

# Posudek práce

předložené na Matematicko-fyzikální fakultě  
Univerzity Karlovy v Praze

- posudek vedoucího       posudek oponenta  
 bakalářské práce       diplomové práce

Autor/ka: **Jakub Pejcha**  
Název práce: **Lorentz group and its application in the theory of quantum gravity**  
Studijní program a obor: **Fyzika – teoretická fyzika**  
Rok odevzdání: **2016**

Jméno a tituly oponenta: **doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.**  
Pracoviště: **ÚTF MFF UK**  
Kontaktní e-mail: **Pavel.Krtous@utf.mff.cuni.cz**

## Odborná úroveň práce:

- vynikající    velmi dobrá    průměrná    podprůměrná    nevyhovující

## Věcné chyby:

- téměř žádné    vzhledem k rozsahu přiměřený počet    méně podstatné četné    závažné

## Výsledky:

- originální    původní i převzaté    netriviální kompilace    citované z literatury    opsané

## Rozsah práce:

- veliký    standardní    dostatečný    nedostatečný

## Grafická, jazyková a formální úroveň:

- vynikající    velmi dobrá    průměrná    podprůměrná    nevyhovující

## Tiskové chyby:

- téměř žádné    vzhledem k rozsahu a tématu přiměřený počet    četné

## Celková úroveň práce:

- vynikající    velmi dobrá    průměrná    podprůměrná    nevyhovující

## Slovní vyjádření, komentáře a připomínky vedoucího/oponenta:

Cílem předložené práce bylo aplikovat metodu „refined algebraic quantization“ při kvantování jisté části teorie gravitace v Einsteinově–Cartanově formulaci. Na první pohled se jedná se o ambiciózní projekt zahrnující mnohé netriviální postupy a znalosti. Z předložené práce lze tušit, že autor potřebné znalosti získal a snaží se je aplikovat ve zjednodušené situaci a dokumentovat tak použitelnost zkoumané metody.

Bohužel však celkově práce budí dojem díla sepsaného ve spěchu, bez řádné kontroly, s mnoha překlepy a často s velmi nesrozumitelnými formulacemi. Práce je zcela minimalistická, obsahuje pouze kostru, která by si zasloužila mnohem širší rozvedení. Tento velmi negativní dojem bohužel zastírá úsilí, které musel autor bezesporu vložit do porozumění dané problematice, a rozsáhlé matematické znalosti, které lze na několika místech ve stručném textu zpozorovat. Práce by si zasloužila rozsáhlé přepracování: rozvedení důležitých partií objasňujících použité postupy, kontext a smysl práce. V současné podobě je práce do velké míry nepoužitelná – pro přílišnou stručnost, nejasnost a formální nedostatky nelze doporučit jako studijní materiál jiným studentům. Což je škoda, protože při lepším zpracování by práce mohla na konkrétním příkladu názorně ukazovat použití moderní metody kvantování.

Pokud autor uvažuje o publikování předložených výsledků v časopise, je nutno výrazně zlepšit prezentaci a přidat motivaci vysvětlující význam dosaženého výsledku.

Hlavní dosažený výsledek je totiž do jisté míry problematický. Autor v práci uvažuje natolik zjednodušený model, že výsledný Hilbertův prostor fyzikálních stavů je jednodimenzionální, tj. triviální. To, že tomu tak musí být, je přitom zřejmé od počátku. To samozřejmě problematizuje smysl celé předkládané procedury. Autor měl vysvětlit, že se snaží dokumentovat funkčnost celé konstrukce a zdůraznit, že alespoň v předkládaném jednoduchém modelu se nedostává do problémů s nedefinovanými veličinami (např. nedostává divergující skalární součiny objevující se při naivní redukci kinematického prostoru stavů).

Níže předkládám podrobnější komentáře k textu. Nejdříve k věcnému obsahu, pak k technikalitám a nakonec k formální stránce práce.

### *Komentáře k obsahu práce*

Úvod a první kapitola shrnují Einsteinovu–Cartanovu formulaci teorie gravitace a její 3+1 rozštěpení. Autor zde předkládá výsledky obsažené v dvou pracích školitele. Bohužel to provádí velmi stručně a bez znalosti původních prací nelze text sledovat. Například v 3+1 rozštěpení zcela opomíjí zmínit existenci časového toku umožňujícího provést rozštěpení uvedené v 1. rovnici na str. 4. To že kvantita  $\lambda^a$  odpovídá lapsu a shiftu běžného 3+1 rozštěpení je zmíněno až v předposlední větě celé práce.

Ačkoli se práce má zabývat řešením kvantování systému s vazbami, autor vazby zkoumané teorie vůbec neuvádí, uvádí pouze odkaz na literaturu.

Základní zjednodušení uvažované v práci spočívá ve faktorizování fázového prostoru na prostory lokalizované v prostorovém bodě a rozštěpení takto faktorizovaného prostoru na část závislou na  $\lambda^a$  a na část závislou na třídimezní projekci tetrády. Autor konstatuje, že obdobným způsobem se faktorizuje i kinematický Hilbertův prostor kvantových stavů a v práci se dále zabývá pouze sektorem týkajícím se  $\lambda^a$ . Celý tento postup je shrnut ve dvou odstavcích a z předložených informací není zcela jasné, zda a proč lze tuto redukce provést. Zdá se mi neuvěřitelné, že by obecná kalibrační transformace (zahrnující v nějaké podobě prostoročasové difeomorfismy) nemixovala proměnné lokalizované v různých prostorových bodech.

Chápu však, že může být zajímavé zkoumat zjednodušený model zahrnující pouze  $\lambda^a$ -část fázového a následně Hilbertova prostoru odpovídající jednomu prostorovému bodu. Autor však měl uvést, jaké jsou na tomto redukovaném prostoru vazby, jak vyřešil vazby druhého druhu (které tvrdí, že jsou přítomny) a jak zbývající vazby prvního druhu generují kalibrační transformaci. Namísto toho autor konstatuje, že na prostoru  $\Lambda$  časupodobných do budoucna orientovaných vektorů  $\lambda^a$  působí Lorentzova a škálovací transformace a až o dvě kapitoly později zmíní, že grupa těchto transformací má hrát roli kalibrační grupy, a to bez jakéhokoli dalšího odůvodnění.

Při takovéto akci kalibrační grupy je však zřejmé, že celý konfigurační prostor tvoří jednu orbitu akce grupy a redukovaný fázový prostor je tak triviální. A v tento okamžik měl autor okomentovat, že se pokusí obdržet obdobný triviální výsledek i na kvantové úrovni a to sledováním netriviální metody kvantování.

V druhé a třetí kapitole autor nachází reprezentaci generátorů grupy na kinematickém Hilbertově prostoru, tj. prostoru vlnových funkcí, a nalézá některé vlastní vektory těchto operátorů. Ukazuje, že reprezentace pomocí samosdružených operátorů lze číslovat pomocí reálných konstant  $\alpha$  a  $\beta$ , které charakterizují okrajové podmínky. Nakonec však ukazuje, že  $\beta=0$ . Jelikož okrajové podmínky ve skutečnosti závisí pouze na poměru  $\alpha/\beta$ , na konkrétní (regulární) hodnotě  $\alpha$  nezáleží a dostává se tak jednoznačnost reprezentace. Tento fakt však autor nereflektuje a ponechává závislost na  $\alpha$ , ačkoli konstatuje nezávislost vlastních vektorů na  $\alpha$ .

Ve čtvrté kapitole je popsána metoda „refined algebraic quantization“ a v páté kapitole je aplikována na zkoumaný systém. Poměrně podrobným a náročným způsobem se provádí průměrování stavů přes akci kalibrační grupy a počítá se indukovaný skalární součin fyzikálních stavů. Jelikož je však akce grupy tranzitivní na konfiguračním prostoru  $\Lambda$ , průměrování přes její akci nutně vede na triviální výsledek, kdy všechny zprůměrované stavy jsou si úměrné. Samotný výpočet indukovaného skalárního součinu je poměrně těžkopádný a složitý a nemůžu se ubránit pocitu, že by měl jít pomocí obecných argumentů o symetrii výrazně zjednodušit.

V závěru se v posledních třech odstavcích naznačuje, jak by měla procedura pokračovat při kvantování plné teorie. Tento náznak je však zcela nedostatečný a zcela ignoruje netrivialitu plné teorie.

### *Technické připomínky*

Rovnice by měly být všechny číslované. Bez číslování se na ně obtížně odkazuje – viz následující poznámky.

str. 2, rov (1) – Proč jsou některé tenzorové indexy pruhované?

str. 2, 2. rov – Definice koeficientů konexe není úplná.

str. 3, 13. ř. – Proč by měl být tenzor energie-hybnosti bezestopý? Jaký tenzor není symetrický? Tenzor energie-hybnosti definovaný jako variace akce podle metriky je stále symetrický. Bez kontextu se zde uvádějí problémy související s kanonickým tenzorem energie-hybnosti, který se přitom nezavádí a ani nepoužívá.

str. 6, za rov. (2.2) – Zde uváděná metrika je metrika na konfiguračním prostoru teorie, tj. na (jistě části) prostoru prostoročasových metrik (konkrétně na prostoru  $\Lambda$ , ne na  $\mathcal{M}$ , jak uvádí autor). Je proto značně matoucí, že se používá stejný symbol jako pro prostoročasovou metriku.

str. 7, 1. odst. – Odůvodnění, že se jedná o unitární reprezentaci, je podivné. Akce grupy rozhodně není prostá komplexní exponenciála, v exponentu se nachází diferenciální operátor.

str. 7, 1. odst. – Věta „action of this group transports points on  $\mathcal{H}$  along  $\lambda$  by distance  $\lambda$ “ nedává obsahově smysl (prostor  $\mathcal{H}$  je prostor vlnových funkcí).

str. 7, 2. odst. – Formulace, že zvolíme  $\lambda^0$  za časový směr je neumělná.  $\lambda^0$  je souřadnice vektoru, ne směr.

str. 8, rov. (3.2) – Proč vychází, že reprezentace  $C_2$  je nulová? V který okamžik se provedla volba takovéto reprezentace? Jak by vypadaly reprezentace s nenulovým  $C_2$ ?

str. 10, 2. odst. – Zobecněné stavy normalizované na  $\delta$ -funkci nepatří do duálu  $\mathcal{H}$ .  $\mathcal{H}$  je Hilbertův prostor a proto je totožný se svým duálem. Je potřeba zavést hustý podprostor  $\mathcal{H}$  a zobecněné stavy patří do topologického duálu tohoto podprostoru.

str. 12, 2. rov. – Na pravé straně rovnosti by druhý člen měl být stejný jako obdobný člen v následující rovnici.

str. 12, předposl. odst. –  $\mathcal{H}$  není prostor hladkých funkcí s kompaktním nosičem, tím je prostor  $C_0^\infty$ . Co přesně je prostor  $\Lambda_u$ ? Uvedená definice nedává smysl.

str. 17, poslední věta – Tvrzení je značně kryptické a bez vysvětlení nedává mnoho informace.

str. 20, 1. odst. – Zde by stálo za to zmínit, proč  $\mathcal{H}_{phys}$  není podprostor  $\mathcal{H}_{aux}$ . Obvykle se totiž, ač nekorektně, jako podprostor chápe. Již na předchozí straně bylo zmíněno, že fyzikální stavy patří do duálu  $\Phi'$  a proto nemusí patřit do  $\mathcal{H}_{aux}$ . Zde by to mohlo být připomenuto.

str. 25, 1. odst. – Věta začínající „We avoid ...“ je zcela nesrozumitelná. Autor chtěl zřejmě říci, že bude používat  $x$  místo vektoru  $\lambda$ .

### *Formální připomínky*

Práce obsahuje velké množství překlepů, prepisů, chyb v rovnicích, a špatných formulací. Je záslužné, že se autor pokusil sepsat práci anglicky, ale na mnoha místech je angličtina velmi kostrbatá a těžko srozumitelná. Mnoha překlepům se mohl autor vyvarovat pouhým použitím automatické kontroly pravopisu. Uvedu pro dokumentaci jen několik z mnoha chyb.

str. 3, 5. ř. zdola – „another chapters“

str. 4, nad rov. (1.2) – má být  $-i\partial_\lambda$  namísto  $-i\partial_\pi$ .

str. 5, pozn. 1 – „futare-oriented“

str. 7, 3. ř. – „becouse“

str. 8, 7. ř. zdola – chybná citace, chybí „Gel'fand“

str. 10, posl. odst. – „matric“

str. 12, definice – „hilbert“

str. 14, 2. odst. – „another lemmas“

str. 17, posl. slovo – „contrinute“

str. 19, pozn. 4 – „coinnicide“

str. 20, 6. ř. zdola – „statments“

str. 24, konec předposl. odst. – „devide“

str. 27, předposl. rov. – má být „ $\delta(f(x)) = \dots$ “

str. 30, za rov. (5.11) – „ $\Phi < \infty$ “

str. 31, 4. odst. – „firts class“

str. 34, 14. ř. zdola – „because“

### *Shrnutí*

Práce je tak trochu promarněnou příležitostí. Student podle všeho získal rozsáhlé znalosti a pokusil se je aplikovat v zjednodušeném, ale zajímavém případě. Bohužel předložená práce působí nedodělaným, až odbytým dojmem. Věřím, že formální nedostatky byly způsobeny nedostatkem času a ne nezájmem. To však výsledek neomlouvá. Ač, co se týká fyzikálního obsahu, je práce zajímavá, celkový dojem je spíše podprůměrný.

Pokud student nepředvede při obhajobě bravurní prezentaci, navrhuji hodnotit práci *dobře*.

### **Případné otázky při obhajobě a náměty do diskuze:**

1) V kapitole 3 se ukázalo, že přípustná reprezentace vyžaduje  $\beta=0$ . Jsou takovéto okrajové podmínky kalibračně invariantní? Podmínky jsou nakládány v hodnotě rapidity  $u=0$ . To se nezdá jako podmínka invariantní vůči boostům. Mohl by autor objasnit povahu této podmínky.

2) Jaký je vztah předložené práce a výsledků obsažených v [Gomberoff and Marolf, 1999]? Podle komentáře v závěru se zdá, že článek obsahuje i výsledky předkládané v diplomové práci.

### **Práci**

doporučuji

nedoporučuji

uznat jako bakalářskou.

### **Navrhuji hodnocení stupněm:**

výborně  velmi dobře  dobře  neprospěl/a

Místo, datum a podpis vedoucího/oponenta:

V Praze 27. 8. 2016

Pavel Krtouš