvaru

$$X = \mathbb{R}_+^n.$$

Tyto předpoklady nebudeme pro jednoduchost zápisu opakovat pro každé tvrzení nebo větu v této podkapitole zvlášť, ale budeme je vždy považovat za splněné.

Jak už bylo popsáno v kapitole 1, náhodný vektor budoucích výnosů aktiv  $\mathbb{Y}$  jsme považovali za měřitelné zobrazení z nějakého pravděpodobnostního prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  do  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ . Nyní se zaměříme na případ, kdy pravděpodobnostní míra  $P$  na prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  není určena jednoznačně, ale budeme o ní pouze předpokládat, že je elementem nějaké množiny  $M$  pravděpodobnostních mér na prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Tato představa je sice užitečná z teoretického hlediska, ale z hlediska praktických výpočtů je lepší pracovat s rozdělením vektoru  $\mathbb{Y}$ , tedy s pravděpodobnostní mírou indukovanou na  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ . S ohledem na předchozí omezující předpoklady je tato míra určena vektorem pravděpodobností

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K), \quad \text{kde } \pi_i = P(\mathbb{Y} = Y_i). \quad (3.10)$$

Vzhledem k tomu, že míra  $P$  na prostoru  $(\Omega, \mathcal{A})$  může být libovolná míra z množiny  $M$ , bude existovat množina  $R$  rozdělení na  $H$  indukovaná zobrazením  $\mathbb{Y}$  a množinou  $M$  pravděpodobnostních mér na  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Nadále budeme pracovat s touto množinou  $R$ , kterou budeme pokládat za množinu  $K$ -rozměrných vektorů pravděpodobností podle výrazu (3.10).

Celou situaci si můžeme trochu zjednodušeně představovat tak, že máme konečnou množinu  $H$  možných realizací výnosů aktiv a volbou vektoru pravděpodobností  $\pi \in R$  pouze říkáme, jak je která realizace pravděpodobná.

Nechť máme dál zadáno  $\alpha \in (0, 1)$  a konkrétní volbu portfolia  $x \in X$ . Potom zadefinujeme pomocnou funkci  $G$  následovně

$$G_\alpha(x, \zeta, \pi) = \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^K \pi_i |f(x, Y_i) - \zeta|^+,$$

kde  $f$  je ztrátová funkce, kterou uvažujeme pouze ve tvaru jako ve výrazu (3.9).

Následující věta hovoří o tom, jak můžeme ve výše popsaném případě WCVaR vypočítat.

**Věta 10** (minimalizační formule WCVaR). *Nechť  $\alpha \in (0, 1)$  a navíc  $R \subset \mathbb{R}^K$  je kompaktní konvexní množina, potom platí*

$$\text{WCVaR}_\alpha(x) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} \max_{\pi \in R} G_\alpha(x, \zeta, \pi).$$

(viz Zhu a Fukushima (2009), theorem 2, převzato včetně důkazu.)

**Důkaz.** Bude platit, že

$$\text{WCVaR}_\alpha(x) = \sup_{\pi \in R} \min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi), \quad (3.11)$$

neboť pro pevné  $\pi \in R$  je výraz  $\min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi)$  roven  $\text{CVaR}_\alpha(x)$ , kde uvažujeme pevné rozdělení výnosů portfolia  $\pi$  (plyne z věty 2). Nyní už tedy musíme jen dokázat, že lze prohodit operace  $\min_{\zeta \in \mathbb{R}}$  a  $\sup_{\pi \in R}$  a následně  $\sup_{\pi \in R}$  nahradit  $\max_{\pi \in R}$ . Toho docílíme použitím lemmatu 7, které ale nemůžeme použít rovnou, neboť  $\mathbb{R}$  není kompaktní množina a nemáme dokázány potřebné předpoklady o funkci  $G_\alpha$ . Nejprve tedy musíme ukázat, že existuje neprázdný uzavřený interval (tj. kompaktní a konvexní)  $I$  takový, že platí

$$\min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi) = \min_{\zeta \in I} G_\alpha(x, \zeta, \pi).$$

Z kompaktnosti (tj. uzavřenosti a omezenosti) množiny  $R$  plyne, že lze najít  $K$ -rozměrnou krychli tak, aby množina  $R$  byla podmnožinou této krychle. Vrcholy této krychle budeme značit  $v_1, \dots, v_{2^K}$ . Výše uvedené tvrzení lze vyjádřit vztahem

$$R \subset \left\{ v \in \mathbb{R}^K : v = \sum_{i=1}^{2^K} v_i \lambda_i; \sum_{i=1}^{2^K} \lambda_i = 1; \lambda_i \geq 0; i = 1, \dots, 2^K \right\},$$

kde množina na pravé straně je právě naše krychle. Množina

$$\arg \min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, v_i)$$

pro  $i = 1, \dots, 2^K$  je uzavřený interval  $I_i$  (plyne z věty 2) a pro konvexní kombinaci  $\pi$  z bodů  $v_i$  tedy bude platit

$$\arg \min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi) \subset \left[ \min \left\{ \bigcup_{i=1}^{2^K} I_i \right\}, \max \left\{ \bigcup_{i=1}^{2^K} I_i \right\} \right] = I.$$

Tímto jsme tedy dokázali existenci uzavřeného intervalu  $I$ . Z toho plyne, že platí

$$\sup_{\pi \in R} \min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi) = \max_{\pi \in R} \min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi) = \max_{\pi \in R} \min_{\zeta \in I} G_\alpha(x, \zeta, \pi), \quad (3.12)$$

kde první rovnost plyne z faktu, že spojitá funkce  $\min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi)$  nabývá na kompaktní množně  $R$  svého maxima, a druhá rovnost je jen přepis výše uvedeného.

Funkce  $G_\alpha(x, \zeta, \pi)$  je pro pevné  $x$  konvexní v proměnné  $\zeta$ , což plyne přímo z věty 2, a afinní (tedy také konkávní) v proměnné  $\pi$ . Díky tomu z lemmatu 7 dostáváme, že platí

$$\max_{\pi \in R} \min_{\zeta \in I} G_\alpha(x, \zeta, \pi) = \min_{\zeta \in I} \max_{\pi \in R} G_\alpha(x, \zeta, \pi). \quad (3.13)$$

Nyní si musíme uvědomit, že určitě platí

$$\min_{\zeta \in I} \max_{\pi \in R} G_\alpha(x, \zeta, \pi) \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}} \max_{\pi \in R} G_\alpha(x, \zeta, \pi). \quad (3.14)$$

Ze známé minimaxové nerovnosti dostáváme, že musí platit

$$\inf_{\zeta \in \mathbb{R}} \max_{\pi \in R} G_\alpha(x, \zeta, \pi) \geq \max_{\pi \in R} \min_{\zeta \in \mathbb{R}} G_\alpha(x, \zeta, \pi), \quad (3.15)$$

kde jsme na pravé straně výraz  $\inf$  nahradili výrazem  $\min$ , neboť víme, že se infima nabývá. Pomocí rovnic (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) a (3.15) dostáváme, že platí

$$\text{WCVaR}_\alpha(x) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} \max_{\pi \in R} G_\alpha(x, \zeta, \pi),$$

čímž je důkaz dokončen. □

Nyní bychom chtěli tuto úlohu ekvivalentně přeformulovat tak, aby byla řešitelná pomocí lineárního programování. K tomu využijeme důsledku věty 8 a s využitím dalších předpokladů o tvaru ztrátové funkce  $f$  podobným způsobem zformulujeme následující důsledek, jehož platnost triviálně plyne z výše uvedeného.

**Důsledek.** Optimalizační úloha uvedená ve větě 10 je ekvivalentní úloze

$$\begin{aligned} & \text{minimalizovat } \theta \text{ za podmínek: } \theta \geq \max_{\pi \in R} \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \pi^T u, \\ & u_k \geq -x^T Y_k - \zeta, \quad k = 1, \dots, K, \\ & u_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.16)$$

kde jsme zavedli nové nezáporné reálné proměnné  $u = (u_1, \dots, u_K) \in \mathbb{R}^K$ .

Jediný důvod, proč takovouto úlohu nelze řešit pomocí lineárního programování je operace  $\max_{\pi \in R}$  v nerovnici (3.16). Nyní si ukážeme, jak tuto nerovnici ekvivalentně formulovat tak, aby byla pouze lineární. K tomu ale budeme potřebovat přidat ještě další omezující předpoklady na podobu množiny  $R$ . (viz Zhu a Fukushima (2009))

Označme si  $\pi_0 \in R$  nějaké výchozí rozdělení náhodného vektoru budoucích výnosů aktiv  $\mathbb{Y}$ . Nadále budeme uvažovat množinu  $R$  pouze ve tvaru

$$R = \{\pi \in \mathbb{R}^K : \pi = \pi_0 + \eta; \eta \in \mathbb{R}^K; e_K^T \eta = 0; \underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}\}, \quad (3.17)$$

kde  $e_K$  značí vektor samých jednotek délky  $K$ . Omezení  $e_K^T \eta = 0$  je zavedeno z důvodu, aby součet složek vektoru  $\pi$  zůstal roven 1 a tedy  $\pi$  mohlo být pravděpodobnostní rozdělení. Parametry  $\underline{\eta}, \bar{\eta} \in \mathbb{R}^K$  musí být v konkrétním případě voleny tak, aby podmírkou  $\underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}$  bylo zaručeno, že všechny složky vektoru  $\pi$  jsou nezáporné.

**Poznámka.** Množina  $R$  zadefinovaná vztahem (3.17) je určitě kompaktní a konvexní, vyhovuje tedy předpokladům věty 10.

**Poznámka.** Takto zadefinovaná množina rozdělení se v anglické literatuře často označuje jako box uncertainty, neboť geometricky si tuto množinu lze představovat jako krabičku.

S využitím tohoto předpokladu můžeme nerovnici (3.16) upravit do tvaru

$$\max_{\pi \in R} \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \pi^T u = \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \pi_0^T u + \frac{1}{1-\alpha} \max_{\{\underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}; e_K^T \eta = 0\}} \eta^T u. \quad (3.18)$$

Nyní už můžeme vyslovit větu o minimalizaci  $\text{WCVaR}_\alpha(x)$  jako úloze lineárního programování. Navíc si jako v případě CVaR přidáme požadavek na počáteční součet vah aktiv v portfoliu.

**Důsledek.** Nechť  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $w_0 \in (0, \infty)$  a nechť máme množinu  $R$  rozdělení náhodného vektoru  $\mathbb{Y}$  jako v (3.17), potom úloha

$$\begin{aligned} & \text{minimalizovat } \text{WCVaR}_\alpha(x) \text{ za podmínky } 0 \leq x, \\ & w_0 = e_K^T x \end{aligned}$$

je ekvivalentní úloze

$$\begin{aligned} & \text{minimalizovat } \theta \text{ za podmínek } 0 \leq x, \\ & w_0 = e_n^T x, \\ & \theta \geq \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \pi_0^T u + \frac{1}{1-\alpha} (\underline{\eta}^T \xi + \bar{\eta}^T \omega), \\ & 0 \leq \xi, \\ & 0 \geq \omega, \\ & u_k = z + \xi_k + \omega_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & u_k \geq -x^T Y_k - \zeta, \quad k = 1, \dots, K, \\ & u_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

(viz Zhu a Fukushima (2009), proposition 2, převzato včetně důkazu.)

**Důkaz.** Budeme se zabývat dílčí optimalizační úlohou v nerovnici (3.18) ve tvaru

$$\begin{aligned} & \text{maximalizovat } \eta^T u \text{ za podmínek } \underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}, \\ & 0 = e_K^T \eta, \end{aligned}$$

kde  $u$  nyní považujeme za konstantní vektor a maximaluzejeme jen v proměnné  $\eta$ . Tato úloha lze převést na duální úlohu, která má následující podobu

$$\begin{aligned} & \text{minimalizovat } \underline{\eta}^T \xi + \bar{\eta}^T \omega \text{ za podmínek } u_k = z + \xi_k + \omega_k, \quad k = 1, \dots, K, \\ & 0 \leq \xi, \\ & 0 \geq \omega, \end{aligned}$$

kde zavádíme nové proměnné  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^K$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^K$ .

Z teorie duality v lineárním programování plyne, že hodnota účelové funkce duální úlohy v libovolném přípustném bodě bude vždy větší nebo rovna optimálnímu řešení původní úlohy, přičemž rovnost nastane právě v případě optimálního řešení. Můžeme tedy nahradit výraz

$$\max_{\{\underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}, e_K^T \eta = 0\}} \eta^T u$$

výrazem

$$\underline{\eta}^T \xi + \bar{\eta}^T \omega$$

za současného přidání nerovnic

$$\begin{aligned} u_k &= z + \xi_k + \omega_k, & k = 1, \dots, K, \\ 0 &\leq \xi, \\ 0 &\geq \omega \end{aligned}$$

do podmínek optimalizační úlohy, aniž by se změnilo její řešení. S využitím tohoto faktu už je jednoduché si uvědomit, že obě úlohy jsou skutečně ekvivalentní.  $\square$

Tímto jsme si odvodili způsob, jak najít portfolio s minimálním WCVaR $_{\alpha}$ . Teď se zaměříme na problém minimalizace WCVaR $_{\alpha}$  za podmínky na minimální požadovanou střední hodnotu výnosu portfolia v nejhorším případě, který volbou množiny  $R$  připouštíme. Všechny omezující předpoklady, které jsme zavedli na začátku této podkapitoly, nadále zůstávají v platnosti včetně tvaru množiny  $R$ . Pro další práci je výhodné zavést následující značení. Zadefinujeme si matici  $Z \in \mathbb{R}^{K \times n}$  jako

$$Z = \begin{pmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ \vdots \\ Y_K^T \end{pmatrix},$$

kde  $Y_1, \dots, Y_K$  jsou přípustné hodnoty výnosů aktiv z definice množiny  $H$  ve výrazu (3.8).

Nyní už můžeme formulovat úlohu minimalizace WCVaR $_{\alpha}$  za podmínky na minimální střední hodnotu výnosu portfolia v nejhorším případě, který volbou množiny  $R$  připouštíme, jako úlohu lineárního programování.

**Tvrzení 11** (minimalizace WCVaR jako úloha lineárního programování). *Nechť  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $w_0 \in (0, \infty)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  a nechť máme množinu  $R$  přípustných rozdělení náhodného vektoru budoucích výnosů aktiv jako v (3.17). Potom úloha*

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat } \text{WCVaR}_{\alpha}(x) \text{ za podmínky } \mu &\leq \min_{\pi \in R} E[x^T \mathbb{Y}], \\ w_0 &= e_n^T x, \\ 0 &\leq x \end{aligned} \tag{3.19}$$

je ekvivalentní úloze

$$\text{minimalizovat } \theta \text{ za podmínek } 0 \leq x, \quad (3.20)$$

$$w_0 = e_n^T x, \quad (3.21)$$

$$Zx = \delta e_K + \tau + \nu, \quad (3.22)$$

$$\mu \leq (Zx)^T \pi_0 + \bar{\eta}^T \tau + \underline{\eta}^T \nu, \quad (3.23)$$

$$\theta \geq \zeta + \frac{1}{1-\alpha} \pi_0^T u + \frac{1}{1-\alpha} (\bar{\eta}^T \xi + \underline{\eta}^T \omega), \quad (3.24)$$

$$0 \geq \tau, \quad (3.25)$$

$$0 \leq \nu, \quad (3.26)$$

$$0 \leq \xi, \quad (3.27)$$

$$0 \geq \omega, \quad (3.28)$$

$$u_k = z + \xi_k + \omega_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.29)$$

$$u_k \geq -x^T Y_k - \zeta, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.30)$$

$$0 \leq u_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.31)$$

kde  $\tau \in \mathbb{R}^K$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^K$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ . Toto je úloha lineárního programování.

(viz Zhu a Fukushima (2009), chapter 3, převzato včetně důkazu.)

**Důkaz.** Budeme vycházet z optimalizační úlohy formulované v předchozím důsledku. Přidání podmínky na minimální požadovanou střední hodnotu výnosu  $\mu \in \mathbb{R}$  portfolia v nejhorším možném případě, který připouštíme, realizujeme přidáním nerovnosti (3.19) do podmínek optimalizační úlohy. Tuto nerovnost můžeme s využitím znalosti podoby množiny  $R$  dále upravit do tvaru

$$(Zx)^T \pi_0 + \min_{\{\underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}; e_K^T \eta = 0\}} (Zx)^T \eta \geq \mu.$$

Tato nová nerovnost není lineární, budeme ji tedy muset do lineárního tvaru přoreformulovat. Podobně jako v předchozím případě se zaměříme na dílčí optimalizační úlohu

$$\begin{aligned} &\text{minimalizovat } (Zx)^T \eta \text{ za podmínek } 0 = e_K^T \eta, \\ &\quad \underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}. \end{aligned}$$

Toto je úloha lineárního programování. Můžeme k ní najít duální úlohu, která má tvar

$$\begin{aligned} &\text{maximalizovat } \bar{\eta}^T \tau + \underline{\eta}^T \nu \text{ za podmínek } Zx = \delta e_K + \tau + \nu, \\ &\quad 0 \geq \tau, \\ &\quad 0 \leq \nu, \end{aligned}$$

kde jsme zavedli nové proměnné  $\tau \in \mathbb{R}^K$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^K$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$  a  $e_K$  značí vektor samých jednotek délky  $K$ .

Z teorie duality v lineárním programování plyne, že hodnota účelové funkce duální úlohy v libovolném přípustném bodě musí být menší nebo rovna optimálnímu řešení původní úlohy, přičemž rovnost nastává právě v případě optimálního řešení. S využitím tohoto faktu už je jednoduché si uvědomit, že můžeme nahradit nerovnici

$$(Zx)^T \pi_0 + \min_{\{\underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}; e_K^T \eta = 0\}} (Zx)^T \eta \geq \mu$$

v podmínkách optimalizační úlohy soustavou nerovnic

$$\begin{aligned} \mu &\leq (Zx)^T \pi_0 + \bar{\eta}^T \tau + \underline{\eta}^T \nu, \\ Zx &= \delta e_K + \tau + \nu, \\ 0 &\geq \tau, \\ 0 &\leq \nu, \end{aligned}$$

aniž by se změnilo řešení této optimalizační úlohy. Tímto je dokázáno, že obě optimalizační úlohy jsou ekvivalentní. □

Toto tvrzení je přímo aplikovatelné na řešení reálných situací a ve čtvrté kapitole této práce budou některé výsledky těchto aplikací ukázány.

**Poznámka.** Uvažovali jsme jen velmi specifickou volbu množiny  $R$ . Například v práci Zhu a Fukushima (2009) můžeme najít odvození formulace optimalizačních úloh pro množinu  $R$  tvaru elipsoidu (anglicky ellipsoidal uncertainty) nebo pro smíšené rozdělení náhodného vektoru výnosů  $\mathbb{Y}$ . Tyto úlohy je možné také efektivně numericky řešit, ale nejsou to úlohy lineárního programování. Tato práce se jimi dále zabývat nebude.

# Kapitola 4

## Ukázky aplikací na reálná data

Při konkrétních aplikacích výše popsaných postupů na reálné situace narazíme na problém, že neznáme rozdelení výnosů aktiv v budoucnu. Přirozeně tedy musíme toto rozdelení nějakým způsobem odhadovat z pozorování chování výnosů aktiv v minulosti, kterou známe. Jelikož cílem této práce není popisovat statistické metody odhadu budoucích výnosů aktiv, budeme postupovat tím způsobem, že za odhad distribuční funkce budoucích výnosů aktiv vezmeme empirickou distribuční funkci výnosů aktiv v minulém období. Tento model odhadování budoucích výnosů aktiv je velice zjednodušený, ale vzhledem k rozsahu této práce si s ním vystačíme. Zdůvodnění, proč je z hlediska statistiky rozumné odhadovat rozdelení budoucích výnosů aktiv právě tímto způsobem, je nad rámec této práce a proto zde nebude uvedeno.

Jako data, na základě kterých budeme odhadovat rozdelení budoucích výnosů aktiv, byly zvoleny týdenní výnosy 11 vybraných akciových titulů z americké burzy cenných papírů v rozmezí 31. 1. 2005 až 26. 12. 2006 (celkem 100 týdnů). Konkrétně byly vybrány akcie s označením AAPL, AMZN, BA, BAC, CSCO, CVX, F, GOOG, MSFT, NKE, XOM. Procentuální výnosy se počítají ze zavíracích cen akcií na konci týdne očištěných o výplatu dividend. Tato data byla čerpána z webového portálu Yahoo Finance<sup>1</sup> a jsou k nalezení v příloze této práce. Počet akciových titulů a délka sledovaného období byly voleny tak, aby byla tato data co možná nejreprezentativnější (tj. aby dat bylo co nejvíce) a aby současně výše popsané úlohy na těchto datech byly řešitelné v rozumném výpočetním čase. Při této volbě vstupních dat se délka běhu jednoho výpočtu optimalizační úlohy na běžném pracovním notebooku pohybovala kolem 15 sekund. Konkrétní volba akciových titulů a začátku časového úseku byla provedena víceméně náhodně a není pro účely této práce příliš důležitá, proto tomuto tématu nebude dále věnována pozornost.

Numerické výpočty byly provedeny pomocí použití matematického softwaru Wolfram Mathematica 10.3 Student Edition. Všechny optimalizační úlohy byly řešeny pomocí dvojfázového simplexového algoritmu, který je v použitém softvaru implementován. Zdrojové kódy skriptů, které byly k výpočtům použity, lze najít v příloze č. 1 této práce<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup><http://finance.yahoo.com/>

<sup>2</sup>Pomocí skriptů v příloze lze spočítat CVaR a WCVaR optimálního portfolia pro zadané vstupní parametry a vstupní data. Pro výpočet výsledků uvedených dále byly tyto skripty volány v cyklu pro různé vstupní hodnoty parametrů.

Jelikož tyto zdrojové kódy nejsou nijak rozsáhlé, jako dokumentace poslouží výhradně komentáře v nich, které jsou voleny tak, aby bylo jasné vidět propojení mezi teoretickými formulacemi optimalizačních úloh, které jsou uvedeny ve 3. kapitole této práce, a jejich konkrétní implementací.

## 4.1 Optimalizace na základě CVaR

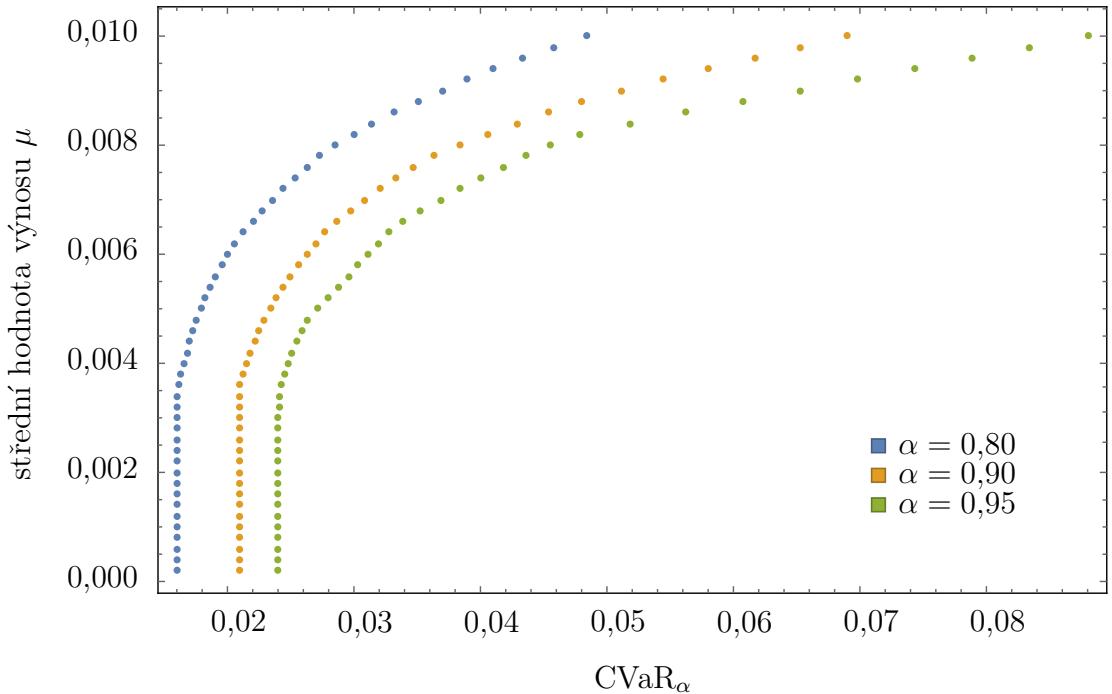
Na tomto místě jsou uvedeny výsledky optimalizační úlohy hledání portfolia s minimálním CVaR za podmínky na minimální požadovanou střední hodnotu výnosu portfolia, která je uvedena v tvrzení 9, na výše popsaných datech a pro volbu počátečního součtu vah aktiv v portfoliu  $w_0 = 1$ . V tabulce 4.1 můžeme vidět hodnoty  $\text{CVaR}_\alpha$  optimálního portfolia pro různé volby hladiny  $\alpha$  a různé požadované střední hodnoty výnosu portfolia. Na obrázku 4.1 jsou tato data znázorněna graficky (v grafu je ve skutečnosti zaneseno více hodnot než v tabulce).

Z těchto dat můžeme vidět, že pro nízké požadované střední hodnoty výnosu portfolia je omezení na střední hodnotu výnosu v optimalizační úloze neaktivní. Naopak pro vysoké požadované střední hodnoty výnosu se optimalizační úloha stává neřešitelnou (tj. nelze nalézt portfolio s požadovanou střední hodnotou výnosu). Už ze zadání optimalizační úlohy je vidět, že o řešitelnosti nebo neřešitelnosti nerozhoduje hladina  $\alpha$ , ale pouze požadovaná střední hodnota výnosu. Nejvyšší požadovaná střední hodnota výnosu, pro kterou bude ještě úloha řešitelná, je zřejmě nejvyšší z průměrných výnosů akcií za minulé časové období. V případě, že zvolíme požadovanou střední hodnotu výnosu nižší než nejmenší z průměrných výnosů akcií za minulé období, bude určitě toto omezení v optimalizační úloze neaktivní (je možné, že bude neaktivní i pro vyšší hodnoty požadovaných středních hodnot výnosu).

Na obrázku 4.1 je vidět přibližný tvar křivky hranice eficientních portfolií, na které leží všechna optimální portfolia (anglicky označované efficient frontier). Všechna dosažitelná portfolia leží na nebo pod touto křivkou.

Tabulka 4.1: Hodnoty CVaR optimálních portfolií pro různé hodnoty parametrů

Střední hodnota výnosu $\mu$	0,8	0,9	0,95
0,002	0,01601	0,02090	0,02403
0,003	0,01601	0,02090	0,02403
0,004	0,01657	0,02148	0,02474
0,005	0,01790	0,02339	0,02716
0,006	0,02006	0,02625	0,03114
0,007	0,02361	0,03088	0,03684
0,008	0,02853	0,03840	0,04549
0,009	0,03702	0,05109	0,06525
0,010	0,04842	0,06899	0,08801
0,011	—	—	—



Obrázek 4.1: Hranice eficientních portfolií při použití  $\text{CVaR}_\alpha$  jako míry rizika

## 4.2 Optimalizace na základě WCVaR

Na tomto místě jsou uvedeny výsledky optimalizační úlohy hledání portfolia s minimálním WCVaR za podmínky na minimální požadovanou střední hodnotu výnosu portfolia v nejhorším případě, který volbou množiny  $R$  připouštíme, na výše popsaných datech a pro volbu počátečního součtu vah aktiv v portfoliu  $w_0 = 1$ . Formulace této optimalizační úlohy je uvedena v tvrzení 11. Množinu  $R$  jsme uvažovali pouze ve tvaru uvedeném v (3.17) a pro jednoduchost byly parametry rozměrů množiny  $R$  voleny pouze ve tvaru

$$-\underline{\eta} = \bar{\eta} = re_K,$$

kde  $e_K$  označuje vektor samých jednotek délky<sup>3</sup>  $K$  a  $r \in [0, \frac{1}{K}]$  je jediný parametr<sup>4</sup>, který bude tvar množiny  $R$  popisovat. V tabulkách 4.2 a 4.3 můžeme vidět hodnoty  $\text{WCVaR}_\alpha$  optimálních portfolií pro různé hodnoty parametru  $\alpha$ , různé minimální požadované střední hodnoty výnosu portfolia a různé hodnoty rozměru množiny  $R$  (tj. různé hodnoty parametru  $r$ ). Tato data jsou také graficky znázorněna na obrázcích 4.2 a 4.3, kde lze vidět přibližné tvary křivek hranice eficientních portfolií (v grafech je zaneseno více dat než v tabulkách). Všechna dosažitelná portfolia leží na nebo pod těmito křivkami.

Podobně jako v předchozím případě můžeme vidět, že pro malé požadované střední hodnoty výnosu je toto omezení neaktivní a naopak pro vysoké požadované střední hodnoty výnosu se optimalizační úloha stává neřešitelnou. Je zajímavé si všimnout, že řešitelnost úlohy také závisí na volbě parametru  $r$ , čím vyšší

<sup>3</sup> $K$  v tomto případě označuje počet pozorování výnosů aktiv v minulosti.

<sup>4</sup>Takovou volbou parametru  $r$  bude určitě splněna podmínka na  $\underline{\eta}$  a  $\bar{\eta}$  z definice množiny  $R$  (tj. z výrazu 3.17).

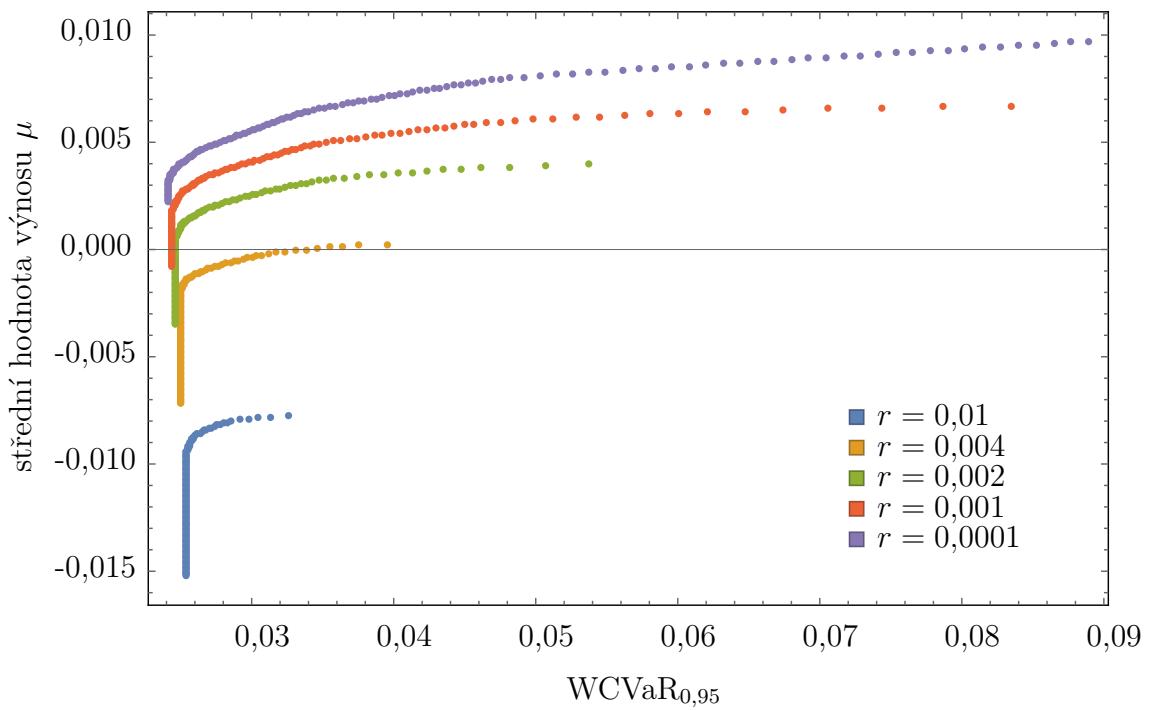
zvolíme hodnotu tohoto parametru, tím spíše se úloha stává neřešitelnou, což odpovídá intuitivní představě, že při větší nejistotě rozdělení budoucích výnosů aktiv (tj. při vyšší hodnotě parametru  $r$ ) je obtížnější nalézt portfolio s určitou střední hodnotou výnosu v nejhorším případě, který uvažujeme (viz výraz 3.19). Pokud bychom uvažovali parametr  $r$  nulový, přešla by tato úloha na úlohu minimizace CVaR $_{\alpha}$ .

Tabulka 4.2: Hodnoty WCVaR na hladině  $\alpha = 0,95$  optimálních portfolií pro různé hodnoty parametrů  $r$  a  $\mu$

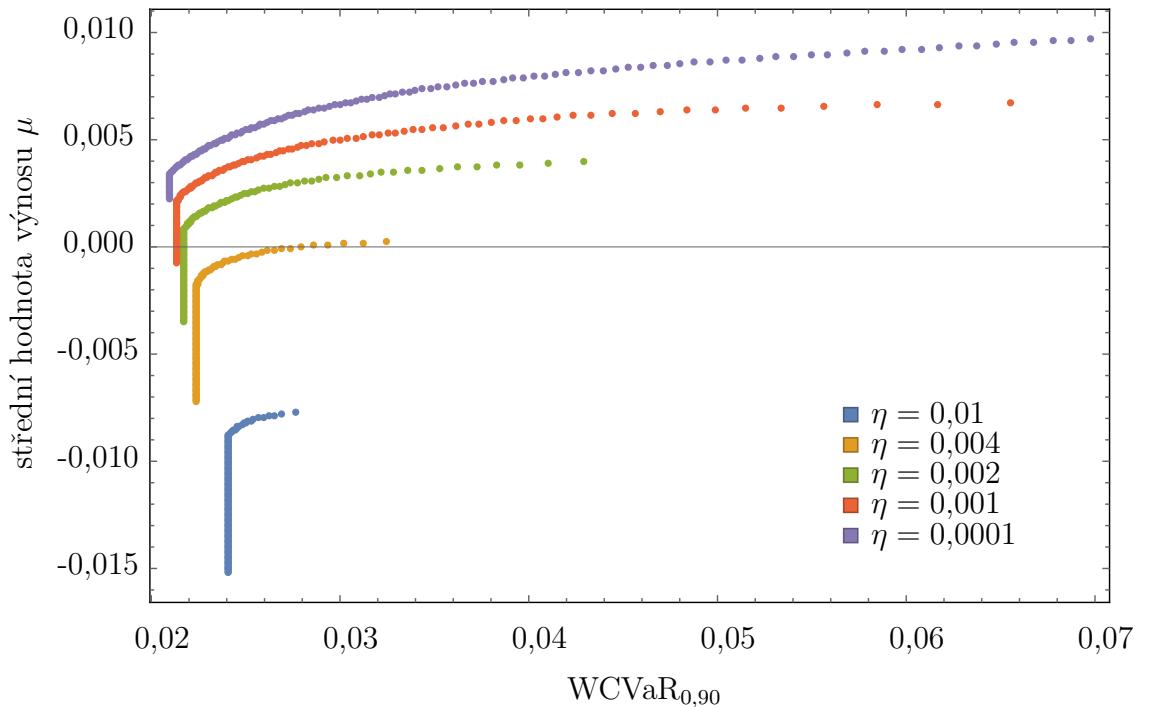
Střední hodnota výnosu $\mu$	0,0001	0,001	0,002	0,004	0,01
parametr $r$					
-0,010	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	0,02536
-0,009	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	0,02566
-0,008	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	0,02859
-0,007	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	—
-0,006	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	—
-0,005	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	—
-0,004	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	—
-0,003	0,02407	0,02437	0,02466	0,02495	—
-0,002	0,02407	0,02437	0,02466	0,02496	—
-0,001	0,02407	0,02437	0,02466	0,02654	—
0	0,02407	0,02437	0,02466	0,03383	—
0,001	0,02407	0,02437	0,02498	—	—
0,002	0,02407	0,02451	0,02722	—	—
0,003	0,02408	0,02583	0,03308	—	—
0,004	0,02503	0,02952	0,05681	—	—
0,005	0,02777	0,03520	—	—	—
0,006	0,03184	0,04857	—	—	—
0,007	0,03837	—	—	—	—
0,008	0,04818	—	—	—	—
0,009	0,07166	—	—	—	—
0,010	—	—	—	—	—

Tabulka 4.3: Hodnoty WCVaR na hladině  $\alpha = 0,90$  optimálních portfolií pro různé hodnoty parametrů  $r$  a  $\mu$

Střední hodnota výnosu $\mu$	0,0001	0,001	0,002	0,004	0,01
-0,010	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	0,02403
-0,009	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	0,02406
-0,008	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	0,02566
-0,007	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	—
-0,006	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	—
-0,005	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	—
-0,004	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	—
-0,003	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	—
-0,002	0,02094	0,02135	0,02174	0,02240	—
-0,001	0,02094	0,02135	0,02174	0,02321	—
0	0,02094	0,02135	0,02174	0,02792	—
0,001	0,02094	0,02135	0,02187	—	—
0,002	0,02094	0,02135	0,02357	—	—
0,003	0,02094	0,02249	0,02773	—	—
0,004	0,02176	0,02496	0,04513	—	—
0,005	0,02379	0,03001	—	—	—
0,006	0,02688	0,04076	—	—	—
0,007	0,03204	—	—	—	—
0,008	0,04083	—	—	—	—
0,009	0,05586	—	—	—	—
0,010	—	—	—	—	—



Obrázek 4.2: Hranice eficientních portfolií při použití WCVaR<sub>0.95</sub> jako míry rizika



Obrázek 4.3: Hranice eficientních portfolií při použití WCVaR<sub>0.90</sub> jako míry rizika

### 4.3 Porovnání CVaR a WCVaR

V této podkapitole budeme uvažovat řešení problému hledání portfolia minimaluzujícího WCVaR na určité hladině  $\alpha$  s omezením na požadovanou střední hodnotu výnosu a pro takto sestavené portfolio následně spočteme CVaR na stejně hladině  $\alpha$  a porovnáme ho s portfoliem, které má při stejné požadované střední hodnotě výnosu minimální CVaR. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze jednu hladinu  $\alpha = 0,90$  a dvě různé hodnoty parametru  $r$  (význam parametru  $r \in \mathbb{R}_+$  je stejný jako v podkapitole 4.2).

Výsledky takovýchto úloh můžeme vidět v tabulkách 4.4, 4.5 a na obrázcích 4.4, 4.5 (v grafech je zaneseno více dat než v tabulkách). Význam značení v těchto tabulkách a grafech je následující

WCVaR	hodnota WCVaR portfolia s minimálním WCVaR
CVaR*	hodnota CVaR portfolia s minimálním WCVaR
CVaR	hodnota CVaR portfolia s minimálním CVaR

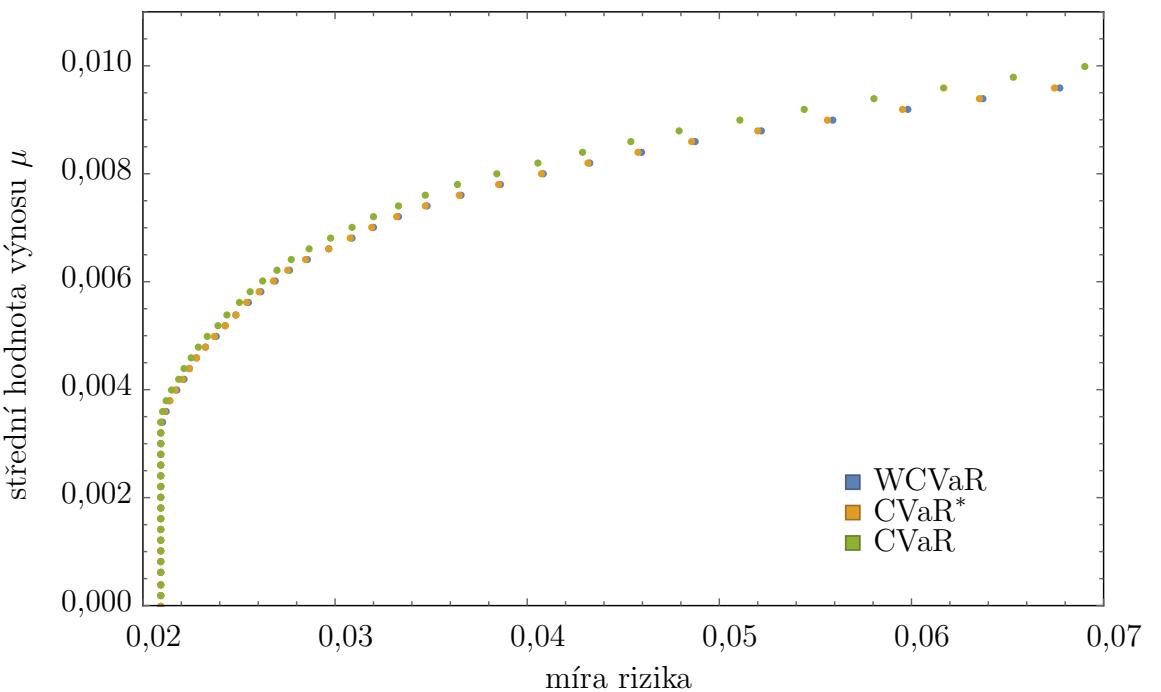
Za povšimnutí stojí fakt, že hodnota CVaR pro portfolio vzniklé minimalizací WCVaR je vždy větší nebo rovna než hodnota CVaR portfolia vniklého minimalizací CVaR na stejně hladině  $\alpha$  při stejné minimální požadované střední hodnotě výnosu. Toto je jen důsledek formulace optimalizačních úloh, které řešíme. Také bude platit, že pro snižující se hodnotu parametru  $r$  bude řešení úlohy minimalizace WCVaR stále více a více podobné řešení úlohy minimalizace CVaR, s čímž jsou níže uvedené výsledky v souladu. Jak už bylo popsáno v předchozí podkapitole, pokud bychom zvolili hodnotu parametru  $r = 0$ , potom obě úlohy splynou. Toto si lze intuitivně představovat tak, že nízké hodnoty parametru  $r$  odpovídají nízké nejistotě rozdělení budoucích výnosů aktiv, čímž se situace přibližuje situaci při výpočtu CVaR, kde rozdělení budoucích výnosů aktiv známe přesně a žádná nejstota tedy není přítomna.

Tabulka 4.4: Porovnání CVaR a WCVaR optimálních portfolií na hladině  $\alpha = 0,90$  pro parametr  $r = 0,0001$

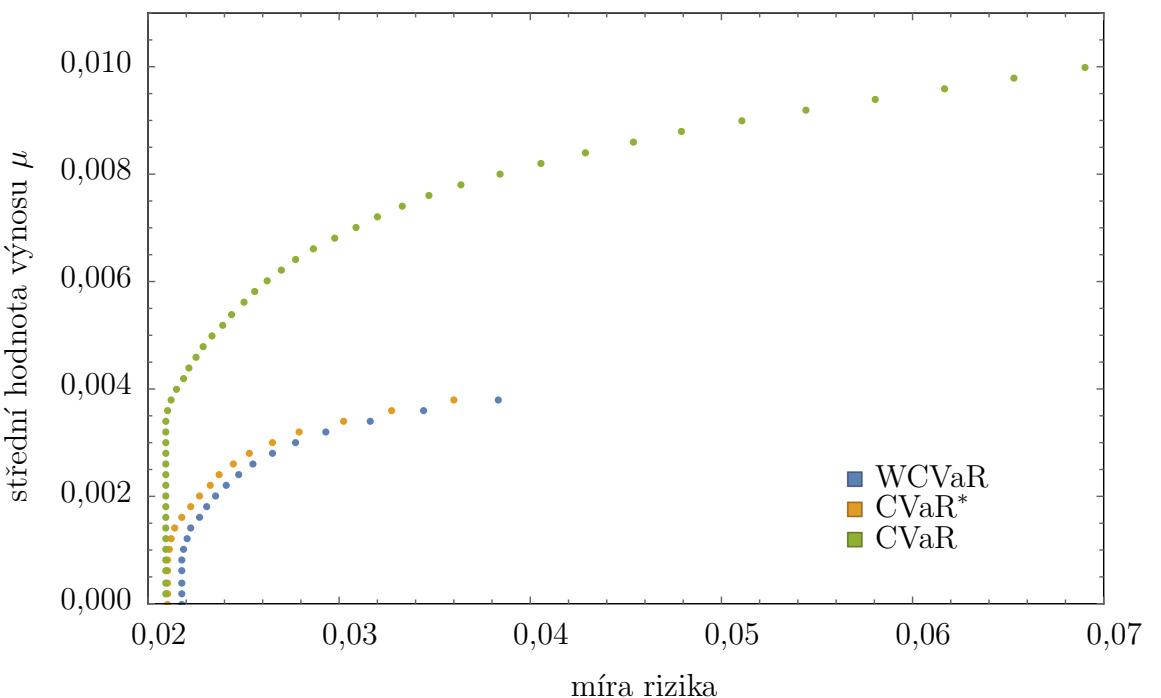
Střední hodnota výnosu	WCVaR	CVaR*	CVaR
0,0096	0,06775	0,06748	0,06168
0,0090	0,05586	0,05565	0,05109
0,0084	0,04596	0,04580	0,04285
0,0078	0,03864	0,03853	0,03639
0,0072	0,03330	0,03320	0,03204
0,0066	0,02970	0,02963	0,02869
0,0060	0,02688	0,02680	0,02625
0,0054	0,02487	0,02481	0,02440
0,0048	0,02329	0,02324	0,02293
0,0042	0,02210	0,02204	0,02182
0,0036	0,02118	0,02113	0,02099
0,0030	0,02094	0,02090	0,02090
0,0024	0,02094	0,02090	0,02090
0,0018	0,02094	0,02090	0,02090

Tabulka 4.5: Porovnání CVaR a WCVaR optimálních portfolií na hladině  $\alpha = 0,90$  pro parametr  $r = 0,002$

Střední hodnota výnosu	WCVaR	CVaR*	CVaR
0,0038	0,03833	0,03601	0,02122
0,0036	0,03438	0,03272	0,02099
0,0034	0,03161	0,03023	0,02091
0,0032	0,02930	0,02795	0,02090
0,0030	0,02773	0,02655	0,02090
0,0028	0,02648	0,02534	0,02090
0,0026	0,02547	0,02445	0,02090
0,0024	0,02473	0,02374	0,02090
0,0022	0,02412	0,02322	0,02090
0,0020	0,02357	0,02268	0,02090
0,0018	0,02308	0,02219	0,02090
0,0016	0,02266	0,02178	0,02090
0,0014	0,02227	0,02142	0,02090
0,0012	0,02205	0,02123	0,02090



Obrázek 4.4: Porovnání CVaR a WCVaR optimálních portfolií na hladině  $\alpha = 0,90$  pro parametr  $r = 0,0001$



Obrázek 4.5: Porovnání CVaR a WCVaR optimálních portfolií na hladině  $\alpha = 0,90$  pro parametr  $r = 0,002$

# Závěr

V teoretické části této práce (tj. v prvních třech kapitolách) jsme definovali zobecnění Markovitzova modelu portfolia za použití podmíněné hodnoty v riziku, resp. nejnepříznivější podmíněné hodnoty v riziku jako míry rizika. Následně jsme se zabývali základními vlastnostmi těchto měr rizika, zejména koherencí a spojitostí. Na závěr jsme odvodili formulaci úlohy minimalizace míry rizika, za kterou jsme v našem případě uvažovali podmíněnou hodnotu v riziku, resp. nejnepříznivější podmíněnou hodnotu v riziku, za podmínky na minimální požadovanou střední hodnotu výnosu portfolia jako úlohy lineárního programování.

V poslední čtvrté kapitole jsme se věnovali aplikacím těchto postupů na reálná data z finančních trhů. Pomocí matematického softwaru Wolfram Mathematica 10.3 Student Edition jsme vyřešili výše odvozené optimalizační úlohy pro různé hodnoty vstupních parametrů modelů a různá vstupní data. Výsledky jsme uvedli v tabulkách a také v grafické podobě. Součástí čtvrté kapitoly je i stručná interpretace výsledků a jejich diskuze.

Teoretická část práce byla z větší části převzata z dostupné literatury, zejména z článků Rockafellar a Uryasev (2002) a Zhu a Fukushima (2009). Hlavní přínos této bakalářské práce spočívá ve vlastní implementaci odvozených optimalizačních úloh v matematickém softwaru, následné aplikaci na reálná data z finančních trhů a interpretaci obdržených výsledků.

# Literatura

- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. a HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.
- FAN, K. (1953). Minimax theorems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **39**, 42–47.
- ROCKAFELLAR, R. a URYASEV, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1433–1471.
- ZHU, S. S. a FUKUSHIMA, M. (2009). Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management. *Operations Research*, **57** (5), 1155–1168.

# Seznam použitých symbolů

$\alpha$	parametr hladiny ( $\in (0, 1)$ )
$\delta$	pomocná proměnná v optimalizační úloze ( $\in \mathbb{R}$ )
$\zeta$	proměnná v distribuční funkci $\Psi$ ,
	pomocné funkci $F$ , resp. $G$ ( $\in \mathbb{R}$ )
$\eta$	parametr rozdělení budoucích výnosů aktiv ( $\in \mathbb{R}^K$ )
$\eta, \bar{\eta}$	parametry rozměru množiny $R$ ( $\in \mathbb{R}^K$ )
$\theta$	pomocná proměnná ( $\in \mathbb{R}$ )
$\mu$	požadovaná střední hodnota výnosu portfolia ( $\in \mathbb{R}$ )
$\nu$	pomocný vektor proměnných v optimalizační úloze ( $\in \mathbb{R}^K$ )
$\xi$	pomocný vektor proměnných v optimalizační úloze ( $\in \mathbb{R}^K$ )
$\pi_k$	označení pro $P(\mathbb{Y} = Y_k)$ ( $\pi_k \in (0, 1), k = 1, \dots, K$ )
$\rho$	obecná míra rizika
$\rho_w$	míra rizika vzniklá robustifikací míry rizika $\rho$
$\tau$	pomocný vektor proměnných v optimalizační úloze ( $\in \mathbb{R}^K$ )
$\Psi(x, \zeta)$	distribuční funkce náhodné veličiny $f(x, \mathbb{Y})$
$\omega$	pomocný vektor proměnných v optimalizační úloze ( $\in \mathbb{R}^K$ )
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	pravděpodobnostní prostor
$\text{CVaR}_\alpha(x)$	podmíněná hodnota v riziku portfolia $x$ na hladině $\alpha$ ( $\in \mathbb{R}$ )
$e_n, e_K$	vektor samých jednotek délky $n$ , resp. $K$
$f(x, y)$	ztrátová funkce, kde $x \in X$ je skladba portfolia a $y \in \mathbb{R}^n$
	jsou budoucí výnosy aktiv ( $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ )
$F_\alpha(x, \zeta)$	pomocná funkce
$G_\alpha(x, \zeta, \pi)$	pomocná funkce
$H$	množina možných hodnot náhodné veličiny $\mathbb{Y}$ ( $\subset \mathbb{R}^n$ )
$K$	počet možných hodnot náhodného vektoru $\mathbb{Y}$ ( $\in \mathbb{N}$ )
$M$	množina pravděpodobnostních měr na prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$
$n$	počet aktiv v portfoliu ( $\in \mathbb{N}$ )
$r$	parametr rozměru množiny $R$ ( $\in \mathbb{R}_+$ )
$R$	množina možných vektorů rozdělení náhodného vektoru $\mathbb{Y}$ ( $\subset [0, 1]^K$ )
$u_k$	pomocná proměnná ( $\in \mathbb{R}$ , $k = 1, \dots, K$ )
$\text{VaR}_\alpha(x)$	hodnota v riziku portfolia $x$ na hladině $\alpha$ ( $\in \mathbb{R}$ )

$w_0$	počáteční součet vah aktiv v portfoliu ( $\in \mathbb{R}_+$ )
$\text{WCVaR}_\alpha(x)$	nejnepříznivější podmíněná hodnota v riziku portfolia $x$ na hladině $\alpha$ ( $\in \mathbb{R}$ )
$x$	skladba portfolia ( $\in \mathbb{R}^n$ )
$X$	množina přípustných portfolií ( $\subset \mathbb{R}^n$ )
$\mathbb{Y}$	náhodný vektor budoucích výnosů aktiv ( $\mathbb{Y} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ )
$Y_k$	možné hodnoty náhodného vektoru $\mathbb{Y}$ ( $Y_k \in \mathbb{R}^n$ , $k = 1, \dots, K$ )
$z$	pomocná proměnná v optimalizační úloze ( $\in \mathbb{R}$ )

# **Přílohy**

## **Příloha č. 1**

Elektronická příloha se skripty použitými k výpočtu výsledků uvedených v kapitole 4 a zdrojovými daty (konkrétně obsahuje soubory CVaR.nb, WCVaR.nb, AAPL.csv, AMZN.csv, BA.csv, BAC.csv, CSCO.csv, CVX.csv, F.csv, GOOG.csv, MSFT.csv, NKE.csv, XOM.csv)