



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Radana Hlavandová

**Modelování parametrického rizika
v odhadech úmrtnosti**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2016

Touto cestou by som sa chcela poďakovať pani RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D. za odbornú pomoc a cenné rady, ktoré mi poskytla pri vypracovaní diplomovej práce. A zároveň chcem poďakovať mojej rodine za psychickú podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26.7.2016

Podpis autora

Název práce: Modelování parametrického rizika v odhadech úmrtnosti

Autor: Radana Hlavandová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této diplomové práci se zaměřujeme na modelování stochastické úmrtnosti a parametrického rizika v odhadech úmrtnosti. Rozebíráme dva úmrtnostní stochastické modely sloužící k modelování počtu úmrtí v portfoliu tvořeného jednou nebo více kohortami. Zavádíme pojem směsi rozdělání a představíme si beta-binomický model a Poissonův-gama model. Zabýváme se polhůtními životními důchody a aplikujeme bayesovský Poissonův-gama model při kvantifikaci rizika dlouhověkosti na datech. Trend růstu průměrné délky života vede pojišťovny k větší ochraně před rizikem dlouhověkosti. Na modelovém portfoliu ukazujeme, jak přistupovat k solventnostním požadavkům pomocí interních modelů, které jsou navrženy konzistentně se Solventností II.

Klíčová slova: parametrické riziko v úmrtnosti, systematické riziko, úmrtnostní model, řízení rizika dlouhověkosti

Title: Parametric risk modelling in assessing mortality

Author: Radana Hlavandová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we focus on modeling stochastic mortality and parameter risk in assessing mortality. We explore two mortality stochastic models for modeling the number of deaths in portfolio which consist of one or more than one cohort. We define the term mixture of distributions and introduce Beta-Binomial and Poisson-Gamma model. We address immediate life annuities and we apply Bayesian Poisson-Gamma model to quantify longevity risk on data. The obvious increasing trend of average lifetime leads insurance companies to greater protection against longevity risk. We show how to deal with solvency rules by internal models designed consistently with the requirement in the standard formula of Solvency II.

Keywords: parameter risk in mortality, systematic risk, mortality model, longevity risk assessment

Názov práce: Modelovanie parametrického rizika v odhadoch úmrtnosti

Autor: Radana Hlavandová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V tejto diplomovej práci sa zameriavame na modelovanie stochastickej úmrtnosti a parametrického rizika v odhadoch úmrtnosti. Rozoberáme dva úmrtnostné stochastické modely slúžiace k modelovaniu počtov úmrtí v portfóliu tvoreného jednou alebo viacerými kohortami. Zavádzame pojem zmesi rozdelení a predstavíme si beta-binomický model a Poissonov-gama model. Upriamujeme sa na polehotné životné dôchodky a aplikujeme bayesovský Poissonov-gama model pri kvantifikácii rizika dlhovekosti na dátach. Trend rastu priemernej dĺžky života vedie poisťovne k väčšej ochrane pred rizikom dlhovekosti. Na modelovom portfóliu ukazujeme, ako pristupovať k solventnostným požiadavkám pomocou interných modelov, ktoré sú navrhnuté konzistentne so Solventnosťou II.

Kľúčové slová: parametrické riziko v úmrtnosti, systematické riziko, úmrtnostný model, riadenie rizika dlhovekosti

Obsah

Úvod	2
1 Riziko dlhovekosti a Solventnosť II	4
1.1 Odchýlky v úmrtnosti	4
1.2 Parametrické riziko a zdroje neistoty	5
1.3 Životný dôchodok	5
1.4 Solventnosť II	6
1.4.1 Podmodul rizika dlhovekosti	8
2 Stochastické modely	9
2.1 Beta-binomický model a Poissonov-gama model: zavedenie	10
2.1.1 Beta-binomické rozdelenie	12
2.1.2 Poissonovo-Gama rozdelenie	15
3 Modelovanie počtu úmrtí	17
3.1 Beta-binomický model	19
3.2 Poissonov-gama model - jedna kohorta	20
3.3 Poissonov-gama model - viac kohort	21
3.4 Krátky úvod do bayesovskej štatistiky	24
3.5 Korelácia v čase medzi pravdepodobnosťami úmrtia	24
4 Stanovenie kapitálovej požiadavky	29
4.1 Úmrtnostný model a alokácia kapitálu	30
4.1.1 Solventnostné pravidlá pre interné modely	31
4.2 Deterministická implementácia úmrtnostného modelu	32
5 Numerická ilustrácia výpočtu kapitálovej požiadavky	34
5.1 Deterministický prístup k stanoveniu požadovaného kapitálu	34
5.2 Stochastický prístup k stanoveniu požadovaného kapitálu	42
Záver	51
Literatúra	52
Zoznam obrázkov	54
Zoznam tabuliek	56

Úvod

Nový regulačný režim Solventnosť II, ktorý nadobudol platnosť 1. januára 2016, prináša nové prvky regulácie v poistnom sektore. Kladie sa väčší dôraz na systematickosť riadenia rizík. Hlavným cieľom je ochrana poistených a oprávnených osôb pred nesolventnosťou poisťovne.

Neodmysliteľnou súčasťou rizikového profilu poisťovne poskytujúcej produkty životného poistenia je riziko dlhovekosti. Riziko dlhovekosti predstavuje systematický pokles pravdepodobností úmrtia. Systematické odchýlky pravdepodobností úmrtia súvisia s priemernou dĺžkou života.

V práci sa zameriame na polehotné životné dôchodky s fixnými výplatami raz ročne a modelovanie parametrického rizika úmrtnosti. Budeme predpokladať, že skutočná úmrtnosť sa odlišuje od tabuliek najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia. Modely, pomocou ktorých budeme simulovať budúci vývoj portfólia, čiže počty zomretých, patria do kategórie zmiešaných pravdepodobnostných modelov. Preskúmame dve zmesi rozdelení, a to beta-binomické rozdelenie a Poissonovogama rozdelenie. Náhodné fluktuácie v počtoch úmrtí sa dajú modelovať pomocou binomického rozdelenia, ktoré za určitých podmienok je možné aproximovať Poissonovým rozdelením. Náhodná pravdepodobnosť úmrtia, ktorá spôsobuje systematické riziko, bude mať beta rozdelenie, resp. gama rozdelenie. Prednostne čerpáme z článkov Olivieri (2011) a Olivieri a Pitacco (2009).

Práca je členená do piatich kapitol. V prvej kapitole definujeme pojmy riziko, parametrické riziko a odchýlky v úmrtnosti. V tejto kapitole ďalej približujeme metódy výpočtu solventnostnej kapitálovej požiadavky (SCR) z pohľadu Solventnosti II. Zjednodušene povedané, v rámci projektu Solventnosť II existujú dva spôsoby výpočtu SCR. Je možné použiť štandardný vzorec alebo interný model. Úmrtnostné modely, ktoré sú predmetom tejto práce, by mohli nahrádzať štandardnú formulu a byť považované za možný prístup k internému stanoveniu kapitálovej požiadavky k riziku dlhovekosti. Podmodul rizika dlhovekosti je jedným z podmodulov životného upisovacieho rizika.

Druhá kapitola všeobecne zavádza pojem zmes rozdelení a popisuje príslušné charakteristiky. Matematické zavedenie beta-binomického rozdelenia a Poissonovogama rozdelenia je tiež obsahom tejto kapitoly. Podstatou je ukázať vznik a tvar nepodmienennej hustoty týchto rozdelení, ktorá slúžia k modelovaniu počtu úmrtí s náhodnou pravdepodobnosťou úmrtia.

Pomer pozorovaného počtu úmrtí k veľkosti portfólia sa môže výrazne líšiť od pravdepodobnosti úmrtia aj napriek tomu, že máme k dispozícii dostatočne veľké portfólio. Jedná sa o situáciu, kedy pravdepodobnosť úmrtia je neistá a uvažuje sa, že je náhodná. Predpokladáme, že počet úmrtí má podmienené na pravdepodobnosti úmrtia binomické alebo Poissonovo rozdelenie. Ak pripustíme, že pravdepodobnosť úmrtia má beta alebo gama rozdelenie, potom nepodmie-

nené rozdelenie počtu úmrtí je beta-binomické alebo negatívne binomické. Tieto úmrtnostné modely sú popísané v tretej kapitole. Bližšie sa zameriame na Poissonov-gama model, kde rozoberieme prípad portfólia tvoreného jednou alebo viac než jednou kohortou. Na základe skúsenosti, resp. informácie o skutočnom počte zomretých do času výpočtu (napr. rezerv, kapitálovej požiadavky) a bayesovej štatistiky je tento pravdepodobnostný model schopný aktualizovať parametre v každom čase.

Poissonov-gama model je možné využiť pri riadení rizika dlhovekosti. V štvrtej kapitole sa popisujú postupy výpočtu rezerv a kapitálu ku krytiu rizika dlhovekosti. V knihe Pitacco a kol. (2009) boli navrhnuté solventnostné pravidlá pre stanovenie kapitálovej požiadavky, ktoré sú tiež popísané v štvrtej kapitole. Tieto interné pravidlá by mohli nahradiť štandardný prístup, pretože sú navrhnuté konzistentne s požiadavkami k štandardnej formule Solventnosti II.

Piata kapitola ukazuje výsledky simulácií výpočtu kapitálovej požiadavky. Porovnáva výpočet pomocou štandardného prístupu a pomocou stochastického úmrtnostného modelu. Zaoberá sa simultánnym modelovaním procesného, systematického a parametrického rizika pri stanovovaní solventnostného kapitálu.

Kapitola 1

Riziko dlhovekosti a Solventnosť II

Poistovne a zaistovne sú všeobecne vystavené rizikám, ktoré môžu ovplyvniť ich finančnú pozíciu, napr. riziko úrokových mier, katastrofické riziko, riziko úmrtnosti. *Riziko*, ako je uvedené v knihe Cipra (2015), predstavuje nebezpečie, možnosť nepriaznivých následkov, vystavenie sa strate, nehode či nešťastiu. Mera- nie akéhokoľvek rizika si často vyžaduje stochastický prístup, pomocou ktorého môžeme zachytiť náhodnosť pozorovaných hodnôt a predpovedí.

1.1 Odchýlky v úmrtnosti

V modeli stochastickej úmrtnosti by sa mali brať do úvahy možné typy odchýlok v súvislosti s predpokladanou pravdepodobnosťou úmrtia. Týmito odchýlkami môžu byť:

- *náhodné fluktuácie*, ktoré predstavujú odchýlky okolo očakávanej hodnoty úmrtnosti. Ide o riziko náhodného kolísania okolo tejto hodnoty. Toto riziko sa volá *procesné* alebo *poistné riziko*.
- *systematické odchýlky*, kedy pozorované hodnoty pravdepodobnosti úmrtia v čase sú systematicky pod alebo nad očakávanou hodnotou pravdepodobnosti úmrtia pre danú kohortu. V prípade, že odchýlky sú spôsobené zle voleným modelom, hovoríme o *modelovom riziku*. Odchýlky, ktoré vznikli vychýlením sa v parametroch použitého modelu úmrtnosti, predstavujú *parametrické riziko*.
- odchýlky v zmysle náhlych, výrazných a krátkodobých skokov smerom hore v pravdepodobnostiach úmrtia, ktoré môžu byť spôsobené živelnou pohromou, ťažkými klimatickými podmienkami alebo epidémiou. V tomto prípade hovoríme o *katastrofickom riziku*. Katastrofické riziko má krátkodobý charakter.

Náhodné fluktuácie vyplývajú z neistoty dĺžky života jednotlivca v uvažovanom portfóliu. To znamená, že úmrtnosť je vyššia v porovnaní s očakávanou úmrtnosťou v niektorých rokoch a nižšia v ostatných rokoch.

Systematické odchýlky sú spôsobené neistotou v priemernej dĺžke života uvažovanej populácie v portfóliu. Parametrické a modelové riziko často spolu

súvisia a dohromady nesú názov *riziko neistoty*, teda neistoty v reprezentácii nejakého javu (napr. budúca úmrtnosť). Vo vyšších vekoch riziko neistoty môže vyplývať z neočakávaného poklesu v pravdepodobnostiach úmrtia. V tomto prípade hovoríme namiesto rizika neistoty o *riziku dlhovekosti*.

1.2 Parametrické riziko a zdroje neistoty

Parametrické riziko predstavuje zmenu hodnoty spôsobenú neistotou v odhadoch parametrov vstupujúcich do modelu. Riziko neistoty v parametroch ako je uvedené v CEA-Groupe Consultatif (2007), môže okrem iných vyplývať z nasledujúcich faktorov:

- Počet pozorovaní na základe ktorých sa stanovuje najlepší odhad je obmedzený kvôli príliš krátkemu sledovanému obdobiu.
- Volatilia v pozorovaniach spôsobuje, že odhady sú neistejšie.
- Obdobie, za ktoré sú pozorovania brané, nemusia zahŕňať výrazné udalosti, ktoré by sa mohli odraziť v odhadoch parametrov rozdelenia.
- Pozorovania môžu obsahovať poškodené dáta.
- Pozorovaná populácia sa môže odlišovať od tej upísanej.
- Ďalšou neistotou v parametroch je neistota v projekcii parametrov (dlhodobé poistenie).

1.3 Životný dôchodok

Životný dôchodok predstavuje postupnosť splátok v pravidelných časových intervaloch, pokiaľ je poistený nažive. Ak sú pravidelné platby uskutočňované vždy na konci periódy (na začiatku periódy), hovoríme o polehotnom (predlehotnom) dôchodku.¹

V súvislosti s dôchodkovým produktom životného poistenia sa spájajú tieto finančné toky:

- cena poistenia alebo poistné platené danej poisťovni poberateľom dôchodku
- sekvencia platieb, teda dôchodkov, vyplácaných poisteným pokiaľ sú nažive. Frekvencia platieb môže byť mesačná, štvrťročná, polročná alebo ročná.

Pre poisťovne je dôležité, aby ich dôchodkové produkty prinášali zisk. Profitabilita úzko súvisí s dlhovekosťou. V prípade, že ľudia budú žiť dlhšie, teda že skutočná úmrtnosť sa pohybuje pod tabuľkovou, môžeme očakávať, že zisk z daných dôchodkových produktov bude záporný. V prípade portfólia zloženého z poistiek na riziko smrti môže nárast dlhovekosti spôsobiť kladný zisk. Preto je pre poisťovne vhodné diverzifikovať portfólio a poskytovať rôzne produkty životného poistenia.

¹polehotný dôchodok angl. immediate annuity; predlehotný dôchodok angl. annuity-due

1.4 Solventnosť II

„Dňa 25. novembra 2009 bola schválená smernica Európskeho parlamentu a Rady č. 2009/138/ES o začatí a vykonávaní poistenia a zaistenia – Solventnosť II, a tým bol položený základný kameň pre zavedenie harmonizovaného rizikovo orientovaného režimu regulácie a dohľadu v poisťovníctve vo všetkých členských krajinách Európskej únie. Hlavným cieľom novej regulácie v poisťovníctve je ochrana poisťníkov a oprávnených osôb v prepojení na finančnú stabilitu dohliadaných subjektov,“ uvádza odborný bankový časopis Národnej banky Slovenska, Biatec (2012).

Smernica Solventnosť II nadobudla platnosť 1. januára 2016 a poprvýkrát zavádza kapitálové požiadavky vychádzajúce z ekonomických rizík. Tieto nové kapitálové požiadavky citlivejšie reagujú na riziká, sú prepracovanejšie než v minulosti a umožňujú tak lepšie zohľadňovať skutočné riziká, ktorým je vystavený každý konkrétny poisťiteľ. Zároveň tieto požiadavky upúšťajú od nedokonalého spôsobu odhadovania kapitálových požiadaviek podľa jednotného modelu „vhodného pre všetkých“ a nahrádzajú ho požiadavky, ktoré lepšie zodpovedajú rizikovému profilu poisťiteľov. Smernica kladie väčší dôraz na riadenie rizík a na predkladanie akýchkoľvek informácií na účely dohľadu. V tejto podkapitole vychádzame z hora uvedenej smernice Európskeho parlamentu pre Solventnosť II Smernica Solventnosť II (2009) a z delegovaného nariadenia komisie (EÚ), ktorým sa táto smernica dopĺňa Delegované nariadenie (2014). Podľa Solventnosti II sa majú kryť aspoň tieto riziká:

- neživotné upisovacie riziko
- životné upisovacie riziko
- zdravotné upisovacie riziko
- trhové riziko
- úverové riziko
- operačné riziko.

Členské štáty požadujú, aby poisťovne a zaistovne mali v držaní použiteľný kapitál na krytie solventnostnej kapitálovej požiadavky (SCR), ktorej metódy výpočtu sú nasledovné:

- *Štandardný vzorec*, kde SCR predstavuje súčet základnej solventnostnej kapitálovej požiadavky (BSCR), kapitálovej požiadavky k operačnému riziku a úpravy o schopnosť technických rezerv a odloženej daňovej povinnosti absorbovať straty. BSCR zahŕňa rizikové moduly:
 - modul neživotného upisovacieho rizika
 - modul životného upisovacieho rizika
 - modul zdravotného upisovacieho rizika
 - modul trhového rizika

- modul rizika zlyhania protistrany
- *Zjednodušený štandardný vzorec* môžu poisťovne a zaistovne použiť pre určitý podmodul alebo rizikový modul, pokiaľ to odôvodňuje povaha, rozsah a komplexnosť rizík, ktorým sú tieto poisťovne a zaistovne vystavené, a pokiaľ by bolo neúmerné požadovať od všetkých poisťovní a zaistovní prevádzanie štandardizovaného výpočtu.
- *Čiastočný interný model*, ktorý poisťovne a zaistovne môžu použiť pre výpočet
 - jedného alebo viacerých rizikových modulov alebo podmodulov základnej solventnostnej kapitálovej požiadavky
 - kapitálovej požiadavky k operačnému riziku.

Čiastočný interný model je možné uplatniť na celú činnosť poisťovní a zaistovní alebo len na jednu alebo viac hlavných oblastí ich obchodnej činnosti.

- *Interný model* pre výpočet SCR sa použije v prípade, pokiaľ solventnostnú kapitálovú požiadavku nie je vhodné vypočítať podľa štandardného vzorca z toho dôvodu, že sa rizikový profil danej poisťovne alebo zaistovne podstatne odchyľuje od podkladových predpokladov k výpočtu podľa štandardnej formule. Orgány dohľadu môžu prostredníctvom odôvodneného rozhodnutia za určitých podmienok (rizikový profil poisťovne alebo zaistovne sa výrazne odlišuje od predpokladov výpočtu SCR podľa štandardného vzorca) požadovať použitie interného modelu. Interný model je simulačným modelom.

Solventnostná kapitálová požiadavka sa vypočíta za predpokladu, že poisťovňa alebo zaistovňa bude vo svojej činnosti pokračovať. SCR sa kalibruje tak, aby sa zaistilo, že bude prihliadnuté ku všetkým kvantifikovateľným rizikám, ktorým je poisťovňa alebo zaistovňa vystavená. Vzťahuje sa na stávajúce zmluvy a na nové zmluvy, ktoré budú podľa očakávaní upísané v nasledujúcich dvanástich mesiacoch. U stávajúcich zmlúv kryje SCR len neočakávané straty. Solventnostná kapitálová požiadavka zodpovedá hodnote v riziku základných vlastných zdrojov poisťovne alebo zaistovne s 99.5% hladinou spoľahlivosti v časovom horizonte jedného roku.

Podľa Smernica Solventnosť II (2009) sú vlastné zdroje definované ako súčet základných vlastných zdrojov a dodatkových vlastných zdrojov. Základné vlastné zdroje tvoria tieto položky:

- *prebytok aktív nad záväzkami*, ocenený tak, že aktíva sa ocenia na sumu, za ktorú by sa mohli vymieňať v nezávislej transakcii medzi informovanými dobrovoľne súhlasiacimi zúčastnenými stranami. Záväzky sa ocenia na sumu, za ktorú by sa mohli previesť alebo vysporiadať v nezávislej transakcii medzi informovanými dobrovoľne súhlasiacimi zúčastnenými stranami (pri oceňovaní záväzkov sa nevykonáva žiadna úprava s cieľom zohľadniť vlastný kreditný rating poisťovne alebo zaistovne)
- *podriadené záväzky*.

Prebytok aktív nad záväzkami sa zníži o čiastku vlastných akcií, ktoré sú v držbe poisťovne alebo zaistovne.

Dodatkové vlastné zdroje tvoria iné zdroje ako základné a môžu sa použiť na absorpciu strát. Môžu nimi byť:

- *nesplatené základné imanie alebo počiatočný kapitál, ktorý nebol vyžiadaný*
- *akreditívny a záruky*
- *akékoľvek iné právne záväzné prísľuby prijaté poisťovňami a zaistovňami.*

Pokiaľ položky dodatkových vlastných zdrojov boli splatené alebo vyžiadané, považujú sa za aktíva.

1.4.1 Podmodul rizika dlhovekosti

Modul životného upisovacieho rizika zohľadňuje riziko vyplývajúce zo záväzkov týkajúcich sa životného poistenia v súvislosti s krytými rizikami a postupmi používanými pri výkone činnosti. Modul životného upisovacieho rizika pozostáva z podmodulov:

- podmodul rizika úmrtnosti,
- podmodul rizika dlhovekosti,
- podmodul rizika invalidity alebo pracovnej neschopnosti a chorobnosti,
- podmodul rizika nákladov v životnom poistení,
- podmodul rizika revízie,
- podmodul rizika storien,
- podmodul životného katastrofického rizika.

Riziko straty alebo nepriaznivej zmeny hodnoty poistných záväzkov vyplývajúcich zo zmien úrovne, vývoja alebo volatility mier úmrtnosti, kedy zníženie miery úmrtnosti vedie ku zvýšeniu hodnoty poistných záväzkov, predstavuje riziko dlhovekosti. Solventnostná kapitálová požiadavka k riziku dlhovekosti sa rovná strate základných vlastných zdrojov poisťovní a zaistovní, ktorá by vyplynula z okamžitého trvalého zníženia mier úmrtnosti, ktoré sa používajú pre výpočet technických rezerv, o 20%. Zníženie mier úmrtnosti sa vzťahuje len na tie poistné zmluvy, u ktorých pokles mier úmrtnosti vedie k navýšeniu technických rezerv bez rizikovej prirážky.

Kapitálová požiadavka podľa Technickej špecifikácie pre prípravnú fázu (časť 1) EIOPA (2014), je uvedená v tvare

$$\text{Life}_{\text{long}} = \Delta\text{BOF}|_{\text{longevityshock}},$$

kde ΔBOF predstavuje zmenu základných vlastných zdrojov (nezahrňa zmeny rizikovej marže technických rezerv) pri trvalo zníženej pravdepodobnosti úmrtia o 20% v každom veku a pre každú zmluvu.

Kapitola 2

Stochastické modely

Riadenie podnikových rizík (ERM proces) predstavuje prístup, podľa ktorého by sa mali prevádzať tri základné kroky, pokiaľ sa snažíme podchytiť riziká ovplyvňujúce poisťný obchod. Ide o identifikáciu rizika, kvantifikovanie rizika a opatrenia na riadenie rizika. Každá poisťovňa či zaistovňa si identifikuje vlastné riziká, ktorým je vystavená a vytvorí si individuálnu mapu rizík. Mapa rizík by mala byť dlhodobá, ale nemusí byť fixná. Kvantifikácia rizika predstavuje častokrát zložitý proces. K meraniu rizika môžeme pristupovať deterministicky alebo stochasticky.

V prípade deterministických modelov si môžeme predstavovať napríklad rôzne testy citlivosti pri meraní rizika alebo testy postavené na scenároch. V rámci Solventnosti II výpočet solventnostnej kapitálovej požiadavky podľa štandardného vzorca, pre životné upisovacie riziko i niekoľko ďalších modulov, sa prevádza na základe scenárov, ako dopad špecifického scenára na základné vlastné zdroje, ako sme už zmienili v prvej kapitole.

Stochastické modely pre stanovenie rizika sú postavené napríklad na hodnote v riziku VaR, pravdepodobnosti defaultu a iných. Pri kvantifikovaní rizika úmrtnosti/dlhovekosti pre dôchodkové produkty poisťovne nás zaujíma budúci vývoj úmrtnosti, resp. počty úmrtí v portfóliu. Modely, ktoré si ukážeme, posudzujú parametrické riziko v odhadoch úmrtnosti. Predpokladáme, že skutočná úmrtnosť sa odlišuje od tabuliek najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia. Pri stochastickom modelovaní berieme do úvahy, akým pravdepodobnostným rozdelením sa riadia počty zomretých v portfóliu. Tieto počty zomretých predstavujú náhodné veličiny. V kapitole (4) budeme popisovať ako stanoviť solventnostný kapitál pre účely solventnosti. Potrebujeme stanoviť výšku rezervy portfólia a dostupné aktíva pre krytie rizika, ktoré budú tiež náhodnými veličinami. Budeme požadovať kapitál na 99.5% hladine spoľahlivosti, konzistentne s princípmi Solventnosti II. Modely pre počty úmrtí, ktoré budeme používať, poskytujú možnosť aktualizovať parametre vstupujúce do modelu na základe skúsenosti pomocou bayesovského prístupu.

Za účelom simultánneho modelovania procesného rizika, systematického rizika a parametrického rizika budeme používať modely pre počty zomretých, konkrétne beta-binomický model a Poissonov-gama model. V nasledujúcej podkapitole (2.1) si modely matematicky zavedieme a potom ich aplikujeme v kapitole (3).

2.1 Beta-binomický model a Poissonov-gama model: zavedenie

Beta-binomický a Poissonov-gama model sú zmesami rozdelení. V knihe Klugman a kol. (2008) sa uvádza, že jednou z motivácií pre mixovanie rozdelení je, že základný jav môže byť v skutočnosti niekoľko javov, ktoré nastávajú s neznámymi pravdepodobnosťami. Budeme vychádzať z titulov Klugman a kol. (2008) a Panjer a Willmot (1992).

V tretej kapitole bude popísané modelovanie počtu zomretých v portfóliu životných dôchodkov. Náhodné fluktuácie predstavujúce procesné riziko je možné popísať práve binomickým, resp. Poissonovým rozdelením, je to prirodzená voľba pre ich modelovanie. Systematické riziko naopak vzniká náhodnou pravdepodobnosťou úmrtia. Ak pravdepodobnosť úmrtia bude mať beta, resp. gama rozdelenie, potom ročný počet úmrtí bude mať nepodmienené beta-binomické rozdelenie, resp. Poissonovo-gama rozdelenie.

V celej práci budeme značiť pravdepodobnostnú funkciu alebo hustotu ¹, resp. distribučnú funkciu rozdelenia malým, resp. veľkým písmenom, napríklad $f(x)$, resp. $F(x)$ alebo $f_X(x)$, resp. $F_X(x)$. Index X indikuje, o rozdelenie akej náhodnej veličiny sa jedná. Pokiaľ nedochádza k nejednoznačnosti, môžeme tento index kvôli zjednodušeniu vypustiť.

K samotnému definovaniu zmesi rozdelení potrebujeme zaviesť pojem podmienenej distribučnej funkcie, podmienenej hustoty a podmienenej strednej hodnoty. Predpokladajme, že X a Y sú dve náhodné veličiny so združenou pravdepodobnostnou funkciou alebo hustotou $f_{X,Y}(x,y)$ a marginálnymi pravdepodobnostnými funkciami $f_X(x)$ a $f_Y(y)$. Podmienená distribučná funkcia X pri danom $Y = y$ je

$$F(x|y) = F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y). \quad (2.1)$$

Podmienená pravdepodobnostná funkcia X pri danom $Y = y$ je

$$f(x|y) = f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{pre } y \text{ také, že } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Poznamenajme, že pozície X a Y môžu byť zamenené

$$f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x), \quad (2.2)$$

pretože obe strany tejto rovnosti sú združeným rozdelením X a Y . Podelením $f_Y(y)$ dostávame Bayesovu vetu, teda platí

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}. \quad (2.3)$$

Podmienená stredná hodnota X pri danom $Y = y$ je daná vzťahom

$$E(X|Y = y) = \int x dF_{X|Y}(x|y). \quad (2.4)$$

¹Ked' nie je jasné, či náhodná veličina je spojitá, diskretná alebo zmesou dvoch rozdelení, používame termín pravdepodobnostná funkcia. V prípade, že náhodná veličina je spojitá, hovoríme o hustote.

$E(X|Y)$ je funkciou náhodnej veličiny Y a pre strednú hodnotu platí

$$E[E(X|Y)] = E(X).$$

Všeobecná forma zmesi rozdelení môže byť skonštruovaná nasledovne. Nech a_1, a_2, a_3, \dots označujú nezáporné váhy, pre ktoré platí, že $\sum a_i = 1$. Ďalej nech $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots$ je ľubovoľná postupnosť distribučných funkcií. Potom, distribučná funkcia

$$F_X(x) = \sum a_i F_i(x) \quad (2.5)$$

sa nazýva *zmes*. Nepožaduje sa, aby rozdelenia s distribučnými funkciami $F_i(x)$ boli z rovnakej parametrickej rodiny. Napríklad môžeme konštruovať zmes dvoch rozdelení, kde

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

a

$$F_2(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

s váhami p_1 a $1 - p_1$ ako

$$F_X(x) = 1 - (1 - p_1)e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Koncept zmesí môže byť zúžený z mixovania spočetného počtu náhodných veličín na konečný počet veličín.

Predpokladajme, že máme náhodnú veličinu X s rozdelením závislým na parametre θ (aj keď X môže mať iné parametre, nie sú relevantné). Pokiaľ považujeme parameter θ za realizáciu náhodnej veličiny Θ s hustotou $f_\Theta(\theta)$, môžeme uvažovať $f_{X|\Theta}(x|\theta)$ ako podmienenú hustotu X vzhľadom k Θ a distribučnú funkciu označíme $F_{X|\Theta}(x|\theta)$. Potom nepodmienená hustota X je daná vzťahom

$$f_X(x) = \int_{\theta} f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta, \quad (2.6)$$

kde integrál ide cez všetky možné hodnoty θ . Výsledná distribúcia predstavuje rozdelenie zmesi. Distribučná funkcia náhodnej veličiny X môže byť odvodená ako

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x \int_{\theta} f_{X|\Theta}(y|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta dy = \\ &= \int_{\theta} \int_{-\infty}^x f_{X|\Theta}(y|\theta) f_\Theta(\theta) dy d\theta = \\ &= \int_{\theta} F_{X|\Theta}(y|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pre k -ty moment zmesi rozdelenia platí

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_x \int_{\theta} x^k f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta dx = \\ &= \int_{\theta} \left[\int_x x^k f_{X|\Theta}(x|\theta) dx \right] f_\Theta(\theta) d\theta = \\ &= \int_{\theta} E(X^k|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$= \mathbf{E} [\mathbf{E} (X^k | \Theta)] \quad k = 1, 2, \dots$$

a pre rozptyl máme

$$\begin{aligned} \text{var } X &= \mathbf{E} (X^2) - (\mathbf{E} X)^2 = \\ &= \mathbf{E} [\mathbf{E} (X^2 | \Theta)] - \{\mathbf{E} [\mathbf{E} (X | \Theta)]\}^2 = \\ &= \mathbf{E} \{ \text{var} (X | \Theta) + [\mathbf{E} (X | \Theta)]^2 \} - \{\mathbf{E} [\mathbf{E} (X | \Theta)]\}^2 = \\ &= \mathbf{E} [\text{var}(X | \Theta)] + \text{var} [\mathbf{E} (X | \Theta)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

V prípade, že $f_{\Theta}(\theta)$ predstavuje pravdepodobnostnú funkciu diskkrétnej náhodnej veličiny Θ , je potrebné nahradiť integrály sumami. Nepodmienenú hustotu a distribučnú funkciu veličiny X zo vzťahov (2.6) a (2.7) ide písať ako

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \mathbf{E}_{\Theta} [f_{X|\Theta}(x|\Theta)] \\ F_X(x) &= \mathbf{E}_{\Theta} [F_{X|\Theta}(x|\Theta)]. \end{aligned}$$

Dolný index Θ pri \mathbf{E} značí, že Θ je náhodnou veličinou.

2.1.1 Beta-binomické rozdelenie

Beta-binomické rozdelenie sa volá aj Pólyovo-Eggenbergerovo rozdelenie. Je jedným z najstarších diskrétnych zmesových modelov a je často uplatňovaný pri modelovaní počtu škôd. V knihe Cipra (2015) sa uvádza, že binomické rozdelenie je fundamentálne, pretože modeluje výskyt nejakého rizikového javu, ktorý môže alebo nemusí nastať v rámci nezávislých jednotiek určitého konečného súboru, napr. default jednotlivých úverov, škodná udalosť v jednotlivých poistných zmluvách, úmrtie jednotlivých poistených. Beta rozdelenie sa používa ako pravdepodobnostné rozdelenie rôznych pomerov pohybujúcich sa v intervale medzi nulou a jednotkou.

Predpokladajme, že náhodná veličina X má binomické rozdelenie $Bi(n, q)$ s distribučnou funkciou $F_{X|Q}(x|q)$ a s pravdepodobnostnou funkciou $f_{X|Q}(x|q)$, kde q je parameter náhodnej veličiny X a je realizáciou náhodnej veličiny Q s hustotou $f_Q(q)$. Platí teda, že

$$f_{X|Q}(x|q) = P(X = x | Q = q) = \binom{n}{x} q^x (1 - q)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

kde $0 < q < 1$ a $n \in \mathbb{N}$. Vytvárajúca funkcia náhodnej veličiny X , značíme $P_X(z)$, je definovaná ako

$$P_X(z) = E(z^X) = \int z^x dF_{X|Q}(x|q).$$

V prípade, že sa jedná o diskrétnu náhodnú veličinu, je potrebné zmeniť integrál na sumu. Vytvárajúca funkcia binomického rozdelenia je

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{x=0}^n z^x \binom{n}{x} q^x (1 - q)^{n-x} = \\ &= [1 + q(z - 1)]^n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pre $n \rightarrow \infty$ platí

$$\frac{X - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

kde \xrightarrow{d} značí konvergenciu v distribúcii a $N(0,1)$ normované normálne rozdelenie. Dôkaz je možné nájsť v knihe Anděl (2007) na strane 335.

Nech $n \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$ tak, že $\lambda = nq$ zostáva konštantné. Pre vytvárajúcu funkciu platí

$$\begin{aligned} P(z) &= [1 + q(z-1)]^n = \\ &= \left[1 + \lambda \frac{(z-1)}{n}\right]^n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ak $n \rightarrow \infty$, tak $P(z) \rightarrow e^{\lambda(z-1)}$. Inak povedané, Poissonovo rozdelenie je limitnou formou, pretože vytvárajúca funkcia Poissonovho rozdelenia je

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{z^x \lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \\ &= e^{\lambda(z-1)}. \end{aligned}$$

Teda pre veľké n a malé q , binomické rozdelenie môže byť aproximované Poissonovým rozdelením.

Ďalej budeme uvažovať, že náhodná veličina Q s realizáciou q má beta rozdelenie. Hustota $f_Q(q)$ má tvar

$$f_Q(q) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1} (1-q)^{b-1}, \quad 0 < q < 1 \quad (2.13)$$

kde $a, b > 0$. Pre strednú hodnotu a rozptyl beta rozdelenia máme

$$E Q = \frac{a}{a+b} \quad (2.14)$$

$$\text{var } Q = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}, \quad (2.15)$$

viď Anděl (2007), str. 25.

K odvodeniu nepodmienennej hustoty beta-binomického rozdelenia využijeme nasledujúce vlastnosti gama a beta funkcií.

Gama funkcia má tvar

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Pre x kladné celé číslo platí vzťah

$$\Gamma(x+1) = x!.$$

Ľahko sa dá tiež ukázať, že

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (2.16)$$

Vzťah (2.16) môžeme odvodiť použitím metódy per partes (PP).

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \stackrel{PP}{=} \underbrace{[-t^x e^{-t}]_0^\infty}_0 + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

Beta funkcia je definovaná ako

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Jednou z vlastností beta funkcie je, že platí

$$B(a,b) = B(b,a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a,b > 0.$$

Podľa (2.6) môžeme pravdepodobnostnú funkciu zmesi beta-binomického rozdelenia písať ako

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_0^1 \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1} (1-q)^{b-1} dq = \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 q^{a+x-1} (1-q)^{b+n-x-1} dq = \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(b+n-x)}{\Gamma(a+b+n)}, \quad x = 0,1,2,\dots,n\end{aligned}\quad (2.17)$$

Strednú hodnotu a rozptyl beta-binomického rozdelenia je možné odvodiť s využitím znalosti strednej hodnoty a rozptylu binomického rozdelenia. Vychádzame zo vzťahu (2.8). Platí

$$\begin{aligned}\mathbf{E} X &= \int_0^1 \mathbf{E}(X|Q=q) f_Q(q) dq = \\ &= \int_0^1 nq \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1} (1-q)^{b-1} dq = \\ &= n \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b+1)} = \\ &= n \frac{a}{a+b}.\end{aligned}\quad (2.18)$$

K odvodeniu rozptylu použijeme vzťah (2.9) s pomocou strednej hodnoty (2.14) a rozptylu (2.15) beta rozdelenia. Má tvar

$$\begin{aligned}\text{var } X &= \mathbf{E} nQ(1-Q) + \text{var } nQ = \\ &= n [\mathbf{E} Q - \text{var } Q - (\mathbf{E} Q)^2 + n \text{var } Q] = \\ &= n \left(\frac{a}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} + n \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \right) = \\ &= n \frac{ab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

2.1.2 Poissonovo-Gama rozdelenie

Poissonovo rozdelenie je najčastejšie používané pri reprezentácii takzvaných *count data*, teda dát, ktoré nadobúdajú hodnoty nezáporných celých čísel $(0,1,2,\dots)$. Toto rozdelenie je vhodné použiť v prípadoch, keď máme k dispozícii limitovaný počet dát, pretože pri použití Poissonovho rozdelenia stačí odhadnúť jeden parameter. Nevýhoda jednoduchého Poissonovho rozdelenia vyplýva z rovnosti strednej hodnoty a rozptylu.

V prípade, keď dostupné dáta vykazujú väčší rozptyl než je stredná hodnota, často sa stretávame práve s Poissonovým-gama modelom, kde parameter Poissonovho rozdelenia je náhodnou veličinou s gama rozdelením. Poissonovo-gama rozdelenie tak isto ako beta-binomické rozdelenie sa najčastejšie spája s neživotným poistením, a to konkrétne pri modelovaní počtu poistných udalostí, teda počtu škôd v kolektívnom modeli. Ukážeme si, že oba modely je možné aplikovať aj pre modelovanie počtu úmrtí v portfóliu.

Predpokladajme, že náhodná veličina X má Poissonovo rozdelenie $Poiss(\lambda)$ s pravdepodobnostnou funkciou $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$, kde $\lambda > 0$ je parameter náhodnej veličiny X a je realizáciou náhodnej veličiny Λ s hustotou $f_{\Lambda}(\lambda)$. Pravdepodobnostná funkcia $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ má tvar

$$f_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\dots \quad (2.20)$$

Stredná hodnota a rozptyl Poissonovho rozdelenia sú totožné a rovnajú sa λ . Uvažujme, že náhodná veličina Λ má gama rozdelenie, teda jej hustota $f_{\Lambda}(\lambda)$ je tvaru

$$f_{\Lambda}(\lambda) = \beta (\beta\lambda)^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \lambda > 0, \quad (2.21)$$

kde $\beta, \alpha > 0$. Stredná hodnota gama rozdelenia je

$$\mathbb{E} \Lambda = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.22)$$

a rozptyl je

$$\text{var} \Lambda = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (2.23)$$

Vychádzajúc zo vzťahu (2.6) dospejeme k záveru, že nepodmienené rozdelenie náhodnej veličiny X , teda pravdepodobnostná funkcia zmesi Poissonovho-gama rozdelenia má tvar

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \beta (\beta\lambda)^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda = \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{x! \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \lambda^{x+\alpha-1} e^{-\lambda(1+\beta)} d\lambda = \\ &= \frac{\Gamma(x+\alpha) \beta^{\alpha}}{x! \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^{x+\alpha} = \\ &= \binom{x+\alpha-1}{x} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^x. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vzťah (2.24) pre $x = 0, 1, 2, \dots$ je pravdepodobnostnou funkciou negatívne binomického rozdelenia s parametrami α a p , kde $p = \frac{\beta}{1+\beta}$.

Pre strednú hodnotu a rozptyl Poissonovho-gama rozdelenia platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E} X &= \mathbf{E} [\mathbf{E} (X|\Lambda)] = \mathbf{E} \Lambda = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \text{var } X &= \mathbf{E} \Lambda + \text{var } \Lambda = \\ &= \alpha \frac{\beta + 1}{\beta^2}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Kapitola 3

Modelovanie počtu úmrtí

V druhej kapitole sme sa oboznámili s tým, ako sa konštruujú a aké majú vlastnosti zmesi rozdelení, konkrétne beta-binomické rozdelenie a Poissonovo-gama rozdelenie. Budeme vychádzať z článkov Olivieri (2011), Olivieri a Pitacco (2009) a tieto rozdelenia aplikujeme na modelovanie počtu úmrtí pre jednu kohortu a Poissonovo-gama rozdelenie si bližšie ukážeme i pre viac kohort. Pod pojmom kohorta si budeme predstavovať skupinu osôb danej populácie narodených v rovnakom roku. Skúsenosti ukazujú, že úmrtnosť sa v čase mení a preto je vhodné používať také modely, ktoré poskytujú možnosť modelovať úmrtnosť dynamicky pomocou funkcií, ktoré závisia na veku x i kalendárnom roku t . Obecne tieto charakteristiky budeme značiť $\cdot_{x,t}$.

Cieľom poisťovne poskytujúcej produkty životných dôchodkov je kvantifikovať riziko úmrtnosti/dlhovekosti pomocou (čiastočného) interného modelu. Predpokladajme, že máme portfólio okamžitých dôchodkov s fixnými dávkami. Iné riziko než riziko úmrtnosti nebudeme brať do úvahy a pre každého poberateľa dôchodku budeme uvažovať rovnakú ročnú čiastku. Z toho vyplýva, že jediná náhodná veličina ovplyvňujúca výsledky portfólia je počet úmrtí, resp. počet tých, ktorí prežili.

Čas prvého vstupu poisťných zmlúv do portfólia označme t_0 . Požadovaný vek pri vstupe do portfólia každého poberateľa dôchodku označme x_0 . Ďalej nech $t = 0, 1, 2, \dots$ značí dĺžku trvania portfólia od času t_0 . Náhodný počet úmrtí v roku $(t-1, t)$ osôb, ktoré boli vo veku x , označíme $D_{x,t}$. Naopak, $N_{x,t}$ označíme náhodnú veličinu predstavujúcu počet poberateľov dôchodku vo veku x v čase t , teda tých, ktorí prežili. Realizácie týchto dvoch náhodných veličín budeme značiť malými písmenami, konkrétne $d_{x,t}$ a $n_{x,t}$. Počiatočný počet jedincov v danej kohorte je $n_{x_0,0}$. Maximálny dosiahnuteľný vek označíme ω . Predpokladáme, že je známy a spoločný pre všetky kohorty. Potom náhodný počet úmrtí v roku $(t-1, t)$ reprezentuje veličina D_t , kde ¹

$$D_t = \sum_{x=x_0}^{(x_0+t-1) \wedge \omega} D_{x,t}. \quad (3.1)$$

Podobne, N_t označuje náhodný počet poberajúcich dôchodok, ktorí sú nažive

¹Pozn.: $a \wedge b$ značí $\min(a, b)$

v čase t , kde

$$N_t = \sum_{x=x_0}^{(x_0+t)\wedge\omega} N_{x,t}. \quad (3.2)$$

Ich realizácie opäť značíme malými písmenami, teda pre D_t máme d_t a pre N_t máme n_t .

Predpokladajme, že máme k dispozícii úmrtnostné tabuľky pre kohortu, v ktorých pravdepodobnosti úmrtia budeme považovať za najlepšie odhady. Najlepší odhad pravdepodobnosti úmrtia vo veku x na začiatku roku $(t-1, t)$ označíme $q_{x,t}^*$. Pojem riziko dlhovekosti je používaný k označeniu situácie systematického poklesu pravdepodobností úmrtí. Aby sme mohli podchytiť dopad systematických odchýlok, budeme uvažovať náhodnú pravdepodobnosť úmrtia $Q_{x,t}$. Náhodná veličina $Q_{x,t}$ so svojimi realizáciami $q_{x,t}$ bude značiť pravdepodobnosť úmrtia vo veku x na začiatku roku $(t-1, t)$. Budeme predpokladať, že skutočná úmrtnosť sa líši od najlepších odhadov úmrtnosti, čo predstavuje parametrické riziko v odhadoch úmrtnosti.

3.1 Beta-binomický model

Náhodné fluktuácie okolo očakávanej úmrtnosti danej úmrtnostnou tabuľkou budeme kvantifikovať použitím binomického rozdelenia za predpokladu, že podmienené na danej pravdepodobnosti úmrtia q ako funkcií x a t sú dĺžky života jedincov nezávislé a rovnako rozdelené. Ďalej predpokladajme, že poberatelia dôchodkov sú vo veku x_0 v čase t_0 .

Uvažujme, že náhodná veličina počtu úmrtí vo veku x v čase $t-1$ má binomické rozdelenie s parametrami $n_{x,t-1}$ a $q_{x,t}$, teda

$$[D_{x,t}|q_{x,t}; n_{x,t-1}] \sim Bi(n_{x,t-1}, q_{x,t}) \quad (3.3)$$

s pravdepodobnostnou funkciou tvaru (2.10).

I v dostatočne veľkom portfóliu môžeme pozorovať situáciu, kedy pravdepodobnosť úmrtia získaná skúsenosťou $\frac{D_{x,t}}{n_{x,t-1}}$ sa výrazne odlišuje od tabuľkových hodnôt najlepších odhadov $q_{x,t}^*$. Môže to naznačovať výskyt systematického rizika.

Predpokladáme, že pravdepodobnosť úmrtia má beta rozdelenie s parametrami $a_{x,t} > 0$ a $b_{x,t} > 0$, teda

$$Q_{x,t} \sim Beta(a_{x,t}, b_{x,t}) \quad (3.4)$$

s hustotou tvaru (2.13).

Za predpokladov (3.3), (3.4) a vzhľadom ku tvaru hustoty zmesi beta-binomického rozdelenia (2.17) dostávame nepodmienené rozdelenie počtu úmrtí v roku $(t-1, t)$ tých, ktorí sú vo veku x , v tvare

$$\begin{aligned} f_{D_{x,t}}(d) &= P(D_{x,t} = d | n_{x,t-1}) = \\ &= \binom{n_{x,t-1}}{d} \frac{\Gamma(a_{x,t} + b_{x,t}) \Gamma(a_{x,t} + d) \Gamma(b_{x,t} + n_{x,t-1} - d)}{\Gamma(a_{x,t}) \Gamma(b_{x,t}) \Gamma(a_{x,t} + b_{x,t} + n_{x,t-1})}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Stredná hodnota ročného počtu úmrtí vo veku x v čase $t-1$ za predpokladu, že neuvažujeme pravdepodobnosť úmrtia ako náhodnú veličinu je

$$E(D_{x,t} | q_{x,t}^*; n_{x,t-1}) = n_{x,t-1} q_{x,t}^*. \quad (3.6)$$

Stredná hodnota ročného počtu úmrtí vo veku x v čase $t-1$ ako zmesi beta-binomického rozdelenia vychádza zo vzťahu (2.18) a má tvar

$$E(D_{x,t} | n_{x,t-1}) = n_{x,t-1} \frac{a_{x,t}}{a_{x,t} + b_{x,t}}. \quad (3.7)$$

Pre rozptyl použijeme vzťah (2.19) a dostaneme

$$\text{var}(D_{x,t} | n_{x,t-1}) = n_{x,t-1} \frac{a_{x,t} b_{x,t} (a_{x,t} + b_{x,t} + n_{x,t-1})}{(a_{x,t} + b_{x,t})^2 (a_{x,t} + b_{x,t} + 1)}.$$

Rozdiel medzi strednými hodnotami $E(D_{x,t} | n_{x,t-1})$ a $E(D_{x,t} | q_{x,t}^*; n_{x,t-1})$ reprezentuje očakávanú odchýlku v agregovanej úmrtnosti. Nastáva jeden z prípadov

$$E(D_{x,t} | n_{x,t-1}) \gtrless E(D_{x,t} | q_{x,t}^*; n_{x,t-1})$$

v závislosti na rozdielu medzi $q_{x,t}^*$ a $\frac{a_{x,t}}{a_{x,t} + b_{x,t}}$.

3.2 Poissonov-gama model - jedna kohorta

Predpokladajme, že $n_{x,t-1}$ je dostatočne veľké, pravdepodobnosť úmrtia $q_{x,t}$ je malá a $n_{x,t-1}q_{x,t}$ je stabilné. Potom (3.3) môžeme aproximovať Poissonovým rozdelením, ako sme si ukázali v podkapitole (2.1.1).

Naďalej predpokladáme, že životy poistených sú homogénne a nezávislé a poberatelia dôchodkov sú vo veku x_0 v čase t_0 . Uvažujme, že počet úmrtí v roku $(t-1, t)$ vo veku x má Poissonovo rozdelenie s parametrom $n_{x,t-1}q_{x,t}$, teda

$$[D_{x,t}|q_{x,t}; n_{x,t-1}] \sim Poiss(n_{x,t-1}q_{x,t}) \quad (3.8)$$

s pravdepodobnostnou funkciou tvaru (2.20).

Systematické odchýlky budú reprezentované opäť náhodnou veličinou $Q_{x,t}$ a budeme predpokladať

$$0 \leq Q_{x,t} \leq 1. \quad (3.9)$$

Pravdepodobnosť náhodného javu v (3.9) má byť blízka jednej a

$$Q_{x,t} = q_{x,t}^* Z_{x,t}, \quad (3.10)$$

kde $Z_{x,t}$ je kladná náhodná veličina. Pomocou náhodnej veličiny $Z_{x,t}$ vyjadrujeme predpoklad, že skutočná úmrtnosť sa líši od najlepších odhadov úmrtnosti. Veličina $Z_{x,t}$ predstavuje odchýlku v celkovej úmrtnosti, nad alebo pod $q_{x,t}^*$. Multiplikatívny model (3.10) sa veľmi často používa v aktuárskej matematike pre vyjadrenie heterogenity kmeňa životov spôsobenej pozorovateľnými alebo nepozorovateľnými rizikovými faktormi.

Ďalej predpokladajme, že pre pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej veličiny $Z_{x,t}$ platí

$$Z_{x,t} \sim \Gamma(\alpha_{x,t}, \beta_{x,t}), \quad (3.11)$$

kde hustota je tvaru (2.21). Vďaka modelu (3.10) jednoduchou transformáciou (zmena škály) hustoty $Z_{x,t}$ dostávame, že rozdelenie pravdepodobnosti úmrtia $Q_{x,t}$ má opäť gama rozdelenie, ale s parametrami $\alpha_{x,t}$ a $\frac{\beta_{x,t}}{q_{x,t}^*}$, teda

$$Q_{x,t} \sim \Gamma\left(\alpha_{x,t}, \frac{\beta_{x,t}}{q_{x,t}^*}\right). \quad (3.12)$$

Za predpokladov (3.8), (3.11) a vzhľadom ku tvaru hustoty zmesi Poissonovho-gama rozdelenia, resp. negatívne-binomického rozdelenia (2.24) dostávame nepodmienené rozdelenie počtu úmrtí v roku $(t-1, t)$ v tvare

$$\begin{aligned} f_{D_{x,t}}(d) &= P(D_{x,t} = d | n_{x,t-1}) = \\ &= \binom{d + \alpha_{x,t} - 1}{d} \left(\frac{n_{x,t-1}}{n_{x,t-1} + \frac{\beta_{x,t}}{q_{x,t}^*}} \right)^d \left(\frac{\beta_{x,t}}{n_{x,t-1}q_{x,t}^* + \beta_{x,t}} \right)^{\alpha_{x,t}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Platí

$$[D_{x,t}|n_{x,t-1}] \sim NB\left(\alpha_{x,t}, \frac{\theta_{x,t}}{\theta_{x,t} + 1}\right), \quad (3.14)$$

kde $\theta_{x,t} = \frac{\beta_{x,t}}{n_{x,t-1}q_{x,t}^*}$.

Vzhľadom ku (3.8) máme

$$E(D_{x,t}|q_{x,t}; n_{x,t-1}) = n_{x,t-1}q_{x,t}^* \quad (3.15)$$

a vzhľadom ku (3.14) vychádzajúc z tvaru (2.25) dostávame

$$E(D_{x,t}|n_{x,t-1}) = \frac{\alpha_{x,t}}{\beta_{x,t}} n_{x,t-1}q_{x,t}^*. \quad (3.16)$$

Vidíme, že vzťah medzi týmito strednými hodnotami, keď vezmeme do úvahy náhodnosť pravdepodobnosti úmrtia, závisí na podiele $\frac{\alpha_{x,t}}{\beta_{x,t}}$. Oba parametre $\alpha_{x,t}$ a $\beta_{x,t}$ by mali byť volené konzistentne vzhľadom k dátam, takisto ako i v beta-binomickom modeli.

V ďalšej časti práce bude naším primárnym modelom práve Poissonov-gama model. Aj napriek tomu, že v Poissonovom-gama rozdelení, tak ako sme ho uviedli, musíme rátať s istými priblíženiami. Prvá aproximácia vychádza priamo z Poissonovho predpokladu (3.8), kde môže byť problematický prípad vo vyšších vekoch, kedy $n_{x,t-1}$ je nízke a $q_{x,t}$ naopak vysoké. Použitie Poissonovho rozdelenia je vhodným nástrojom v prípade, keď pracujeme s viac než jednou kohortou. V prípade, že v portfóliu sú jedinci s vysokými vekmi, ich celkový vplyv v rámci celej uvažovanej populácie by mal byť malý. Druhá aproximácia vyplýva z toho, že nosičom gama rozdelenia je množina $(0, \infty)$, a teda (3.11) nie nevyhnutne splňa obmedzenie (3.9), najmä vo vysokých vekoch. Za účelom implementácie je model (3.14) vhodnejší a hlavne flexibilnejší než beta-binomický model, ktorý však nemusí podliehať problému rozdelenia počtu úmrtí vo vysokých vekoch. Bayesovský prístup, kedy použijeme gama rozdelenie ako konjugované apriórne rozdelenie Poissonovho rozdelenia, nám umožní vysvetliť korelácie v čase medzi $Z_{x,t}$, teda aj medzi pravdepodobnosťami úmrtia.

3.3 Poissonov-gama model - viac kohort

V tejto podkapitole si ukážeme ako pracovať s Poissonovým-gama rozdelením pre modelovanie ročného počtu úmrtí, keď máme portfólio, ktoré sa skladá z viac než jednej kohorty. Opäť budeme používať x_0 ako požadovaný vstupný vek a t , $t = 0, 1, \dots$ ako čas plynúci od času t_0 ako prvého vstupu. Pripomeňme si, že D_t značíme náhodný počet úmrtí v roku $(t-1, t)$ a platí preň (3.1) a N_t predstavuje náhodný počet žijúcich poberateľov dôchodku v čase t a platí preň (3.2). Realizácie týchto náhodných veličín značíme malými písmenami d_t a n_t .

Pre ľubovoľný vek x a čas t počet úmrtí $D_{x,t}$ s rozdelením (3.8) požaduje, že podmienene na danej pravdepodobnosti úmrtia $q_{x,t}$ dĺžky života jedincov patriacich jednej kohorte sú nezávislé a rovnako rozdelené, ako sme popisovali v časti o portfóliu pozostávajúceho len z jednej kohorty. Ďalej budeme predpokladať, že

podmienene na tabuľke úmrtnosti $\{q_{x,t}\}$ v ľubovolnom čase t počty úmrtí $D_{x,t}$ sú nezávislé vzhľadom k veku. Znamená to, že jednotlivé (individuálne) životy sú nezávislé aj medzi uvažovanými kohortami.

Pre Poissonovo rozdelenie platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 1. *Nech X_1, \dots, X_n sú nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdelením s parametrami $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom náhodná veličina $X = X_1 + \dots + X_n$ má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.*

Dôkaz. Dôkaz je k nahliadnutiu v knihe (Klugman a kol., 2008, str. 103). □

Vychádzajúc z (3.8), s využitím vety (1), dostávame na základe uvažovaného predpokladu o nezávislosti, že

$$[D_t | \{q_{x,t}\}; \{n_{x,t-1}\}] \sim Poiss \left(\sum_{x=x_0}^{(x_0+t-1)\wedge\omega} n_{x,t-1} q_{x,t} \right). \quad (3.17)$$

Ďalej uvažujme Z_t ako (kladnú) náhodnú veličinu vyjadrujúcu systematickú odchýlku v úmrtnosti, o ktorej predpokladáme, že je časovo špecifická, ale vekovo nezávislá. Nech pre ľubovольný vek x a čas t platí

$$Q_{x,t} = q_{x,t}^* Z_t. \quad (3.18)$$

Rozdelenie počtu úmrtí podmienene na $Z_t = z$ môžeme vyjadriť v tvare

$$[D_t | \{z q_{x,t}^*\}; \{n_{x,t-1}\}] \sim Poiss \left(z \sum_{x=x_0}^{(x_0+t-1)\wedge\omega} n_{x,t-1} q_{x,t}^* \right). \quad (3.19)$$

Pre Z_t budeme opäť uvažovať gama rozdelenie

$$Z_t \sim \Gamma(\alpha_t, \beta_t). \quad (3.20)$$

Z (3.19) a (3.20), je možné odvodiť nepodmienené rozdelenie počtu úmrtí v roku $(t-1, t)$ v tvare

$$\begin{aligned} f_{D_t}(d) &= P(D_t = d | \{n_{x,t-1}\}) = \\ &= \binom{d + \alpha_t - 1}{d} \left(\frac{\sum_{x=x_0}^{(x_0+t-1)\wedge\omega} n_{x,t-1} q_{x,t}^*}{\beta_t + \sum_{x=x_0}^{(x_0+t-1)\wedge\omega} n_{x,t-1} q_{x,t}^*} \right)^d \left(\frac{\beta_t}{\beta_t + \sum_{x=x_0}^{(x_0+t-1)\wedge\omega} n_{x,t-1} q_{x,t}^*} \right)^{\alpha_t}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Platí, že

$$[D_t | \{n_{x,t-1}\}] \sim NB \left(\alpha_t, \frac{\theta_t}{\theta_t + 1} \right), \quad (3.22)$$

kde

$$\theta_t = \frac{\beta_t}{(x_0+t-1)^\omega \sum_{x=x_0} n_{x,t-1} q_{x,t}^*}.$$

3.4 Krátky úvod do bayesovskej štatistiky

V bayesovskom prístupe uvažujeme, že parameter štatistického modelu je náhodná veličina s pravdepodobnostným rozdelením. Predpokladajme, že $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ je náhodný vektor s pravdepodobnostnou funkciou $f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$. V bayesovskom prístupe uvažujeme, že Θ je náhodný vektor s pravdepodobnostným rozdelením $\pi(\boldsymbol{\theta})$. $\boldsymbol{\theta}$ je realizáciou Θ . Rozdelenie $\pi(\boldsymbol{\theta})$ nazývame apriórne. Apriórnym rozdelením vyjadrujeme našu predstavu o tom, čo už vieme alebo si myslíme dopredu, ešte pred získaním dát. Pre združené rozdelenie $f_{\mathbf{X},\Theta}(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})$ platí

$$f_{\mathbf{X},\Theta}(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.23)$$

Zaujímá nás podmienené pravdepodobnostné rozdelenie pre Θ pri danom $\mathbf{X} = \mathbf{x}$,

$$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}). \quad (3.24)$$

Toto rozdelenie sa nazýva aposteriórne. Hovorí nám, ako sa zmení naša apriórna predstava po tom, ako je získaná realizácia \mathbf{x} vektoru \mathbf{X} . Aposteriórne rozdelenie ide odvodiť pomocou Bayesovej vety

$$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.25)$$

Viac informácií o bayesovskej teórii je možné nájsť v knihách Klugman a kol. (2008) alebo Ghosh a kol. (2006)

3.5 Korelácia v čase medzi pravdepodobnosťami úmrtia

Bayesovská štatistika poskytuje užitočný aparát k tomu, aby sme mohli v každom kroku aktualizovať parametre rozdelenia pravdepodobnosti úmrtia pomocou informácie o skutočnom počte zomretých v portfóliu. Bayesovský prístup umožňuje implicitne vysvetliť koreláciu v čase medzi pravdepodobnosťami úmrtia. Budeme pracovať s Poissonovým-gama modelom pre jednu kohortu a potom s modelom pre prípad viacerých kohort.

Predpokladajme, že koeficienty $Z_{x,t}$ sú korelované v čase. Celá budúcnosť vývoja počtu zomretých z pohľadu času výpočtu je náhodná. Rozdelenie počtu zomretých závisí na parametroch, ktoré vieme získať na základe informácie o skutočnom vývoji počtu zomretých do času, z ktorého sa do budúcnosti pozeráme. Počty zomretých, resp. tých, ktorí prežili od času výpočtu, sú pre nás predikciami, modelujeme ich.

V čase 0, kedy nemáme k dispozícii žiadnu informáciu o počte zomretých, budeme vychádzať z predpokladu, že

$$Z_{x,t} \sim \Gamma(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \quad (3.26)$$

teda pre všetky časy $t, t = 0, 1, \dots$ a veku $x, x = x_0 + t$ sú parametre rozdelenia $Z_{x,t}$ rovnaké. Voľbou parametrov $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ vyjadrujeme apriórnu predstavu o fluktuáciách skutočnej úmrtnosti okolo tabuliek najlepších odhadov $q_{x,t}^*$. Vychádzajúc z multiplikatívneho modelu (3.10) dostávame, že

$$Q_{x_0,1} \sim \Gamma\left(\bar{\alpha}, \frac{\bar{\beta}}{q_{x_0,1}^*}\right). \quad (3.27)$$

Toto rozdelenie budeme považovať za apriórne v čase 1, označíme ho $\pi_{Q_{x_0,1}}(q_{x_0,1})$. Na základe (3.14) vieme, že pre nepodmienené rozdelenie počtu úmrtí vo vstupnom veku x_0 v čase 0 platí

$$[D_{x_0,1}|n_{x_0,0}] \sim NB\left(\bar{\alpha}, \frac{\theta_{x_0,1}}{\theta_{x_0,1} + 1}\right), \quad (3.28)$$

kde $\theta_{x_0,1} = \frac{\bar{\beta}}{n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*}$.

Môžeme tiež písať, že podmienené rozdelenie počtu zomretých $D_{x_0,1}$ je Poissonovo s hustotou $f_{D_{x_0,1}|\Lambda_0}(d_{x_0,1}|\lambda_0)$. Náhodná veličina

$$\Lambda_0 = n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*Z_{x,t},$$

má gama rozdelenie s parametrami $\bar{\alpha}$ a $\frac{\bar{\beta}}{n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*}$. Potom nepodmienené rozdelenie $D_{x_0,1}$ je práve (3.28).

Nech sme stále v čase 0 a zaujíma nás predikcia počtu zomretých pre ďalšie obdobie (1,2). Parametre $\bar{\alpha}$ a $\bar{\beta}$ zostávajú nezmenené. Počet zomretých označme $\hat{d}_{x_0,1}$ a počet tých, ktorí prežili $\hat{n}_{x_0+1,1} = n_{x_0,0} - \hat{d}_{x_0,1}$. Potom podmienené rozdelenie počtu zomretých $\hat{D}_{x_0+1,2}$ je Poissonovo s hustotou $f_{\hat{D}_{x_0+1,2}|\Lambda_1}(\hat{d}_{x_0+1,2}|\lambda_1)$. Pre náhodnú veličinu Λ_1 platí vzťah

$$\Lambda_1 = \hat{n}_{x_0+1,1}q_{x_0+1,2}^*Z_{x,t}.$$

Rozdelenie Λ_1 je gama s parametrami $\bar{\alpha}$ a $\frac{\bar{\beta}}{\hat{n}_{x_0+1,1}q_{x_0+1,2}^*}$. Nepodmienené rozdelenie pre $\hat{D}_{x_0+1,2}$ by sme opäť získali pomocou (2.6). Takýmto postupom dokážeme simulovať budúci vývoj poisťného kmeňa.

V čase 1 máme k dispozícii informáciu o skutočnom počte zomretých za obdobie (0,1), túto hodnotu označíme ako $d_{x_0,1}$ a aktualizovaná veľkosť populácie je $n_{x_0+1,1} = n_{x_0,0} - d_{x_0,1}$. Tento nový dodatočný poznatok využijeme k vyjadreniu aposteriórneho rozdelenia pre $Q_{x_0,1}$ podmienene na $D_{x_0,1} = d_{x_0,1}$ a teda k aktualizácii parametrov vďaka skúsenosti. Pre účely názornejšieho vyjadrenia použijeme pre toto aposteriórne rozdelenie značenie $\pi_{Q_{x_0,1}|D_{x_0,1}}(q_{x_0,1}|d_{x_0,1})$.

Potom platí

$$\pi_{Q_{x_0,1}|D_{x_0,1}}(q_{x_0,1}|d_{x_0,1}) = \frac{f_{D_{x_0,1}|Q_{x_0,1}}(d_{x_0,1}|q_{x_0,1})\pi_{Q_{x_0,1}}(q_{x_0,1})}{\int_0^{\infty} f_{D_{x_0,1}|Q_{x_0,1}}(d_{x_0,1}|q_{x_0,1})\pi_{Q_{x_0,1}}(q_{x_0,1})dq_{x_0,1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n_{x_0,0}q_{x_0,1})^{d_{x_0,1}} e^{-n_{x_0,0}q_{x_0,1}} \left(\frac{\bar{\beta}}{q_{x_0,1}^*}\right)^{\bar{\alpha}} q_{x_0,1}^{\bar{\alpha}-1} e^{-\frac{\bar{\beta}}{q_{x_0,1}^*}q_{x_0,1}}}{d_{x_0,1}! \Gamma(\bar{\alpha})} = \\
&= \frac{(d_{x_0,1}+\bar{\alpha}-1)}{d_{x_0,1}} \left(\frac{n_{x_0,0}}{n_{x_0,0}+\frac{\bar{\beta}}{q_{x_0,1}^*}}\right)^{d_{x_0,1}} \left(\frac{\bar{\beta}}{n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*+\beta}\right)^{\bar{\alpha}} \\
&= \left(\frac{\bar{\beta}}{q_{x_0,1}^*} + n_{x_0,0}\right)^{\bar{\alpha}+d_{x_0,1}} \frac{q_{x_0,1}^{\bar{\alpha}+d_{x_0,1}-1} e^{-q_{x_0,1}\left(\frac{\bar{\beta}}{q_{x_0,1}^*}+n_{x_0,0}\right)}}{\Gamma(\bar{\alpha}+d_{x_0,1})}, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

kde $f_{D_{x_0,1}|Q_{x_0,1}}(d_{x_0,1}|q_{x_0,1})$ odpovedá Poissonovmu rozdeleniu (3.8) pre $D_{x_0,1}$ s parametrom $n_{x_0,0}q_{x_0,1}$. Zo vzťahu (3.29) vidíme, že aposteriórne rozdelenie $Q_{x_0,1}$ podmienené na $D_{x_0,1} = d_{x_0,1}$ je opäť gama a platí

$$[Q_{x_0,1}|d_{x_0,1}] \sim \Gamma\left(\bar{\alpha} + d_{x_0,1}, \frac{\bar{\beta}}{q_{x_0,1}^*} + n_{x_0,0}\right). \tag{3.30}$$

Pre aposteriórne rozdelenie $Z_{x,t}$ máme

$$[Z_{x,t}|d_{x_0,1}] \sim \Gamma\left(\bar{\alpha} + d_{x_0,1}, \bar{\beta} + q_{x_0,1}^*n_{x_0,0}\right), \tag{3.31}$$

kde môžeme vidieť, že aktualizované parametre sa zmenili, a to v prípade prvého parametra nárastom o novú informáciu o počte zomretých vo veku x_0 v čase $(0,1)$ a v prípade druhého o očakávaný počet zomretých pre obdobie $(0,1)$. Apriórna očakávaná hodnota $Z_{x,t}$ je

$$E Z_{x,t} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

a aposteriórna očakávaná hodnota v čase 1 je

$$E(Z_{x,t}|d_{x_0,1}) = \frac{\bar{\alpha} + d_{x_0,1}}{\bar{\beta} + n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*}.$$

Nech výpočet prebieha v čase 1, potom nás zaujíma vývoj počtu zomretých v nasledujúcich obdobiach $(1,2), (2,3), \dots$. Parametre rozdelenia $Z_{x,t}|d_{x_0,1}$ (3.31) zostávajú nemenné pre všetky x a t . Pre obdobie $(1,2)$ platí

$$\begin{aligned}
[Q_{x_0+1,2}|d_{x_0,1}] &\sim \Gamma\left(\bar{\alpha} + d_{x_0,1}, \frac{\bar{\beta} + n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*}{q_{x_0+1,2}^*}\right) \\
[D_{x_0+1,2}|n_{x_0,0}, d_{x_0,1}] &\sim NB\left(\bar{\alpha} + d_{x_0,1}, \frac{\theta_{x_0+1,2}}{\theta_{x_0+1,2} + 1}\right),
\end{aligned}$$

kde $\theta_{x_0+1,2} = \frac{\bar{\beta} + n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*}{n_{x_0+1,1}q_{x_0+1,2}^*}$.

Pre obdobie $(2,3)$ z pohľadu času 1 by sme opäť použili tie isté parametre rozdelenia $Z_{x,t}|d_{x_0,1}$.

V každom čase môžeme previesť aktualizáciu parametrov vždy s využitím novej informácie o počte zomretých do času výpočtu. Predpokladajme, že sme v čase $t-1$ a máme k dispozícii pozorované hodnoty počtu úmrtí, konkrétne

$$D_{x_0,1} = d_{x_0,1}, D_{x_0+1,2} = d_{x_0+1,2}, \dots, D_{x_0+t-2,t-1} = d_{x_0+t-2,t-1}$$

a pre počty tých, ktorí prežili platí

$$n_{x_0+h,h} = n_{x_0+h-1,h-1} - d_{x_0+h-1,h}$$

v čase h , $h = 1, 2, \dots, t-1$. Aposteriórne rozdelenie $Z_{x,t}$, ktoré použijeme k simulácii počtu zomretých v ďalších rokoch, dostávame v tvare

$$[Z_{x,t} | d_{x_0,1}, \dots, d_{x_0+t-2,t-1}] \sim \Gamma \left(\bar{\alpha} + \sum_{h=1}^{t-1} d_{x_0+h-1,h}, \bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} n_{x_0+h-1,h-1} q_{x_0+h-1,h}^* \right) \quad (3.32)$$

Pre nepodmienené rozdelenie počtu zomretých vo veku $x_0 + t - 1$ v čase $t - 1$ platí

$$[D_{x_0+t-1,t} | n_{x_0,0}, d_{x_0,1}, \dots, d_{x_0+t-2,t-1}] \sim NB \left(\bar{\alpha} + \sum_{h=1}^{t-1} d_{x_0+h-1,h}, \frac{\theta_{x_0+t-1,t}}{\theta_{x_0+t-1,t} + 1} \right), \quad (3.33)$$

kde

$$\theta_{x_0+t-1,t} = \frac{\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} n_{x_0+h-1,h-1} q_{x_0+h-1,h}^*}{n_{x_0+t-1,t-1} q_{x_0+t-1,t}^*}.$$

Očakávaný počet úmrtí má tvar

$$\begin{aligned} E(D_{x_0+t-1,t} | n_{x_0,0}, d_{x_0,1}, d_{x_0+1,2}, \dots, d_{x_0+t-2,t-1}) &= \\ &= \frac{\bar{\alpha} + \sum_{h=1}^{t-1} d_{x_0+h-1,h}}{\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} n_{x_0+h-1,h-1} q_{x_0+h-1,h}^*} n_{x_0+t-1,t-1} q_{x_0+t-1,t}^*. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Z 3.34 vyplýva, že nepodmienený očakávaný počet úmrtí v roku je daný očakávanou hodnotou počtu úmrtí podmienene na najlepšom odhade pravdepodobnosti úmrtia, teda $n_{x_0+t-1,t-1} q_{x_0+t-1,t}^*$, rozšírený o koeficient. Tento koeficient odpovedá očakávanej hodnote $Z_{x,t}$ z (3.32). Preto, ak pozorované hodnoty sú konzistentné s tým, čo sa očakáva, tento koeficient bude vykazovať stabilitu v čase. Inak, ak skúsenosť je horšia než je očakávané, teda, že počet úmrtí je nižší než sa predpokladá, potom tento koeficient bude klesať v čase. Takáto systematická odchýlka môže mať vplyv na veľkosť kapitálovej požiadavky na riziko dlhovekosti.

Teraz predpokladajme, že naše portfólio sa skladá z viacerých kohort a Z_t sú korelované v čase. V čase 0 pre náhodný počet zomretých D_1 platí, že nepodmienené rozdelenie je negatívne-binomické s rovnakými parametrami ako v prípade jednej kohorty (3.28). Obdobnými krokmi ako pri jednej kohorte by sme v každom roku dosiahli novú aktualizáciu parametrov a tie využili k simulácii vývoja počtu úmrtí v ďalších obdobiach. Ukážeme si len všeobecný prípad. V čase $t - 1$ sme pozorovali ročný počet nových prichádzajúcich do portfólia $n_{x_0,0}, n_{x_0,1}, \dots, n_{x_0,t-1}$, ročný počet úmrtí $D_1 = d_1, D_2 = d_2, \dots, D_{t-1} = d_{t-1}$ a počet tých, ktorí prežili $n_{x,h}$ pre každú kohortu v čase h , $h = 0, 1, \dots, t-1$. Pomocou aposteriórneho rozdelenia Z_t , pre ktoré platí

$$[Z_t | d_1, d_2, \dots, d_{t-1}] \sim \Gamma \left(\bar{\alpha} + \sum_{h=1}^{t-1} d_h, \bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} \sum_{x=x_0}^{x_0+h-1} n_{x,h-1} q_{x,h}^* \right), \quad (3.35)$$

môžeme simulovať budúci vývoj počtu zomretých D_t, D_{t+1}, \dots . Platí, že

$$[D_t | \{n_{x,0}, \dots, n_{x,t-1}\}; D_1 = d_1, \dots, D_{t-1} = d_{t-1}] \sim NB \left(\bar{\alpha} + \sum_{h=1}^{t-1} d_h, \frac{\theta_t}{\theta_t + 1} \right),$$

kde

$$\theta_t = \frac{\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} \sum_{x=x_0}^{x_0+h-1 \wedge \omega} n_{x,h-1} q_{x,h}^*}{\sum_{x=x_0}^{x_0+t-1 \wedge \omega} n_{x,t-1} q_{x,t}^*}.$$

Apriórna očakávaná hodnota Z_t je

$$E Z_t = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}},$$

zatiaľ čo aposteriórna očakávaná hodnota v čase s , $s = 1, 2, \dots, t$ je

$$E (Z_t | D_1 = d_1, D_2 = d_2, \dots, D_{s-1} = d_{s-1}) = \frac{\bar{\alpha} + \sum_{h=1}^{s-1} d_h}{\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{s-1} \sum_{x=x_0}^{x_0+h-1 \wedge \omega} n_{x,h-1} q_{x,h}^*}. \quad (3.36)$$

Treba poznamenať, že pravdepodobnostné rozdelenie koeficientu vyjadrujúceho systematické odchýlky je rovnaké pre všetky kohorty, resp. pre celú populáciu.

Kapitola 4

Stanovenie kapitálovej požiadavky

Za posledné roky sa stále viac dostával do povedomia poisťovníkov, zaistovateľov a dozorných orgánov problém rizika dlhovekosti. Tabuľka (4.1) ukazuje strednú dĺžku života pri narodení z historického pohľadu v rokoch 1950, 2000, 2014 a predpovedanú strednú dĺžku života v roku 2050. Historické hodnoty pochádzajú z Human Mortality Database. Predpovede pre rok 2050 sú z Economic Policy Committee and European Commission. Z tabuľky (4.1) vidíme, že stredná dĺžka života vzrástla od roku 1950 a má tendenciu rásť ďalej, čo má za následok pokles pravdepodobností úmrtia hlavne vo vyšších vekoch.

Regulatórny rámec Solventnosť II vo svojich kapitálových požiadavkách vyžaduje výpočet kapitálu pre podmodul rizika dlhovekosti. Model, ktorý sme si predstavili v tretej kapitole (Poissonov-gama model), je vďaka schopnosti kalibrácie a dynamickosti vhodným nástrojom k internému stanoveniu kapitálu pre podmodul rizika dlhovekosti. Výhodou interného modelu oproti štandardnej formule je lepšia schopnosť ohodnotiť vlastný rizikový profil poisťovne, čo môže viesť k úspore nákladov na kapitál. Interný model dokáže zahrnúť riziká, ktoré nie sú pokryté v rámci štandardného modelu. V tejto kapitole si popíšeme ako stanoviť solventnostný kapitál pre riziko dlhovekosti. Čerpáme z článkov Olivieri (2011) a Olivieri a Pitacco (2009).

Krajina	Muži				Ženy			
	1950	2000	2014	2050	1950	2000	2014	2050
Česká republika	61.97	71.55	75.71	79.70	66.85	78.33	81.72	84.10
Slovensko	59.14	69.00	73.25	77.70	62.55	77.30	80.32	83.40
Nemecko	69.10	74.44	78.56	80.90	71.52	79.12	82.67	83.70
Francúzsko	63.43	75.25	79.26	82.70	69.19	82.81	85.40	89.10
Švédsko	69.85	77.38	80.35	83.30	72.44	82.01	84.05	86.50
Taliansko	64.50	73.94	79.16	83.60	66.74	79.20	83.21	87.80

Tabuľka 4.1: Stredná dĺžka života pri narodení pre mužov a ženy vybraných krajín Európy. Historické hodnoty v rokoch 1950, 2000, 2014 a predpovedaná hodnota pre rok 2050 (zdroje: Human Mortality Database a Economic Policy Committee and European Commission).

4.1 Úmrtnostný model a alokácia kapitálu

Stále predpokladáme, že máme portfólio okamžitých životných dôchodkov s fixnými polehrotnými výplatami. Pracujeme s homogénnym portfóliom, kde všetci poberatelia dôchodku budú dostávať ročne dôchodok rovnakej pevnej výšky b . Iné riziká okrem tých, ktoré súvisia s dĺžkou života zanedbáme. Taktiež všetky náklady spojené s poistením a správne náklady nebudeme brať do úvahy. Čas prvého vstupu poistných zmlúv do portfólia sme si označili t_0 , požadovaný vek pri vstupe do portfólia každého poberateľa dôchodku x_0 a dĺžku trvania portfólia $t = 0, 1, 2, \dots$ od času t_0 .

Hodnota $B_t^{(\Pi)}$ predstavuje ročný úhrn výplat portfólia a je definovaná pre $t = 1, 2, \dots, \omega - x_0$ ako

$$B_t^{(\Pi)} = bN_{x_0+t,t}. \quad (4.1)$$

Potom súčasná hodnota budúcich výplat portfólia sa počíta ako

$$Y_t^{(\Pi)} = \sum_{h=t+1}^{\omega-x_0} B_h^{(\Pi)}(1+i)^{-(h-t)} = \sum_{h=t+1}^{\omega-x_0} bN_{x_0+h,h}(1+i)^{-(h-t)}, \quad (4.2)$$

kde i je bezriziková úroková miera, o ktorej sa predpokladá, že je známa. Zároveň platí, že $Y_t^{(\Pi)}$ je súčtom súčasných hodnôt budúcich dôchodkových výplat pre jednotlivých poberateľov dôchodku z portfólia, ktoré označíme $Y_t^{(j)}$. Vzhľadom k homogenite portfólia máme $Y_t^{(j)} = Y_t^{(1)}$, kde $Y_t^{(1)}$ je očakávaná súčasná hodnota budúcich dôchodkových výplat jedného poisteného. Za predpokladu, že $b = 1$ platí

$$\mathbb{E} Y_t^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} (1 - {}_kq_{x_0+t,t+1}^*), \quad (4.3)$$

kde

$$1 - {}_kq_{x_0+t,t+1}^* = (1 - q_{x_0+t,t+1}^*)(1 - q_{x_0+t+1,t+2}^*)(1 - q_{x_0+t+2,t+3}^*) \cdots (1 - q_{x_0+t+k-1,t+k}^*).$$

Predpokladajme, že nedochádza k žiadnemu prenosu rizika (napr. zaistenie) a neuvažujeme žiadne investičné riziko. Majme aktíva, ktoré sa skladajú z bezrizikových dlhopisov s vhodnými dobami splatnosti. Ročný investičný výnos je i pre všetky možné doby splatnosti. Potom priebeh hodnoty aktív A_t v čase t je možné pomocou rekurzie zapísať ako

$$A_{t+h} = A_{t+h-1}(1+i) - B_{t+h}^{(\Pi)}, \quad h = 1, 2, \dots, \omega - x_0 - t. \quad (4.4)$$

To, že A_{t+h} je náhodné, vyplýva zo stochastickej povahy počtu poistených, ktorí prežili, modelovaných podľa Poissonovho-gama modelu.

Veličina

$$M_t = A_t - V_t^{(\Pi)[BE]} \quad (4.5)$$

reprezentuje výšku aktív na krytie rizika aktuálneho portfólia k času výpočtu, ktoré nie je kryté rezervou portfólia $V_t^{(\Pi)[BE]}$. Pomocou $V_t^{(\Pi)[BE]}$ značíme očakávanú hodnotu záväzkov počítanú pomocou tabuľky najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia, resp. založenú na najlepších predpokladoch o budúcom vývoji, teda

najlepšie odhady rezerv. Poznamenajme, že vo $V_t^{(\Pi)[BE]}$ sú uvažované len budúce toky B_{t+h} , $h = 1, 2, \dots$ a neuvažujeme žiadne rizikové adjustácie a ani žiadnu rizikovú maržu. Celková výška rezerv portfólia $V_t^{(\Pi)}$ pozostáva z najlepších odhadov rezerv a rizikovej marže RM_t . Platí vzťah

$$V_t^{(\Pi)} = V_t^{(\Pi)[BE]} + RM_t. \quad (4.6)$$

Z toho vyplýva, že RM_t je obsiahnutá v M_t . Riziková marža podľa pravidiel Solventnosti II by mala byť počítaná ako suma, ktorá by mala zaručiť, že technické rezervy sú vo výške, ktorú poisťiteľ bude vyžadovať, aby prevzal poisťné záväzky z poisťných zmlúv. Zo vzťahov (4.4) a (4.5) dostávame, že

$$M_{t+h} = M_{t+h-1}(1+i) + \underbrace{V_{t+h-1}^{(\Pi)[BE]}(1+i) - B_{t+h}^{(\Pi)} - V_{t+h}^{(\Pi)[BE]}}_{\substack{\text{Zisk z portfólia v roku (t+h-1, t+h).} \\ \text{Môže byť i záporný, teda nastane strata.}}}. \quad (4.7)$$

4.1.1 Solventnostné pravidlá pre interné modely

Solventnostné pravidlá pre interné modely predpokladajú, že poisťiteľ bude schopný pomocou vlastných zdrojov kryť záväzky náhodnej výšky popísané realistickým pravdepodobnostným rozdelením budúceho vývoja, a to s vysoko stanovenou pravdepodobnosťou. Bude nás zaujímať výška kapitálu požadovaného v čase t , aby bola poisťovňa solventná. Výšku kapitálu je možné vypočítať na základe rôznych pravidiel, ktoré boli navrhnuté v titule Pitacco a kol. (2009).

- Môžeme požadovať, aby aktíva M_t boli nezáporné v každom čase od času výpočtu. Časový horizont, T , môže byť krátky, napríklad 1 až 5 rokov, alebo až do času skončenia trvania súčasného portfólia k času výpočtu. To znamená, že

$$[R1] : \quad \mathbb{P}[(M_{t+1} \geq 0) \cap (M_{t+2} \geq 0) \cap \dots \cap (M_{t+T} \geq 0) | n_{x_0+t,t}] = 1 - \epsilon_1 \quad (4.8)$$

- V druhom pravidle sa požaduje, aby M_{t+T} boli nezáporné. Teda platí, že

$$[R2] : \quad \mathbb{P}[(M_{t+T} \geq 0) | n_{x_0+t,t}] = 1 - \epsilon_2. \quad (4.9)$$

Konzistentne so Solventnosťou II, by sme mali položiť

$$\epsilon_i = 0.005, \quad i = 1, 2,$$

ako prijatú pravdepodobnosť zlyhania pre zvolenú kapitálovú požiadavku. Je vhodnejšie použiť prvé pravidlo (4.8), pretože dokáže odhaliť prípadnú stratu ihneď v každom roku uvažovaného časového horizontu. V našej praktickej ilustrácii sa zameriame práve na tento prístup stanovenia dostatočnej kapitálovej požiadavky pre vymyslenú kohortu. Riešením (4.8) pomocou stochastickej simulácie získame požadovaný kapitál, ktorý budeme označovať $M_t^{[R1]}(T)$. Potom $A_t^{[R1]}(T) = V_t^{(\Pi)[BE]} + M_t^{[R1]}(T)$ sú celkové aktíva potrebné v čase t . Poissonov-gama model, ktorý sme si popísali nám poskytne možnosť nasimulovať náhodný vývoj počtu zomretých, resp. tých, ktorí prežili, a teda následne i požadovanú výšku kapitálu.

4.2 Deterministická implementácia úmrtnostného modelu

Predpokladáme, že je regulátorom požadovaná štandardná formula na výpočet kapitálovej požiadavky pre podmodul rizika dlhovekosti. Označme $V_t^{(\text{II})[-20\%]}$ očakávanú hodnotu záväzkov počítanú na základe úmrtnostných tabuliek, kde uvažujeme, že pravdepodobnosť úmrtia je o 20% nižšia ako v prípade tabuľky najlepších odhadov. Význam zníženia o 20% sme si uviedli v prvej kapitole v časti o podmodule rizika dlhovekosti. Rezerva $V_t^{(\text{II})[-20\%]}$ je súčasťou výpočtu kapitálovej požiadavky pre riziko dlhovekosti podľa štandardnej formuly Solventnosti II. Výška kapitálu požadovaného v čase t bude pre nás v tvare

$$\Delta\text{BOF}|\text{longevity shock} = \text{Life}_{\text{long},t} = V_t^{(\text{II})[-20\%]} - V_t^{(\text{II})[BE]}. \quad (4.10)$$

Vidíme, že v tomto prípade výpočtu kapitálovej požiadavky zohľadňujeme len riziko systematických odchýlok a len jednu možnú hladinu šoku pre všetky časy a veku. Podľa štandardného prístupu Solventnosti II výšku aktív požadovanú v čase t na krytie rizika dlhovekosti, nazývanú *cieľový kapitál*, môžeme definovať ako $M_t^{[\text{Solv2}]} = \text{Life}_{\text{long},t} + \text{RM}_t^{[\text{Solv2}]}$. Táto formula zahŕňa rizikovú maržu $\text{RM}_t^{[\text{Solv2}]}$, pre ktorú platí

$$\text{RM}_t^{[\text{Solv2}]} = \text{CoC} \sum_{h \geq 0} \frac{\text{Life}_{\text{long},t+h}}{(1+r)^{(h+1)}}, \quad (4.11)$$

kde r je základná bezriziková úroková miera (prípadne výnosová krivka) a CoC (Cost of Capital) predstavuje sadzbu nákladov na kapitál. Podľa Solventnosti II sa používa $\text{CoC} = 6\%$.

V tretej kapitole sme si uviedli, že apriórna predstava o odchýlke skutočnej úmrtnosti od najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia je modelovaná pomocou náhodnej veličiny $Z_{x,t}$. Zaujímá nás, ako by sa menila očakávaná hodnota $Z_{x,t}$ pri použití bayesovského postupu. Použijeme deterministické scenáre skutočných počtov zomretých s úmrtnosťou nižšou o 20% a s úmrtnosťou odpovedajúcou najlepším odhadom. Pokiaľ výpočet kapitálovej požiadavky prebieha v čase 0, konzistentne so Solventnosťou II predpokladáme, že $ls_0 = -20\%$, kde ls_0 predstavuje percentuálnu zmenu (šok) v pravdepodobnosti úmrtia v čase 0. Vtedy platí

$$\mathbb{E}(Z_{x,t}) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = 0.80.$$

Za predpokladu uplatnenia informácie o počte zomretých za prvý rok môžeme aktualizovať šokový scenár pre riziko dlhovekosti. Z toho vyplýva, že v čase 1 platí vzťah

$$\mathbb{E}(Z_{x,t} | D_{x_0,1} = d_{x_0,1}) = \frac{0.80\bar{\beta} + d_{x_0,1}}{\bar{\beta} + n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*}, \quad (4.12)$$

resp.

$$ls_1 = \frac{0.80\bar{\beta} + d_{x_0,1}}{\bar{\beta} + n_{x_0,0}q_{x_0,1}^*} - 1. \quad (4.13)$$

Všeobecne v čase t platí

$$\mathbb{E}(Z_{x,t} | D_{x_0,1} = d_{x_0,1}, \dots, D_{x_0+t-1,t} = d_{x_0+t-1,t}) = \frac{0.80\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} d_{x_0+h,h+1}}{\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} n_{x_0+h,h}q_{x_0+h,h+1}^*} \quad (4.14)$$

$$ls_t = \frac{0.80\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} d_{x_0+h,h+1}}{\bar{\beta} + \sum_{h=1}^{t-1} n_{x_0+h,h}q_{x_0+h,h+1}^*} - 1. \quad (4.15)$$

Budeme predpokladať dva rôzne scenáre úmrtnosti do času t . Konkrétne pre $s = 1, 2, \dots, t$

$$d_{x_0+s-1,s} \approx 0.80n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*, \quad (4.16)$$

alebo

$$d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*. \quad (4.17)$$

To, či ls_t bude väčšie, rovné alebo menšie ako -20% závisí na skúsenosti od času t_0 . Percentuálna zmena (šok) v pravdepodobnostiach úmrtia ls_t potom môže byť nahradená za permanentné 20% -né zníženie úmrtnosti podľa štandardného prístupu Solventnosti II v (4.10).

Kapitola 5

Numerická ilustrácia výpočtu kapitálovej požiadavky

V tejto kapitole ilustrujeme výpočet solventnostnej kapitálovej požiadavky pomocou úmrtnostného interného modelu popísaného v tretej a štvrtej kapitole. Ukážeme si výsledky deterministického i stochastického prístupu. Výsledky porovnáme so štandardnou formulou Solventnosti II pre riziko dlhovekosti. V podkapitole (5.1) budeme primárne vychádzať z článku Olivieri (2011) a ilustráciu obohatíme o výstupy výpočtov rezerv, cieľových kapitálov a solventnostných pomerov. V podkapitole (5.2) čerpáme z článkov Olivieri (2011), Olivieri a Pitacco (2009) a ilustráciu doplníme o ďalšie prípady výpočtu požadovaného kapitálu, ktoré budú konkretizované.

Vzhľadom k tomu, že k numerickej ilustrácii potrebujeme úmrtnostnú tabuľku tvorenú najlepšími odhadmi pravdepodobností úmrtia, rozhodli sme sa použiť tabuľku pre kohortu mužov Českej republiky (resp. Československa), ktorí sa narodili v roku 1955. Túto tabuľku sme prevzali z diplomovej práce Šťástka (2013), kde je možné nájsť i popísanú metódu konštrukcie pravdepodobností úmrtia. Autor vychádzal z klasických úmrtnostných tabuliek pre Českú republiku za roky 1920, 1925, 1935, 1950, 1960, 1970, 1980, 1990, 1995, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, a to vždy s vekovým rozsahom 0, 1, . . . 105 rokov. Z toho vyplýva, že najvyšší predpokladaný dosiahnuteľný vek bude $\omega = 105$. Na obrázku (5.1), môžeme vidieť vývoj pravdepodobností úmrtia pre našu uvažovanú kohortu. Nepozorujeme žiadne výrazné výkyvy.

Pracujeme s portfóliom okamžitých životných dôchodkov, ktoré sme si popísali na začiatku štvrtej kapitoly. Predpokladajme, že vstupný vek do portfólia je 65 rokov, teda $x_0 = 65$. Pre jednoduchosť, ročná výška dôchodku bude vo výške $b = 1$. Ďalej predpokladajme, že bezriziková úroková miera je $i = 0.03$.

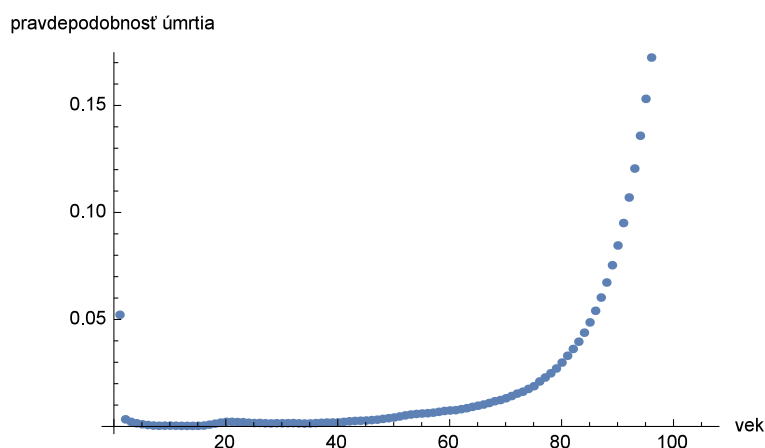
5.1 Deterministický prístup k stanoveniu požadovaného kapitálu

Je prínosné si ukázať niektoré výsledky výpočtu kapitálovej požiadavky podľa deterministického prístupu popísaného v časti (4.2) a prístupu podľa štandardného vzorca pre Solventnosť II. V čase 0 použijeme parameter $\bar{\alpha} = 0.80\bar{\beta}$ a pre parameter $\bar{\beta}$ budeme používať rovnaké hodnoty ako v článku Olivieri (2011), a to 133.33, 33.33

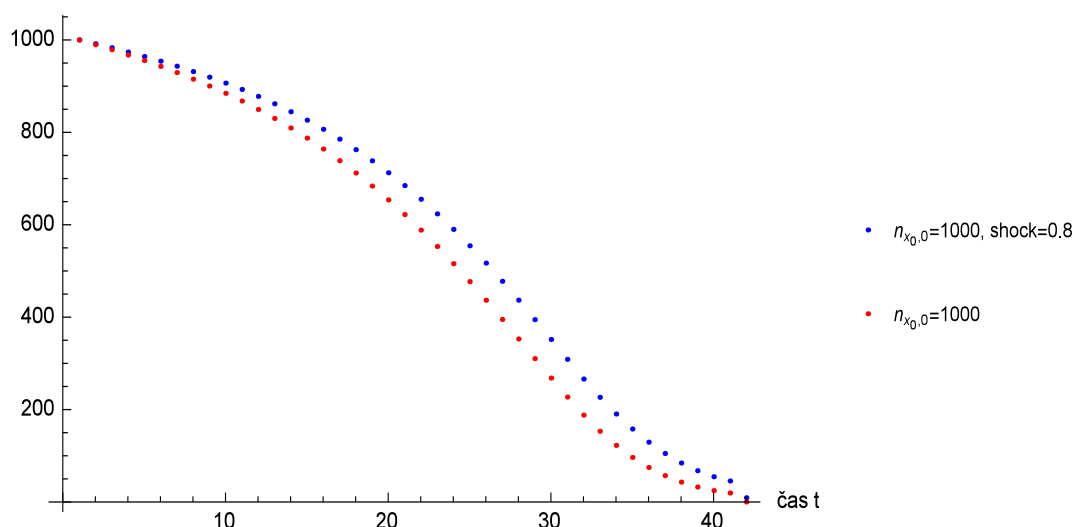
a 533.33. Poznamenajme, že sme nepreviedli žiadnu analýzu k správne určenie veľkosti parametra $\bar{\beta}$. Podľa Solventnosti II, ako sme už uviedli v prvej kapitole, solventnostná kapitálová požiadavka k riziku dlhovekosti sa rovná strate základných vlastných zdrojov, ktorá by plynula z okamžitého trvalého zníženia mier úmrtnosti o 20%. Toto zníženie je konzistentné s tým, že platí

$$E(Q_{x,t}) = 0.80q_{x,t}^* \quad (5.1)$$

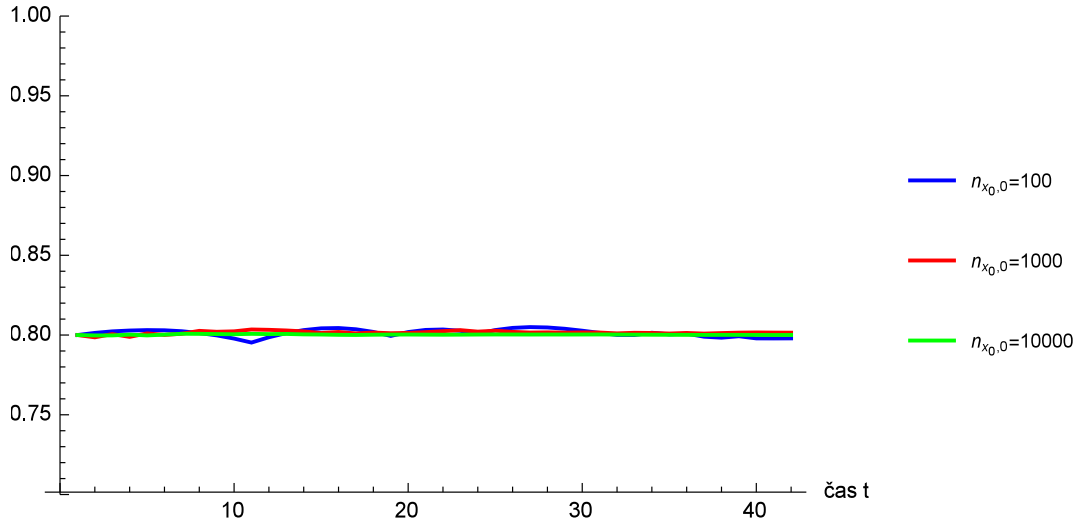
Graf (5.2) ukazuje vývoj vymierania portfólia, ktoré je na začiatku, teda v čase t_0 veľké $n_{x_0,0} = 1000$. Výpočet počtu zomretých sme previedli na základe (4.16) a (4.17). Vidíme, že v prípade trvalého zníženia úmrtnosti o 20%, populácia vymiera pomalšie ako v prípade použitia najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia. Pre veľkosti portfólií $n_{x_0,0} = 100$ a $n_{x_0,0} = 10000$ dostávame podobné priebehy, ktoré sú k nahliadnutiu v priloženom súbore k tejto práci (*deterministicky_pristup_bez_zaokruhlovania.nb*).



Obr. 5.1: Kohorta mužov ČR (Československa) narodených v roku 1955 - pravdepodobnosti úmrtia



Obr. 5.2: Vymieranie populácie - $d_{x_0+t-1,t} \approx 0.80n_{x_0+t-1,t-1}q_{x_0+t-1,t}^*$ (modrá krivka), $d_{x_0+t-1,t} \approx n_{x_0+t-1,t-1}q_{x_0+t-1,t}^*$ (červená krivka)



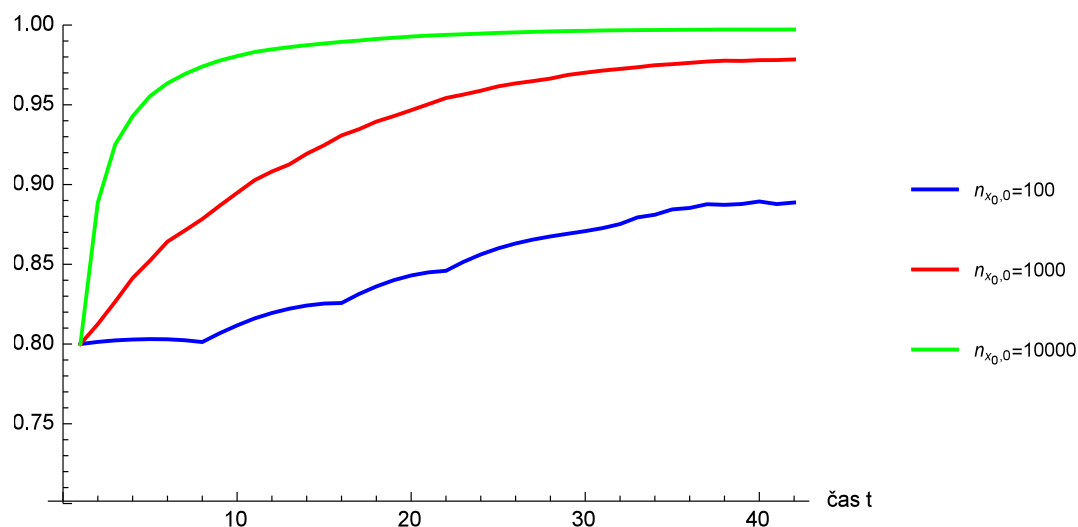
Obr. 5.3: Očakávaná systematická odchýlka $E\left(Z_{x,t} \mid \{D_{x_0+s-1,s} = d_{x_0+s-1,s}\}_{s=1,2,\dots,t}\right)$, $\bar{\beta} = 133.33$ a $d_{x_0+s-1,s} \approx 0.80n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$

Graf (5.3) ukazuje aposteriornú očakávanú hodnotu odchýlky v agregovanej mortalite $E\left(Z_{x,t} \mid D_{x_0,1} = d_{x_0,1}, \dots, D_{x_0+t-1,t} = d_{x_0+t-1,t}\right)$ pre scenáre úmrtnosti do času t podľa (4.16) a graf (5.4) pre scenár úmrtnosti podľa (4.17). V grafe (5.3) vidíme, že očakávaná systematická odchýlka sa drží okolo 0.80, čo znamená, že v takomto prípade výpočet kapitálovej požiadavky by sa natoľko neodlišoval od toho, ak použijeme trvalé 20%-né zníženie pravdepodobnosti úmrtia. V grafe (5.4) očakávaná systematická odchýlka sa približuje v priebehu času k 1, najrýchlejšie pre najväčšie portfólio $n_{x_0,0} = 10000$. Obidva prípady výpočtu očakávanej systematickej odchýlky môžeme použiť k stanoveniu ls_t . Takto získané percentuálne zmeny (šoky) v pravdepodobnostiach úmrtia môžeme nahradiť za permanentné 20% zníženie v (4.10). Pokiaľ je skutočný vývoj počtu zomretých viac priaznivý než ten, ktorý sa očakáva podľa štandardných požiadaviek, šokový scenár pre dlhovekosť vzrastá k 0. Môže to viesť k nižšej solventnostnej kapitálovej požiadavke než tej, ktorú získame pomocou štandardnej formule. Obidva grafy (5.3) a (5.4) boli konštruované takým spôsobom, že počty zomretých v každom roku sú zaokrúhlené na celé číslo. V prípade výpočtu počtu zomretých bez zaokrúhľovania v každom roku dostávame, že očakávaná systematická odchýlka pri scenári (4.16) je presne 0.80 v každom roku. Vyplýva to zo spôsobu výpočtu očakávanej systematickej odchýlky (4.14). Pri scenári (4.17) je očakávaná systematická odchýlka podobná ako v prípade zaokrúhľovania počtu zomretých, čo môžeme vidieť na grafe (5.5). Pokiaľ neuvedieme inak, budeme používať nezaokrúhlené počty zomretých v každom roku.

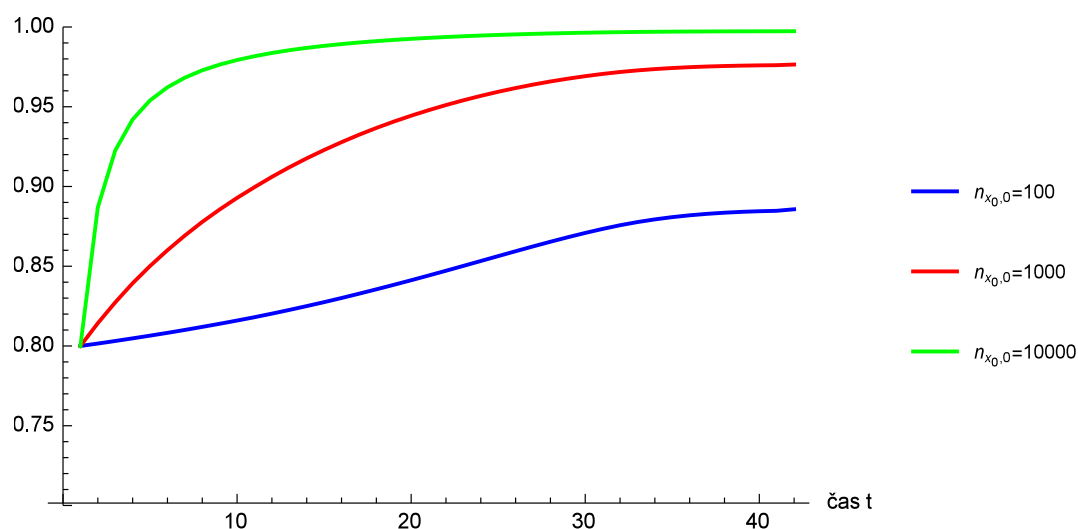
V prílohe diplomovej práce je možné nahliadnuť na grafické zobrazenie vplyvu voľby veľkosti parametru $\bar{\beta}$. Pre odpovedajúce počiatkové hodnoty koeficientu variácie (CV) pravdepodobnosti úmrtia platí

$$\begin{aligned}\bar{\beta} = 133.33 &\Rightarrow \text{CV}(Q_{x,t}) = 9.7\% \\ \bar{\beta} = 33.33 &\Rightarrow \text{CV}(Q_{x,t}) = 19.4\% \\ \bar{\beta} = 533.33 &\Rightarrow \text{CV}(Q_{x,t}) = 4.8\%.\end{aligned}$$

V ďalšej ilustrácii budeme stále pracovať s $\bar{\beta} = 133.33$.



Obr. 5.4: Očakávaná systematická odchýlka $E \left(Z_{x,t} \mid \{D_{x_0+s-1,s} = d_{x_0+s-1,s}\}_{s=1,2,\dots,t} \right)$, $\bar{\beta} = 133.33$ a $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1} q_{x_0+s-1,s}^*$, zaokrúhľované počty úmrtí v každom roku



Obr. 5.5: Očakávaná systematická odchýlka $E \left(Z_{x,t} \mid \{D_{x_0+s-1,s} = d_{x_0+s-1,s}\}_{s=1,2,\dots,t} \right)$, $\bar{\beta} = 133.33$ a $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1} q_{x_0+s-1,s}^*$, bez zaokrúhľovania počtov úmrtí v každom roku

Individuálna rezerva je definovaná ako očakávaná súčasná hodnota budúcich dôchodkových výplat jedného poisteného. Nás zaujíma individuálna rezerva za predpokladu najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia. Pre homogénne portfólio platí

$$V_t^{(1)[BE]} = E Y_t^{(1)}. \quad (5.2)$$

Teda individuálna rezerva v čase t pre jedného poisteného je $E Y_t^{(1)}$.

Tabuľka (5.1) ukazuje hodnoty individuálnej rezervy v čase t pre prípad, keď uvažujeme najlepšie odhady pravdepodobností úmrtia a rezervu v prípade 20%-tného zníženia pravdepodobností úmrtia (tá sa počíta obdobne ako (5.2) a značíme $V_t^{(1)[-20\%]}$). Je zrejmé, že individuálna rezerva v prípade permanentného

Čas t	Rezerva $V_t^{(1)[BE]}$	Rezerva $V_t^{(1)[-20\%]}$
0	15.05	15.99
5	13.06	14.02
10	10.94	11.89
15	8.78	9.70
20	6.66	7.53
25	4.73	5.50

Tabuľka 5.1: Individuálna rezerva $V_t^{(1)[BE]}$ a $V_t^{(1)[-20\%]}$ v čase t

Čas t	Rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$	Rezerva $V_t^{(1)[Bayes100]}$
0	15.99	15.82
5	14.02	13.81
10	11.89	11.66
15	9.70	9.44
20	7.53	7.24
25	5.50	5.20

Tabuľka 5.2: Individuálna rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$ a $V_t^{(1)[Bayes100]}$ v čase t , $n_{x_0,0} = 100$

zníženia pravdepodobností úmrtia je vyššia. Označme $V_t^{(1)[Bayes80]}$ ($V_t^{(1)[Bayes100]}$) rezervu, počítanú ako $V_t^{(1)[BE]}$, ale na základe úmrtnostného predpokladu, že pravdepodobnosti úmrtia získame pomocou aposteriórnej očakávanej hodnoty odchýlky v agregovanej mortalite zo vzťahu (4.14) pri scenári (4.16) ((4.17)) do času t . Ide o „menej priaznivé“ predpoklady o úmrtnosti kohorty v porovnaní s najlepšimi odhadmi. V tabuľkách (5.2), (5.3) a (5.4) vidíme hodnoty rezerv $V_t^{(1)[Bayes80]}$ a $V_t^{(1)[Bayes100]}$ v čase t pre rôzne počiatočné veľkosti portfólia $n_{x_0,0} = 100$, $n_{x_0,0} = 1000$ a $n_{x_0,0} = 10000$. Všimnime si, že rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$ je rovnaká ako $V_t^{(1)[-20\%]}$. Je to zrejmé, pretože $l_{s_t} = -0.20$ pre všetky t a zároveň táto rezerva je nezávislá na veľkosti portfólia. Naopak, rezerva $V_t^{(1)[Bayes100]}$ je závislá na veľkosti portfólia. Bude nás zaujímať dopad týchto menej priaznivých úmrtnostných predpokladov na výšku požadovaného kapitálu v čase t , konkrétne

$$Life_{long,t}^{[Bayes80]} = V_t^{(1)[Bayes80]} - V_t^{(1)[BE]} \quad (5.3)$$

a

$$Life_{long,t}^{[Bayes100]} = V_t^{(1)[Bayes100]} - V_t^{(1)[BE]}. \quad (5.4)$$

Pozrime sa najskôr na výpočet cieľového kapitálu z pohľadu Solventnosti II. Ako sme uviedli v štvrtej kapitole, cieľový, teda potrebný kapitál ku krytiu rizika dlhovekosti (rizika systematických odchýlok) je tvorený kapitálovou požiadavkou a rizikovou maržou. Budeme uvažovať, že základná bezriziková úroková miera pre výpočet rizikovej marže (4.11) bude $r = 3\%$. Pre pripomenutie, kapitálové požiadavky počítame ako rozdiel medzi rezervou stanovenou podľa úmrtnostných

Čas t	Rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$	Rezerva $V_t^{(1)[Bayes100]}$
0	15.99	15.45
5	14.02	13.38
10	11.89	11.19
15	9.70	8.98
20	7.53	6.81
25	5.50	4.84

Tabuľka 5.3: Individuálna rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$ a $V_t^{(1)[Bayes100]}$ v čase t , $n_{x_0,0} = 1000$

Čas t	Rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$	Rezerva $V_t^{(1)[Bayes100]}$
0	15.99	15.17
5	14.02	13.11
10	11.89	10.98
15	9.70	8.81
20	7.53	6.68
25	5.50	4.74

Tabuľka 5.4: Individuálna rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$ a $V_t^{(1)[Bayes100]}$ v čase t , $n_{x_0,0} = 10000$

tabuliek so zníženou pravdepodobnosťou úmrtia o 20% a rezervou založenou na najlepších odhadoch pravdepodobností úmrtia.

V tabuľke (5.5) môžeme vidieť individuálne hodnoty kapitálovej požiadavky ($Life_{long,t}$), rizikovej marže ($RM_t^{[Solv2]}$), cieľového kapitálu ($M_t^{[Solv2]}$) a relatívneho vyjadrenia cieľového kapitálu na jednotku individuálnej rezervy za predpokladu najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia ($\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(1)[BE]}}$) v čase t . Je zrejmé, že hodnoty $Life_{long,t}$ a $Life_{long,t}^{[Bayes80]}$ budú rovnaké, a teda i hodnota rizikovej marže a cieľového kapitálu.

V tabuľke (5.6) sú uvedené hodnoty $Life_{long,t}^{[Bayes100]}$, $RM_t^{[Bayes100]}$, $M_t^{[Bayes100]}$ a $\frac{M_t^{[Bayes100]}}{V_t^{(1)[BE]}}$ v čase t pre počiatočnú veľkosť portfólia $n_{x_0,0} = 100$, ktoré sú počítané obdobne ako v Solventnosti II, len za iného úmrtnostného predpokladu. Môžeme pozorovať, že výška cieľového kapitálu v porovnaní so štandardným prístupom je nižšia v každom čase.

Graf (5.6) ukazuje cieľový kapitál $M_t^{[Bayes100]}$ pre $n_{x_0,0} = 100$, $n_{x_0,0} = 1000$ a $n_{x_0,0} = 10000$. Treba si uvedomiť, že hodnoty $E(Z_{x,t} | D_{x_0,1} = d_{x_0,1}, \dots, D_{x_0+t-1,t} = d_{x_0+t-1,t})$ sú rôzne pre rôzne veľké portfóliá. Z grafu (5.6) vidíme, že s narastajúcou veľkosťou portfólia je cieľový kapitál menší, čo je spôsobené tým, že individuálne rezervy vstupujúce do výpočtu kapitálovej požiadavky sa časom k sebe približujú rýchlejšie vo väčších portfóliách (prečo je tomu tak, vid' graf (5.5)).

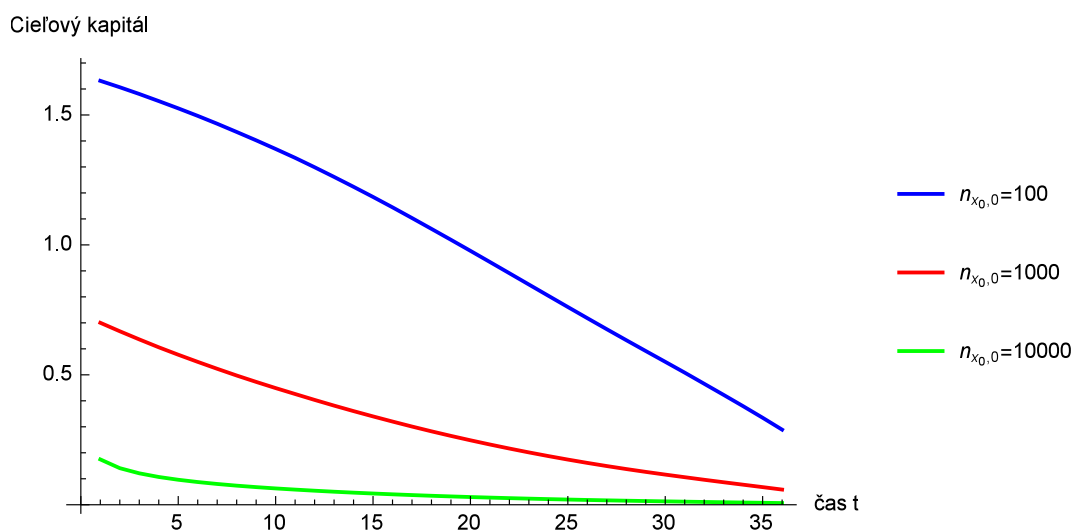
Graf (5.7) ukazuje pomery $\frac{M_0^{[Solv2]}}{V_0^{(1)[BE]}}$, $\frac{M_0^{[Bayes80]}}{V_0^{(1)[BE]}}$ a $\frac{M_0^{[Bayes100]}}{V_0^{(1)[BE]}}$, pre rôzne počiatočné veľkosti portfólia.

Čas t	$Life_{long,t}$	$RM_t^{[Solv2]}$	$M_t^{[Solv2]}$	$\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(1)[BE]}}$
0	0.943	1.192	2.135	14.188%
5	0.957	1.071	2.028	15.526%
10	0.953	0.928	1.881	17.200%
15	0.923	0.766	1.689	19.239%
20	0.862	0.592	1.454	21.817%
25	0.770	0.414	1.184	25.030%

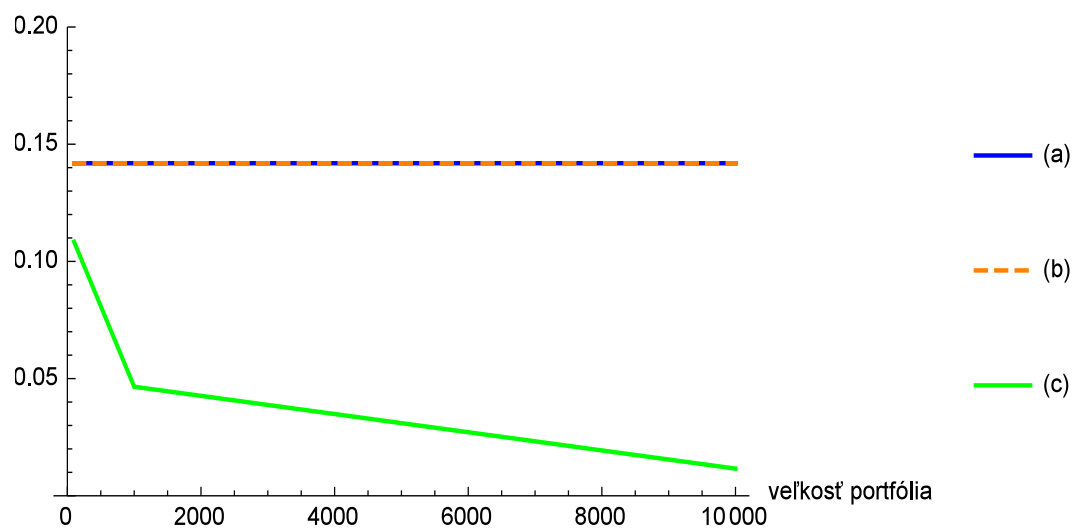
Tabuľka 5.5: Kapitálová požiadavka pre riziko dlhovekosti podľa štandardného prístupu Solven-tnosti II

Čas t	$Life_{long,t}^{[Bayes100]}$	$RM_t^{[Bayes100]}$	$M_t^{[Bayes100]}$	$\frac{M_t^{[Bayes100]}}{V_t^{(1)[BE]}}$
0	0.774	0.858	1.632	10.839%
5	0.754	0.743	1.497	11.460%
10	0.717	0.618	1.335	12.204%
15	0.656	0.488	1.144	13.036%
20	0.573	0.361	0.934	14.017%
25	0.476	0.242	0.718	15.186%

Tabuľka 5.6: Kapitálová požiadavka s aktualizovanými pravdepodobnosťami úmrtia s predpokladom, že skutočný vývoj počtu zomretých do času t je $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$, $n_{x_0,0} = 100$.



Obr. 5.6: Cielový kapitál $M_t^{[Bayes100]}$ pre rôzne veľké portfóliá



Obr. 5.7: Pomery (a) $\frac{M_0^{[Solv2]}}{V_0^{(1)[BE]}}$, (b) $\frac{M_0^{[Bayes80]}}{V_0^{(1)[BE]}}$ a (c) $\frac{M_0^{[Bayes100]}}{V_0^{(1)[BE]}}$ v čase 0 pre rôzne počiatkové veľkosti portfólia

5.2 Stochastický prístup k stanoveniu požadovaného kapitálu

Budeme vychádzať z kapitoly (3) a kapitoly (4). Vzhľadom k tomu, že nemáme k dispozícii skutočný vývoj portfólia, rozhodli sme sa, že scenáre počtu zomretých do času stanovovania kapitálovej požiadavky (čas t) budeme používať rovnaké ako v deterministickom prístupe, teda počítané s najlepšími odhadmi pravdepodobností úmrtia

$$1. \text{ scenár: } d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1} q_{x_0+s-1,s}^*, \quad s = 1, \dots, t$$

a s úmrtnosťou o 20% nižšou ako najlepšie odhady

$$2. \text{ scenár: } d_{x_0+s-1,s} \approx 0.80 n_{x_0+s-1,s-1} q_{x_0+s-1,s}^*, \quad s = 1, \dots, t.$$

Počty úmrtí v oboch scenároch zaokrúhľujeme v každom čase. K simulácii vývoja počtu zomretých od času t potrebujeme aposteriórne rozdelenie náhodnej veličiny $Z_{x,t}$, ktorého parametre závisia na scenári (1. scenár alebo 2. scenár) počtov úmrtí do času t . Získané parametre rozdelenia $Z_{x,t}$ zostávajú nemenné pri simulácii počtov zomretých v časoch $t+1, t+2, \dots$.

Zhrňme si všeobecne algoritmus stanovenia M_t , teda kapitálovej požiadavky na základe pravidla (4.8), kryjúceho náhodné odchýlky, systematické riziko a zároveň parametrické riziko v odhadoch úmrtnosti (skutočná úmrtnosť sa líši od najlepších odhadov):

1. zvolíme počty úmrtí v časoch $1, \dots, t$ pomocou 1. scenára alebo 2. scenára
2. odvodíme aposteriórne rozdelenie $Z_{x,t}$
3. nasimulujeme počty zomretých v časoch $t+1, t+2, \dots$ a získame ročné úhrny výplát $B_{t+1}^{(II)}, B_{t+2}^{(II)}, \dots$, pre portfólio v časoch $t+1, t+2, \dots$
4. pre aktíva v čase t platí
 - 4.1 $A_t = M_t + V_t^{(II)[BE]}$
 - 4.2 $A_{t+1} = A_t(1+i) - B_{t+1}^{(II)}$
 - 4.3 $M_{t+1} = A_{t+1} - V_{t+1}^{(II)[BE]}$
 - 4.4 atď.
5. získame postupnosť $M_{t+1}, M_{t+2}, \dots, M_{t+T}$
6. z veľkého počtu simulácií určíme pravdepodobnosť v (4.8)
7. stanovíme M_t tak, aby platilo (4.8)

V tabuľke (5.7) vidíme rezervu portfólia $V_t^{(II)[BE]}$ tvorenú z úmrtnostných tabuliek najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia pre rôzne veľkosti portfólia, $n_{x_0,0} = 100$, $n_{x_0,0} = 1000$ a $n_{x_0,0} = 10000$.

V tabuľkách (5.8) a (5.9) sú na základe pravidla (4.8) zobrazené hodnoty kapitálových požiadaviek kryjúcich riziko dlhovekosti, náhodných odchýlok a parametrické riziko na jednotku rezervy portfólia $V_t^{(\Pi)[BE]}$ pre rôzne počiatočné veľkosti portfólií a pre maximálny časový horizont $T = \omega + 1 - x_0 - t$. V tabuľke (5.8) sme použili 1. scenár počtov zomretých do času t a naopak v tabuľke (5.9) 2. scenár. Získali sme parametre aposteriórneho rozdelenia $Z_{x,t}$, ktoré boli následne použité k simulácii budúceho vývoja portfólia. Vidíme, že s narastajúcou počiatočnou veľkosťou portfólia sa kapitálová požiadavka na jednotku rezervy portfólia znižuje v oboch uvažovaných prípadoch (1. a 2. scenár počtov zomretých do času t). Je to spôsobené prítomnosťou náhodných odchýlok v úmrtnosti. Pre danú veľkosť kohorty sa kapitálová požiadavka v čase zväčšuje (až na prípad portfólia veľkosti $n_{x_0,0} = 10000$, kedy počet zomretých do času t sa riadi 1. scenárom). Zároveň je možné pozorovať, že kapitálová požiadavka na jednotku rezervy portfólia je výrazne nižšia s narastajúcim časom v prvom prípade, kedy uvažujeme, že skutočné počty zomretých odpovedajú najlepším odhadom pravdepodobností úmrtia, čo vedie k nižšiemu kapitálovému požiadavku, ktorý si poisťovňa musí držať k zaisteniu solventnosti v danom čase.

V grafoch (5.9) až (5.15) si ukážeme hodnoty kapitálových požiadaviek na jednotku rezervy portfólia $V_t^{(\Pi)[BE]}$ v rôznych prípadoch:

- prípad (a) ($\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$) Predpokladáme, že počet zomretých je generovaný pomocou (3.8), ale pravdepodobnosť úmrtia je $0.80q_{x,t}^*$ (namiesto $q_{x,t}^*$).
- prípad (b) ($\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$) Predpokladáme, že počet zomretých je generovaný pomocou (3.33), kde počet zomretých do času t vychádza z
 1. scenár: $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$.
- prípad (c) ($\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$) Predpokladáme, že počet zomretých je generovaný pomocou (3.33), kde počet zomretých do času t vychádza z
 2. scenár: $d_{x_0+s-1,s} \approx 0.80n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$.
- prípad (d) ($\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$) V prípadoch (b) a (c) uvažujeme že skutočný počet zomretých do času t sa riadi buď najlepšimi odhadmi pravdepodobnosti

Čas t	Veľkosť kohorty v čase $t=0$		
	$n_{x_0,0} = 100$	$n_{x_0,0} = 1000$	$n_{x_0,0} = 10000$
0	1505.13	15051.30	150513.00
5	1231.19	12311.90	123119.00
10	949.30	9492.98	94929.80
15	670.78	6707.76	67077.60
20	414.56	4145.62	41456.20
25	206.44	2064.38	20643.80

Tabuľka 5.7: Rezerva portfólia $V_t^{(\Pi)[BE]}$

Čas t	Veľkosť kohorty v čase $t=0$		
	$n_{x_0,0} = 100$	$n_{x_0,0} = 1000$	$n_{x_0,0} = 10000$
0	18.18%	12.59%	11.10%
5	21.90%	12.66%	6.91%
10	26.24%	13.88%	8.00%
15	33.42%	16.47%	10.35%
20	42.82%	21.25%	14.17%
25	58.66%	29.89%	21.08%

Tabuľka 5.8: Požadovaný kapitál na krytie rizika dlhovekosti, náhodných odchýlok a parametrického rizika, $\bar{\alpha} = 0.80\bar{\beta}$, 1. scenár: $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$:
 $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$

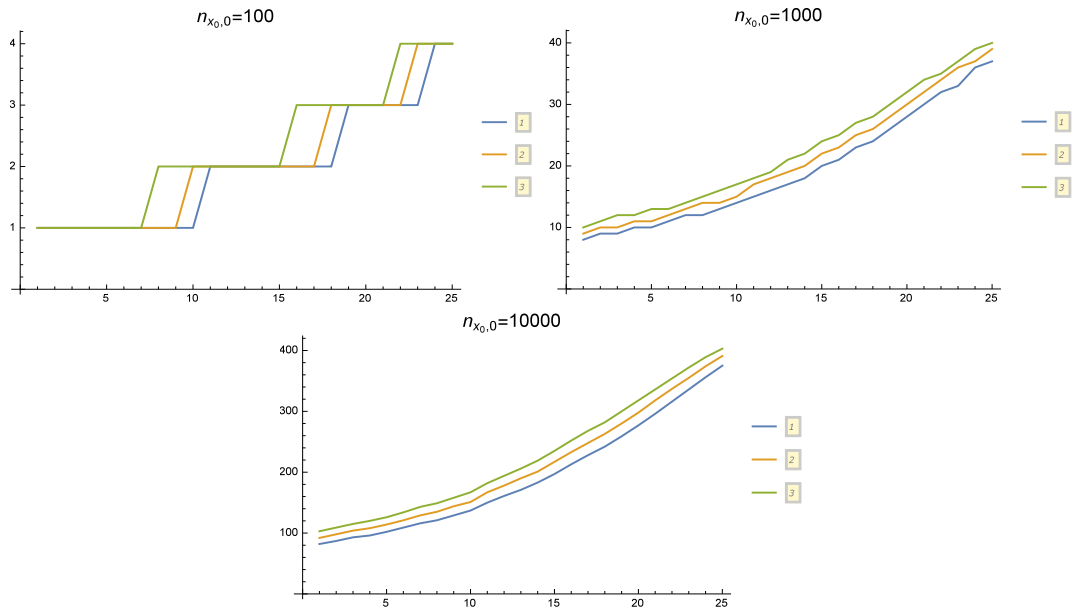
Čas t	Veľkosť kohorty v čase $t=0$		
	$n_{x_0,0} = 100$	$n_{x_0,0} = 1000$	$n_{x_0,0} = 10000$
0	18.19%	12.59%	11.10%
5	21.90%	15.17%	12.99%
10	27.79%	18.71%	16.17%
15	35.62%	24.40%	21.07%
20	48.65%	33.81%	28.77%
25	73.34%	49.77%	42.75%

Tabuľka 5.9: Požadovaný kapitál na krytie rizika dlhovekosti, náhodných odchýlok a parametrického rizika, $\bar{\alpha} = 0.80\bar{\beta}$, 2. scenár: $d_{x_0+s-1,s} \approx 0.80n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$:
 $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$

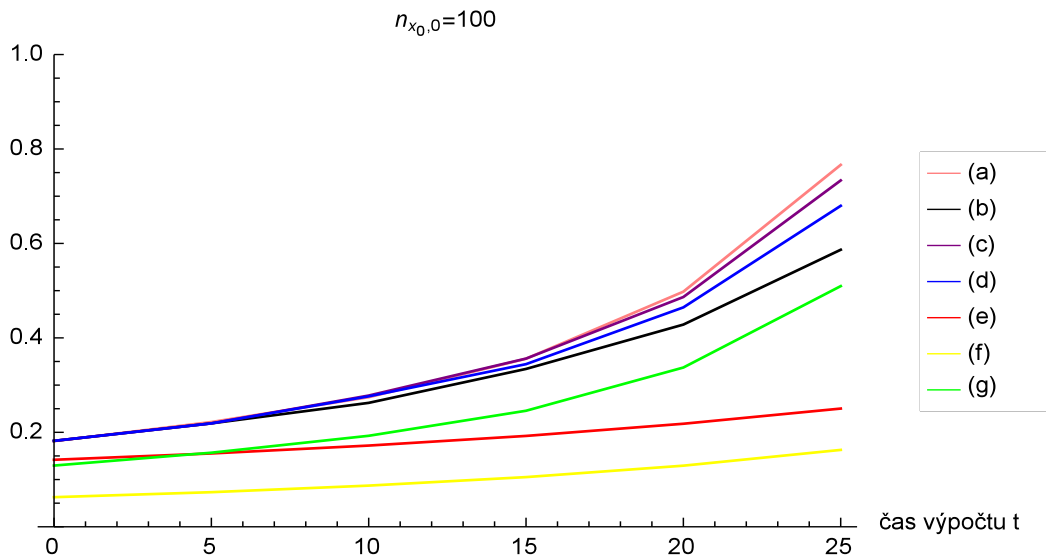
úmrtia, alebo predpokladáme, že úmrtnosť je o 20% nižšia než najlepšie odhady. Skutočná úmrtnosť do času t sa nemusí vyvíjať ani podľa jedného z týchto prípadov, preto sme si ju nasimulovali. Vygenerovali sme 5000 scenárov vývoja počtu úmrtí pomocou modelu (3.8), kde sme používali pravdepodobnosti úmrtia znížené o 10% a vzali sme priemernú hodnotu v každom čase. Počty úmrtí v čase sa pohybujú medzi tými, získanými pomocou scenárov 1 a 2. Vidíme to v grafe (5.8). Budúci vývoj portfólia sme simulovali pomocou (3.33).

- prípad (e) ($\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$) Predpokladáme, že cieľový kapitál je počítaný pomocou štandardnej formule Solventnosti II (s rizikovou maržou).
- prípad (f) ($\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$) Predpokladáme, že cieľový kapitál je počítaný pomocou štandardnej formule Solventnosti II (bez rizikovej marže).
- prípad (g) ($\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$) Predpokladáme, že počet zomretých je generovaný pomocou modelu (3.8).

Prípady (a), (b), (c), (e), (g) sú prevzaté z článku Olivieri a Pitacco (2009).

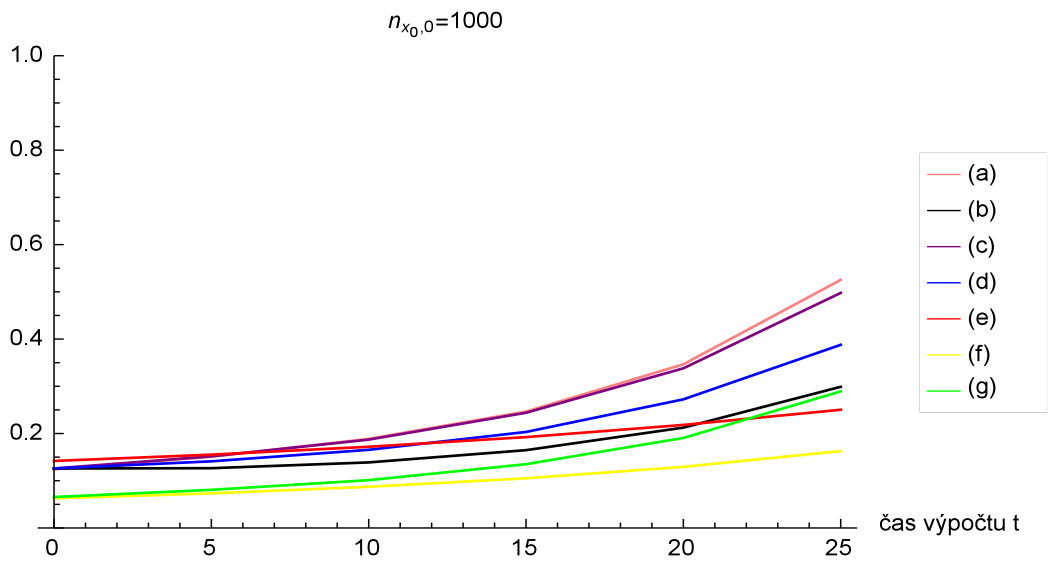


Obr. 5.8: 1: počty zomretých v čase, kde pravdepodobnosť úmrtia je znížená o 20%, 2: priemerné počty zomretých v čase generované z (3.8) s pravdepodobnosťami úmrtia zníženými o 10%, 3: počty zomretých v čase, kde pravdepodobnosti úmrtia sú najlepšie odhady

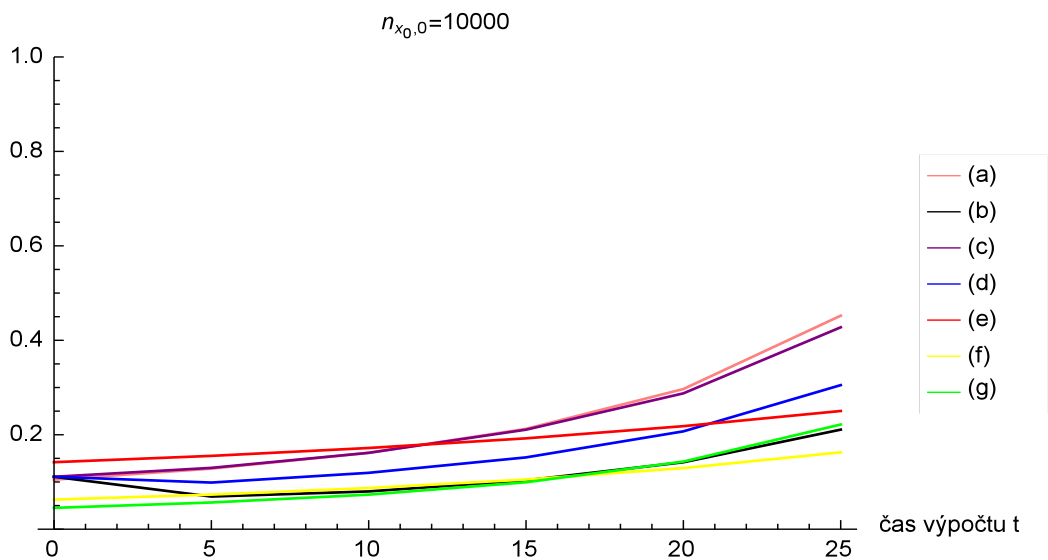


Obr. 5.9: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ pre počiatkovú veľkosť portfólia $n_{x_0,0} = 100$ v niektorých časoch výpočtu $t = 0,5,10,\dots,25$

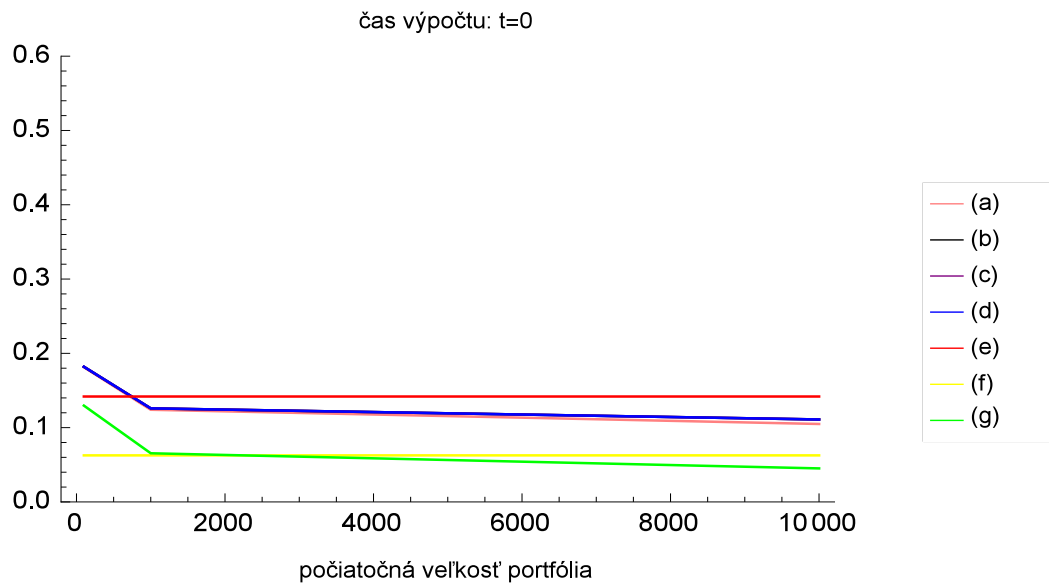
Vo všetkých prípadoch okrem (e) a (f) stanovujeme kapitálovú požiadavku pomocou pravidla [R1] (4.8). Prípád (g) nám ukazuje prístup, kedy uvažujeme len riziko náhodných fluktuácií. Tým, že v modeli (3.8) vynásobíme pravdepodobnosti úmrtia koeficientom 0.80, tak už uvažujeme i systematické odchýlky.



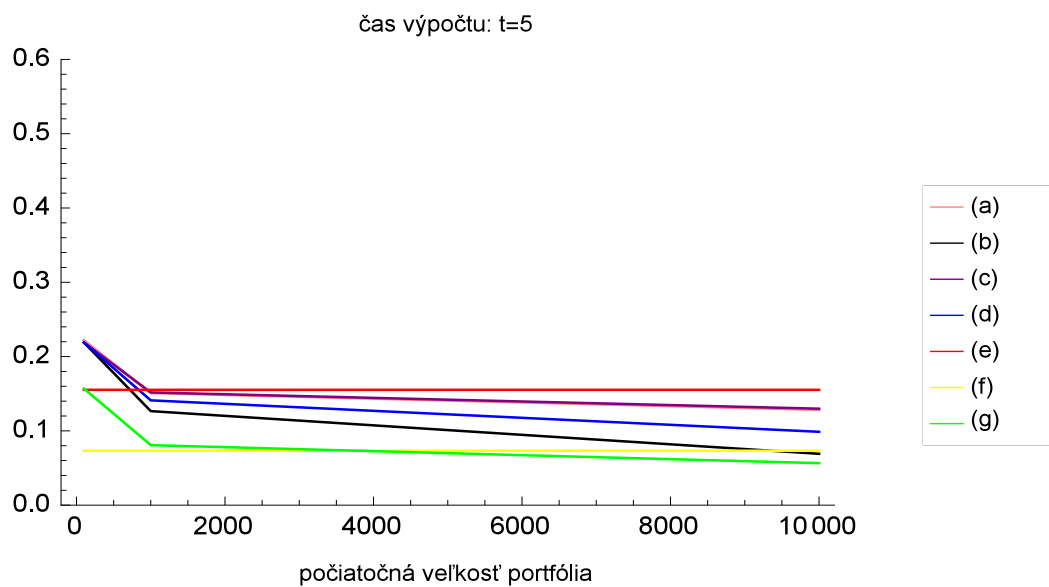
Obr. 5.10: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ pre počiatocnú veľkosť portfólia $n_{x_0,0} = 1000$ v niektorých časoch výpočtu $t = 0,5,10,\dots,25$



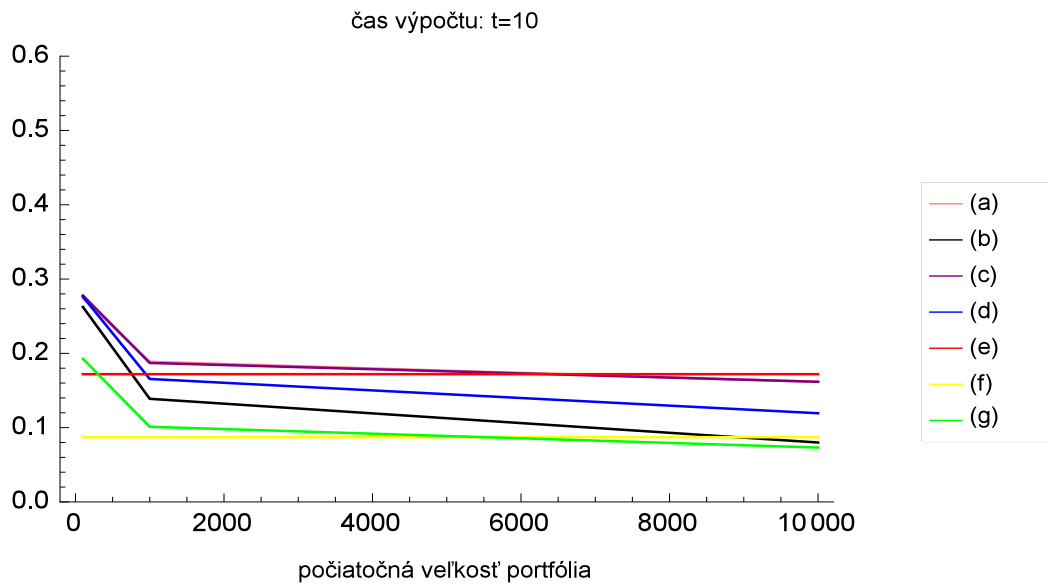
Obr. 5.11: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ pre počiatocnú veľkosť portfólia $n_{x_0,0} = 10000$ v niektorých časoch výpočtu $t = 0,5,10,\dots,25$



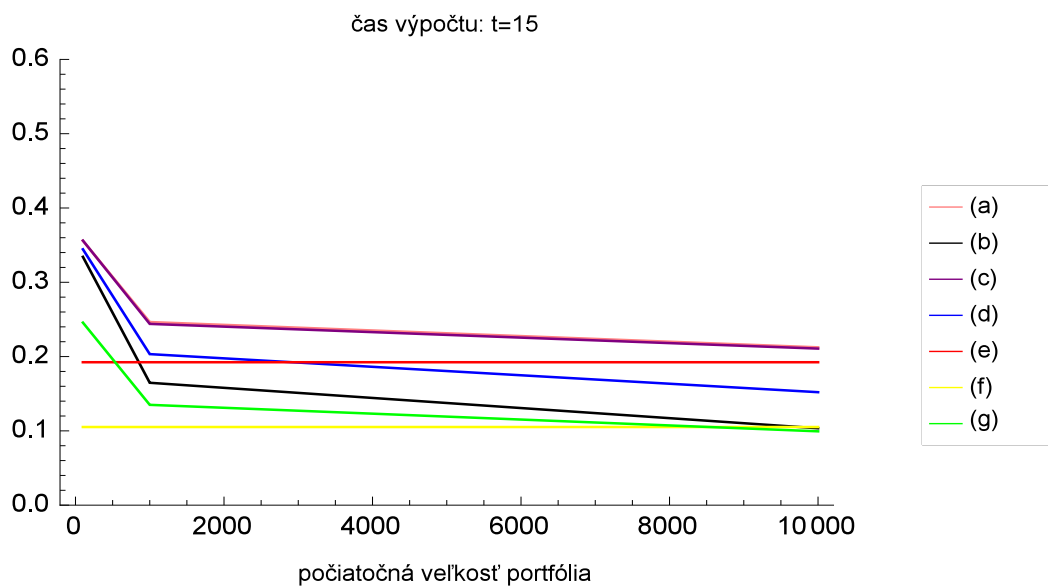
Obr. 5.12: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 0$ pre rôzne veľkosti portfólií



Obr. 5.13: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 5$ pre rôzne veľkosti portfólií



Obr. 5.14: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Lifelong,t}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 10$ pre rôzne veľkosti portfólií



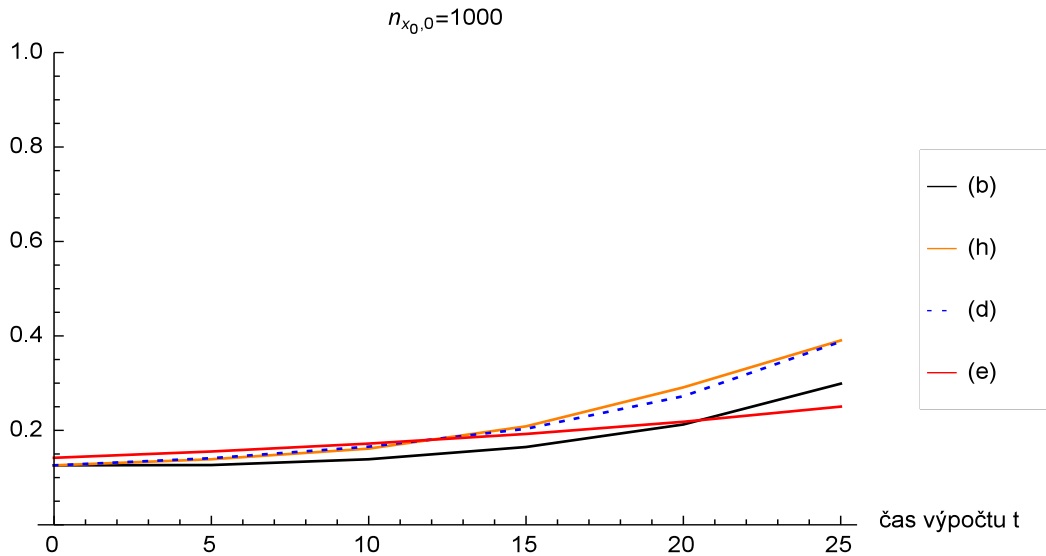
Obr. 5.15: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Lifelong,t}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 15$ pre rôzne veľkosti portfólií

Čas t	Riziko		
	procesné prípád (g)	systematické prípád (e)	proc. + syst. + param. prípád (b)
0	6.55%	14.188%	12.59%
5	8.08%	15.526%	12.66%
10	10.12%	17.200%	13.88%
15	13.50%	19.239%	16.47%
20	19.06%	21.817%	21.25%
25	28.92%	25.030%	29.89%

Tabuľka 5.10: Porovnanie veľkosti potrebného kapitálu pre rôzne typy rizík na jednotku rezervy portfólia $V_t^{(\text{II})[BE]}$, počiatočná veľkosť portfólia je $n_{x_0,0} = 1000$.

Je zrejmé, že pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\text{II})[BE]}}$ a $\frac{Lifelong_t}{V_t^{(\text{II})[BE]}}$ sú konštantné v závislosti na zmene veľkosti portfólia, pretože všetky veličiny vstupujúce do výpočtu $M_t^{[Solv2]}$ sú lineárne v závislosti na veľkosti portfólia. Naopak, hodnoty $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\text{II})[BE]}}$ klesajú v závislosti na veľkosti portfólia kvôli klesajúcej významnosti náhodných fluktuácií, ktoré nie sú v štandardnej formule podľa Solventnosti II uvažované. Veľkosť systematických odchýlok je v prípadoch (a) a (c) veľmi podobná, čo dokazujú i grafy tým, že veľkosť kapitálovej požiadavky na jednotku rezervy portfólia je takmer rovnaká. Prípád (g) nám naznačuje, že uvažovanie náhodných odchýlok je významné a dokonca aj vo veľkých portfóliách, teda keby ich neuvažujeme pri výpočte potrebného kapitálu, mohlo by to viesť k prípadnej nesolventnosti poisťovne. Preto Poisson-gama model, ktorý sme si popísali v tretej kapitole v časti (3.5), môže viesť k účinnému prístupu pri alokácii kapitálu. Dokazujú to i všetky grafy (5.9) až (5.15), kde vidíme, že prípád (b) poskytuje prijateľné výsledky a modeluje riziko náhodných odchýlok, systematické riziko i riziko parametrické. Šokový scenár, ktorý sa predpokladá v štandardnej formule Solventnosti II sa považuje za dosť prísny a zároveň sa častokrát môže úplne odlišovať od skutočnosti, a teda môže to viesť k nesprávnemu určeniu potrebného kapitálu. Treba však podotknúť, že štandardná formula je často používaná pre jej jednoduchosť. Použitie interného modelu si vyžaduje schválenie regulátorom a zníženie kapitálu oproti štandardnej formule musí byť dostatočne odôvodnené.

V tabuľke (5.10) vidíme hodnoty kapitálovej požiadavky na jednotku rezervy portfólia pre počiatočnú veľkosť kohorty $n_{x_0,0} = 1000$ pre prípád, ak uvažujeme len procesné riziko (prípád (g) riziko náhodných fluktuácií) alebo len systematické riziko (prípád (e), Solventnosť II) a prípád, kedy modelujeme riziká procesné, systematické a parametrické spolu (prípád (b), aktualizácia parametrov na základe skúsenosti - Poisson-gama model).



Obr. 5.16: Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(II)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(II)[BE]}}$ pre počiatočnú veľkosť portfólia $n_{x_0,0} = 1000$ a prípady (b), (d), (e) a (h)

Nakoniec predpokladajme, že scenár počtu úmrtí do času t , potrebný k odvodu aposteriórneho rozdelenia $Z_{x,t}$ získame zo simulácií. Budeme uvažovať, že naša „skutočná“ úmrtnosť sa riadi gama rozdelením. Chceme aby $E Z = 0.90$ a zároveň, aby $CV Q = 10\%$. Budeme vychádzať z toho, že $E Z = \frac{\alpha}{\beta}$ a $\alpha = 0.90\beta$. Potom hodnoty parametrov gama rozdelenia sú $\alpha = 100$ a $\beta = 111.111$. Pre pravdepodobnosti úmrtia platí $Q = q^* Z$. Namodelovali sme si jeden scenár vývoja počtu úmrtí. V grafe (5.16) pod písmenom (h) vidíme riešenie (4.8) stochastickou simuláciou pre tento prípad vývoja počtu zomretých do času t . Budúci vývoj portfólia sme simulovali pomocou modelu (3.33). Graf (5.16) zobrazuje hodnotu požadovaného kapitálu na jednotku rezervy portfólia pre prípad (h) v zrovnaní s prípadmi (b), (d) a (e). Vidíme, že výška kapitálu je takmer totožná s tou, ktorú sme získali v prípade (d) a zároveň nie je veľmi odlišná ani od kapitálu pre prípad (b).

Záver

V tejto práci sme sa oboznámili s dvomi zmiešanými pravdepodobnostnými modelmi, ktoré slúžia k modelovaniu parametrického rizika v odhadoch úmrtnosti. Zhodnotili sme, že Poissonov-gama model aj napriek nejakým aproximáciám je vhodnejším modelom ako beta-binomický model. Preto sme sa zamerali práve na Poissonov-gama model, pomocou ktorého sme ukázali, že je dobre aplikovateľný v praxi, napríklad pri alokácii kapitálu.

Existuje mnoho modelov, ktoré sa zaoberajú projekciou úmrtnosti. My sme v práci predpokladali, že skutočná úmrtnosť sa odlišuje od tabuliek najlepších odhadov pravdepodobností úmrtia. Vyjadrili sme to náhodnou veličinou s gama rozdelením a parametrami, ktoré vďaka bayesovskej štatistike je možné aktualizovať vždy za najnovšej informácie o skutočnom počte zomretých v portfóliu v predošlom čase.

Príchodom Solventnosti II sa kladie väčší dôraz na kvantifikáciu rizík poisťovne a zaistovne. Numerická časť práce je rozčlenená do dvoch častí. Zaoberali sme sa stanovovaním kapitálovej požiadavky pre riziko dlhovekosti pomocou deterministického prístupu a stochastického prístupu. Pracovali sme s modelovým homogénnym portfóliom okamžitých polehotných dôchodkov s fixnými dávkami. Porovnali sme výšku potrebného kapitálu ku zaisteniu solventnosti poisťovne pomocou štandardnej formule a pomocou interného modelu, ktorý sme v práci popísali.

Štandardný vzorec Solventnosti II pre podmodul rizika dlhovekosti uvažuje len riziko systematických odchýlok. Úmrtnostný Poissonov-gama model zohľadňuje navyše aj riziko náhodných odchýlok a parametrické riziko. Ukázali sme, že nezohľadnenie aj týchto rizík môže viesť k neadekvátnemu stanoveniu kapitálovej požiadavky pre riziko dlhovekosti.

Literatúra

- Anděl, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. Druhé opravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.
- Biatec (2012). Solventnosť II – nový systém regulácie v poisťovníctve. *Biatec: odborný bankový časopis*. Národná banka Slovenska., **20**(8), 17.
- CEA-Groupe Consultatif (2007). Solvency II glossary. URL http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/impactassess/annex-c08d_en.pdf.
- Cipra, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovníctví: Basel III a Solvency II*. Ekopress, s.r.o., Praha, i. edition. ISBN 978-80-87865-24-8. Vydané s podporou Českej spoločnosti aktuárov.
- Delegované nariadenie (2014). Delegované nariadenie komisie (EÚ) 2015/35 z 10. októbra 2014, ktorým sa dopĺňa smernica Európskeho parlamentu a Rady 2009/138/ES o začatí a vykonávaní poistenia a zaistenia (Solvencia II). <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/SK/TXT/PDF/?uri=CELEX:32015R0035&from=CS>. Úradný vestník Európskej únie.
- Economic Policy Committee and European Commission (2006). *The 2005 projections of age-related expenditure (2004-50) for the EU-25 Member States: underlying assumptions and projection methodologies*. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities. ISBN 928949042X.
- EIOPA (2014). Technical specifications for the preparatory phase (Part 1). https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_disclaimer.pdf.
- Ghosh, J. K., Delampady, M. a Samanta, T. (2006). *An Introduction to Bayesian Analysis: Theory and Methods (Springer Texts in Statistics)*. Springer, New York. ISBN 978-0387-40084-6.
- Human Mortality Database. URL <http://www.mortality.org/>. Dáta stiahnuté: 17.6.2016.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H. a Willmot, G. E. (2008). *Loss Models: From data to decisions*. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey. ISBN 978-0-470-18781-4.
- Olivieri, A. (2011). Stochastic mortality: experience-based modeling and application issues consistent with solvency 2. *European Actuarial Journal*, **1**, 101–125.

- Olivieri, A. a Pitacco, E. (2009). Stochastic mortality: the impact on target capital. *ASTIN Bulletin*, **39**(2), 541–563.
- Panjer, H. H. a Willmot, G. E. (1992). *Insurance risk models*. Society of actuaries, USA. ISBN 0-938959-25-5.
- Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S. a Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press, New York. ISBN 978-0-19-954727-2.
- Smernica Solventnosť II (2009). Smernica Európskeho parlamentu a Rady 2009/138/ES z 25. novembra 2009 o začatí a vykonávaní poistenia a zaistenia (Solventnosť II) (prepracované znenie). <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/SK/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&qid=1457550945114&from=EN>. Úradný vestník Európskej únie.
- Šťástka, P. (2013). Některé kvantitativní aspekty životních anuit. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Zoznam obrázkov

5.1	Kohorta mužov ČR (Československa) narodených v roku 1955 - pravdepodobnosti úmrtia	35
5.2	Vymieranie populácie - $d_{x_0+t-1,t} \approx 0.80n_{x_0+t-1,t-1}q_{x_0+t-1,t}^*$ (modrá krivka), $d_{x_0+t-1,s} \approx n_{x_0+t-1,t-1}q_{x_0+t-1,t}^*$ (červená krivka)	35
5.3	Očakávaná systematická odchýlka $E \left(Z_{x,t} \{D_{x_0+s-1,s} = d_{x_0+s-1,s}\}_{s=1,2,\dots,t} \right)$, $\bar{\beta} = 133.33$ a $d_{x_0+s-1,s} \approx 0.80n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$	36
5.4	Očakávaná systematická odchýlka $E \left(Z_{x,t} \{D_{x_0+s-1,s} = d_{x_0+s-1,s}\}_{s=1,2,\dots,t} \right)$, $\bar{\beta} = 133.33$ a $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, zaokrúhľované počty úmrtí v každom roku	37
5.5	Očakávaná systematická odchýlka $E \left(Z_{x,t} \{D_{x_0+s-1,s} = d_{x_0+s-1,s}\}_{s=1,2,\dots,t} \right)$, $\bar{\beta} = 133.33$ a $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, bez zaokrúhľovania počtov úmrtí v každom roku	37
5.6	Cieľový kapitál $M_t^{[Bayes100]}$ pre rôzne veľké portfóliá	40
5.7	Pomery (a) $\frac{M_0^{[Solv2]}}{V_0^{(1)[BE]}}$, (b) $\frac{M_0^{[Bayes80]}}{V_0^{(1)[BE]}}$ a (c) $\frac{M_0^{[Bayes100]}}{V_0^{(1)[BE]}}$ v čase 0 pre rôzne počiatkové veľkosti portfóliá	41
5.8	1: počty zomretých v čase, kde pravdepodobnosť úmrtia je znížená o 20%, 2: priemerné počty zomretých v čase generované z (3.8) s pravdepodobnosťami úmrtia zníženými o 10%, 3: počty zomretých v čase, kde pravdepodobnosti úmrtia sú najlepšie odhady	45
5.9	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ pre počiatkovú veľkosť portfóliá $n_{x_0,0} = 100$ v niektorých časoch výpočtu $t = 0,5,10,\dots,25$	45
5.10	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ pre počiatkovú veľkosť portfóliá $n_{x_0,0} = 1000$ v niektorých časoch výpočtu $t = 0,5,10,\dots,25$	46
5.11	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ pre počiatkovú veľkosť portfóliá $n_{x_0,0} = 10000$ v niektorých časoch výpočtu $t = 0,5,10,\dots,25$	46
5.12	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 0$ pre rôzne veľkosti portfólií	47
5.13	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 5$ pre rôzne veľkosti portfólií	47
5.14	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 10$ pre rôzne veľkosti portfólií	48

5.15	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$, $\frac{Life_{long,t}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1](\omega+1-x_0-t)}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ v čase $t = 15$ pre rôzne veľkosti portfólií	48
5.16	Pomery $\frac{M_t^{[Solv2]}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ a $\frac{M_t^{[R1](\omega+1-x_0-t)}}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$ pre počiatočnú veľkosť portfólia $n_{x_0,0} = 1000$ a prípady (b), (d), (e) a (h)	50

Zoznam tabuliek

4.1	Stredná dĺžka života pri narodení pre mužov a ženy vybraných krajín Európy. Historické hodnoty v rokoch 1950, 2000, 2014 a predpovedaná hodnota pre rok 2050 (zdroje: Human Mortality Database a Economic Policy Committee and European Commission).	29
5.1	Individuálna rezerva $V_t^{(1)[BE]}$ a $V_t^{(1)[-20\%]}$ v čase t	38
5.2	Individuálna rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$ a $V_t^{(1)[Bayes100]}$ v čase t , $n_{x_0,0} = 100$	38
5.3	Individuálna rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$ a $V_t^{(1)[Bayes100]}$ v čase t , $n_{x_0,0} = 1000$	39
5.4	Individuálna rezerva $V_t^{(1)[Bayes80]}$ a $V_t^{(1)[Bayes100]}$ v čase t , $n_{x_0,0} = 10000$	39
5.5	Kapitálová požiadavka pre riziko dlhovekosti podľa štandardného prístupu Solventnosti II	40
5.6	Kapitálová požiadavka s aktualizovanými pravdepodobnosťami úmrtia s predpokladom, že skutočný vývoj počtu zomretých do času t je $d_{x_0+s-1,s} \approx n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$, $n_{x_0,0} = 100$	40
5.7	Rezerva portfólia $V_t^{(\Pi)[BE]}$	43
5.8	Požadovaný kapitál na krytie rizika dlhovekosti, náhodných odchýlok a parametrického rizika, $\bar{\alpha} = 0.80\bar{\beta}$, 1. scenár: $n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$: $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$	44
5.9	Požadovaný kapitál na krytie rizika dlhovekosti, náhodných odchýlok a parametrického rizika, $\bar{\alpha} = 0.80\bar{\beta}$, 2. scenár: $0.80n_{x_0+s-1,s-1}q_{x_0+s-1,s}^*$, $s = 1, \dots, t$: $\frac{M_t^{[R1]}(\omega+1-x_0-t)}{V_t^{(\Pi)[BE]}}$	44
5.10	Porovnanie veľkosti potrebného kapitálu pre rôzne typy rizík na jednotku rezervy portfólia $V_t^{(\Pi)[BE]}$, počiatočná veľkosť portfólia je $n_{x_0,0} = 1000$	49