

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Josef Amemori

Ideální Bayesovský pozorovatel s redukovanou detekční mapou

Katedra softwaru a výuky informatiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Filip Děchtěrenko

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Teoretická informatika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V dne.....

Podpis autora

Název práce: Ideální Bayesovský pozorovatel s redukovanou detekční mapou

Autor: Josef Amemori

Katedra: Katedra softwaru a výuky informatiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Filip Děchtěrenko, Katedra softwaru a výuky informatiky

Abstrakt: Výpočetní modelování lidského zraku je náročnou úlohou. V posledních letech byl vyvinut biologicky inspirovaný model ideálního bayesovského pozorovatele pro úlohu zrakového vyhledávání (Najemnik & Geisler, 2005). Tento model předpovídá oční pohyby při hledání Gaborova cíle v šumu $1/f$. Najemnik a Geisler ve své práci pozorovali, že distribuce fixací a sakád předpovězená ideálním bayesovským pozorovatelem je podobná distribuci získané experimentem u člověka. V této práci bylo cílem implementovat ideálního bayesovského pozorovatele v podmínkách s umělým poškozením zraku a porovnat získané výsledky s chováním člověka.

Klíčová slova: ideální bayesovský pozorovatel, oční pohyby, modelování, centrální skotom

Title: Ideal Bayesian Observer with reduced detectability map

Author: Josef Amemori

Department: Department of Software and Computer Science Education

Supervisor: Mgr. Filip Děchtěrenko, Department of Software and Computer Science Education

Abstract: A computational modeling of the human vision is a challenging task. In recent years, a biologically inspired model Ideal Bayesian Observer was created for the visual search task (Najemnik & Geisler, 2005). The model predicts eye movements when searching for Gabor patch in $1/f$ noise. In their work, they observed similarity between distributions of fixations and saccades predicted by Ideal Bayesian Observer and distributions of fixations and saccades from a human observer. In this work, we have implemented Ideal Bayesian Observer with degenerated visual field and compared the model with behavior of a human.

Keywords: Ideal Bayesian Observer, eye movements, modeling, central scotoma

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce za trpělivost, kterou se mnou měl, a za rady, které mi poskytoval. Dále bych chtěl poděkovat Psychologickému ústavu akademie věd České republiky, za možnost provádět experimenty v jejich prostorách.

Obsah

Úvod	3
Struktura práce.....	3
1 Zrak	4
1.1 Fyziologie lidského zraku.....	4
1.2 Vyhledávání zrakem.....	6
1.3 Poškození zraku.....	7
1.3.1 Věkem podmíněná degenerace žluté skvrny.....	7
1.3.2 Zelený zákal.....	8
1.3.3 Homonymous hemianopsia.....	8
1.4 Technické detaily.....	9
2 Teorie detekce signálu a teorie informací	10
2.1 Teorie detekce signálu.....	10
2.2 Teorie informací.....	12
3 Ideální Bayesovský Pozorovatel	15
3.1 Teorie ideálního pozorovatele.....	15
3.2 Model IBO.....	19
3.2.1 Definice úlohy.....	19
3.2.2 Generativní model.....	19
3.2.3 Optimální strategie.....	20
3.2.4 Algoritmus.....	23
3.2.5 Chování IBO.....	24
3.3 Příklady aplikace IBO.....	24
3.3.1 Vyhledání cíle v noci.....	24
3.3.2 Vliv výpadku části zorného pole na vyhledávání cíle.....	25
3.4 Model minimalizující entropii.....	25
3.4.1 Optimální strategie.....	26
3.4.2 Porovnání s IBO.....	33

4 Experiment	34
4.1 Technické detaily.....	34
4.2 Měření hodnoty d'.....	35
4.2.1 Experimenty detekce.....	35
4.2.1.1 Detekce na žluté skvrně.....	35
4.2.1.2 Detekce na periferie.....	36
4.2.2 Výpočet mapy d'.....	37
4.2.3 Výpočet modifikované mapy d'.....	40
4.2.4 Výsledky.....	43
4.3 Vyhledávání cíle.....	47
4.3.1 Degenerativní maska.....	47
4.3.2 Experiment.....	50
4.3.3 Nastavení EML.....	51
4.3.4 Statistika dat.....	53
4.3.5 Výsledky.....	54
4.3.5.1 Zdravý zrak.....	54
4.3.5.2 VDŽS.....	56
4.3.5.3 Glaukom.....	58
4.3.5.4 Homonymous hemianopsia.....	60
4.3.5.5 Schrnutí.....	61
5 Diskuze	66
6 Závěr	69
Příloha 1 - Pravděpodobnost a statistika	70
Pravděpodobnost.....	70
Základní pojmy.....	70
Náhodná veličina.....	70
Podmíněná pravděpodobnost.....	72
Statistika.....	73

Úvod

Zrak je jeden z nejdůležitějších smyslů člověka. Svědčí o tom fakt, že polovina mozku je určena k jeho zpracování (Bear, Connors, & Paradiso, 2007). Používáme ho bez námahy, každodenně, aniž bychom si to uvědomovali.

Jedna z činností, která je prováděna zrakem každodenně, je vyhledávání. Člověk stále něco vyhledává: klíče, tužku, autobus, ponožku. V době před civilizací bylo vyhledávání životně důležité. Bylo potřeba vyhledat potravu, dávat pozor na predátora nebo cizí tlupu. Díky své důležitosti přitahoval vědce, kteří se snažili přijít s vysvětlením, které stojí za vyhledáváním zrakem.

V nedávné době byl představen model ideálního bayesovského pozorovatele pro vyhledávání cíle v poli (Najemnik & Geisler, 2005). Model ukázal potenciál, protože dokázal předpovědět některé statistiky u chování člověka.

V této práci byl zkoumán model ideálního bayesovského pozorovatele se simulovaným poškozením zraku a chování modelu se porovnal s chováním člověka.

Struktura práce

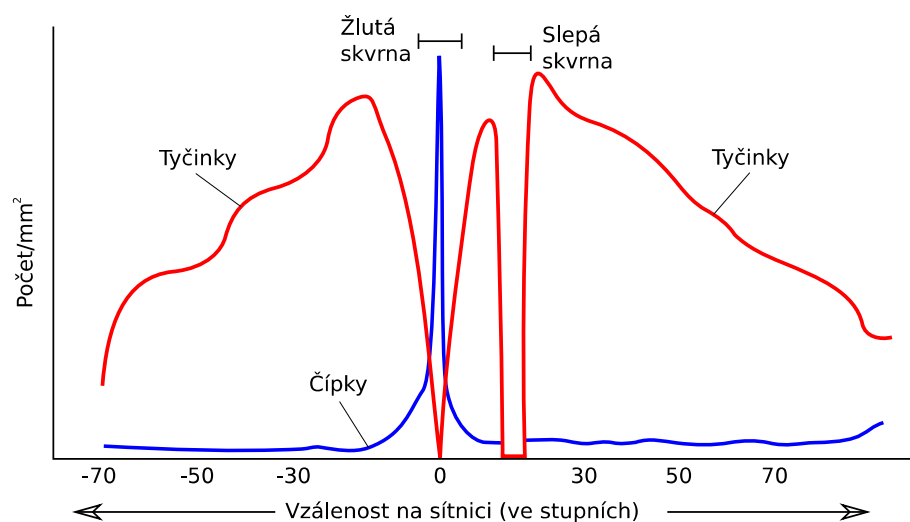
V prvních dvou kapitolách jsou představeny základy potřebné pro model ideálního bayesovského pozorovatele. Ve třetí kapitole je popsán samotný model, který byl použit pro porovnání s výsledky u lidského pozorovatele. Samotné experimenty jsou popsány v kapitole čtyři. V posledních kapitolách je diskuze a závěr.

1. Zrak

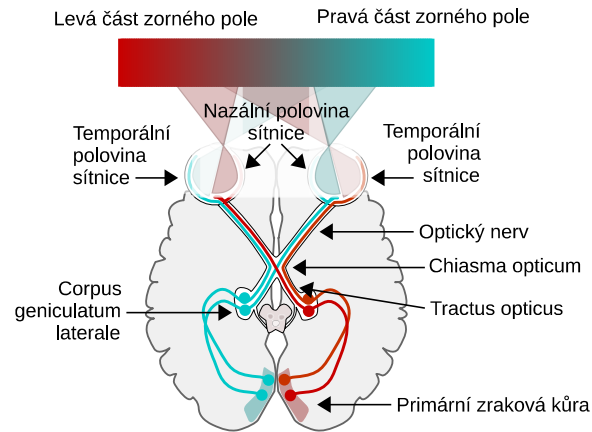
V této kapitole je v jednoduchosti představen zrak a jeden z mechanismů zraku, vyhledávání. Dále jsou v kapitole představeny choroby zraku, jejichž vliv na vyhledávání zrakem byl v této práci zkoumán.

1.1 Fyziologie lidského zraku

Orgánem zraku je oko, které je specializované na detekci světla s vlnovou délkou v rozmezí 390 až 700 (Bowmaker & Dartnall, 1980). Světlo z okolí dopadá nejprve na rohovku. Následně prochází skrze zornici do čočky, která soustřeďuje světelné paprsky na sítnici, kde se nacházejí foto-receptorové buňky, které detekují světlo (Bear et al., 2007). Jsou dva druhy foto-receptorů, tyčinky a čípky. Početnější skupinu tvoří tyčinky, kterých máme přibližně 90 miliónů (Curcio, Sloan, Kalina, & Hendrickson, 1990). Tyčinky jsou více citlivé na světlo než čípky, což jim umožňuje fungovat i v noci na rozdíl od čípků (Rieke & Baylor, 1998). Čípky jsou na sítnici zastoupeny v počtu kolem 4,5 miliónů (Curcio et al., 1990) a slouží pro rozlišení barev. Barvy se rozlišují pomocí tří druhů čípků (S, M a L), které se liší podle



Obr. 1: Graf rozložení tyčinek a čípků na sítnici. Největší zastoupení čípků je v oblasti zvaná žlutá skvrna, což je oblast přibližně o průměru 18 stupňů. Vzdálenost přes sítnici je měřena ve zrakových stupních, blíže viz kapitola 1.4. Jeden stupeň odpovídá průměrně 0,3mm (Drasdo & Fowler, 1974).



Obr. 2: Zjednodušený náčrt zrakové cesty. Přetištěno [a modifikováno] 17.7.2016 z https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AHuman_visual_pathway.svg#globalusage od Miquel Perello Nieto (vlastní dílo) [CC BY-SA 4.0] (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>), skrze Wikimedia Commons. Červenou barvou je označena oblast zpracovávající levou část zrakového pole. Perskou zelenou je vyznačena část zpracovávající pravou část zrakového pole.

pigmentu v cytoplasmě. Každý z pigmentů je citlivý na jinou vlnovou délku světla. S má maximum na vlnové délce 420 nm (modrofialová), M má maximum na 534 nm (zelená) a L má maximum na 564 nm (oranžová) (Bowmaker & Dartnall, 1980).

Tyčinky a čípky nejsou na sítnici rozloženy rovnoměrně. Čípky jsou nejvíce zastoupeny v oblasti zvaná žlutá skvrna a tyčinky jsou více zastoupeny na periférii, kde je počet čípků minimální (Curcio et al., 1990), viz obr. 1. Informace z fotoreceptorů jsou ze sítnici sesbírány gangliovými buňkami, které jsou spojeny skrze nervová spojení s částí hrbolu mezimozkového, tzv. *corpus geniculatum laterale*. Hrbol mezimozkový je spojen s primární zrakovou kůrou nacházející se na mozkové kůře (Bear et al., 2007), viz obr. 2. Při zpracování informací z fotoreceptorů dochází ke kompresi informací, kdy k nejmenší kompresi dochází na žluté skvrně a se zvětšující se vzdáleností od žluté skvrny dochází k větší ztrátě informací (Anstis, 1998). Tento mechanismus má za následek, že nejostřejší vidění je na žluté skvrně a ostrost klesá se zvětšující se vzdáleností od žluté skvrny.

1.2 Vyhledávání zrakem

Vyhledávání zrakem je jedna z nejdůležitější činností, která je člověkem

prováděna každodenně (Eckstein, 2011). Je to činnost, kdy se vyhledává nějaká věc v prostředí vnímané zrakem (Wolfe & Horowitz, 2008). Vyhledávaná věc se nazývá *cíl*, věc, která není cílem, se nazývá *distraktor* (Wolfe & Horowitz, 2008) a obraz, který je vnímán pozorovatelem, se nazývá *zrakové pole* (Smythies, 1996).

Zrakové pole není všude vnímáno se stejnou přesností. Oblast, která je zpracovávána žlutou skvrnou, je pozorována nejpřesněji a přesnost rozeznávat detaily klesá se zvětšující se vzdáleností od oblasti zpracovávané žlutou skvrnou (Anstis, 1998; Najemnik & Geisler, 2005). Pro získání lepších detailů z oblasti nezpracovávané žlutou skvrnou je potřeba pohnout okem a přenést danou oblast na žlutou skvrnu. Tomuto rychlému pohybu očí se říká *sakáda* a intervalům mezi nimi se říká *fixace*. Obecně sakáda označuje rychlý pohyb očí, kdy dojde k posunutí obrazu zrakového pole na sítnici (Walker, 2012). K sakádám dochází i při fixaci, tzv. *mikrosakády*, a jsou důležitou součástí zraku, protože zabraňují vytrácení objektu vnímaného zrakem, který je zafixován (Martinez-Conde, Macknik, & Hubel, 2004). V této práci se sakády značí pouze pohyby očí, kdy dojde k přenesení pozornosti z jedné oblasti na jinou.

Existují dlouhodobé snahy porozumět mechanismům, které řídí a ovlivňují vyhledávání zrakem. Experimenty se například věnovaly následujícím otázkám; jak ovlivňuje znalost o podobě vyhledávaného objektu rychlost jeho nalezení (Bravo & Farid, 2009); ovlivňují distraktory, které jsou vizuálně nápadné, např. červený mezi zelenými objekty, rychlost vyhledávání (Theeuwes & Burger, 1998); jak se změní rychlost vyhledávání cíle, pokud rozložení pravděpodobností výskytu cíle není rovnoměrné (Druker & Anderson, 2010); ovlivní rychlost vyhledávání cíle kontextová nápověda, tj. cíl se zobrazuje mezi distraktory, které mají vždy stejnou pozici vůči cíli (Brady & Chun, 2007); jak ovlivní vyhledání cíle, pokud se do role vloží odměňování cílů různými hodnotami (Navalpakkam, Koch, Rangel, & Perona, 2010).

Přestože je veliká snaha porozumět způsobu, jak jsou vybírány následující fixace při vyhledání, není toho o daném mechanismu moc známo (Najemnik & Geisler, 2008). V této práci byla zkoumána statistika pohybu očí při vyhledávání jednoho cíle v zorném poli s poškozeným viděním. Získaná statistika byla následně porovnána s model od Najemnika a Geislera (2010).

1.3 Poškození zraku

V této kapitole jsou představena poškození zraku, jejichž vliv na vyhledávání cíle v poli se v této práci zkoumal.

1.3.1 Věkem podmíněná degenerace žluté skvrny

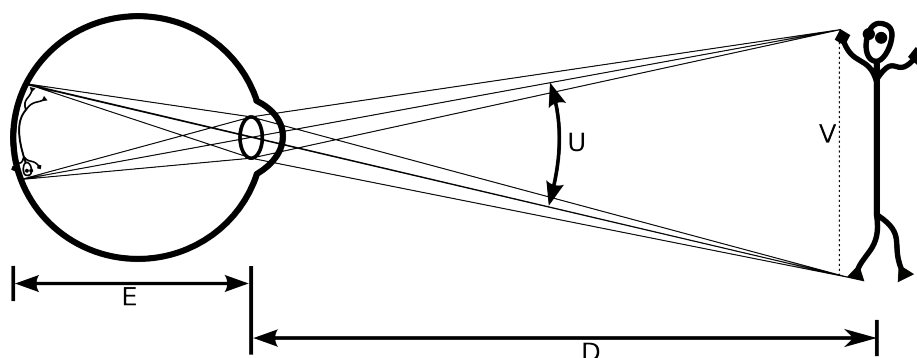
Věkem podmíněná degenerace žluté skvrny (VDŽS) je degenerativní porucha centrální oblasti sítnice, tj. žluté skvrny, spojená se ztrátou zraku v postižené oblasti (Bird et al., 1995). V rozvojových zemích je to nejběžnější poškození zraku u lidí nad 55 let a v USA to tvoří více jak 54 % z celkového počtu příčin slepoty (Coleman, Chan, Ferris, & Chew, 2008). VDŽS jsou více postiženy starší lidé, kuřáci a běloši (Jager, Mieler, & Miller, 2008). Díky moderním metodám byl prokázán i vliv genetického faktoru (Jager et al., 2008).

VDŽS se u pacienta projevuje postupnou ztrátou zraku v centrální oblasti. K úplné ztrátě zraku dojde pouze ve vzácných případech („Facts about glaucoma“, 2016). Ztráta zraku je způsobena degenerací žluté skvrny, jež je zapříčiněna *drúzy* (McConnell & Silvestri, 2005). Drúze je nashromážděná mimobuněčná látka mezi vrstvami na sítnici (McConnell & Silvestri, 2005). Pokud dojde u pacienta k odhalení VDŽS, je možné zpomalit a někdy i zastavit ztrátu zraku. Avšak úplná léčba poruchy neexistuje (Coleman et al., 2008).

1.3.2 Zelený zákal

Zelený zákal, pojmenovaný po tom, že u některých pacientů je zornice zbarvena dozelená (Leffler, Schwartz, Giliberti, Young, & Bermudez, 2015), je rodina degenerativních poruch způsobujících poruchu nervů v očích, která může vést až ke slepotě (*Guidelines for glaucoma*, 2006). Zelený zákal je druhá nejrozšířenější příčina slepoty ve světě (Quigley & Broman, 2006). Ve větším ohrožení vzniku zeleného zákalu jsou lidé nad 40 let, Afričané, Asiaté a Hispánci. Roli tu také hraje genetický faktor (Boyd, 2015).

Nejrozšířenější typy zeleného zákalu, též glaukom, je glaukom s uzavřeným úhlem (GUÚ) a glaukom (GOÚ) s otevřeným úhlem. GOÚ se projevuje postupnou ztrátou zraku na periferii. GUÚ se také projevuje ztrátou zraku. Navíc může být jeho projev doprovázen velikými bolestmi v postiženém oku (Quigley, 1996). Přesné příčiny zeleného zákalu nejsou známy, ale vysoký vnitrooční tlak zvyšuje



Obr. 3: Ilustrace ukazuje velikost zrkového úhlu U osoby na pravé straně. Osoba má velikost V a je vzdálena od čočky hodnotou D . E udává vzdálenost sítnice od čočky. Předpokládá se, že vzdálenosti jsou ve stejných jednotkách, např. cm.

pravděpodobnost vzniku zeleného zákalu (Quigley, 1996). Pokud dojde k diagnostikování zeleného zákalu, je možné průběh nemoci zpomalit nebo dokonce i zastavit. Avšak ztracený zrak nelze vyléčit („Facts about glaucoma“, 2016).

1.3.3 Homonymous hemianopsia

Homonymous hemianopsia (HH) je ztráta zraku na levé nebo pravé polovině zrkového pole. Hemianopsia znamená „bez zraku na polovině“, *hemi* – polovina, *an* – bez, *opsia* – zrak, a homonymous značí, že je postiženo zpracování zrkového pole jak z levého, tak i z pravého oka („Homonymous hemianopsia“, 2016). HH je způsobeno poškozením zrkové dráhy za *chiasma opticum* (Pelak, Dubin, & Whitney, 2007), viz obr. 2, kde dochází ke spojení výstupu pravé části levého oka s pravou částí pravého oka a levé části pravého oka s levou částí levého oka. 95 % případů HH je způsobena lézí v koncovém mozku a 5 % případů je způsobeno poškozením *tractus opticus* nebo *corpus geniculatum laterale* (Pambakian & Kennard, 1997).

U některých pacientů dochází k částečnému navrácení poškozeného zraku (Pambakian & Kennard, 1997). Míra regenerace je dána velikostí poškození zrkové cesty (Pambakian & Kennard, 1997) a stářím zranění, kdy největší naděje na uzdravení je v prvním měsíci po poškození zraku (Perez & Chokron, 2014).

1.4 Technické detaily

Pro měření vzdáleností v zorném poli se v této práci používají zrkové stupně, které udávají velikost rozložení obrazu na sítnici, který je pozorován (Swearer, 2011). Velikost obrazu na sítnici je závislá na reálné velikosti vzoru obrazu a vzdálenosti vzoru od čočky pozorovatele (Colman, 2009). Výhodou využití zrkových stupňů je, že se získá standardizovaný způsob, jak popisovat velikosti objektů, u kterých je určující velikost jejich obrazu na sítnici. Obr. 3 popisuje veličiny používané pro výpočet zrkového stupně. Vztah mezi U , V a D je následně dán rovnicí (Colman, 2009)

$$U = 2 \arctan\left(\frac{V}{2D}\right).$$

Vzorec udává vztah pro zrkový úhel U v radiánech. Pro potřeby této práce je používána zrkový úhel převedený do stupňů.

2. Teorie detekce signálu a teorie informací

V této kapitole jsou popsány dvě teorie, které jsou potřebné pro porozumění modelů prezentovaných v této práci. Dále se předpokládá znalost pravděpodobnosti a statistiky na úrovni bakaláře. Při nejistotě s pojmy z pravděpodobnosti a statistiky viz Příloha 1 - Pravděpodobnost a statistika.

2.1 Teorie detekce signálu

Teorie detekce signálů (zkráceně SDT z anglického *signal detection theory*) se využívá k rozlišení dvou signálů a k popsání této rozlišovací schopnosti využitím nástrojů matematiky (Stanislaw & Todorov, 1999). Mezi populární úlohy v teorii detekce signálů patří rozeznání signálu od šumu (Stanislaw & Todorov, 1999), tzv. ano/ne experiment (dále jen A/N). Příkladem A/N je určení, zdali se cíl nachází ve vizuálním poli. Jiným druhem úkolu je 2AFS (z anglického *two alternatives forced choice*). Při této úloze jsou pozorovateli hned po sobě prezentovány dvě situace. Jedna ze situací obsahuje cíl a druhá je bez něho. Úlohou pozorovatele je určit, zdali se cíl nacházel v první, nebo ve druhé situaci.

Podle teorie detekce signálů pozorovatel činí svá rozhodnutí podle velikosti *rozhodovací proměnná* (často se využívá anglický název *decision variable*) (Stanislaw & Todorov, 1999). Pozorovatel hlásí kladnou odpověď, pokud rozhodovací proměnná překročí kritérium (též *práh odpovědi*). Jinak dává negativní odpověď. Po odpovědi dané pozorovatelem nastane jedna ze čtyř situací (Macmillan & Creelman, 2004), viz také tab. 1.:

1. Cíl je detekován a je reálně přítomen, tzv. *hit rate*. *Hit rate* udává pravděpodobnost

$$P(\text{detekce} = \text{ano} \mid \text{cíl} = \text{přítomen}) \stackrel{\text{zkráceně}}{=} H.$$

2. Cíl je detekován, ale reálně není přítomen, tzv. *false alarm rate*. *False alarm rate* udává pravděpodobnost

$$P(\text{detekce} = \text{ano} \mid \text{cíl} = \text{není přítomen}) \stackrel{\text{zkráceně}}{=} F.$$

3. Cíl není detekován, ačkoliv je přítomen, tzv. *miss rate*. *Miss rate* udává

pravděpodobnost

$$P(\text{detekce} = \text{ne} \mid \text{cíl} = \text{přítomen}).$$

4. Cíl je správně nedetekován, tzv. *correct rejection*. *Correct rejection* udává pravděpodobnost

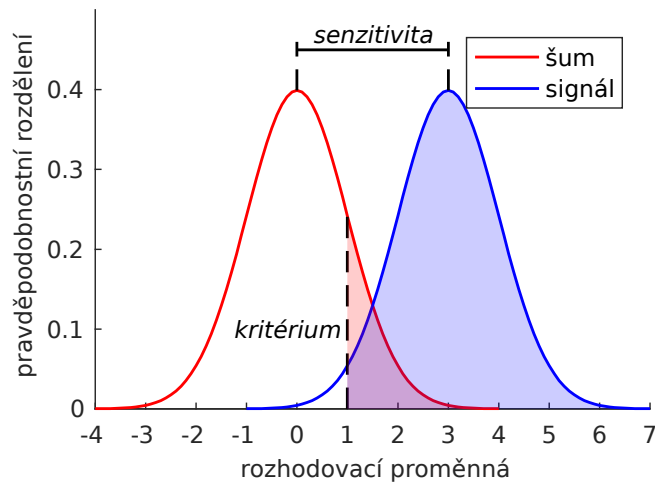
$$P(\text{detekce} = \text{ne} \mid \text{cíl} = \text{není přítomen}).$$

	Odpověď „ano“	Odpověď „ne“
Cíl přítomen	hit	miss
Cíl není přítomen	false alarm	correct rejection

Tab. 1: Základní vztahy mezi přítomností cíle a odpovědí pozorovatele.

Distribuce hodnot rozhodovací proměnné u případů, kde se nachází signál, se nazývá *distribuce signálu* a distribuce hodnot rozhodovací proměnné u případů bez signálu, tzn. pouze šumu, se nazývá *distribuce šumu* (Stanislaw & Todorov, 1999). Příklad distribuce signálu a šumu je ukázán na obr. 4.

Parametry, které ovlivňují velikosti *hit rate*, *false alarm rate*, *miss rate* a *correct*



Obr. 4: Ukázka distribuce signálu a šumu. Obě distribuce jsou z normálního rozdělení s rozptylem 1. Šum má střední hodnotu 0 a signál střední hodnotu 3. Kritérium je nastaveno na hodnotu 1. Světle modrá oblast určuje hit rate a světle červená oblast určuje false alarm rate.

rejection rate, jsou jednak (1) *práh odpovědi* a jednak (2) velikost překrytí distribuce signálu a šumu. Tento způsob rozdělení vlivů byl významný přínos SDT (Stanislaw & Todorov, 1999).

Velikost překrytí je určena vzdáleností středních hodnot šumu od signálu, což je tzv. *senzitivita* (viz obr. 4), a velikostí rozptylů distribuce signálu a šumu. Hodnota, která bere oba parametry v úvahu, tzn. vzdálenost středních hodnot a velikosti rozptylů signálu a šumu, je hodnota d' a je určena jako senzitivita normalizovaná průměrným rozptylem šumu a signálu (Stanislaw & Todorov, 1999). Vzorec je dán rovnicí (Green & Swets, 1989)

$$d' = \frac{\mu_s - \mu_n}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\sigma_s^2 + \sigma_n^2)}}. \quad (2.1)$$

μ_s je střední hodnota signálu, μ_n je střední hodnota šumu, σ_s^2 je rozptyl signálu a σ_n^2 je rozptyl šumu.

Hodnota d' rovna nule značí, že signál a šum jsou nerozeznatelné. Pokud je d' rovna ∞ , signál a šum jsou od sebe perfektně rozeznatelné.

Výhodnou d' je její nezávislost na prahu odpovědi, pokud jsou splněny následující podmínky (Stanislaw & Todorov, 1999).:

1. Rozdělení pravděpodobnosti u signálu a šumu je normální.
2. Signál a šum mají stejný rozptyl.

Z A/N experimentu lze hodnotu d' pro pozorovatele získat rozdílem jeho *hit rate* a *false alarm rate*. Rovnice je dána vzorcem (Macmillan, 2014)

$$d' = \Phi^{-1}(H) - \Phi^{-1}(F). \quad (2.2)$$

Pokud u A/N experimentu platí předpoklad $H = F$, vzorec (2.2) se zkrátí na (Macmillan & Creelman, 2004)

$$d' = 2 \cdot \Phi^{-1}(C). \quad (2.3)$$

C udává pravděpodobnost správné odpovědi u pozorovatele.

Máme-li místo pravděpodobnosti správné odpovědi u pozorovatele k dispozici *hit rate* a *false alarm rate*, lze použít následujících vztahů (Bradley, Abrams, & Geisler, 2014).

$$\begin{aligned}
 H &= \Phi\left(\frac{1}{2} \cdot d' - \gamma\right), \\
 F &= \Phi\left(-\frac{1}{2} \cdot d' - \gamma\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

γ je parametr, určující chybu člověka, tj. při detekci cíle může člověk dát chybnou odpověď, ačkoliv v hlavě správně vyhodnotil danou situaci. Parametr koriguje chybu člověka a jeho použití vede k lepší aproximaci výsledků (Wichmann & Hill, 2001).

2.2 Teorie informací

Teorie informací hledá odpověď na dvě základní otázky: která je nejlepší metoda komprese dat a která je nejlepší přenosová rychlost pro komunikaci (Cover & Thomas, 2006).

Základní pojem teorie informací je entropie, která je definována jako střední hodnota informací (MacKay, 2003)

$$H(X) = E[I(X)] = \sum_{x \in \Omega_x} P(x) \cdot I(x).$$

$H(X)$ je entropie náhodné veličiny X .

$P(x)$ je pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X .

Ω_x je množina všech hodnot, kterých může nabývat veličina X .

$I(x)$ je velikost informace pro hodnotu x daná vzorcem (MacKay, 2003)

$$I(X) = \log_2 \frac{1}{P(X)}.$$

Pokud $P(x) = 0$, pak $P(x) \cdot I(x) = 0$ (MacKay, 2003).

Pro lepší názornost mějme následující příklad. Na stole se nacházejí dvě identické krabice, do kterých není z vnějšku vidět. V jedné z nich se nachází jablko a úkolem je určit, ve které z nich se nachází. Definujme si stav, že se jablko nachází v pravé, nebo v levé krabici, pomocí náhodné veličiny Jab . Hodnota 0_{vlevo} značí, že jablko se nachází v levé krabici. Hodnota 1_{vpravo} značí, že jablko se nachází v pravé krabici. Pokud je pravděpodobnost, že se jablko nachází v pravé, nebo v levé krabici, 50 %, entropie náhodné veličiny Jab se vypočítá následujícím způsobem.

$$H(Jab) = P(0_{vlevo}) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(0_{vlevo})} \right) + P(1_{vpravo}) \cdot \log_2 \left(\frac{1}{P(1_{vpravo})} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 0,5 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,5}\right) + 0,5 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,5}\right) = \\
&= 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Pokud pravděpodobnost, že se jablko nachází v krabici vpravo, je 100%, entropie náhodné veličiny Jab se vypočítá následujícím způsobem.

$$\begin{aligned}
H(Jab) &= P(0_{vlevo}) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P(0_{vlevo})}\right) + P(1_{vpravo}) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P(1_{vpravo})}\right) = \\
&= 1 \cdot \log_2\left(\frac{1}{1}\right) + 0 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0}\right) = \\
&= 1 \cdot 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Převědno do řeči teorie informací, pokud by se v prvním případě získala informace o pozici jablka, informace by měla hodnotu 1. Ve druhém případě by dodatečná informace neměla žádnou hodnotu, protože je předem známo, že se jablko nachází v pravé krabici. Jiný pohled na entropii je, že určuje míru neurčitosti systému (Cover & Thomas, 2006).

3. Ideální Bayesovský Pozorovatel

Ideální bayesovský pozorovatel (dále jen IBO z anglického *ideal bayesian observer*) je model zraku pro úlohu vyhledávání cíle v poli. Základní kostra IBO pochází z teorie ideálního pozorovatele. Hlavním přínosem IBO je, že model bere v úvahu nerovnoměrnost rozložení foto-receptorů na sítnici. Tato nerovnoměrnost rozložení je do IBO zakomponována využitím teorie detekce signálů. V této kapitole je přesně popsán fungování modelu IBO. Následně se představí model, který z IBO vychází. Tento odvozený model se následně používal pro porovnání s výsledky experimentů, které byly provedeny nad lidským pozorovatelem.

3.1 Teorie ideálního pozorovatele

Teorie se zabývá ideálním pozorovatelem, což je model používající Bayesovskou statistiku pro rozhodování při řešení úloh. Pozorovatel je ideální, protože statisticky dosahuje optimálního výkonu při řešení předem určené úlohy (Kersten & Mamassian, 2009). Oblíbenou oblastí, kde se využívá ideální pozorovatel, je zkoumání vstupně/výstupních činností člověka. Příkladem takových činností je vyhledání slova v textu, vyhledání cíle v zorném poli, identifikaci slova v šumu atd.

Tvorbu ideálního pozorovatele lze rozdělit na tři základní části (Kersten & Mamassian, 2009),:

1. určení *generativního modelu*,
2. *definice úlohy* a
3. vytvoření *optimální strategie* pro řešení úlohy.

Generativní model určuje vztah mezi reálnými stavy $s = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ a stavy $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, které pozoruje pozorovatel (Kersten & Mamassian, 2009). Vztah je určen podmíněnou pravděpodobností $P(x | s)$, což je pravděpodobnost, že budou pozorovány stavy x za předpokladu, že reálné stavy nabývají hodnot s , a pravděpodobností $P(s)$, což je rozdělení pravděpodobnosti reálných stavů. Jako příklad mějme vizuální úlohu, kdy se v každém pokusu ukazuje pozorovateli na monitoru jeden ze dvou cílů, a , nebo b , a úlohou je určit, který cíl byl pozorován.

Pravděpodobnost $P(a)$ je dána poměrem počtu pokusů se signálem a k celkovému počtu všech pokusů. Podobně i pro $P(b)$. Pozorovaný stav x je dán rovnicí $x = 1_a + n$, je-li při pokusu prezentován stav a , nebo rovnicí $x = -1_b + n$, je-li prezentován stav b . n udává hodnotu šumu řídicí se normovaným normálním rozložením. Šum reprezentuje neurčitost při zpracování zřetelového signálu z monitoru. Podmíněná pravděpodobnost $P(x|a)$ je pak určena normálním rozdělením se středem v bodě 1 a podmíněná pravděpodobnost $P(x|b)$ je určena normálním rozdělením se středem v bodě -1.

Definice úlohy se skládá ze dvou částí: (1) přesný popis toho, co je třeba udělat se vstupem, např. detekovat cíl, vyhledat cíl, identifikovat cíl, a (2) ohodnocení akcí. Ohodnocení akcí je tu z důvodu, že v reálném případě nemají chybné reakce stejnou váhu (Kersten & Mamassian, 2009). Například přehlédnutí predátora, který se snaží zaútočit, má jiné ohodnocení než jeho, ačkoliv není přítomen. Ohodnocení akcí je reprezentováno reálnou funkcí $L(s, a)$, kde a je akce a s je hodnota reálných stavů. Pokud je u ohodnocení žádanější nižší hodnota, mluví se o chybové funkci. Pokud je vyšší hodnocení žádanější, mluví se o funkci zisku. Jako příklad mějme úlohu detekce cíle ve vizuálním poli. Úlohou je určit, zdali se cíl nachází ve vizuálním poli, a odpovědět ano, pokud se myslí, že byl detekován. Jinak se odpoví ne. Funkce $L(s, a)$ se definuje jako funkce zisku. Chybná detekce, tj. odpověď ne a cíl se nachází v poli nebo odpověď ano a cíl se nenachází v poli, bude mít ohodnocení 0. Správná detekce, tj. odpověď ano a cíl se nachází v poli nebo odpověď ne a cíl se nenachází v poli, bude mít ohodnocení 1.

Optimální strategie je dána jako pravidlo pro výběr akce a z množiny akcí A při pozorovaném vstupu x . Při určení akce a se používá funkce (Kersten & Mamassian, 2009)

$$R(a) = \sum_{s \in S} L(s, a) \cdot p(s|x).$$

S je množina všech možných reálných stavů. Pokud je úloha dána chybovou funkcí, hledá se akce, která minimalizuje funkci $R(a)$. Pokud je úloha dána funkcí zisku, hledá se akce, která maximalizuje funkci $R(a)$. Jako příklad mějme úlohu z minulého odstavce, tzn. detekce cíle v zorném poli. Protože úloha detekce cíle byla definována skrze funkce zisku, která nabývá pouze dvou hodnot, 0, nebo 1,

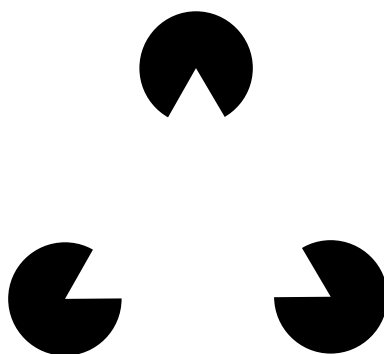
rozhodovací strategie se redukuje na určení, která z pravděpodobností $P(\text{cíl přítomen} \mid x)$ a $P(\text{cíl nepřítomen} \mid x)$ je větší. Pokud je pravděpodobnost pro *cíl přítomen* větší, odpoví se ano. Jinak se odpoví ne.

Jednou z oblastí výzkumu vstupně/výstupních činností člověka je zkoumání zraku. Teorie ideálního pozorovatele se využívá při studium zraku, protože pomáhá vědcům v několika oblastech (Geisler, 2011):

1. *Identifikace relevantního stimulu pro danou úlohu.* Tvorba modelu nutí k prozkoumávání stimulů, kterými se řídí lidský pozorovatel při plnění dané úlohy. To vede k jejich lepšímu porozumění. Někdy lze i nalézt odpověď na otázku, na které stimuly je dobré dávat pozor, pokud je požadována optimalizace výkonu lidského pozorovatele.
2. *Přesný popis řešení úlohy.* Způsob řešení u ideálního pozorovatele je statisticky maximálně optimální, ale nemusí být jediný. Avšak dává dobrý vhled do výpočetní náročnosti řešení úlohy.
3. *Ideální pozorovatel slouží pro porovnání s lidským pozorovatelem.* Lidský a ideální pozorovatel nemusí využívat stejnou strategii, ale pokud k řešení využívají stejné stimuly, lze předpokládat, že pokud dojde ke zhoršení výkonu u ideálního pozorovatele, podobný trend bude pozorován u lidského pozorovatele. Pokud lidský pozorovatel dosahuje stejného výkonu jako ideální pozorovatel, pak hypotézy, které nedosahují stejného výkonu jako ideální pozorovatel, můžou být zamítnuty.
4. *Tvorba a testování hypotéz a modelů.* Schopnosti reálného pozorovatele se nemusejí rovnat schopnostem ideálního pozorovatele, ale z hlediska evoluce tu je snaha, aby reálný pozorovatel měl co nejlepší schopnosti. Proto se ideální pozorovatel může použít jako návod při tvorbě nových hypotéz.

Několik příkladů využití teorie ideálního pozorovatele.

1. *Detekce, identifikace a rozlišení cíle.* Jednou z prvních aplikací teorie ideálního pozorovatele bylo porozumění otázce, jak je detekce cíle ovlivněna fotonovým šumem (Geisler, 2011). Získaný model pro detekci ve fotonovém šumu byl následně aplikován na různé úlohy, např. úloha určení senzitivity na kontrast (Arnou & Geisler, 1996), úloha identifikace písmen (Beckmann & Legge, 2002). Bylo zjištěno, že v mnoha případech je chování lidského a



Obr. 5: Ilustrace ukazuje příklad, kdy kruhy s výřezem dohromady vytváří dojem trojúhelníku, ačkoliv se tam žádný nenachází.

ideálního pozorovatele podobné, celkově byl ale lidský pozorovatel horší v porovnání s ideálním (Geisler, 2011).

2. *Odhad cíle.* Při detekci cíle se pouze určuje zdali je vzor přítomen, nebo ne. U odhadu cíle je úkolem pozorovatele určit jistotu, s jakou pozoruje daný vzor. Jednou ze základních otázek v oblasti zpracování zraku je, jak mozek zpracovává barvy, když má člověk pouze tři druhy čípků (Geisler, 2011). Ideální pozorovatel byl použit pro porozumění otázce, jak jsou informace z čípků využity pro vnímání barev. Bylo zjištěno, že optimální odhad je dán nejen druhem čípku, který je stimulován nejvíce, ale i na druzích čípků, které se nacházejí v okolí (Brainard, Williams, & Hofer, 2008).
3. *Shlukování kontur.* Při interpretaci obrazů dochází ke shlukování oblastí a kontur tak, že tvoří nový celek, viz obr. 5. Teorie ideálního pozorovatele byla použita pro experiment, kdy byla vzata kontura z přirozeného prostředí a graficky přerušena. Úkolem lidského pozorovatele bylo určit, zdali oddělené kontury tvoří celek, nebo ne. Při tvorbě ideálního pozorovatele byla použita databáze fotografií s přirozenými konturami, které se použily pro jeho učení. Bylo pozorováno, že odpovědi lidského pozorovatele se moc neliší od odpovědí ideálního pozorovatele (Geisler & Perry, 2009).
4. *Pohyb.* Porozumění pohybu je pro pozorovatele důležité, ale nebylo mnoho studií, které by využívaly teorii ideálního pozorovatele (Geisler, 2011). Teorie se například použila pro zkoumání jednoduchého případu pohybu stínů a byla

schopna přijít s dobrým vysvětlením některých pozorovaných efektů (Kersten, Mamassian, & Knill, 1997).

3.2 Model IBO

3.2.1 Definice úlohy

Úlohou je detekovat cíl. Cíl je vždy jeden, není doprovázen distraktory a může se náhodně objevit na předem určených n lokacích konečného počtu. Vyhledávání cíle je ukončeno určením lokace, o které se myslí, že se tam nachází cíl. Hodnocení odpovědi je buď správná odpověď, při nalezení cíle, nebo špatná odpověď, při určení chybné lokace cíle.

3.2.2 Generativní model

Reálné stavy jsou reprezentovány vektorem $s = (s_i)_{i=1}^n$. s_i udává, zdali se na lokaci i nachází cíl. Pokud se tam cíl nachází, s_i nabývá hodnoty 1, jinak hodnoty 0. U rozdělení pravděpodobností reálných stavů se předpokládá, že pravděpodobnost výskytu cíle na lokaci je všude stejná. Pravděpodobnost je dána vztahem (Najemnik & Geisler, 2005)

$$\text{prior}(i) = P(s_i = 1) = \frac{1}{n}. \quad (3.1)$$

Pozorování z jednotlivých lokací je dáno náhodnou veličinou W_{ij} mající normální rozdělení a odpovídá rozhodovací proměnné z teorie detekce signálů. Chování rozhodovací proměnné je pak určeno d' hodnotou, která se získá experimentálně od lidského pozorovatele, viz. kapitola 4.2.

W_{ij} reprezentuje rozhodovací proměnnou pro lokaci i při současné fixaci na lokaci j . Teorie detekce signálů říká, že hodnota d' nezávisí na vzdálenosti středních hodnot, pokud je rozptyl upraven podle dané vzdálenosti (Najemnik & Geisler, 2005). Proto se pro lepší práci s modelem nastaví střední hodnota W_{ij} hodnotu 0,5, pokud je cíl přítomen na lokaci i , a jinak se nastaví na hodnotu $-0,5$, tzn. střední hodnota je dána vzorcem (Najemnik & Geisler, 2005)

$$\mu_{ij} = E[W_{ij}] = \begin{cases} 0,5 & s_i = 1, \\ -0,5 & s_i = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

a rozptyl je dán vzorcem (Najemnik & Geisler, 2005)

$$\sigma_{ij}^2 = \text{var}(W_{ij}) = \frac{1}{d_{ij}^2}. \quad (3.3)$$

d_{ij} je hodnota d na lokaci i za předpokladu, že aktuální fixace je na lokaci j .

3.2.3 Optimální strategie

IBO neprovádí při jednom vyhledávání pouze jedno pozorování, ale pro každou novou fixaci dělá nové, což znamená, že při každé fixaci se rozhoduje, zdali ukončit prohledávání a dát odpověď na lokaci cíle, nebo hledat nový fixačního bodu. Strategie se skládá ze dvou částí: (1) integrace informací z doposud učiněných pozorování a (2) určení dalšího fixačního bodu, pokud pořád není jistota, kde by se mohl nacházet cíl (Najemnik & Geisler, 2005).

Při **integraci informací** se sumarizují veškerá pozorování a získají se pravděpodobnosti výskytu cíle na lokaci i (Najemnik & Geisler, 2005). Pravděpodobnost je značena jako $p_i(T)$, kde T označuje počet provedených fixací.

$$p_i(T) = \frac{\text{prior}(i) \cdot \exp\left[\sum_{t=1}^T d_{ik(t)}^2 W_{ik(t)}\right]}{\sum_{j=1}^n \text{prior}(j) \cdot \exp\left[\sum_{t=1}^T d_{jk(t)}^2 W_{jk(t)}\right]}. \quad (3.4)$$

$k(t)$ je funkce, která vrací fixační bod při t -té fixaci. Následující odvození vzorce (3.4) pochází od Najemníka a Geislera (2005).

Označme pozorování při t -té fixaci vektorem $\mathbf{W}(t) = (W_{1k(t)}, \dots, W_{nk(t)})$ a rozepišme si podrobněji pravděpodobnosti $p_i(T)$ na $p(i | \mathbf{W}(1), \dots, \mathbf{W}(T))$, tj. pravděpodobnost, že se cíl nachází na lokaci i , pokud se provedla pozorování $\mathbf{W}(1), \dots, \mathbf{W}(T)$. Použitím Bayesova vzorce na $p_i(T)$ vyjde

$$p_i(T) = \frac{\text{prior}(i) \cdot p(\mathbf{W}(1), \dots, \mathbf{W}(T) | i)}{\sum_{j=1}^n \text{prior}(j) \cdot p(\mathbf{W}(1), \dots, \mathbf{W}(T) | j)}$$

Pozorování $\mathbf{W}(t)$ jsou navzájem nezávislá, proto platí

$$p_i(T) = \frac{\text{prior}(i) \cdot \prod_{t=1}^T \prod_{q=1}^n p(W_{qk(t)} | i)}{\sum_{j=1}^n \text{prior}(j) \cdot \prod_{t=1}^T \prod_{q=1}^n p(W_{qk(t)} | j)}. \quad (3.5)$$

Veličiny W_{ij} jsou normálního rozdělení a jejich střední hodnoty a rozptyly jsou

dány vzorci (3.2) a (3.3). Dosazením do rovnice (3.5) vyjde

$$p_i =$$

$$\frac{\text{prior}(i) \frac{(2\pi)^{-T/2}}{\prod_{t=1}^T \sigma_{ik(t)}} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{ik(t)} - 0,5)^2}{\sigma_{ik(t)}^2}\right) \prod_{q \neq i} \left(\frac{(2\pi)^{-T/2}}{\prod_{t=1}^T \sigma_{qk(t)}} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{qk(t)} + 0,5)^2}{\sigma_{qk(t)}^2}\right) \right)}{\sum_{j=1}^n \text{prior}(j) \frac{(2\pi)^{-T/2}}{\prod_{t=1}^T \sigma_{jk(t)}} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{jk(t)} - 0,5)^2}{\sigma_{jk(t)}^2}\right) \prod_{q \neq j} \left(\frac{(2\pi)^{-T/2}}{\prod_{t=1}^T \sigma_{qk(t)}} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{qk(t)} + 0,5)^2}{\sigma_{qk(t)}^2}\right) \right)}$$

Vydělením čitatele a jmenovatele jmenovatelem vyjde

$$p_i(T) = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{\text{prior}(j) \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{jk(t)} - 0,5)^2}{(\sigma_{jk(t)}^2)}\right) \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{ik(t)} + 0,5)^2}{(\sigma_{ik(t)}^2)}\right)}{\text{prior}(i) \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{ik(t)} - 0,5)^2}{(\sigma_{ik(t)}^2)}\right) \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \frac{(W_{jk(t)} + 0,5)^2}{(\sigma_{jk(t)}^2)}\right)}$$

Výraz se zkrátí na

$$p_i(T) = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{\text{prior}(j)}{\text{prior}(i)} \exp\left(\sum_{t=1}^T \frac{W_{jk(t)}}{\sigma_{jk(t)}^2} - \sum_{t=1}^T \frac{W_{ik(t)}}{\sigma_{ik(t)}^2}\right)}$$

Dosazením vzorce (3.3) za rozptyly a vynásobením čitatele a jmenovatele výrazem

$$\text{prior}(i) \exp\left(\sum_{t=1}^T d_{ik(t)}^2 W_{ik(t)}\right) \text{ se získá rovnice (3.4).}$$

Za **následující fixační bod** je vybrána lokace, která maximalizuje pravděpodobnost nalezení cíle, pokud by se fixace provedla na danou lokaci (Najemnik & Geisler, 2005). Jinak formulováno, IBO se snaží nalézt lokaci, která zvyšuje pravděpodobnost nalezení cíle (Najemnik & Geisler, 2005).

Označme optimální fixační bod pro $T+1$ fixaci hodnotou $k_{opt}(T+1)$. Po provedení T fixací je strategie pro následující fixační bod dán formulí (Najemnik & Geisler, 2005)

$$k_{opt}(T+1) = \arg \max_{k(T+1)} (p(C|k(T+1))). \quad (3.6)$$

$p(C|k(T+1))$ je pravděpodobnost nalezení cíle za předpokladu, že $T+1$ -ní fixace byla učiněna na pozici $k(T+1)$. Použitím vzorce pro úplnou pravděpodobnost, se formule (3.6) upraví na (Najemnik & Geisler, 2005)

$$k_{opt}(T+1) = \arg \max_{k(T+1)} \left(\sum_{i=1}^n p_i(T) p(C|i, k(T+1)) \right). \quad (3.7)$$

Nyní se z formule (3.7) odvodí vzorec, který se hodí pro implementaci na počítači. Odvození pochází od Najemníka a Geislera (2005).

Pro výpočet hodnot $p_i(T)$ se použije vzorec (3.4). $p(C|i, k(T+1))$ reprezentuje pravděpodobnost správné odpovědi, $p(C|k(T+1))$, za předpokladu, že se cíl nachází na lokaci i .

Na chvíli předpokládejme, že proběhla $T+1$ -ní fixace. Nejlepší strategie pro správnou odpověď, tzn. určení pozice cíle, je vybrat lokaci s největší pravděpodobností $p_j(T+1)$, $j \in N$. Pokud se cíl nachází na lokaci i , strategie by měla vybírat lokaci $k(T+1)$, která maximalizuje pravděpodobnost $p_i(T+1)$ vůči ostatním pravděpodobnostem $p_j(T+1)$, $j \in N, j \neq i$. Přepsáním tohoto pravidla do rovnice vyjde

$$p(C|i, k(T+1)) = p(p_i(T+1) \geq p_1(T+1), \dots, p_i(T+1) \geq p_n(T+1) | i, k(T+1)).$$

Substitucí $L_{ij} = p_i(T+1)/p_j(T+1)$ do předchozí rovnice vyjde

$$p(C|i, k(T+1)) = p(L_{i1} \geq 1, \dots, L_{in} \geq 1 | i, k(T+1)). \quad (3.8)$$

Použitím rovnice (3.4) na L_{ij} vyjde rovnice

$$L_{ij} = \frac{\text{prior}(i) \exp \left(\sum_{t=1}^{T+1} d_{ik(t)}^2 W_{ik(t)} \right)}{\text{prior}(j) \exp \left(\sum_{t=1}^{T+1} d_{jk(t)}^2 W_{jk(t)} \right)}. \quad (3.9)$$

Označme $Z_j = W_{jk(T+1)}$. Rovnici (3.9) lze rozdělit na část se známými pravděpodobnostmi $p_i(T)$, $p_j(T)$ a na část udávající výstup z budoucí fixace,

$$L_{ij} = \frac{\exp(d_{ik(T+1)}^2 W_{ik(T+1)}) p_i(T)}{\exp(d_{jk(T+1)}^2 W_{jk(T+1)}) p_j(T)} = \frac{\exp(d_{ik(T+1)}^2 Z_i) p_i(T)}{\exp(d_{jk(T+1)}^2 Z_j) p_j(T)}.$$

Hodnoty L_{ij} nejsou nezávislé, ale stanou se nezávislé, pokud se podmíní na veličině Z_i . Dosazením rovnice (3.9) do rovnice (3.8), podmíněním hodnot L_{ij} hodnotou Z_i a použitím vzorce pro úplnou pravděpodobnost se dojde k

$$p(C|i, k(T+1)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z_i) \prod_{i \neq j} p \left(\frac{\exp(d_{ik(T+1)}^2 z_i) p_i(T)}{\exp(d_{jk(T+1)}^2 z_j) p_j(T)} \geq 1 \right) dz_i.$$

Po úpravě

$$p(C|i, k(T+1)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z_i) \prod_{i \neq j} p \left(z_j < \frac{\ln \left(\frac{p_j(T)}{p_i(T)} \right) + d_{ik(T+1)}^2 z_i}{d_{jk(T+1)}^2} \right) dz_i.$$

Dosažením distribuční funkce a hustoty normovaného normálního rozdělení za pravděpodobnosti na levé straně rovnice, vyjde

$$p(C|i, k(T+1)) = \int_{-\infty}^{\infty} d_{ik(T+1)} \phi(d_{ik(T+1)}(z_i - 0,5)) \prod_{i \neq j} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{p_j(T)}{p_i(T)} \right) \frac{1}{d_{jk(T+1)}^2} + \frac{d_{ik(T+1)}^2}{d_{jk(T+1)}^2} z_i + 0,5}{\frac{1}{d_{jk(T+1)}^2}} \right) dz_i.$$

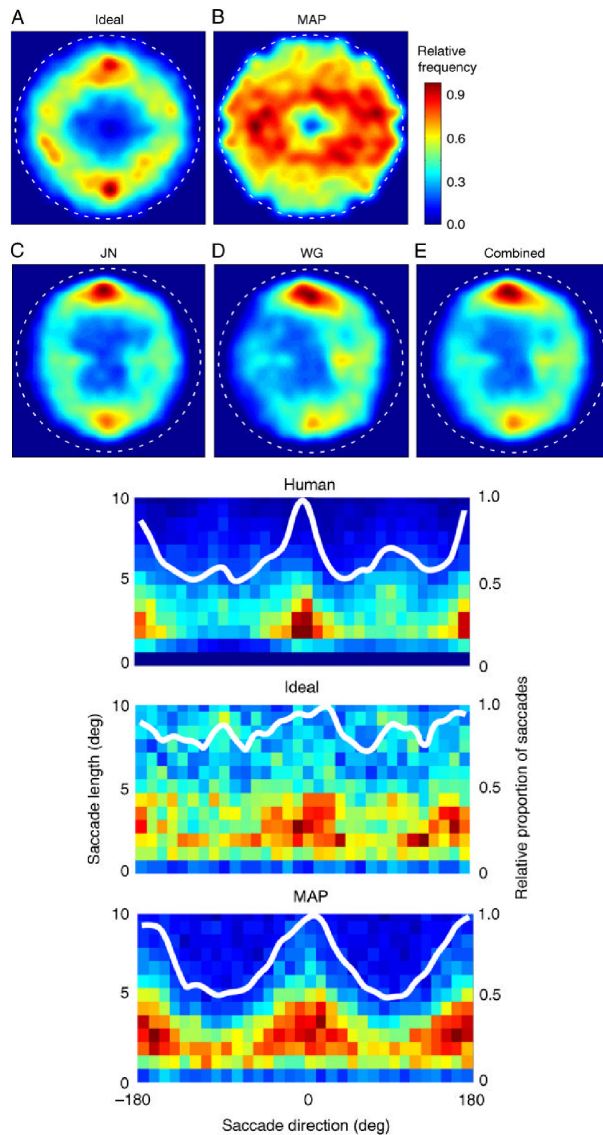
Použitím substituce $w = d_{ik(T+1)}(z_i - 0,5)$ se získá konečný tvar rovnice

$$p(C|i, k(T+1)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(w) \prod_{i \neq j} \Phi \left(\frac{-2 \ln \left(\frac{p_j(T)}{p_i(T)} \right) + d_{jk(T+1)}^2 + 2 d_{ik(T+1)} w + d_{ik(T+1)}^2}{2 d_{jk(T+1)}^2} \right) dw. \quad (3.10)$$

3.2.4 Algoritmus

Následující algoritmus IBO pochází od Najemníka a Geislera (2008).

1. Fixace začíná ve středu.
2. Vybere se jedna z n možných lokací s pravděpodobností *prior* (i) jako pozice cíle, viz rovnice (3.1).
3. Pro každou pozici se vygeneruje šum $N_{ik(T)}$, kde i je index lokace a $k(T)$ je aktuální fixační bod pro T -tou fixaci. Výstup z lokace i při fixaci na pozici $k(T)$ je dán rovnicí $W_{ik(T)} = 0.5 + N_{ik(T)}$, pokud se cíl nachází na lokaci i , jinak je výstup dán rovnicí $W_{ik(T)} = -0.5 + N_{ik(T)}$.
4. Pro každou lokaci se vypočítá pravděpodobnost $p_i(T)$ použitím vzorce (3.4).
5. Pokud některá z pravděpodobností $p_i(T)$ překročí předem určený práh, např. 0,9, algoritmus se zastaví a za výsledek se označí pozice s nejvyšší pravděpodobností $p_i(T)$. Jinak se pokračuje bodem 6.
6. Výpočet optimální lokace $k_{opt}(T+1)$ pro následující fixaci. Výpočet je dán vzorcem (3.7) spolu se vzorcem (3.10).
7. Zpět na bod 4.



Obr. 6: Statistika chování IBO, MAP a člověka (Najemnik & Geisler, 2008). Horní graf ukazuje rozložení všech fixací kromě prvních fixací, které vždy byly prováděny doprostřed vyhledávaného pole. Čárkovaná kružnice vyznačuje oblast, ve které se vyhledával cíl. JN a WG jsou iniciály subjektů, se kterými se prováděl pokus. Dolní graf ukazuje rozložení všech sakád. Délka sakád je udána ve zrakových stupních. Sákada směrem doprava má hodnotu 0, směrem nahoru hodnotu 90, směrem dolů hodnotu -90 a směrem doleva hodnotu 180/-180.

3.2.5 Chování IBO

Najemnik a Geisler (2008) porovnali chování IBO, MAP a lidského pozorovatele, viz obr. 6. MAP funguje na stejném principu jako IBO. Liší se pouze při určení následujícího fixačního bodu, kdy se vybere lokace s největší pravděpodobností

výskytu cíle.

Najemník a Geisler pozorovali, že jak IBO tak i lidský pozorovatel, preferovali horizontální sakády vůči sakádám vertikálním. Rozložení všech fixací mělo jak u IBO, tak i u lidského pozorovatele tvar torusu a největší počet fixací se nacházely v oblastech nad a pod středem vyhledávaného pole. Celkově se došlo k závěru, že vyhledávání cíle u lidského pozorovatele bylo podobné vyhledávání IBO.

3.3 Příklady aplikace IBO

3.3.1 Vyhledání cíle v noci

Paulun, Schütz, Michel, Geisler, a Gegenfurtner (2015) zkoumaly otázku, jak se bude lišit vyhledávání cíle člověkem v noci a ve dne. Statistiku vyhledávání u člověka pak porovnal se statistikou vyhledávání IBO. Aby mohli simulovat IBO pro podmínky nočního a denního vidění, změřily d' hodnotu pro obě situace.

Při analýze dat z experimentu nad lidským pozorovatelem došli k závěru, že strategie vyhledávání v noci a ve dne se liší. Při nočním vidění se prováděly delší sakády, fixace trvaly v průměru o 200 ms déle a byly více koncentrované ve středu. V porovnání s IBO nebyla u výsledných distribucí fixací a sakád pozorována tak silná korelace jako pozoroval Najemník a Geisler (2008), ale IBO dokázal předpovědět, že v noci budou probíhat delší sakády. Na druhou stranu nedokázal přesně předpovědět rozložení fixací jak při nočním, tak i při denním vidění.

3.3.2 Vliv výpadku části zorného pole na vyhledávání cíle

Michel a Geisler (2009) zkoumali schopnost člověka se adaptovat na výpadek části zorného pole. Schopnost, jak dobře se člověk adaptoval, byla měřena v porovnání s výkonem IBO. Při porovnání použili dva druhy IBO. První IBO bral při hledání následující lokace v úvahu výpadek zorného pole. Druhý IBO, který nazvali naivní, neměnil strategii vyhledání následující lokace a vybíral optimální lokaci pro případ nemodifikovaného zorného pole. Naivní IBO stále získával informace s výpadkem části zorného pole.

Michel a Geisler provedli dva druhy experimentu. Při prvním byla uměle posunuta žlutá skvrna na periferii. Při druhém experimentu bylo simulováno zhoršené vidění na žluté skvrně. U prvního experimentu se chování člověka více blížilo naivnímu IBO než optimálnímu, a naopak u druhého experimentu se chování

člověka více blížilo chování optimálního IBO. Z výsledků usoudili, že člověk se špatně přizpůsobuje, pokud se mu posune žlutá skvrna, ale na druhou stranu je schopen se adaptovat na situace, kdy se vidění na žluté skvrně zhorší.

3.4 Model minimalizující entropii

Bylo ukázáno, že v některých ohledech se IBO chová podobně jako lidský pozorovatel (Najemnik & Geisler, 2008). Mohlo by se usoudit, že lidský pozorovatel provádí podobné výpočty při vyhledávání cíle jako IBO. Při bližším pohledu na výpočet prováděný IBO je však vidět, že IBO počítá součet n^2 termů, kde n je počet možných lokací pro cíl a term se skládá z nekonečného integrálu (Najemnik & Geisler, 2009).

Najemnik a Geisler (2009) přišli s modelem minimalizující entropii (dále jen ELM z anglického *entropy limit minimization*), který je podobný IBO, ale pro učení následujícího fixačního bodu používá poznatky z teorie informací, a ukázali, že představený model provádí menší počet operací v porovnání s IBO. ELM se od IBO liší pouze při výběru následujícího fixačního bodu, tzn., že odlišnost je pouze v bodě 6 v algoritmu z kapitoly 3.2.4. U modelu IBO se za následující fixační bod vybírá pozice maximalizující přesnost nalezení cíle po provedení fixace na danou pozici (Najemnik & Geisler, 2009). U EML se hledá fixační bod, který minimalizuje očekávanou entropii výskytu cíle na lokacích (Najemnik & Geisler, 2009). Entropie je minimalizována, protože cílem je zmenšit neurčitost prostředí.

3.4.1 Optimální strategie

Strategie pro výběr následujícího fixačního bodu je dána následovně. Předpokládá se, že byla provedena T -tá fixace a hledá se optimální fixační bod pro $T+1$ -ní fixaci. Náhodná veličina, která reprezentuje pozici lokace cíle, se označí jako Poz . Entropie Poz po T -té fixaci je pak dána rovnicí

$$H(Poz(T)) \stackrel{\text{zkráceně}}{=} H(T) = -\sum_{i=1}^n p_i(T) \cdot \log_2 p_i(T). \quad (3.11)$$

$p_i(T)$ se vypočítá použitím vzorce (3.4). $Poz(T)$ je zápis pro náhodnou veličinu Poz po T -té fixaci.

Strategií ELM je hledání fixačního bodu $k(T+1)$ minimalizujícího entropii $Poz(T+1)$ (3.11). Protože hodnoty po $T+1$ -ní fixaci nejsou známi, pracuje se

s očekávanou entropií (Najemnik & Geisler, 2009)

$$\begin{aligned} E[H(T+1)|k(T+1)] &= \\ &= -E\left[\sum_{i=1}^n p_i(T+1|k(T+1)) \cdot \log_2 p_i(T+1|k(T+1))\right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$E[H(T+1)|k(T+1)]$, zkráceně $E[H_{k(T+1)}]$, je střední hodnota entropie (3.11) po $T+1$ -ní fixaci za předpokladu, že $T+1$ -ním fixačním bodem je $k(T+1)$. $p_i(T+1|k(T+1))$, zkráceně $p_{ik(T+1)}$, je pravděpodobnost $p_i(T+1)$ za předpokladu, že $T+1$ -ním fixačním bodem je $k(T+1)$.

Najemnik a Geisler (2009) odvodili zkrácený vzorec pro rovnici (3.12)

$$E[H_{k(T+1)}] = H(T) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_{ik(T+1)} d_{ik(T+1)}^2. \quad (3.13)$$

Tím se minimalizace $E[H_{k(T+1)}]$ změnila na maximalizaci výrazu (Najemnik & Geisler, 2009)

$$E[\Delta H(T+1)|k(T+1)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_{ik(T+1)} d_{ik(T+1)}^2.$$

$E[\Delta H(T+1)|k(T+1)]$ je očekávaná změna entropie při výběru fixace na lokaci $k(T+1)$. d_{ij} je hodnota d' na lokaci i při fixaci na lokaci j .

Následující odvození vzorce (3.13) pochází od Najemnika a Geislera (2009).

Použitím vzorce pro úplnou pravděpodobnost je možné rovnici (3.12) rozepsat na

$$E[H_{k(T+1)}] = - \sum_{j=1}^n p_{jk(T)} \sum_{i=1}^n E[p_{ik(T+1)|j} \log(p_{ik(T+1)|j})]. \quad (3.14)$$

$p_{ik(T+1)|j}$ je pravděpodobnost $p_{ik(T+1)}$ za předpokladu, že cíl se nachází na pozici j .

Vzorec pro $p_{ik(T+1)|j}$ vznikne úpravou vzorce (3.4)

$$\begin{aligned} p_{ik(T+1)|j} &= \frac{p_{ik(T)} \exp(d_{ik(T+1)}^2 W_{ik(T+1)|j})}{\sum_{s=1}^n p_{sk(T)} \exp(d_{sk(T+1)}^2 W_{sk(T+1)|j})}, \text{ kde} \\ W_{ik(T+1)|j} &= \frac{X_{ij}}{d_{ik(T+1)}} + \mu_{ij}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

X_{ij} je normované normální rozdělení. Pro střední hodnotou $W_{ik(T+1)|j}$ platí

$$\mu_{ij} = E[X_{ij}] = \begin{cases} 0,5 & i=j, \\ -0,5 & i \neq j. \end{cases} \quad (3.16)$$

Pro další potřeby se definují proměnné:

$$L_{ik(T+1)j} = p_{ik(T)} \exp(d_{ik(T+1)}^2 W_{ik(T+1)j}) \text{ a} \quad (3.17)$$

$$S_{k(T+1)j} = \sum_{s=1}^n L_{sk(T+1)j}. \quad (3.18)$$

Dosazením výše definovaných proměnných do termu $E[p_{ik(T+1)j} \log(p_{ik(T+1)j})]$ z (3.14) a následnou úpravou výrazu vznikne

$$\begin{aligned} E[p_{ik(T+1)j} \log(p_{ik(T+1)j})] &= \\ &= -E\left[\frac{L_{ik(T+1)j}}{S_{k(T+1)j}} \log(L_{ik(T+1)j})\right] + E\left[\frac{L_{ik(T+1)j}}{S_{k(T+1)j}} \log(S_{k(T+1)j})\right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Níže jsou uvedeny uvedou předpoklady, kterými je dále pracováno při důkazu.:

1. Cíl se může nacházet na nekonečně mnoha lokacích.
2. Pravděpodobnost $p_{ik(T)}$, že se cíl nachází na lokaci i při fixaci na lokaci $k(T)$, je nekonečně malá, ale ne rovna 0.
3. d_{ij} nabývá konečných hodnot, tzn. není ani nekonečně veliká, ani nekonečně malá.
4. $p_{ik(T)}$ a d_{ij} mají takové rozdělení pravděpodobnostní, že $S_{k(T+1)j}$ je normálního rozdělení s nekonečně malým rozptylem.

Dále bude v důkazu pro lepší čitelnost rovnic zkrácen zápis hodnoty $p_{ik(T)}$ na p_i a vynecháván index $k(T+1)$ u proměnných. Stále ale platí, že proměnné v rovnicích jsou závislé na možném fixačním bodu $k(T+1)$.

Díky předpokladům důkazu jsou náhodné veličin L_{ij} a S_j nezávislé. To umožňuje přepsat rovnici (3.19) do tvaru

$$E[p_{ij} \log(p_{ij})] = -E[L_{ij} \log(L_{ij})] E\left[\frac{1}{S_j}\right] + E[L_{ij}] E\left[\frac{\log(S_j)}{S_j}\right]. \quad (3.20)$$

S_j je veličina s normálním rozdělení se středem m_j a rozptylem v_j . Dosazením vzorce pro normální rozdělení za S_j do rovnice (3.20) vyjde

$$\begin{aligned} E[p_{ij} \log(p_{ij})] &= \\ &= -E[L_{ij} \log(L_{ij})] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v_j}} \phi\left(\frac{z-m_j}{\sqrt{v_j}}\right) \frac{1}{z} dz + E[L_{ij}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v_j}} \phi\left(\frac{z-m_j}{\sqrt{v_j}}\right) \frac{\log(z)}{z} dz. \end{aligned}$$

Nechť $y = (z - m_j) / \sqrt{(v_j)}$. Substitucí do předešlé rovnice vyjde

$$\begin{aligned}
& E[p_{ij} \log(p_{ij})] = \\
& = -E[L_{ij} \log(L_{ij})] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v_j}} \phi(y) \frac{1}{\sqrt{v_j} y + m_j} dy + E[L_{ij}] \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \frac{\log(\sqrt{v_j} y + m_j)}{\sqrt{v_j} y + m_j} dy.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nyní se odvodí rovnost $m_j = 1$.

$$\begin{aligned}
m_j &= E[S_j] = && \text{z (3.18)} \\
&= \sum_{s=1}^n E[L_{sj}] = && \text{z (3.15) a (3.17)} \\
&= \sum_{s=1}^n E \left[p_i \exp \left(d_i^2 \left(\frac{X_{ij}}{d_i} + \mu_{ij} \right) \right) \right] = \\
&= \sum_{s=1}^n p_i \exp(d_i^2 \mu_{ij}) E[\exp(d_i X_{ij})].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dosazením vztahu pro normované normální rozdělení za X_{ij} do $E[\exp(d_i X_{ij})]$ se term upraví na

$$\begin{aligned}
E[\exp(d_i X_{ij})] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp(d_i x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 2d_i x + d_i^2) + \frac{1}{2}d_i^2\right) dx = \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-d_i)^2}{2}\right) dx = \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Dosazením vztahu (3.23) do rovnice (3.22) vyjde

$$\begin{aligned}
E[S_j] &= \sum_{s=1}^n p_s \exp(d_s^2 \mu_{sj}) \exp\left(\frac{1}{2}d_s^2\right) = \\
&= p_j \exp\left(\frac{1}{2}d_j^2 + d_j^2 \mu_{jj}\right) + \sum_{i \neq j}^n p_j \exp\left(\frac{1}{2}d_j^2 + d_j^2 \mu_{ij}\right) = && \text{z (3.16)} \\
&= p_j \exp\left(\frac{1}{2}d_j^2 + \frac{1}{2}d_j^2\right) + \sum_{i \neq j}^n p_j \exp\left(\frac{1}{2}d_j^2 - \frac{1}{2}d_j^2\right) = \\
&= p_j \exp(d_j^2) + \sum_{i \neq j}^n p_j.
\end{aligned}$$

Protože platí rovnost $\sum_{s=1}^n p_s = p_j + \sum_{s=1, s \neq j}^n p_s = 1$, dosazením do předchozí rovnice

vyjde

$$E[S_j] = p_j \exp(d_j^2) + 1 - p_j.$$

Díky předpokladu důkazu, že p_j je nekonečně malá hodnota, střední hodnota S_j vyjde 1.

$$E[S_j] = \lim_{p_j \rightarrow 0} (p_j \exp(d_j^2) + 1 - p_j) = 1. \quad (3.24)$$

Dosazením vztahu (3.24) do rovnice (3.21) a použitím předpokladu, že rozptyl v_j náhodné veličiny S_j je nekonečně malý, vyjde

$$\begin{aligned} & E[p_{ij} \log(p_{ij})] \\ &= \lim_{v_j \rightarrow 0} \left\{ -E[L_{ij} \log(L_{ij})] \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \frac{1}{\sqrt{v_j} y + 1} dy + E[L_{ij}] \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \frac{\log(\sqrt{v_j} y + 1)}{\sqrt{v_j} y + 1} dy \right\} = \\ &= -E[L_{ij} \log(L_{ij})] \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy = \\ &= -E[L_{ij} \log(L_{ij})]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dosazením vztahů (3.17) a (3.15) do rovnice (3.25) a následnou úpravou výrazu vyjde

$$\begin{aligned} & E[p_{ij} \log(p_{ij})] = -E[L_{ij} \log(L_{ij})] = \\ &= -E \left[p_i \exp \left(d_i^2 \left(\frac{X_{ij}}{d_i} + \mu_{ij} \right) \right) \log \left(p_i \exp \left(d_i^2 \left(\frac{X_{ij}}{d_i} + \mu_{ij} \right) \right) \right) \right] = \\ &= -p_i \exp(d_i^2 \mu_{ij}) \left(\log(p_i) E[\exp(d_i X_{ij})] + E[d_i X_{ij} \exp(d_i X_{ij})] + d_i^2 \mu_{ij} E[\exp(d_i X_{ij})] \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dosazením vztahu (3.23) do rovnice (3.26) vyjde

$$\begin{aligned} & E[p_{ij} \log(p_{ij})] \\ &= -p_i \exp(d_i^2 \mu_{ij}) \left(\log(p_i) \exp\left(\frac{1}{2} d_i^2\right) + E \left[d_i X_{ij} \exp(d_i X_{ij}) \right] + d_i^2 \mu_{ij} \exp\left(\frac{1}{2} d_i^2\right) \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nyní se odvodí zjednodušení pro výraz $E[d_i X_{ij} \exp(d_i X_{ij})]$.

$$\begin{aligned} & E[d_i X_{ij} \exp(d_i X_{ij})] = \int_{-\infty}^{\infty} p(X_{ij} = x) d_i x \exp(d_i x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) d_i x \exp(d_i x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_i x \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + 2d_i x + d_i^2) + \frac{1}{2}d_i^2\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_i \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_i \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[(x-d_i) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right) + d_i \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right) \right] dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_i \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x-d_i) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right) dx + d_i \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right) dx \right].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$(x-d_i) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right)$ je lichá funkce, tj. $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = -f(-x)$. Pro lichou funkci platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-d_i) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right) dx = 0.$$

Dosazením do rovnice (3.28) vyjde

$$\begin{aligned}
E[d_i X_{ij} \exp(d_i X_{ij})] &= d_i^2 \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-d_i)^2\right) dx = \\
&= d_i^2 \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-d_i) dx = \\
&= d_i^2 \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Dosazením vztahu (3.29) do rovnice (3.27) vyjde

$$E[p_{ij} \log(p_{ij})] = -p_i \exp(d_i^2 u_{ij}) \exp\left(\frac{1}{2}d_i^2\right) (\log(p_i) + d_i^2 + d_i^2 u_{ij}).$$

Pokud $i = j$, pak

$$E[p_{ij} \log(p_{ij})] = -p_i \exp(d_i^2) (\log(p_i) + 1,5 d_i^2). \tag{3.30}$$

Pokud $i \neq j$, pak

$$E[p_{ij} \log(p_{ij})] = -p_i \left(\log(p_i) + \frac{1}{2} d_i^2 \right). \tag{3.31}$$

Vložení vztahů (3.30) a (3.31) do rovnice (3.14) vyjde

$$\begin{aligned}
E[H] &= -\sum_{j=1}^n p_j \left\{ E[p_{j|j} \log(p_{j|j})] + \sum_{i=1, i \neq j}^n E[p_{i|j} \log(p_{i|j})] \right\} = \\
&= -\sum_{j=1}^n p_j \left\{ p_j \exp(d_j^2) (\log(p_j) + 1,5 d_j^2) + \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i \left(\log(p_i) + \frac{1}{2} d_i^2 \right) \right\} = \\
&= -\sum_{j=1}^n p_j \left\{ p_j \exp(d_j^2) \log(p_j) + 1,5 p_j \exp(d_j^2) d_j^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i \log(p_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i d_i^2 \right\}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Použitím předpokladů důkazu na hodnoty $p_j \exp(d_j^2) \log(p_j)$ a $1,5 p_j \exp(d_j^2) d_j^2$ vyjde, že jsou nekonečně malé. Zanedbáním daných hodnot v rovnici (3.32) vyjde

$$\begin{aligned}
E[H] &= -\sum_{j=1}^n p_j \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i \log(p_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i d_i^2 \right\} = \\
&= -\sum_{j=1}^n p_j \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i \log(p_i) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i d_i^2 \right\}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Substitucí $H_0 = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$ do rovnice (3.33) vyjde

$$\begin{aligned}
E[H] &= -\sum_{j=1}^n p_j [-H_0 - p_j \log(p_j)] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i d_i^2 \right\} = \\
&= H_0 \sum_{j=1}^n p_j + \sum_{j=1}^n p_j^2 \log(p_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i d_i^2 \right\} = \\
&= H_0 + \sum_{j=1}^n p_j^2 \log(p_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i d_i^2 \right\}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Použitím předpokladu důkazu vyjde, že $\sum_{j=1}^n p_j^2 \log(p_j)$ je zanedbatelný

s porovnáním $H_0 = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$. Rovnice (3.34) se zredukuje na

$$\begin{aligned}
E[H] &= H_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^n p_i d_i^2 \right\} = \\
&= H_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \left\{ -p_j d_j^2 + \sum_{i=1}^n p_i d_i^2 \right\} = \\
&= H_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 d_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i=1}^n p_i d_i^2 =
\end{aligned}$$

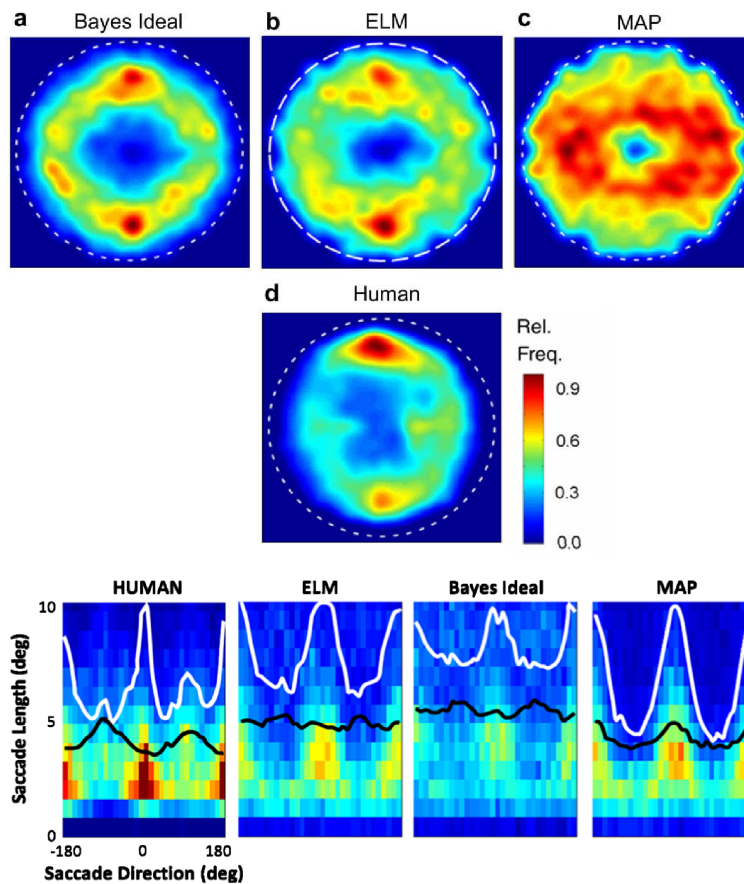
$$= H_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 d_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i d_i^2.$$

Použitím předpokladu důkazu vyjde, že $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 d_j^2$ je zanedbatelný s porovnáním

$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j d_j^2$. Aplikováním na předešlou rovnici se dojde do

$$E[H] = H_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i d_i^2.$$

Zůstává otázka, zdali přibližný vzorec, který byl odvozen, je dobrým odhadem „pravé“ očekávané entropie, tj. entropie vypočtená bez použití předpokladů důkazu.



Obr. 7: Statistika chování ELM (Najemnik & Geisler, 2009). Horní graf ukazuje distribuci všech fixací, kromě prvních fixací. Dolní graf ukazuje distribuci sakád. Černá linka znázorňuje průměrnou hodnotu v daném směru. Z grafů lze vysledovat, že EML a IBO nevykazovali nápadně odlišná chování.

Najmnik a Geisler (2009) ukázali, že hodnota očekávané entropie vypočtená formulí (3.13) a hodnota „pravé“ očekávané entropie mají v 91 % případů korelaci 0,9. Pouze v méně než v 1 % případů je korelace menší než 0,8. Průměrná korelace byla 0,96. Ze získaných výsledků došli k závěru, že formule (3.13) je dobrou aproximací „pravé“ očekávané entropie. Pro výpočet „pravé“ hodnoty očekávané entropie použili Monte Carlo metodu.

3.4.2 Porovnání s IBO

Najemnik a Geisler (2009) porovnali EML s IBO a lidským pozorovatelem, viz obr. 7. Pozorovali, že se EML a IBO v naměřených statistikách zásadně neliší. Oba modely prokázaly přibližně stejný počet fixací a podobné rozložení fixací a sakád. Rozložení fixací u EML mělo tvar torusu s maximálními hodnotami v oblastech nahoře a dole vyhledávaného pole. EML preferoval horizontální sakády vůči vertikálním a pro vertikální sakády platilo, že jejich průměrná délka je delší než průměrná délka horizontálních sakád.

4. Experiment

V této kapitole jsou podrobně popsány experimenty, které byly provedeny, spolu s výsledky, které byly následně porovnány s chováním ELM. V první části jsou popsány technické detaily, které jsou společné pro všechny provedené experimenty. V následující části je popsán první experiment, detekce cíle v poli, který sloužil k naměření hodnot d' , které se použil v modelu EML. Ve stejné části je vysvětlen přesný způsob výpočtu d' . Poslední část popisuje druhý experiment, kterým bylo vyhledávání cíle v poli s normální a s poškozenou sítnicí.

4.1 Technické detaily

U psychofyzických úloh se experimenty obvykle dělají na malém počtu, protože zkoumané mechanismy jsou kvalitativně stejné napříč lidmi a liší se pouze v parametrech. Proto byly experimenty provedeny pouze na jednom pozorovateli (bude k němu odkazováno jako k pozorovateli JA), který je i autorem této práce. Pozorovatel byl krátkozraký a po celou dobu experimentu měl na sobě brýle se 3 dioptriemi na každém sklíčku. Jinak si pozorovatel nebyl vědom, že by měl jinou oční vadu. Odpočinky v rámci experimentu byly prováděny podle potřeby pozorovatele.

Stimuly byly prezentovány na CRT monitoru s velikostí obrazovky 356 mm x 273 mm. Monitor měl rozlišení 1024 x 768 pixelů s obnovovací frekvencí 85 Hz. Pozorovatel se koukal na monitor ze vzdálenosti 966 mm. Díky tomu byla získána hodnota 50 px na zrakový stupeň. Pro zamezení pohybů hlavou při experimentech měl pozorovatel položenou bradu na opěrce ze dřeva.

Pohyb očí byl měřen použitím *eye trackeru* (EyeLink II; SR Research, Osgoode, Ontario, Kanada) s obnovovací frekvencí 250 Hz. Eye tracker byl nastaven pro pozorování pouze levého oka s *tracking mode* nastaveným na *Pupil*. Před každým blokem experimentu byla provedena devítibodová kalibrace a před každým pokusem byla provedena korekce driftu. V rámci bloku bylo pozorovateli umožněno provést opětovnou kalibraci eye trackeru.

Detekovaný a vyhledávaný stimulus byl Gaborův cíl s prostorovou frekvencí 6 cpd (*cycles per degree*, neboli cyklů na jeden zrakový stupeň), jenž byl otočen



Obr. 8: Pozadí a cíl použité při experimentu. Vpravo je pozadí z kruhového 1/f šumu. Vpravo je Gaborův cíl.

o 45° a ohraničený použitím symetrického *raised cosine* s velikostí šířky a délky $0,5^\circ$, viz obr. 8. Cíl byl prezentován v pozadí ze šumu 1/f, který měl tvaru kruhu o průměru 15° a byl centrován na střed monitoru, viz obr. 8. Šum 1/f byl použit, protože obrázky přírodních scén mají podobnou spektrální hustotu jako šum 1/f (Bak, Tang, & Wiesenfeld, 1987; Field, 1987; Tolhurst, Tadmor, & Chao, 1992). Zbytek pozadí byl nastaven na RGB hodnotu (128, 128, 128) (dále jen šedá). Při experimentech byl používán fixační bod, což byl černý čtverec o délce stran $0,2^\circ$.

Kontrasty cíle a šumu jsou udány v r.m.s. (z anglického *root mean square*), který je dán rovnicí

$$r.m.s. = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}.$$

n je počet pixelů, x_i je normalizovaná hodnota šedi do intervalu $[0;1]$ a \tilde{x} je průměrná normalizovaná hodnota šedi

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Experimenty byly provedeny tak, aby bylo možné porovnat výsledky s prací od Najemnika a Geislera (2008).

4.2 Měření hodnoty d'

Experiment se skládal ze dvou částí: (1) naměření d' na žluté skvrně a (2) naměření d' na periferiích. Výsledky měření z obou experimentů se následně interpolovaly, čímž se získala hodnota d' pro všechny oblasti na sítnici.

4.2.1 Experimenty detekce

4.2.1.1 Detekce na žluté skvrně

Experiment byl složen ze dvou podobných částí, které se pouze lišily v nastaveních kontrastů cíle a pozadí. Hodnoty kontrastů pro cíl byly experimentálně hledány, aby odpovídaly přibližnému rozsahu detekční schopnosti člověka.:

1. Gaborův cíl s kontrasty 0,07, 0,08, 0,1, 0,11 a 0,13 a šum $1/f$ s kontrastem 0,1.
2. Gaborův cíl s kontrasty 0,04, 0,045, 0,05, 0,06 a 0,07 a šum $1/f$ s kontrastem 0, což odpovídá uniformnímu pozadí.

V každé části se pro každou hodnotu kontrastu cíle realizovalo 40 detekcí, tzn. v každé části bylo celkově provedeno 200 opakování. Každá část byla rozdělena do 5 bloků, tzn. v každém bloku bylo 40 opakování. Cíle s různými kontrasty byly mezi bloky rozděleny tak, aby každá hodnota kontrastu cíle byla v každém bloku zastoupena stejným počtem. Pořadí v rámci bloku bylo náhodné.

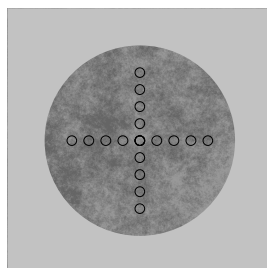
Každé opakování v rámci bloku začalo prezentováním fixačního bodu ve středu monitoru na 1 s. Následně na 50 ms bylo ukázáno šedivé pozadí. Poté se na 250 ms objevilo pozadí se šumem $1/f$, ve kterém se s pravděpodobností 50 % vyskytoval cíl. Pozice cíle byla shodná s pozicí fixačního bodu, který se prezentoval na začátku pokusu. Pokus byl ukončen šedou obrazovkou, která na monitoru zůstala, dokud pozorovatel nedal odpověď. Odpovídalo se použitím klávesnice, kde pravá kurzorová šipka znamenala cíl byl přítomen a levá kurzorová šipka znamenala cíl nebyl přítomen.

4.2.1.2 Detekce na periferii

Detekční schopnost na periferii byla naměřena posouváním fixačního bodu prezentovaného na začátku opakování, jež se neliší od posouvání cíle na příslušnou oblast v periferii. Posouvání fixačního bodu má výhodu v tom, že pozorovatel vždy přesně ví, kde se bude nacházet možná pozice pro cíl.

Experiment byl složen ze dvou podobných částí, které se lišily pouze v nastaveních kontrastech cíle a pozadí.:

1. Gaborův cíl s kontrastem 0,1505 v šum $1/f$ s kontrastem 0,1.
2. Gaborův cíl s kontrastem 0,0721 v šum $1/f$ s kontrastem 0, tzn. uniformní pozadí.



Obr. 9: Pozice pro fixační bod. Detekce byly měřeny ve čtyřech směrech od sítnice ve vzdálenostech $0,6^\circ$, $2,4^\circ$, 3° , 4° a 6° od žluté skvrny. Černé kružnice na ilustraci značí jejich přibližnou pozici. Kružnice uprostřed značí střed a je to místo, kde se prezentoval cíl.

Kontrasty pro cíl byly vypočteny z výsledků detekce cíle na žluté skvrně, viz. kapitola 4.2.2 bod 2 algoritmu.

Každá část byla složena ze čtyř podskupin, jež se lišily pouze oblastí sítnice, na které se prováděla detekce. Každá podskupina měřila detekci v jednom ze čtyř směrů od žluté skvrny, : nahoru, dolů, doleva a doprava. Detekce byla provedena v pěti vzdálenostech od žluté skvrny: $0,6^\circ$, $2,4^\circ$, 3° , 4° a 6° , viz obr. 9. V každé podskupině bylo realizováno 40 detekcí pro každou vzdálenost od žluté skvrny, tzn. celkově bylo v jedné podskupině provedeno 200 opakování. Každá podskupina byla rozdělena do 5 bloků, tzn. v každém bloku se provedlo 40 opakování. Vzdálenosti cíle od žluté skvrny byly mezi bloky rozděleny tak, aby v každém bloku bylo zastoupení různých vzdáleností stejně početné. Pořadí v rámci bloku bylo uspořádáno náhodně.

Každé opakování začalo prezentováním fixačního bodu, jehož vzdálenost od středu byla určena vzdáleností měřené pozice od žluté skvrny. Směr, ve kterém se nacházel fixační bod, byl určen typem podskupiny. Když pozorovatel zafixoval fixační bod, na 50 ms se na obrazovce objevila šedivá obrazovka následovaná pozadím, ve kterém se s pravděpodobností 50 % vyskytoval cíl. Cíl se vždy nacházel ve středu obrazovky. Pozadí s možným cílem bylo prezentováno na 250 ms. Pokud byl ukončen šedou obrazovkou, která tam zůstala, dokud pozorovatel nedal odpověď. Způsob odpovědi byl stejný jako u experimentu detekce cíle na žluté skvrně.

4.2.2 Výpočet mapy d'

Cílem je získat funkci, která pro libovolnou pozici na sítnici vrátí její hodnotu d' .

Požadovaná funkce má tvar $d'(x, y)$, kde (x, y) jsou souřadnice ve zrakových stupních. Střed souřadnicového systému je posunut do oblasti s nejostřejším viděním, tzn. do žluté skvrny. Někdy se o funkci $d'(x, y)$ mluví jako o d' mapě.

Výpočet funkce $d'(x, y)$ probíhá v následujících krocích. Následující algoritmus pochází od Abramse a Geislera (2016).

1. Výpočet psychometrické funkce vyjadřující vztah mezi pravděpodobností správné odpovědi u detekce cíle na žluté skvrně a kontrastem cíle. Psychometrická funkce (dále jen PF) je funkce, která dává do vztahu vlastnosti podnětu s odpověďmi pozorovatele (Klein, 2001). V tomto případě se počítá PF, která má za vstup kontrast cíle, což v tomto případě znamená kontrast Gaborova cíle, a výstupem je pravděpodobnost správné odpovědi.

Pro výpočet PF se používá vzorec, který dává do vztahu hodnotu d' a kontrast cíle (Bradley et al., 2014).

$$d'(c) = \left(\frac{c}{c_T} \right)^\beta. \quad (4.1)$$

c je kontrast cíle.

c_T je *contrast threshold*, česky *kontrastní práh*, který je standardně dán jako hodnota, kdy je d' rovna 1 (Klein, 2001).

β je parametr udávající sklon funkce.

Dosazením vztahu (4.1) do vzorce (2.3) se získá (Bradley et al., 2014)

$$P_{corr}(c; c_T, \beta) = \Phi \left(0,5 \cdot \left(\frac{c}{c_T} \right)^\beta \right). \quad (4.2)$$

Dosazením výsledků z detekce na žluté skvrně s různými kontrasty cíle do vztahu (4.2) a vypočtením neznámých parametrů použitím metody maximální věrohodnosti se získají hodnoty parametrů c_T a β .

2. Výpočet PF dávající do vztahu vzdálenost od žluté skvrny a pravděpodobnost, že na dané vzdálenosti od žluté skvrny dojde ke správné detekci cíle. Pro každý směr od žluté skvrny bylo vypočítána PF, tzn. celkově se získají čtyři PF. V každém směru je pro větší přesnost výsledku PF rozdělena na dvě funkce: (1) PF, která dává do vztahu H a vzdálenost od žluté skvrny, a (2) PF, která dává do vztahu F a vzdálenost od žluté skvrny, definice H a F viz kapitola 2.1. PF se získají využitím vztahu (2.4).

$$P_{hit}(e; d_0, e_0, \beta_e, \gamma) = \Phi\left(0,5 \cdot d_0 \cdot \left(\frac{e_0^{\beta_e}}{e^{\beta_e} + e_0^{\beta_e}}\right) - \gamma\right). \quad (4.3)$$

$$P_{false\ alarm}(e; d_0, e_0, \beta_e, \gamma) = \Phi\left(-0,5 \cdot d_0 \cdot \left(\frac{e_0^{\beta_e}}{e^{\beta_e} + e_0^{\beta_e}}\right) - \gamma\right). \quad (4.4)$$

e vzdálenost od žluté skvrny.

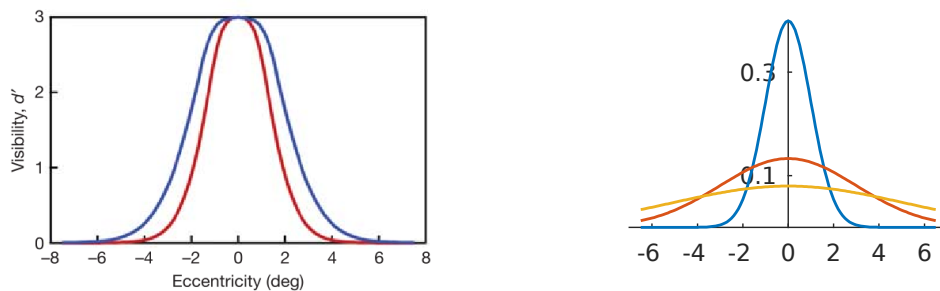
d_0 je hodnota d' na žluté skvrně.

e_0 je vzdálenost, ve které je senzitivita poloviční vzhledem k senzitivitě na žluté skvrně.

β_0 je parametr udávající sklon funkce.

Hodnota d_0 musí být nastavena už před experimentem detekce cíle na periferii, protože hodnota d_0 určuje kontrast cíle. Pro výpočet požadovaného kontrastu je použit vztah (4.2). V této práci bylo počítáno s hodnotou $d_0 = 4,5$. Výraz $e_0^{\beta_e}/(e^{\beta_e} + e_0^{\beta_e})$ udává nelineární vztah mezi d' a vzdáleností od žluté skvrny, viz obr. 10.

Dosažením výsledků z experimentu detekce cíle na periferii do vztahů (4.3) a (4.4) a použitím metody maximální věrohodnosti pro výpočet



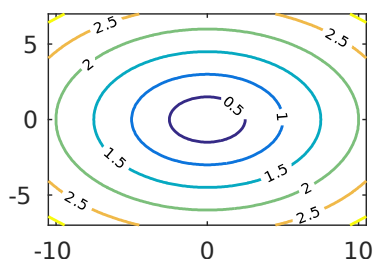
Obr. 10: Nelineárnost vztahu vzdálenosti od žluté skvrny a hodnoty d' . Vlevo je graf, který naměřili Najemnik a Geisler (2005). Graf ukazuje závislost vzdálenosti od středu (eccentricity, která je udána ve zrakových stupních) a hodnoty d' . Červená je případ, kdy pozadí má kontrast 0,05 a cíl kontrast 0,07. Modrá je pro kontrast pozadí 0,2 a kontrast cíle 0,19. Vpravo je graf funkce $a^b/(a^b + x^b)$ pro a rovno 3 a b rovno 1,5 (modrá), 2 (červená) a 5 (žlutá). Porovnáním grafu nalevo a napravo je vidět, že funkce $a^b/(a^b + x^b)$ je dobrou aproximací jevu z levého grafu. Funkce má navíc tu vlastnost, že když $a = x$, pak se rovná $1/2$

neznámých parametrů je pro každý směr získán parametr e_0 , tzn. získají se hodnoty e_N, e_D, e_L, e_R , kde e_N je hodnota e_0 pro směr nahoru, e_D je hodnota e_0 pro směr dolů, e_L je hodnota e_0 pro směr vlevo a e_R je hodnota e_0 pro směr vpravo. Parametry β_0 a γ jsou společné pro všechny směry, protože se očekává stejné chování hodnoty d' ve všech směrech.

3. Získané parametry se dosadí do konečného vzorce pro $d'(x, y)$.

$$d'(x, y) = \begin{cases} \frac{d'_0}{1 + \left(\frac{x^2}{e_R^2} + \frac{y^2}{e_N^2} \right)^{\beta_0/2}}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ \frac{d'_0}{1 + \left(\frac{x^2}{e_L^2} + \frac{y^2}{e_N^2} \right)^{\beta_0/2}}, & x < 0, y \geq 0, \\ \frac{d'_0}{1 + \left(\frac{x^2}{e_L^2} + \frac{y^2}{e_D^2} \right)^{\beta_0/2}}, & x < 0, y < 0, \\ \frac{d'_0}{1 + \left(\frac{x^2}{e_R^2} + \frac{y^2}{e_D^2} \right)^{\beta_0/2}}, & x \geq 0, y < 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Ve vzorci byla znovu využita funkce $a^b/(a^b+x^b)$ z obr. 10. Část výrazu (4.5) tvoří funkce $\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2}$, což lze přibližně nazvat jako relativní vzdálenost



Obr. 11: Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}$ s hodnotami parametrů $a=5$ a $b=3$. Vzdálenost od středu je škálována způsobem, že když se bod nachází na elipse, jeho vzdálenost je rovna 1.

bodu od středu elipsy, který má délku hlavní poloosy a a délku vedlejší poloosy b , viz obr. 11.

4.2.3 Výpočet modifikované mapy d'

Poškození zraku lze na mapě d' simulovat funkcí $\alpha(x, y)$. Vstup funkce $\alpha(x, y)$ je stejný jako pro funkci $d'(x, y)$. Výstupní hodnota funkce $\alpha(x, y)$ leží v intervalu $[0; 1]$ a udává míru ztráty senzitivity na pozici (x, y) . 0 znamená úplná ztrátu a 1 zachování v plném rozsahu.

Nyní bude odvozen vzorec pro mapu d' pro případ, kdy je modifikována funkcí $\alpha(x, y)$. Odvození pochází od Děchtěrenka a Geislera (2016).

Mějme rovnici dávajíc do vztahu kontrast cíle a kontrast šumu.

$$c_T^2(x, y) = K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + K_2(x, y). \quad (4.6)$$

c_T je kontrast cíle, tzn. kontrast Gaborova cíle.

c_B je kontrast šumu, tzn. kontrast šumu 1/f.

K_1 a K_2 jsou parametry.

Vložení rovnice (4.6) do vzorce (4.5) vyjde

$$d'(x, y) = \left(\frac{c}{\sqrt{K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + K_2(x, y)}} \right)^\beta. \quad (4.7)$$

Aby se mohla použít rovnice (4.7) pro výpočet d' mapy, je potřeba znát konstanty K_1 a K_2 . Před výpočtem konstant se nejprve získá d' mapa pro dvě situace s odlišnými kontrasty šumu, (1) $c_B(x, y) = 0.1$, situace se označí H , a (2) $c_B(x, y) = 0$, situace se označí L . Je předpokládáno, že kontrast šumu je na všech pozicích stejný. Použitím vztahu (4.7) na obě situace vyjde

$$d'_H(x, y) = \left(\frac{c_H}{\sqrt{K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + K_2(x, y)}} \right)^\beta \text{ a} \quad (4.8)$$

$$d'_L(x, y) = \left(\frac{c_L}{\sqrt{K_2(x, y)}} \right)^\beta. \quad (4.9)$$

d'_H je mapa d' pro situaci H .

d'_L je mapa d' pro situaci L .

c_H je kontrast cíle pro situaci H .

c_L je kontrast cíle pro situaci L .

Je předpokládáno, že parametr β má v obou situacích stejnou hodnotu.

Z výrazu (4.9) se vyjádří konstanta K_2

$$K_2(x, y) = \frac{c_L^2}{d'_L(x, y)^{2/\beta}}.$$

Konstanta K_2 se dosadí do vztahu (4.8)

$$d'_H(x, y) = \left(\frac{c_H}{\sqrt{K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + \frac{c_L^2}{d'_L(x, y)^{2/\beta}}}} \right)^\beta,$$

$$K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + \frac{c_L^2}{d'_L(x, y)^{2/\beta}} = \frac{c_H^2}{d'_H(x, y)^{2/\beta}}.$$

Použitím předpokladu pro parametr β vyjde

$$K_1(x, y) = \frac{1}{c_B} \cdot \left(\frac{c_H^2}{d'_H(x, y)^{2/\beta}} - \frac{c_L^2}{d'_L(x, y)^{2/\beta}} \right).$$

Nyní se použije rovnice (4.6) modifikovaná funkcí $\alpha(x, y)$

$$\alpha^2(x, y) \cdot c_T^2(x, y) = \alpha^2(x, y) \cdot K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + K_2(x, y).$$

Po úpravě

$$c_T^2(x, y) = K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + \frac{K_2(x, y)}{\alpha^2(x, y)}.$$

Dosazením do vzorce (4.8) vyjde konečný vzorec

$$d'(x, y) = \left(\frac{c_H}{K_1(x, y) \cdot c_B^2(x, y) + \frac{K_2(x, y)}{\alpha^2(x, y)}} \right).$$

4.2.4 Výsledky

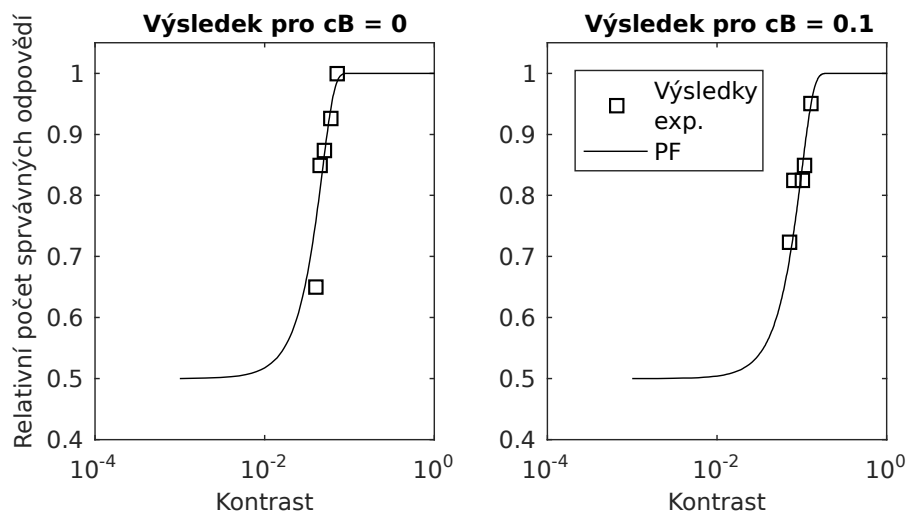
Výsledky z experimentu detekce cíle na žluté skvrně z kapitoly 4.2.1.1 spolu s grafem funkce (4.2) jsou prezentovány na obr. 12. Parametry pro PF (4.2) vyšly následovně:

$$c_T = 0,0694 \text{ pro } c_B = 0,1,$$

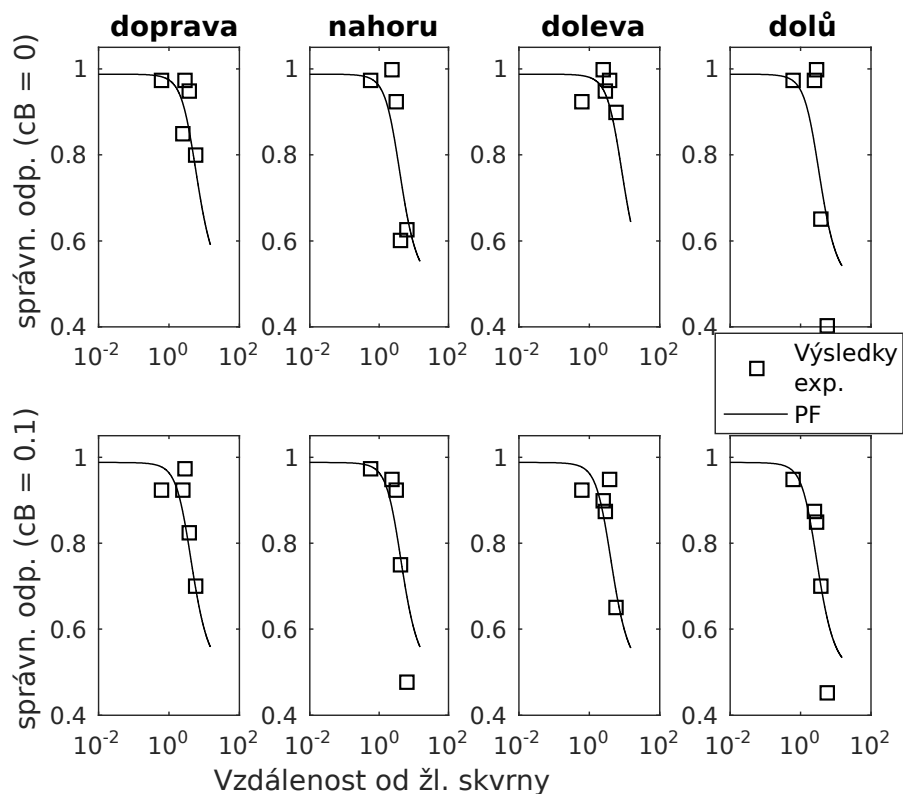
$$c_T = 0,0359 \text{ pro } c_B = 0 \text{ a}$$

$$\beta = 1,9029.$$

Výsledky z experimentu detekce cíle na periferiích z kapitoly 4.2.1.2 spolu s grafem funkce (4.3) jsou ukázány na obr. 13. Použití PF (4.3), která vrací *hit rate*,

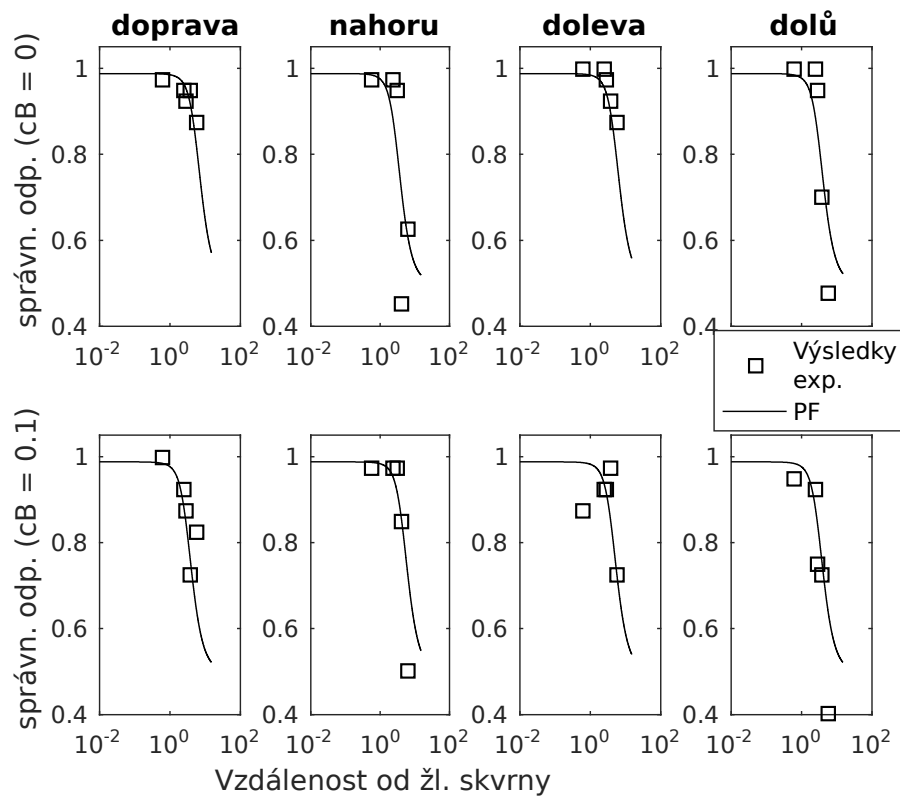


Obr. 12: Výsledky z detekce cíle na žluté skvrně. Vlevo je ukázán výsledek pro $c_B = 0$ a vpravo pro $c_B = 0,1$. Výsledky z experimentů pro jednotlivé kontrasty cíle jsou vyznačeny čtverečky. U obou případů se výsledky z detekcí cílů s různými kontrasty dobře rozprostřely po rovině, což je důležité pro výpočet PF. U $c_B = 0,1$ vznikl menší shluk z prostředních tří kontrastů cíl, ale shluk neměl výrazný vliv na výslednou PF. Je vidět, že PF pro obě situace dobře interpoluje výsledky z experimentu.

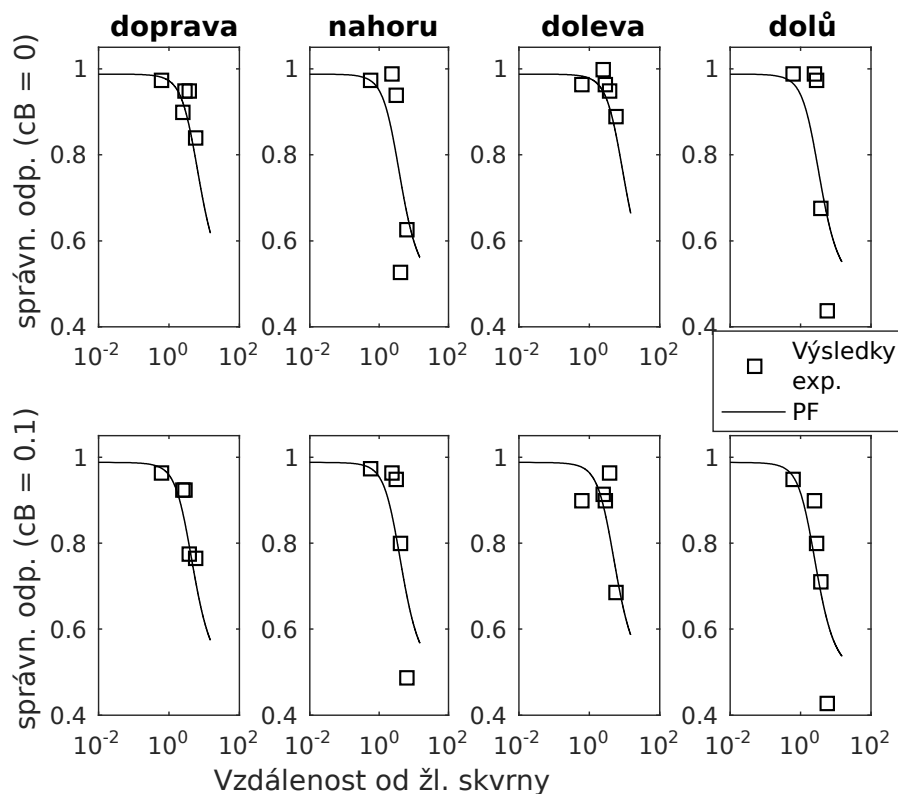


Obr. 13: Výsledky detekce cíle na periferiích. Na ose x je vzdálenost od žluté skvrny a na ose y je pravděpodobnost detekce cíle. Horní řada grafů jsou výsledky detekce pro $c_B = 0$ a dolní řada pro $c_B = 0,1$. Výsledky měření pro jednotlivé vzdálenosti od žluté skvrny jsou prezentovány čtverečky. Na grafech je vidět, že u některých případů došlo k velikému shlukování. Přesněji případy doprava, doleva a dolů u detekce pro $c_B = 0$ a případ doleva u detekce pro $c_B = 0,1$. Dále u některých výsledků nedošlo k dobré interpolaci výsledků skrze PF.

pro porovnání s výsledky experimentu, které jsou dány v pravděpodobnosti správné odpovědi, nevadí, protože chování PF pro *hit rate* se výrazně neliší od PF pro celkovou pravděpodobnost správné odpovědi. Na grafech z obr. 13 je vidět, že



Obr. 14: Výsledky detekce cíle na periférii z opravného experimentu. V porovnání s grafy z obr. 13 je vidět, že jak výsledky z experimentu, tak i vypočtené PF vycházejí lépe. I v tomto případě se ukázaly neočekávané výsledky u případu doleva v $c_B = 0,1$, kde u výsledků z nejbližších čtyřech pozicí od žluté skvrny neintuitivně stoupá pravděpodobnost správné odpovědi se zvětšující se vzdáleností.



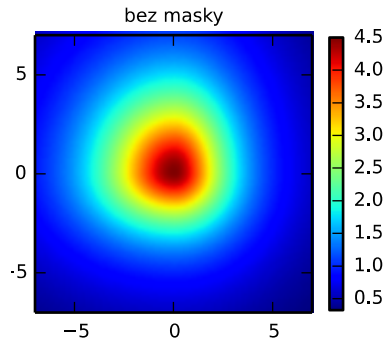
Obr. 15: Výsledky z obou experimentů detekce cíle na periferii dohromady. V porovnání s grafy z obr. 14 je vidět, že spojením výsledků ze dvou experimentů se nezískaly lepší výsledky. Naopak došlo u některých případech ke zhoršení. Např. u případu doleva u $c_B = 0$ se výsledky z různých pozic k sobě více přiblížily.

nedošlo k dobré interpolaci výsledků skrze PF, protože došlo k výraznému shlukování výsledků z pozic s různými vzdálenostmi od žluté skvrny. Proto byl experiment detekce cíle na periferii znovu celý proveden. Výsledky z opravného experimentu jsou na obr. 14. Na obr. 15 jsou výsledky z obou experimentů detekce cíle na periférii. Porovnáním grafů na obr. 13, 14 a 15 vychází, že nejlepších výsledků dosahuje druhé měření detekce cíle na periferii bez výsledku z prvního měření. V následujících částech práce byly uvažovány pouze výsledky ze druhého experimentu.

Parametry pro PF (4.3) a (4.4) vyšly,:

$$e_N = 3,88, e_D = 2,58, e_L = 3,52 \text{ a } e_R = 2,60 \text{ pro } c_B = 0,1,$$

$$e_N = 2,47, e_D = 2,67, e_L = 4,24 \text{ a } e_R = 4,7 \text{ pro } c_B = 0,1 \text{ a}$$



Obr. 16: Mapa d' získaná od pozorovatele JA. Souřadnice jsou ve zrakových stupních a hodnota grafu udává hodnotu d' na dané pozici.

$$\beta = 2,1106 \text{ a } \gamma = 1,0445 \cdot 10^{-4}.$$

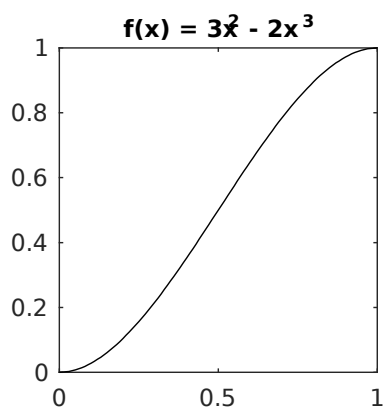
Mapa d' pro pozorovatele JA je na obr. 16. Mapa d' má tvar kruhu, který je mírně protáhlý doleva a nahoru. To, že je mapa d' tímto způsobem protažena, je nečekané, protože předešlé práce došli k závěru, že mapa d' je buď více protažena dolů než nahoru a je více protažena v horizontální než ve vertikální rovině (Michel & Geisler, 2009; Najemnik & Geisler, 2005; Paulun et al., 2015). V této práci se nepotvrdilo pozorování Najemnika a Geilsera (2005), kteří u mapy d' pozorovali horizontální protažení spolu s protažením směrem dolů.

4.3 Vyhledávání cíle

Při experimentech byla zkoumána chování v situacích, kdy je zrakové pole poškozené. Simulovaná poškození zraku byla věkem podmíněná degenerace žluté skvrny, glaukom s otevřeným úhlem a homonymous hemianopsia, bližší vysvětlení chorob viz kapitola 1.3. Výsledky měření z experimentů byly porovnány s chováním ELM. Pro simulaci poškozeného zraku byla použita maska, která se v reálném čase prezentovala pozorovateli na monitoru. Stejně masky byly použity i u ELM.

4.3.1 Degenerativní maska

Degenerativní maska byla definována funkcí $\alpha(x, y)$ z kapitoly 4.2.3. Funkce dává míru degenerace na souřadnicích (x, y) , hodnota 0 je plná ztráta zraku a hodnota 1 je zachování zraku v plném rozsahu. Souřadnicový systém je centrován na



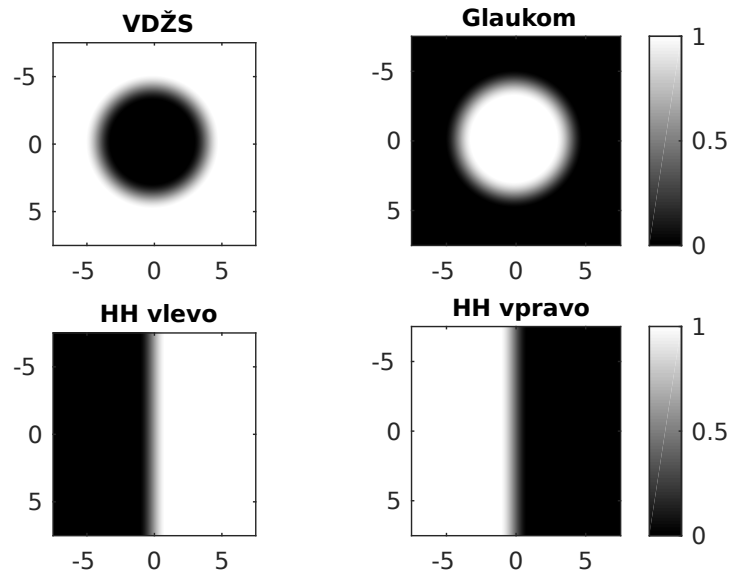
Obr. 17: Graf funkce $f(x) = 3x^2 - 2x^3$.

žlutou skvrnou.

Věkem podmíněná degenerace žluté skvrny (dále jen VDŽS) způsobuje ztrátu zraku na žluté skvrně a je funkcí $\alpha(x, y)$ simulována snižováním míry zachování zraku se zvětšující se vzdáleností od počátku. Pro jednoduchost se simulovala situace, kdy ztráta zraku na žluté skvrně má kruhový charakter. Funkce $\alpha_{VDŽS}(x, y)$ je určena dvěma parametry m a v , které udávají poloměr kružnic se středem v počátku. Pokud se souřadnice (x, y) nachází ve vnější části kružnice v , funkce $\alpha_{VDŽS}(x, y)$ vrací hodnotu 1, tzn. vně kružnice v je zrak zachován v plném rozsahu. Pokud se souřadnice (x, y) dostane dovnitř kružnice m , funkce $\alpha_{VDŽS}(x, y)$ vrací hodnotu 0, tzv. uvnitř kružnice m dochází k úplné ztrátě zraku. Pro přechod hodnot v mezikruží byla použita funkce *smoothstep*, viz obr. 17. Výsledná funkce $\alpha_{VDŽS}(x, y)$ je dána rovnicí:

$$\alpha_{VDŽS}(x, y; m, v) = \begin{cases} 1, & |(x, y)| \geq v, \\ 3z^2 - 2z^3, & z = \frac{|(x, y)| - m}{v - m}, \\ 0, & |(x, y)| \leq m. \end{cases}$$

Glaukom s otevřeným úhlem (dále jen glaukom) způsobuje ztrátu zraku na periférii, tzv. tunelové vidění. Ztráta zraku na periférii je funkcí $\alpha(x, y)$ simulována snižováním míry zachování zraku se zvyšující se vzdáleností souřadnic (x, y) od počátku. Pro jednoduchost byla simulována situace, kdy oblast se zachovalým

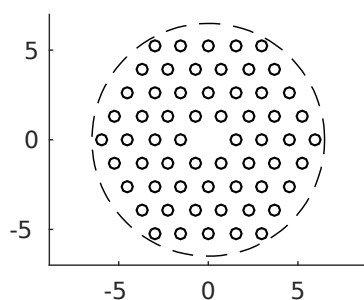


Obr. 18: Ukázka degenerativních masek. Vzdálenosti jsou ve stupních.

zrakem má kruhový charakter. Funkce $\alpha_{glaukom}(x, y)$ funguje na podobném principu jako funkce $\alpha_{VDŽS}(x, y)$ a je definována stejnými parametry. Vnější oblast kružnice v vyznačuje část s úplnou ztrátou zraku a vnitřní oblast kružnice m vyznačuje část se zachovalým zrakem. Pro přechod hodnot v mezikruží je znovu použita funkce *smoothstep*. Funkce $\alpha_{glaukom}(x, y)$ lze snadno vyjádřit využitím funkce $\alpha_{VDŽS}(x, y)$.

$$\alpha_{glaukom}(x, y; m, v) = 1 - \alpha_{VDŽS}(x, y; m, v).$$

Homonymous hemianopsia (dále jen HH) způsobuje ztrátu zraku na jedné polovině zrakového pole. Ke ztrátě zraku může dojít buď na levé, nebo na pravé straně. Ztráta zraku je funkcí $\alpha(x, y)$ simulována snižováním míry zachování zraku se zvyšující se hodnotou x , pokud je simulována ztráta na pravé straně. Ztráta zraku je funkcí $\alpha(x, y)$ simulována snižováním míry zachování zraku se snižující se hodnotou x , pokud je simulována ztráta na levé straně. Pro plynulý přechod mezi oblastmi s úplnou ztrátou zraku a oblastmi se zachovalým zrakem byla použita funkce *smoothstep*. Přechod hodnot vždy začal ve vzdálenosti 1° od vertikální osy procházející počátkem. Výsledný tvar rovnic je:



Obr. 19: Možné pozice pro cíl. Pozice jsou ve zrakových stupních. Čárkovaná kružnice vyznačuje oblast se šumem 1/f.

$$\alpha_{HH \text{ vpravo}}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ 3z^2 - 2z^3, & z = \frac{x+1}{2}, \\ 0, & x \leq -1. \end{cases}$$

$$\alpha_{HH \text{ vlevo}}(x, y) = 1 - \alpha_{HH \text{ vpravo}}(x, y).$$

Příklady masek jsou ukázány na obr. 18.

4.3.2 Experiment

V experimentu se vyhledával Gaborův cíl v šumu 1/f. Celkově bylo 60 lokací, kde se cíl mohl naházet, viz obr. 19. Ve středu obrazovky se cíl nemohl objevit.

Vyhledávání bylo provedeno s následujícími modifikacemi zraku.:

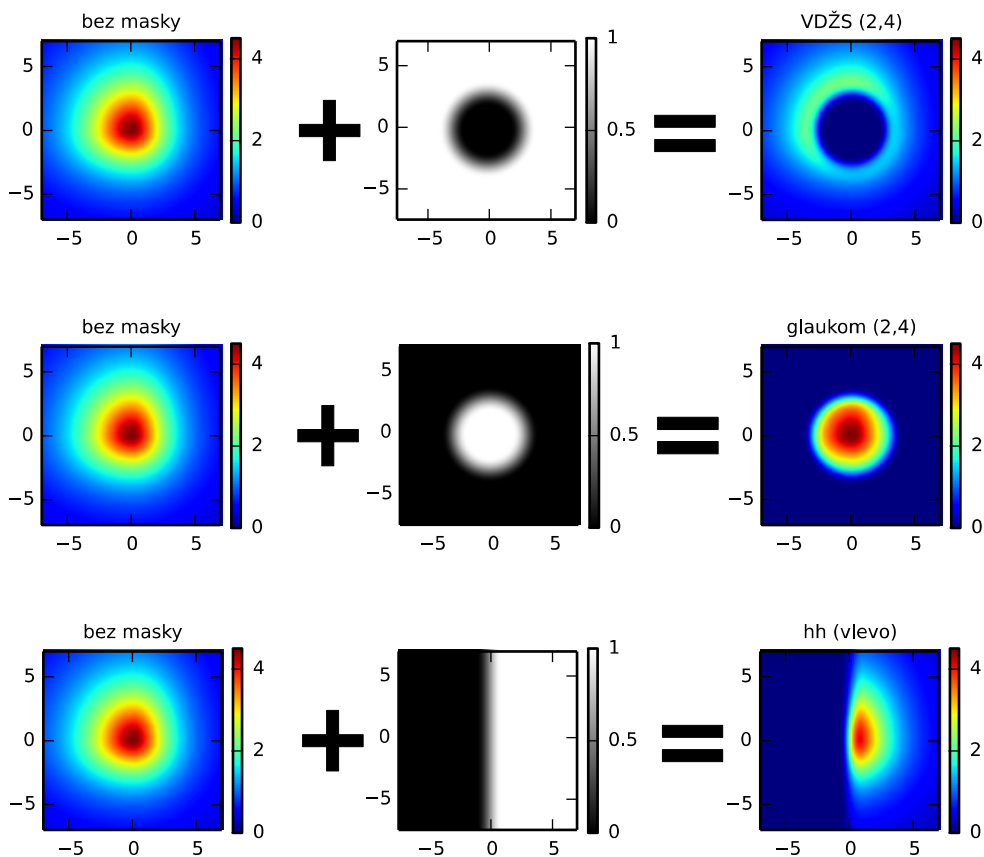
- Bez poškození zraku.
- Čtyři situace s VDŽS,:(1) $m=0$ a $v=2$, (2) $m=1$ a $v=3$, (3) $m=2$ a $v=4$ a (4) $m=3$ a $v=5$.
- Čtyři situace s glaukomem,:(1) $m=1$ a $v=3$, (2) $m=2$ a $v=4$, (3) $m=3$ a $v=5$ a (4) $m=4$ a $v=6$.
- Dvě situace s HH,:(1) vlevo a (2) vpravo.

U každé situace bylo provedeno 480 opakování, což znamenalo 8 vyhledávání pro každou možnou pozici cíle. Každá situace byla rozdělena do 10 bloků, tzn. 48 opakování na jeden blok. Všechna opakování v rámci jedné situace byly náhodně

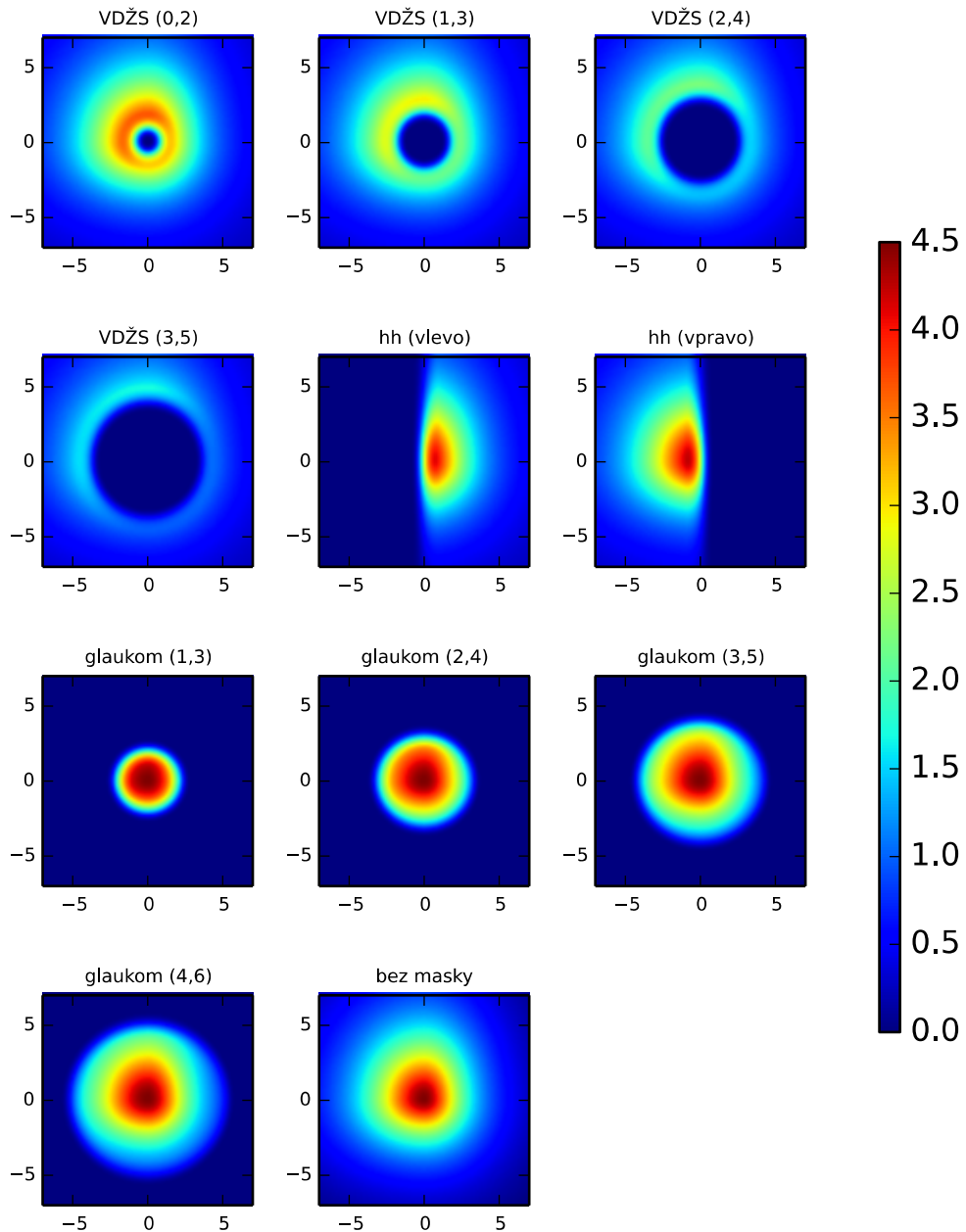
rozmístěny mezi bloky.

Každé opakování začalo zobrazením šedivého pozadí s fixačním bodem ve středu obrazovky na 500 ms. Následně se na 50 ms zobrazilo pozadí s růžovým šumem bez cíle. Po 50 ms byl do pozadí zobrazen cíl. Když pozorovatel došel k závěru, že našel cíl, měl za úkol ihned zmáčknout mezerník. Odpověď na umístění cíle se dala zafixováním místa, kde si pozorovatel myslel, že se tam nachází cíl, a opětovným zmáčknutím mezerníku. Při odpovědi na pozici cíle byl zároveň na obrazovce promítán fixační bod, který určoval aktuální fixaci pozorovatele. Nakonec se na 1 s kružnicí o průměru 1° označila pozice, kde se nacházel cíl.

Při situacích se simulovaným poškozením zraku byla pozorovateli promítána degenerativní maska, která byla centrován na aktuální fixaci. Oblast s nulovým



Obr. 20: Tvorba degenerované mapy d' . VDŽS a glaukom jsou vykresleny pro parametry $m=2$ a $v=4$.



Obr. 21: Grafy všech map d' , se kterými byl ELM simulován. Nadpisy u VDŽS a glaukomu udávají navíc hodnoty parametrů m a v .

viděním měla šedou barvu a oblast se zachovalým zrakem zůstala beze změny. Při druhé části pokusu, kdy se dávala odpověď na pozici cíle, byla degenerativní maska odstraněna, aby bylo pozorovateli umožněno provést přesnou odpověď.

4.3.3 Nastavení EML

U EML byly simulovány stejné situace jako u pozorovatele JA, tzn. jedno vyhledávání bez poškození zraku, čtyři vyhledávání s VDŽS, čtyři vyhledávání s glaukomem a dvě vyhledávání s HH, viz. kapitola 4.3.2. Degenerace zrakového pole byla simulována degenerací mapy d' použitím postupu z kapitoly 4.2.3, viz obr. 20. Použité mapy d' jsou ukázány na obr. 21.

4.3.4 Statistika dat

Byly zjišťovány dvě statistiky (1) distribuce fixací v zorném poli a (2) distribuce sakád vzhledem k jejich délce a směru. Při každém vyhledávání se statistika pohybu očí začala měřit po zmizení počátečního fixačního bodu a měření bylo ukončeno po prvním zmáčknutí mezerníku. Do statisticky distribuci fixací se nezapočítávaly první fixace.

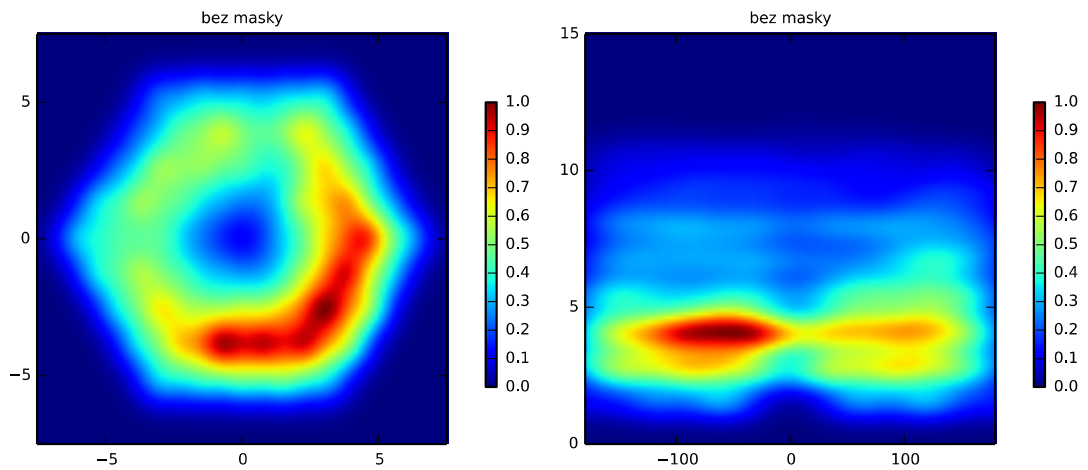
Distribuce fixací a sakád byla změřena použitím jádrového odhadu hustoty (Wand & Jones, 1995). Za jádrovou funkci se vzala hustota normálního rozdělení. U výsledků experimentu vyhledávání cíle u pozorovatele bylo použito vyhlazovací okno normované kovariancí (dále jen faktor) s hodnotou 0,06. U výsledků z ELM byl faktor nastaven na 0,23. Faktor je u pozorovatele jemnější, protože naměřené výsledky u pozorovatele byly více rozprostřeny v prostoru a umožňovaly jemnější odhad. U ELM bylo více potřeba interpolovat výsledky, proto se použil větší faktor.

Osy grafů u distribuce fixací jsou ve zrakových stupních a hodnotou je hustota naškálovaná do intervalu $[0; 1]$. Osa x u distribuce sakád udává úhel sakády. Sakáda směřující doprava má hodnotu 0° , směřující nahoru hodnotu 90° , směřující doprava hodnotu $180^\circ/-180^\circ$ a směřující dolů hodnotu -90° . Osa y udává délku sakády ve zrakových stupních. Hodnota grafu je hustota škálovaná do intervalu $[0; 1]$.

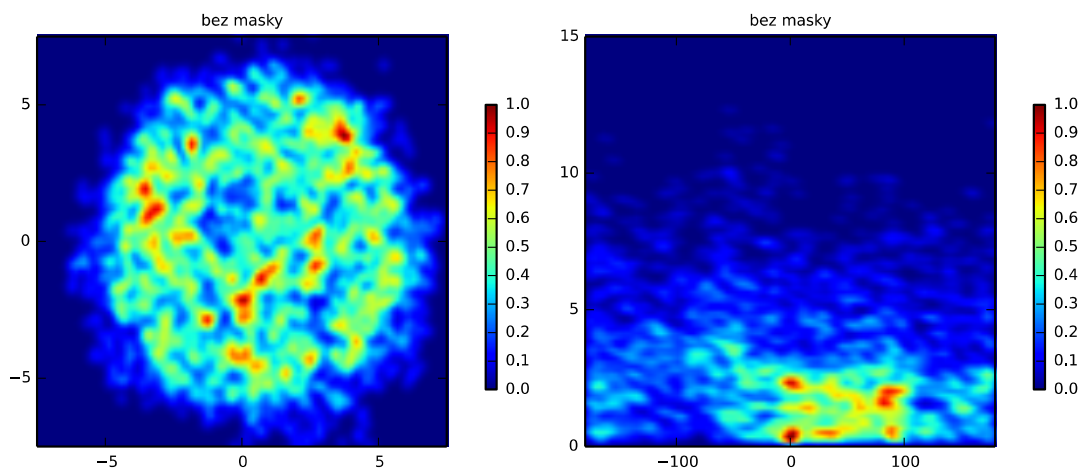
4.3.5 Výsledky

4.3.5.1 Zdravý zrak

Výsledky vyhledávání u pozorovatele JA jsou na obr. 23. U výsledků měření vychází, že fixace byly rovnoměrně rozprostřeny po prohledávaném prostoru a žádná oblast nebyla preferována vůči jiným oblastem. Tento výsledek je v kontrastu s měřeními od Najemníka a Geislera (2008), viz obr. 6 str. 24. Ti pozorovali distribuci fixací tvaru torusu s větší hustotou v oblastech nad a pod středem prohledávané



Obr. 22: Distribuce fixací a sakád u ELM bez simulované degenerace. Vpravo je graf distribuce fixací a vlevo je graf distribuce sakád.



Obr. 23: Distribuce fixací a sakád u pozorovatele JA bez simulované degenerace. Vpravo je graf distribuce fixací a vlevo je graf distribuce sakád.

oblasti. Výsledek z této práce se více blíží měřením provedeným Paulunem a spol. (2015), kteří také získali rovnoměrné rozložení distribuce fixací. Pouze pozorovali mírnou preferenci pro fixace v oblasti nad středem prohledávané oblasti.

Rozložení sakád u pozorovatele JA vyšly se silnou preferencí směru nahoru a doprava. Celkově byly sakády, jejichž směr byl mezi 0° a 90° , více preferovány oproti ostatním směrům. Ve většině případů nepřekročila délka sakád délku 5° .

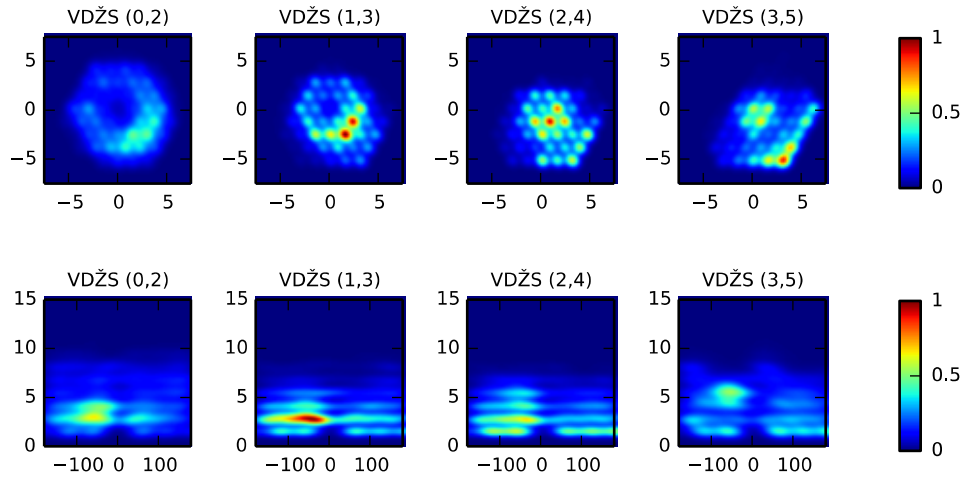
Výsledek je v některých ohledech jiný od výsledku u Najemníka a Geislera (2008), kteří pozorovali preferenci sakád v horizontálním směru. V této práci byla naměřena větší preference doprava v porovnání se směrem doleva. Najemník a Geisler také nepozorovali takovou silnou preferenci pro směr nahoru, i když směr nahoru měl u nich větší zastoupení s porovnání se směrem dolů. Výsledky z této práce jsou s výsledky od Najemníka a Geislera ve shodě s pozorováními, že ve většině případů délka sakád nepřekročila délku 5° a že nebyly pozorovány krátké sakády směrem dolů. Výsledky Pauluna a spol. se více blíží výsledkům Najemníka a Geislera, tj. preference horizontálních sakád a u vertikálních sakád je více preferován směr nahoru.

Výsledky z běhu ELM bez degenerativní masky jsou ukázány na obr. 22. Distribuce fixací má tvar torusu s preferencí v oblasti vpravo dole od středu prohledávaného pole, což je jiný výsledek, než byl pozorován u pozorovatele JA. Tvar distribuce fixací je ve shodě s výsledky Najemníka a Geislera, viz obr. 7, avšak ti u svého modelu pozorovali preferenci fixací nad a pod středem pozorované oblasti. Stejný tvar distribuce byl získán i Paulunem a spol, kteří ale nepozorovali větší preferenci určité části torusu.

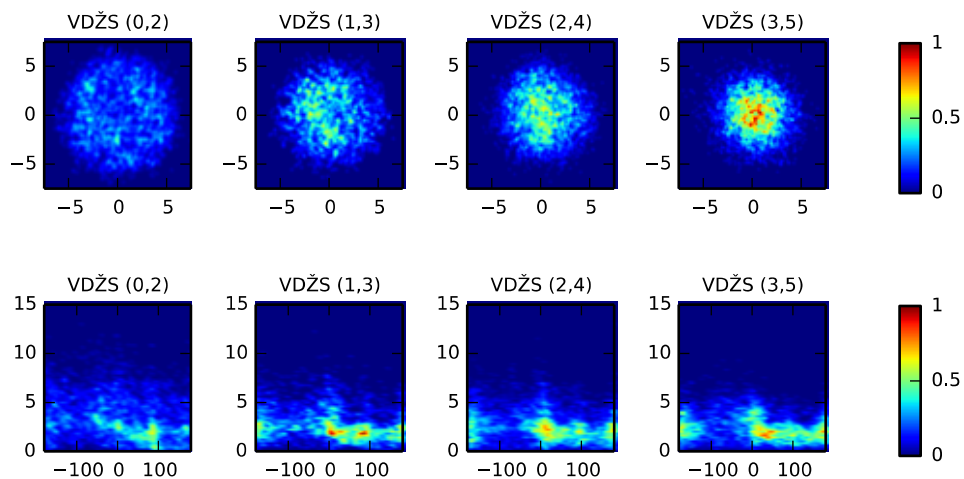
Sakády u ELM byly naměřeny se silnou preferencí směru dolů, což je v kontrastu s výsledky u pozorovatele JA, kde byla preference směru doprava a nahoru. ELM preferoval sakády o délce 4° , jež nebyly příliš pozorovány u pozorovatele JA. Porovnání distribuce sakád u ELM s výsledky od Najemníka a Geislera jsou v kontrastu, protože u jejich modlu byla zjištěna preference sakád v horizontálním směru oproti vertikálnímu směru, a v této práci byla zjištěna opačná preference. Podobnou preferenci pro směr sakád jako u Najemníka a Geislera pozorovali Paulun a spol. Výsledky této práce jsou s výsledky Najemníka a Geislera ve shodě v tom, že model preferoval delší sakády v porovnání s lidským pozorovatelem.

4.3.5.2 VDŽS

Výsledky měření od pozorovatele JA jsou na obr. 25. U distribucí fixací je pozorovatelné, že se zvyšující se velikostí postižené oblasti zraku roste preference provádět fixace ve středu prohledávaného pole. U distribucí sakád je pozorovatelná změna preferencí u směru sakád od směru nahoru do horizontálních směrů. Zajímavostí je, že distribuce sakád u ($m=3, v=5$) je podobná distribuci sakád, kterou



Obr. 24: Distribuce fixací a sakád u ELM se simulovanou věkem podmíněnou degenerací žluté skvrny (VDŽS). Nahoře jsou distribuce fixací a dole jsou distribuce sakád. Hodnoty v závorkách značí hodnoty parametrů m a v , (m, v) .



Obr. 25: Distribuce fixací a sakád u pozorovatele JA se simulovanou věkem podmíněnou degenerací žluté skvrny (VDŽS). Nahoře jsou distribuce fixací a dole jsou distribuce sakád. Hodnoty v závorkách značí hodnoty parametrů m a v , (m, v) .

pozorovali Paulun a spol. (2015). U distribucí sakád není pozorována výrazná změna preferencí délky sakád.

Výsledky vyhledávání u ELM jsou prezentovány na obr. 24. U distribucí fixací je pozorovatelný trend provádět fixace ve středu pole se zvětšující se velikostí

poškození zraku. U $(m=2, v=4)$ a u $(m=3, v=5)$ se následně preference přesouvá do oblasti vpravo dole. V porovnání s pozorovatelem JA je ELM ve shodě v preferenci provádět fixace uprostřed pole se zvětšujícím se poškozením zraku. Na druhou stranu trend provádět fixace vpravo dole u $(m=3, v=5)$ nebyl u pozorovatele JA pozorován.

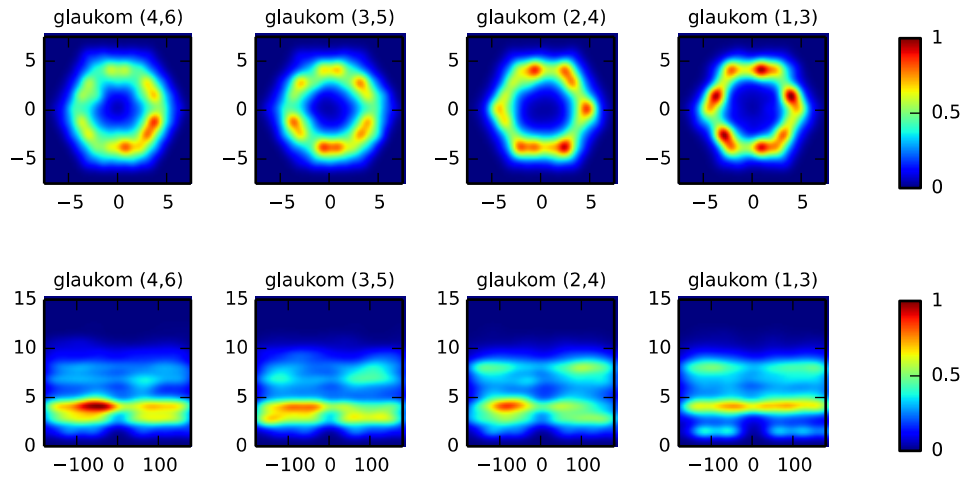
U distribucí sakád prováděných ELM je pozorovatelný trend provádět delší sakády v porovnání s $(m=0, v=2)$. Se zvětšujícím se poškozením zraku nejprve dochází k většímu rozprostření směru sakád, u $(m=2, v=4)$ a $(m=3, v=5)$, a následně návrat k preferenci k sakádám směrem dolů. Přetrvávající preference pro sakády směrem dolů není ve shodě s výsledky u pozorovatele JA, který ani v jednom případě nepreferoval sakády směrem dolů.

4.3.5.3 Glaukom

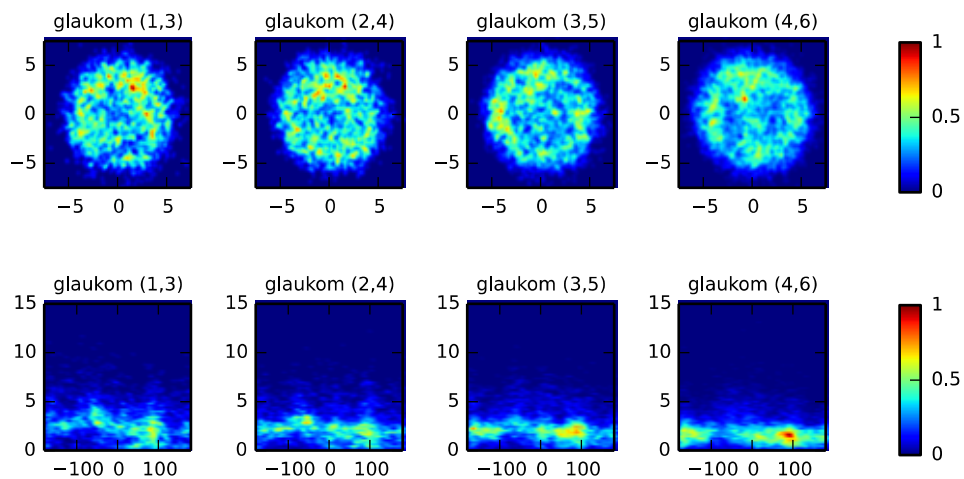
Výsledky vyhledávání u pozorovatele JA se simulovaným glaukomem jsou na obr. 27. U distribucích fixací je mírný trend rovnoměrnějšího rozložení sakád se zmenšující se oblastí viditelnosti. U sakád je vidět trend, že se zmenšující se oblastí viditelnosti jsou směry sakád více rozloženy do všech směrů. U případu s nejmenším viděním, tj. u $(m=1, v=3)$, je kromě oblastí nahoru a dolů pozorovatelné rovnoměrné rozložení sakád do všech směrů. Z hlediska délky sakád dochází k podobnému trendu, tj. k většímu rozložení mezi velikostmi 0° a 4° . Dále je pozorovatelný trend provádět méně častěji sakády delší než 4° a častěji provádět krátké sakády. U distribucích sakád se simulovaným glaukomem je přetrvávající malá četnost sakád směrem dolů.

Výsledky vyhledávání u ELM se simulovaným glaukomem jsou na obr. 26. U distribucí fixací je pozorovatelný silný trend provádět fixace na okrajích vyhledávaného pole se zvětšujícím se poškozením zraku, což je v kontrastu s rozložením distribucí fixací u pozorovatele JA, kde byl trend směrem k rovnoměrnějšímu rozložení fixací v prohledávaném prostoru.

U distribuce sakád prováděných ELM vyšlo, že prováděné sakády jsou více rozloženy jak ve směrech, tak délkách se zvětšujícím se poškozením zraku. Stále však přetrvává preference sakád mezi délkou 4° až 5° . Rovnoměrnější rozložení sakád se zhoršujícím se zrakem je ve shodě s výsledky u pozorovatele JA, ale u pozorovatele stále převažovaly sakády do délky 4° , což je v kontrastu s ELM, kde

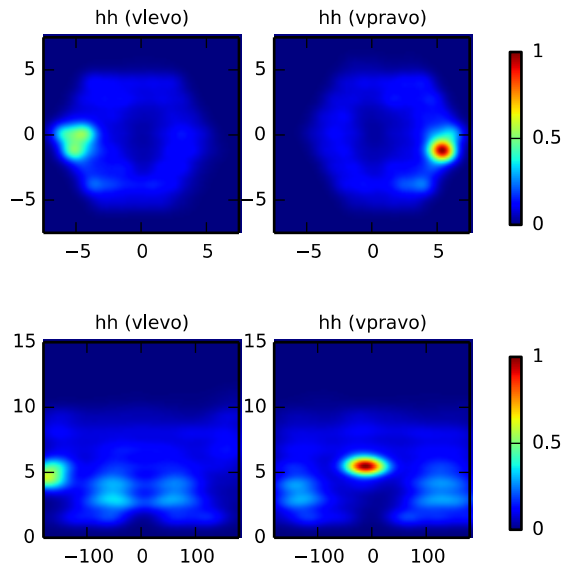


Obr. 26: Distribuce fixací a sakád u ELM se simulovaným glaukomem. Nahoře jsou distribuce fixací a dole jsou distribuce sakád. Hodnoty v závorkách značí hodnoty parametrů m a v , (m, v) .

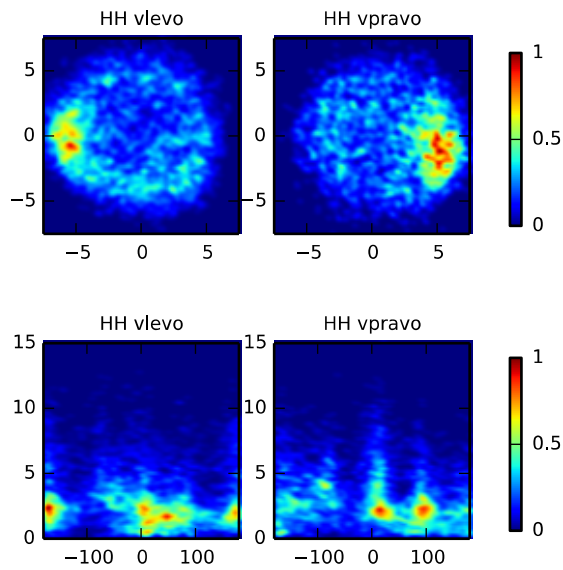


Obr. 27: Distribuce fixací a sakád u pozorovatele JA se simulovaným glaukomem. Nahoře jsou distribuce fixací a dole jsou distribuce sakád. Hodnoty v závorkách značí hodnoty parametrů m a v , (m, v) .

se frekvence použití sakád delších než 5° zvětšovala se zhoršujícím se viděním. Celkově je změna výběru sakád u ELM a pozorovatele JA odlišná. ELM více preferoval delší sakády a pozorovatel více preferoval kratší sakády se zhoršujícím se viděním.



Obr. 28: Distribuce fixací a sakád u ELM se simulovanou homonymous hemianopsia. Nahoře jsou distribuce fixací a dole jsou distribuce sakád.



Obr. 29: Distribuce fixací a sakád u pozorovatele JA se simulovanou homonymous hemianopsia. Nahoře jsou distribuce fixací a dole jsou distribuce sakád.

4.3.5.4 Homonymous hemianopsia

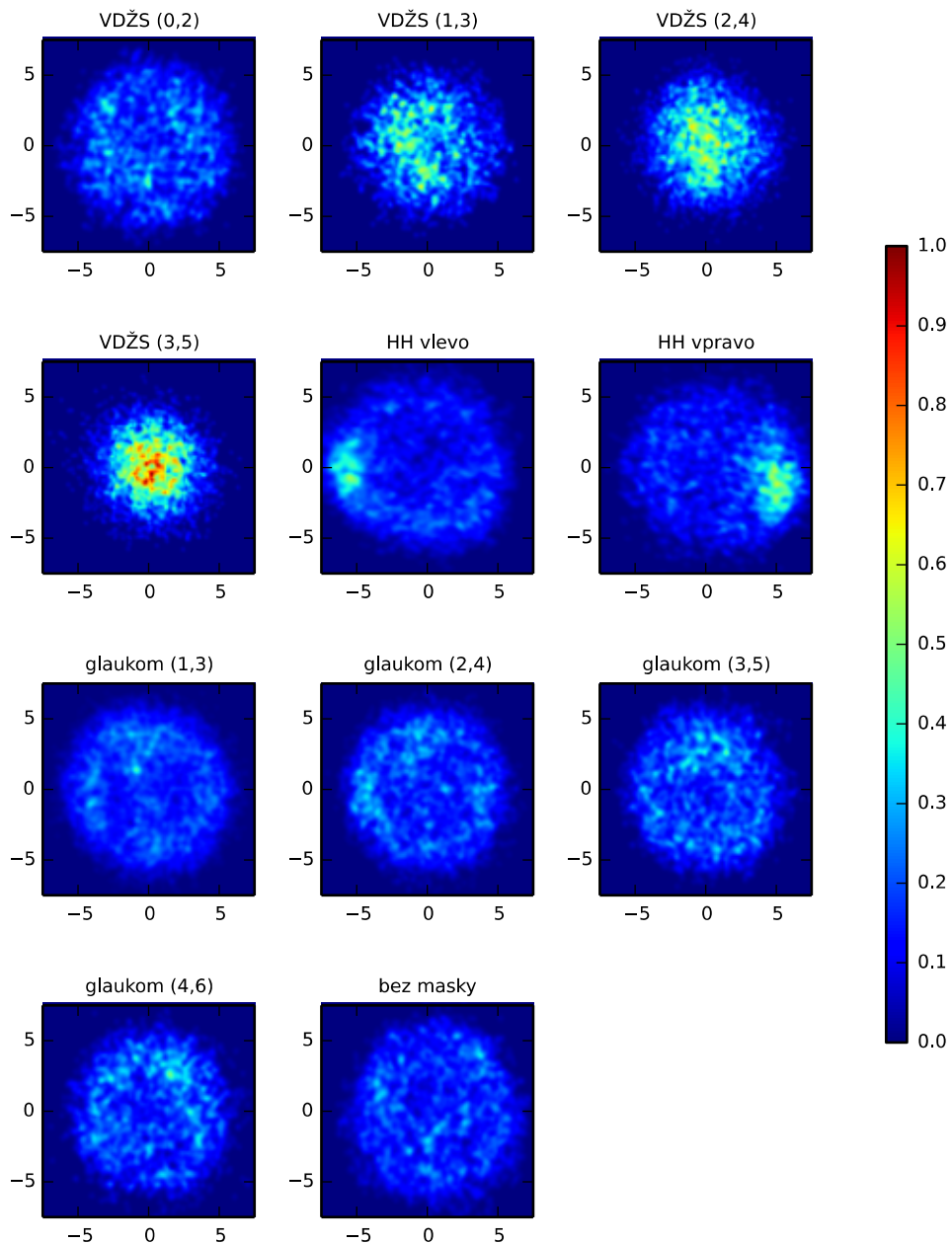
Výsledky vyhledávání u pozorovatele JA jsou na obr. 29. U distribuce fixací u HH

vlevo je značná preference provádět fixace v levé oblasti prohledávaného pole. U HH vpravo je značná preference provádět fixace v pravé oblasti. U distribuce sakád u HH vlevo je preference horizontálních sakád. Z hlediska délky sakád u HH vlevo není výrazný posun chování v porovnání s vyhledáváním se zdravým zrakem. U distribuce sakád u HH vpravo je preference směru sakád nahoru a vpravo, což není výrazná změna od distribuce sakád u vyhledávání bez poškození zraku. Z hlediska délky sakád u HH vpravo je menší nárůst počtu sakád delších než 4° ve směru nahoru a doprava v porovnání se zdravým zrakem.

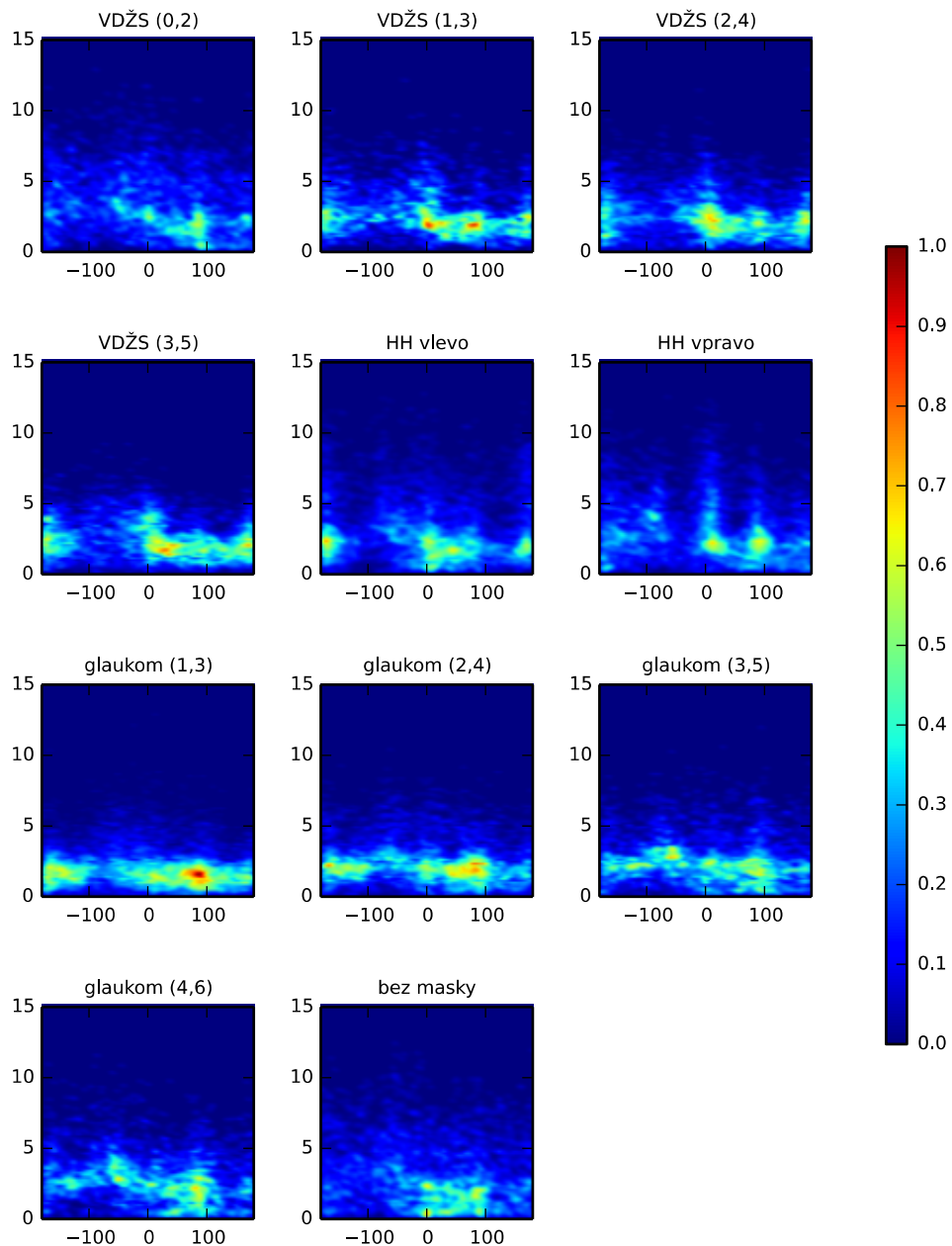
Výsledky vyhledávání u ELM se simulovanou HH jsou na obr. 28. Distribuce fixací ukázala silnou podobnost s výsledky u pozorovatele JA, tzn. preference fixací v levé oblasti u HH vlevo a preference fixací v pravé oblasti u HH vpravo. Výsledky u distribuce sakád jsou odlišnější v porovnání s pozorovatelem JA. U ELM byl naměřen jeden silný trend. Při HH vlevo byla silná preference provádět sakády o délce 5° doleva a při HH vpravo byla silná preference provádět sakády o délce 5° doprava. U pozorovatele JA se v porovnání s ELM pozorovala preference sakád doprava a doleva u HH vlevo a nahoru a doprava u HH. Celkově pozorovatel JA používal více rozmanitější sakády než ELM.

4.3.5.5 Shrnutí

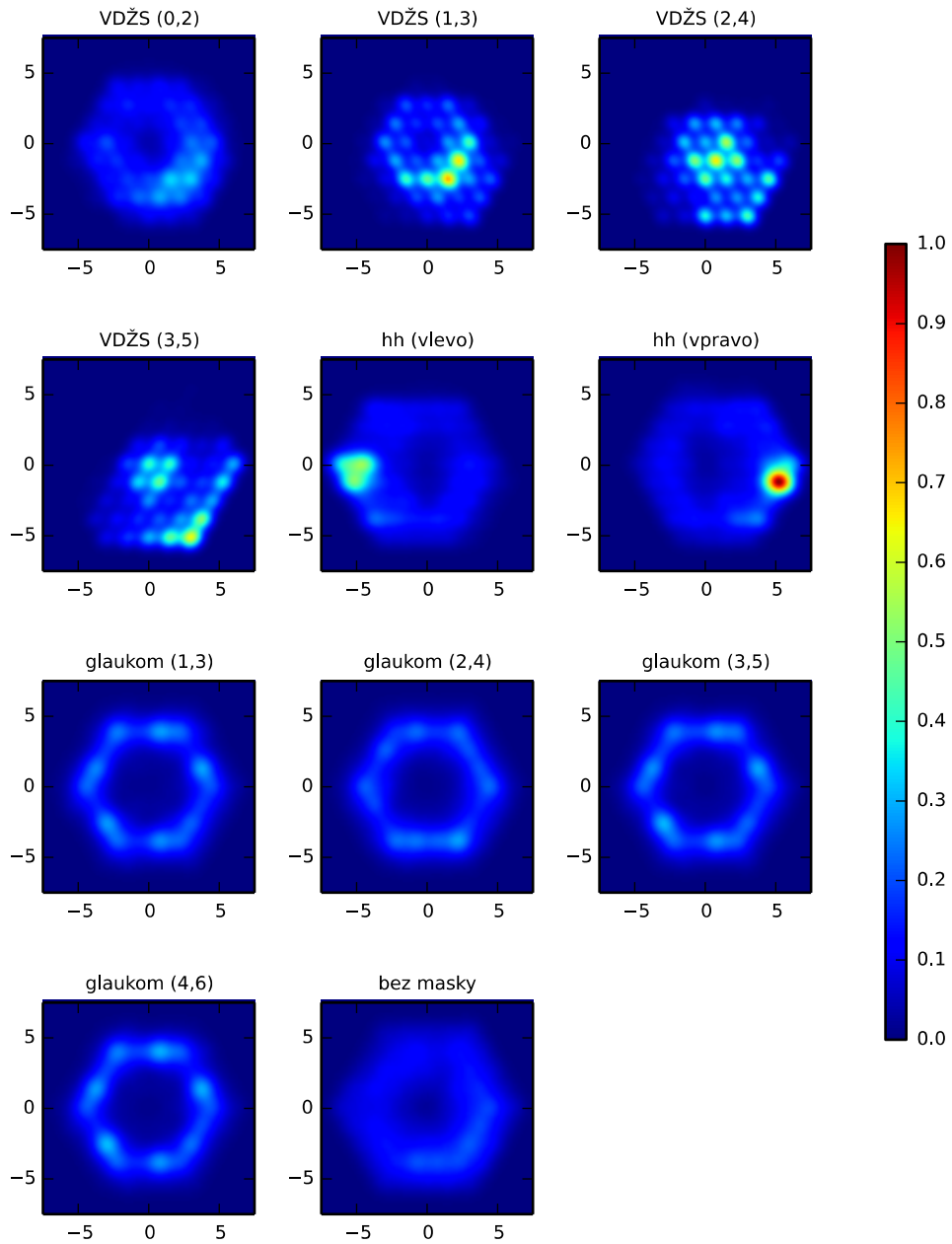
Výsledky všech distribucí fixací u pozorovatele JA jsou na obr. 30 a výsledky všech distribucí sakád jsou na obr. 31. Výsledky všech distribucí fixací u ELM jsou na obr. 32 a výsledky všech distribucí sakád jsou na obr. 33. Celkově se ukázalo, že výsledky vyhledávání u pozorovatele JA a ELM jsou odlišné. Jsou pozorovány podobnosti např. u distribuce fixací při simulaci HH, ale tyto podobnosti jsou v menšině.



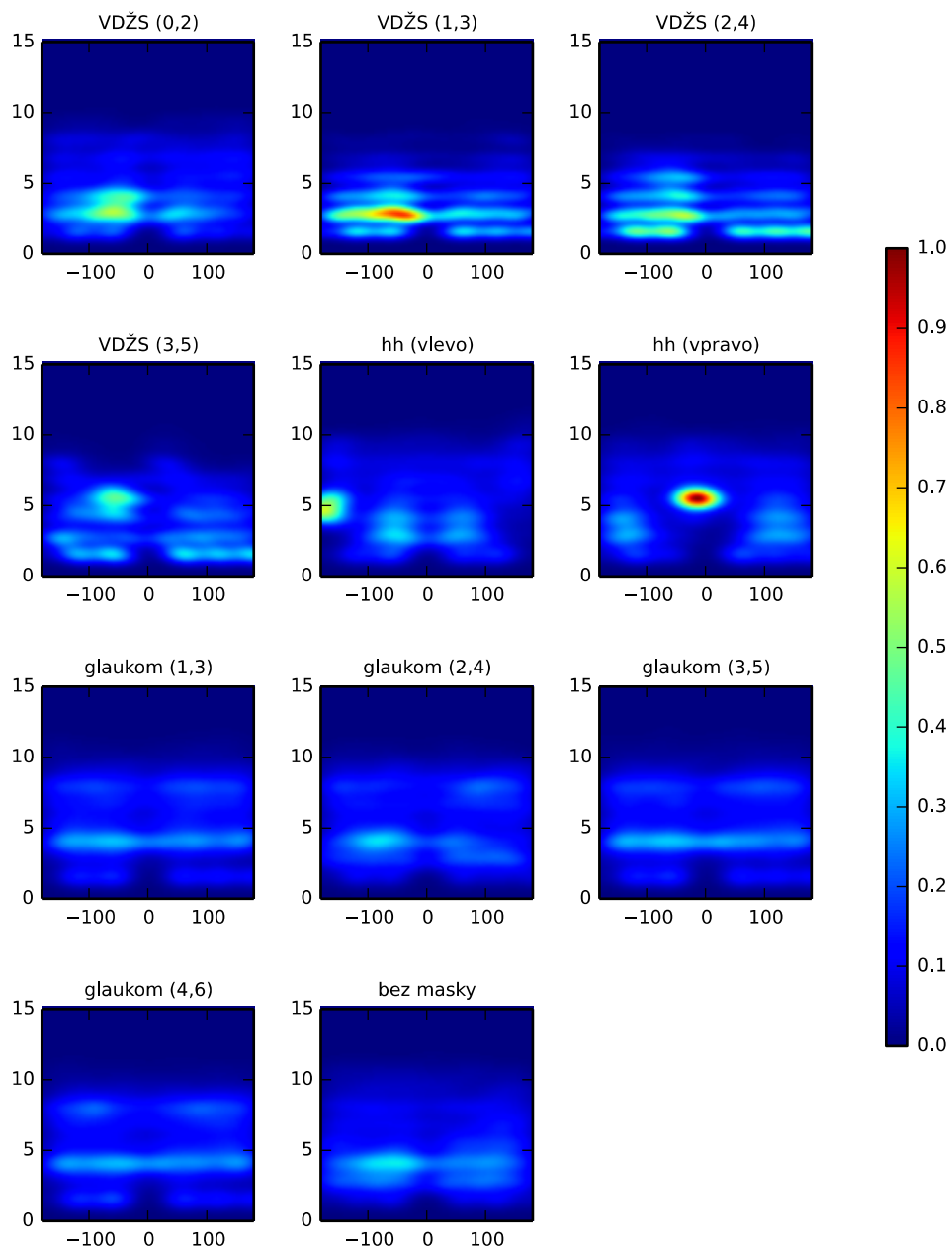
Obr. 30: Distribuce všech fixací naměřená u pozorovatele JA. Grafy mají společnou hodnotu.



Obr. 31: Distribuce všech sakád naměřená u pozorovatele JA. Grafy mají společnou hodnotu.



Obr. 32: Distribuce všech fixací naměřená u ELM. Grafy mají společnou hodnotu.



Obr. 33: Distribuce všech sakád naměřená u ELM. Grafy mají společnou hodnotu.

5. Diskuze

V této práci byl zkoumán vliv degenerace vizuálního pole na vyhledávání cíle v poli. Chování člověka bylo následně porovnáno s chováním ELM od Najemníka a Geislera (2009). Cílem práce bylo zjistit, jak dobře bude ELM modelovat chování člověka.

ELM potřebuje pro svou práci znát mapu senzitivity pozorovatele, jehož chování má za úkol modelovat. V této práci byla mapa získána experimentem detekce cíle v poli. Výsledná mapa má nečekané rozložení hodnoty d' , kde senzitivita zraku je lepší směrem nahoru než dolů. Toto zjištění je nečekané, protože Curcio a spol. (1990) naměřili topologii buněk na sítnici, která více odpovídá zlepšené senzitivě směrem dolů. Zjištění Curcia a spol. bylo podpořeno i výsledky Najemníka a Geislera (2005).

U vyhledávání cíle v poli při normálním zraku nebylo potvrzeno zjištění Najemníka a Geislera (2008), kteří přišli s výsledkem, které ukazovalo, že člověk má při vyhledávání cíle preferenci fixovat horní a dolní oblast vyhledávaného pole s preferencí sakád v horizontálním směru. V této práci byla naměřena distribuce fixací, která nepreferovala určitou oblast ve vyhledávaném poli, a distribuce sakád s preferencí směru nahoru a doprava. V porovnání s ELM jsou naměřené výsledky také odlišné. U ELM se pozorovala distribuce fixací ve tvaru torusu s oblastí s velkou hustou fixací v dolní části vyhledávaného pole. U distribuce sakád byla pozorována preference pro směr dolů. Stejný tvar distribuce fixací naměřili Najemník a Geisler (2009) u svého modelu, ale oblasti s větší hustotou fixací se nacházeli jak v dolní, tak i v horní oblasti vyhledávaného pole. Při porovnání distribuce sakád je podobnost s výsledky od Najemníka a Geislera malá. Ti pozorovali preferenci horizontálních sakád. Odlišnost chování ELM v této práci a v práci od Najemníka a Geislera lze vysvětlit v odlišné mapě senzitivity, která byla použita. Tvar vysvětluje také to, proč v této práci byl veliký počet fixací v dolní oblasti vyhledávaného pole. Mapa má lepší senzitivitu směrem nahoru v porovnání se směrem dolů. Je tedy výhodnější fixovat dolní než horní oblast vyhledávaného pole. Fixováním horní oblasti by vedlo k tomu, že prohledávaná oblast by byla pozorována dolní částí mapy senzitivity, která má horší schopnost rozeznávat detaily

než horní část. Z výsledků chování ELM v práci Najemníka a Geislera lze vyvodit pozorovaná distribuce sakád u modelu ELM v této práci. Najemník a Geisler pozorovali preferenci horizontálních sakád u mapy, jejíž senzitivita byla lepší v horizontálním směru v porovnání se směrem vertikálním. V této práci byla mapa více senzitivní ve vertikálním než v horizontálním směru. Pokud by se distribuce směrů sakád, kterou naměřili Najemník a Geisler, v grafu posunula o 90° doprava, byla by získána podobná distribuce jako v této práci. V této práci nebyla u ELM naměřena preference směru ve vertikální rovině, která by byla symetrická symetrická, protože ani mapa senzitivit není symetrická podél horizontální osy.

U vyhledávání pozorovatele se simulovanou věkem podmíněnou degenerací žluté skvrny (VDŽS) byla pozorována preference fixací do středové oblasti. Toto pozorování odpovídá očekávanému chování. U VDŽS dochází ke ztrátě zraku v centrální oblasti a člověk je odkázán na vidění v periferiích. Při tomto experimentu se nacházelo více možných pozic pro cíl na periférii než ve středu, a proto bylo výhodnější zůstat zafixován ve středu pole, prozkoumat okrajové oblasti použitím periferního vidění, a pokud se cíl nenajde, posunout zrak způsobem, aby se mohla pomocí nepoškozené části zraku prozkoumat středová oblast. Toto chování bylo potvrzeno i chováním ELM. U ELM se navíc pozorovala i větší hustota fixací v dolní oblasti, což mohlo být způsobeno tvarem mapy senzitivit, která měla lepší senzitivitu směrem nahoru než dolů..

Při simulaci glaukomu bylo u pozorovatele naměřeno rovnoměrnější rozložení fixací se zmenšující se oblastí viditelnosti. Pozorované chování je logické, protože při glaukomu dochází k tunelovému vidění a pouze středová oblast je viditelná. Pokud je pak tato viditelná oblast malá, člověku nezbyvá nic jiného, než provádět náhodnou procházku po hledaném prostoru a doufat, že narazí na cíl. Neočekávané je, že stejné chování nebylo pozorováno u ELM, kde byla preference fixací v krajích vyhledávané oblasti. Avšak jak u pozorovatele, tak i u ELM bylo naměřeno, že čím menší je viditelná oblast tím více jsou využívány sakády ve všech směrech. Toto pozorování by odpovídalo tomu, že směry sakád vykazovaly chování náhodné procházky.

Poslední simulovanou nemocí byla homonymous hemianopsia (HH). U HH vlevo byla naměřena větší hustota fixací v levé oblasti vyhledávaného pole a u HH vpravo

byla naměřena větší hustota fixací v pravé oblasti. Výsledek je logický, protože u HH vlevo je postižena celá levá polovina zraku a nedávalo by smysl posunout zrak doprava a tím dostat prohledávané pole do slepé poloviny zraku. Stejná logika platí i vysvětlení u HH vpravo. Stejná distribuce fixací byla následně naměřena u ELM. Distribuce sakád u ELM vykazovala silnou preferenci pouze jednoho směru, což je rozdíl oproti pozorovateli, který nepreferoval pouze jeden směr.

Po provedení všech pokusů, byl pozorovatel dotázán na to, jak se mu vyhledávalo, pokud měl část zřakového pole zamlžené. Pozorovatel vylíčil, že na glaukom a VDŽS nebylo problém si zvyknou, avšak veliké problémy pociťoval u HH, kde si za celou dobu experimentu nedokázal zvyknou na ztrátu jedné poloviny zraku. Navíc pozorovatel řekl, že byl rád, že vyhledávání s HH má za sebou, protože ho po každém vyhledávání bolely oči, což u ostatních typů vyhledávání nepociťoval.

6. Závěr

V této práci byl vzat model ELM s degenerovanou mapou senzitivity a porovnán s chováním lidského pozorovatele. Ačkoliv v předešlých pracích dokázal kvalitně předpovědět některé statistiky chování člověka (Najemnik & Geisler, 2009), v této práci to nebylo nepotvrzeno.

Neočekávaným výsledkem práce je naměřená mapa d' , která měla oproti předešlým pozorováním lepší senzitivitu směrem nahoru než dolů. Bylo by zajímavé zjistit, jak by dokázal ELM predikovat statistiky vyhledávání očima, kdyby byl porovnán s pozorovatelem, který by měl očekávanou mapu d' , tzn. s lepší senzitivitou v horizontálním než ve vertikálním směru a s lepší senzitivitou směrem dolů než nahoru.

Seznam použité literatury

- Abrams, J., & Geisler, W. S. (2016). V přípravě.
- Anstis, S. (1998). Picturing peripheral acuity. *Perception*, 27(7), 817–825.
<http://doi.org/10.1068/p270817>
- Arnou, T. L., & Geisler, W. S. (1996). Visual detection following retinal damage: Predictions of an inhomogeneous retino-cortical model. V Proceedings of SPIE (s. 119–130).
- Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Physical Review Letters*, 59(4), 381–384.
<http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.381>
- Bear, M. F., Connors, B. W., & Paradiso, M. A. (2007). *Neuroscience*. Lippincott Williams & Wilkins.
- Beckmann, P. J., & Legge, G. E. (2002). Preneural limitations on letter identification in central and peripheral vision. *Journal of the Optical Society of America A*, 19(12), 2349. <http://doi.org/10.1364/JOSAA.19.002349>
- Bird, A. C., Bressler, N. M., Bressler, S. B., Chisholm, I. H., Coscas, G., Davis, M. D., ... Klein, R. (1995). An international classification and grading system for age-related maculopathy and age-related macular degeneration. The International ARM Epidemiological Study Group. *Survey of Ophthalmology*, 39(5), 367–374.
- Bowmaker, J. K., & Dartnall, H. J. (1980). Visual pigments of rods and cones in a human retina. *The Journal of Physiology*, 298, 501–511.
- Boyd, K. (2015, leden 10). Who is at risk for glaucoma? Získáno 17. červenec 2016, z <http://www.aaopt.org/eye-health/diseases/glaucoma-risk>

- Bradley, C., Abrams, J., & Geisler, W. S. (2014). Retina-V1 model of detectability across the visual field. *Journal of Vision*, 14(12).
<http://doi.org/10.1167/14.12.22>
- Brady, T. F., & Chun, M. M. (2007). Spatial constraints on learning in visual search: Modeling contextual cuing. *Journal of Experimental Psychology – Human Perception and Performance*, 798–815.
- Brainard, D. H., Williams, D. R., & Hofer, H. (2008). Trichromatic reconstruction from the interleaved cone mosaic: Bayesian model and the color appearance of small spots. *Journal of Vision*, 8(5), 15–15. <http://doi.org/10.1167/8.5.15>
- Bravo, M. J., & Farid, H. (2009). The specificity of the search template. *Journal of Vision*, 9(1), 34–34. <http://doi.org/10.1167/9.1.34>
- Coleman, H. R., Chan, C.-C., Ferris, F. L., & Chew, E. Y. (2008). Age-related macular degeneration. *Lancet (London, England)*, 372(9652), 1835–1845.
[http://doi.org/10.1016/S0140-6736\(08\)61759-6](http://doi.org/10.1016/S0140-6736(08)61759-6)
- Colman, A. M. (2009). Visual angle. V A Dictionary of Psychology (3. vyd.). Oxford University Press. Získáno z
<http://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803120050143>
- Cover, T. M., & Thomas, J. A. (2006). *Elements of information theory*. Hoboken, NJ: Wiley.
- Curcio, C. A., Sloan, K. R., Kalina, R. E., & Hendrickson, A. E. (1990). Human photoreceptor topography. *Journal of Comparative Neurology*, 292(4), 497–523. <http://doi.org/10.1002/cne.902920402>
- Děchtěrenko, F., & Geisler, W. S. (2016). Modyfing detectibility map for formal models of visual search. Prezentováno v 39th European Conference on Visual Perception, Barcelona.

- Drasdo, N., & Fowler, C. W. (1974). Non-linear projection of the retinal image in a wide-angle schematic eye. *The British Journal of Ophthalmology*, 58(8), 709–714.
- Druker, M., & Anderson, B. (2010). Spatial probability aids visual stimulus discrimination. *Frontiers in Human Neuroscience*, 4. <http://doi.org/10.3389/fnhum.2010.00063>
- Eckstein, M. P. (2011). Visual search: A retrospective. *Journal of Vision*, 11(5), 14–14. <http://doi.org/10.1167/11.5.14>
- Facts about glaucoma. (2016). Získáno 17. červenec 2016, z https://nei.nih.gov/health/glaucoma/glaucoma_facts
- Field, D. J. (1987). Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics and Image Science*, 4(12), 2379–2394.
- Geisler, W. S. (2011). Contributions of ideal observer theory to vision research. *Vision Research*, 51(7), 771–781. <http://doi.org/10.1016/j.visres.2010.09.027>
- Geisler, W. S., & Perry, J. S. (2009). Contour statistics in natural images: grouping across occlusions. *Visual Neuroscience*, 26(1), 109–121. <http://doi.org/10.1017/S0952523808080875>
- Green, D. M., & Swets, J. A. (1989). *Signal Detection Theory and Psychophysics*. Peninsula Pub.
- Guidelines for glaucoma*. (2006) (2. vyd.). Tokyo, Japan: Japan Glaucoma Society.
- Homonymous hemianopsia. (2016, červen 2). Ve Wikipedia, the free encyclopedia. Získáno z https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Homonymous_hemianopsia&oldid=723371063
- Jager, R. D., Mieler, W. F., & Miller, J. W. (2008). Age-related macular

degeneration. *New England Journal of Medicine*, 358(24), 2606–2617.
<http://doi.org/10.1056/NEJMra0801537>

Kamen, E. W., & Su, J. K. (2012). *Introduction to optimal estimation*. Springer Science & Business Media.

Kersten, D., & Mamassian, P. (2009). Ideal observer theory. V *Encyclopedia of Neuroscience* (s. 89–95). Oxford: Academic Press. Získáno z
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080450469014352>

Kersten, D., Mamassian, P., & Knill, D. C. (1997). Moving cast shadows induce apparent motion in depth. *Perception*, 26(2), 171–192.

Klein, S. A. (2001). Measuring, estimating, and understanding the psychometric function: a commentary. *Perception & Psychophysics*, 63(8), 1421–1455.

Leffler, C. T., Schwartz, S. G., Giliberti, F. M., Young, M. T., & Bermudez, D. (2015). What was glaucoma called before the 20th century? *Ophthalmology and Eye Diseases*, 7, 21–33. <http://doi.org/10.4137/OED.S32004>

MacKay, D. J. C. (2003). *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge University Press.

Macmillan, N. A. (2014). Signal detection theory as data analysis method and psychological decision model. V *A Handbook for Data Analysis in the Behavioral Sciences* (s. 21–57). Psychology Press.

Macmillan, N. A., & Creelman, C. D. (2004). *Detection theory: A user's guide* (2. vyd.). Mahwah, N.J: Psychology Press.

Martinez-Conde, S., Macknik, S. L., & Hubel, D. H. (2004). The role of fixational eye movements in visual perception. *Nature Reviews Neuroscience*, 5(3), 229–240. <http://doi.org/10.1038/nrn1348>

McConnell, V., & Silvestri, G. (2005). Age-related macular degeneration. *The Ulster*

Medical Journal, 74(2), 82–92.

- Michel, M. M., & Geisler, W. S. (2009). Gaze contingent displays: analysis of saccadic plasticity in visual search. *SID Symposium Digest of Technical Papers*, 40(1), 911–914. <http://doi.org/10.1889/1.3256945>
- Najemnik, J., & Geisler, W. (2010). Simple summation rule for optimal eye movement selection. *Journal of Vision*, 7(9), 716–716. <http://doi.org/10.1167/7.9.716>
- Najemnik, J., & Geisler, W. S. (2005). Optimal eye movement strategies in visual search. *Nature*, 434(7031), 387–391. <http://doi.org/10.1038/nature03390>
- Najemnik, J., & Geisler, W. S. (2008). Eye movement statistics in humans are consistent with an optimal search strategy. *Journal of Vision*, 8(3), 4–4. <http://doi.org/10.1167/8.3.4>
- Najemnik, J., & Geisler, W. S. (2009). Simple summation rule for optimal fixation selection in visual search. *Vision Research*, 49(10), 1286–1294. <http://doi.org/10.1016/j.visres.2008.12.005>
- Navalpakkam, V., Koch, C., Rangel, A., & Perona, P. (2010). Optimal reward harvesting in complex perceptual environments. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(11), 5232–5237. <http://doi.org/10.1073/pnas.0911972107>
- Pambakian, A. L., & Kennard, C. (1997). Can visual function be restored in patients with homonymous hemianopia? *The British Journal of Ophthalmology*, 81(4), 324–328.
- Paulun, V. C., Schütz, A. C., Michel, M. M., Geisler, W. S., & Gegenfurtner, K. R. (2015). Visual search under scotopic lighting conditions. *Vision Research*, 113(Pt B), 155–168. <http://doi.org/10.1016/j.visres.2015.05.004>
- Pelak, V. S., Dubin, M., & Whitney, E. (2007). Homonymous hemianopia: A critical

analysis of optical devices, compensatory training, and NovaVision. *Current Treatment Options in Neurology*, 9(1), 41–47.

Perez, C., & Chokron, S. (2014). Rehabilitation of homonymous hemianopia: insight into blindsight. *Frontiers in Integrative Neuroscience*, 8, 82.

<http://doi.org/10.3389/fnint.2014.00082>

Quigley, H. A. (1996). Number of people with glaucoma worldwide. *The British Journal of Ophthalmology*, 80(5), 389–393.

Quigley, H. A., & Broman, A. T. (2006). The number of people with glaucoma worldwide in 2010 and 2020. *The British Journal of Ophthalmology*, 90(3), 262–267. <http://doi.org/10.1136/bjo.2005.081224>

Rieke, F., & Baylor, D. A. (1998). Single-photon detection by rod cells of the retina. *Reviews of Modern Physics*, 70(3), 1027–1036.

<http://doi.org/10.1103/RevModPhys.70.1027>

Smythies, J. (1996). A note on the concept of the visual field in neurology, psychology, and visual neuroscience. *Perception*, 25(3), 369–371.

Stanislaw, H., & Todorov, N. (1999). Calculation of signal detection theory measures. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers: A Journal of the Psychonomic Society, Inc*, 31(1), 137–149.

Swearer, J. (2011). Visual Angle. V J. S. Kreutzer, J. DeLuca, & B. Caplan (Ed.), *Encyclopedia of Clinical Neuropsychology* (s. 2626–2627). Springer New York. Získáno z http://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-0-387-79948-3_1411

Theeuwes, J., & Burger, R. (1998). Attentional control during visual search: The effect of irrelevant singletons. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 24(5), 1342–1353. <http://doi.org/10.1037/0096-1523.24.5.1342>

- Tolhurst, D. J., Tadmor, Y., & Chao, T. (1992). Amplitude spectra of natural images. *Ophthalmic & Physiological Optics: The Journal of the British College of Ophthalmic Opticians (Optometrists)*, 12(2), 229–232.
- Walker, J. (2012). Human saccadic eye movements. *Scholarpedia*, 7(7), 5095.
<http://doi.org/10.4249/scholarpedia.5095>
- Wand, M. P., & Jones, M. C. (1995). *Kernel smoothing*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Wichmann, F. A., & Hill, N. J. (2001). The psychometric function: I. Fitting, sampling, and goodness of fit. *Perception & Psychophysics*, 63(8), 1293–1313.
- Wolfe, J., & Horowitz, T. (2008). Visual search. *Scholarpedia*, 3(7), 3325.
<http://doi.org/10.4249/scholarpedia.3325>
- Zvára, K., & Štěpán, J. (2002). *Pravděpodobnost a matematická statistika (Vyd. 3)*. Praha: Matfyzpress.

Příloha 1 - Pravděpodobnost a statistika

Pravděpodobnost

Základní pojmy

Mějme množinu elementárních jevů Ω , kde žádný ze dvou jevů nemůže nastat současně. Jevem nazveme podmnožinu $A \subseteq \Omega$ (Zvára & Štěpán, 2002), což je podmnožina množiny elementárních jevů. Systém množiny možných jevů se označí Z , nazývaný též algebra, a platí pro něj (Zvára & Štěpán, 2002):

1. $A, B \in Z \Rightarrow A \cup B \in Z$,
2. $A, B \in Z \Rightarrow A \cap B \in Z$,
3. $A \in Z \Rightarrow A^c \in Z$, A^c se nazývá opačný jev, a
4. $\Omega \in Z$, $\emptyset \in Z$, Ω se nazývá jev jistý a \emptyset se nazývá jev nemožný.

Pravděpodobnost se definuje jako reálná funkce P na algebře Z , pro kterou platí (Zvára & Štěpán, 2002):

1. Funkce je nezáporná, tj. $\forall A \in Z: P(A) \geq 0$,
2. $A, B \in Z$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ a
3. $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.

Pokud elementární jevy v Ω jsou stejně možné, pak pravděpodobnost jevu A je podle klasické definice pravděpodobnosti definována jako (Zvára & Štěpán, 2002):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Náhodná veličina

Elementární jevy často popisujeme pomocí číselné charakteristiky $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, kterou nazýváme *náhodná veličina* (Zvára & Štěpán, 2002). Náhodná výška může reprezentovat výšku, váhu atd.

Náhodná veličina je reálná funkce definovaná na množině Ω . U pravděpodobnosti P se pak nepracuje s jevy, ale s náhodnými veličinami. Pravděpodobnost P pro níž platí, že náhodná veličina se rovná hodnotě x , je dána rovnicí (Zvára & Štěpán, 2002):

$$P[X=x] = P(\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \}).$$

Funkce $P[X=x]$ se nazývá *rozdělení náhodné veličiny X* (Zvára & Štěpán, 2002) (též *rozdělení pravděpodobnosti*). Pokud náhodná veličina nabývá hodnot ze spojitého rozdělení, rozdělení náhodné veličiny se nazývá *hustota* (Zvára & Štěpán, 2002) a značí se $f_X(t)$.

Pro rozdělení náhodné veličiny musí platit (Zvára & Štěpán, 2002):

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[X=x_i] = 1, \text{ pro diskrétní hodnoty náhodné veličiny, a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1, \text{ pro hustotu.}$$

Chování náhodné veličiny lze definovat *distribuční funkcí*, která je dána rovnicí (Zvára & Štěpán, 2002):

$$F_X(x) = P[X < x], \text{ tj.}$$

pravděpodobnost, že náhodná veličina X je menší než x .

Náhodnou veličinu X je možné charakterizovat pomocí *střední hodnoty*, definované jako (Zvára & Štěpán, 2002):

$$E[X] = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = \sum_x x \cdot P[X=x], \text{ pro diskrétní rozdělení, a}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \text{ pro spojitě rozdělení.}$$

Funkce $E[X]$ se nazývá *střední hodnota náhodné veličiny X* . Při počítání se střední hodnotou platí následující praktická vlastnost (Zvára & Štěpán, 2002):

$$E[a+bX] = a+bE[X], \text{ } a, b \in \mathbb{R}.$$

Další důležitou charakteristikou je *rozptyl*, který je dán rovnicí (Zvára & Štěpán, 2002):

$$\text{var}(X) = E[X - E[X]]^2.$$

Funkce $\text{var}(X)$ se nazývá *rozptyl náhodné veličiny X* .

Důležitou spojitou náhodnou veličinou je *normované normální rozdělení*. Toto rozdělení je dáno rovnicí (Zvára & Štěpán, 2002):

$$\phi(x) = P[X=x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

U normovaného normálního rozdělení je distribuční funkce značena místo F_X symbolem Φ a platí pro ni vztah (Zvára & Štěpán, 2002):

$$\Phi^{-1}(1-p) = -\Phi^{-1}(p), p \in (0,1).$$

Modifikovaná veličina normovaného normálního rozdělení $Y = \mu + \sigma X$, kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ a X je normované normální rozdělení, má hustotu (Zvára & Štěpán, 2002):

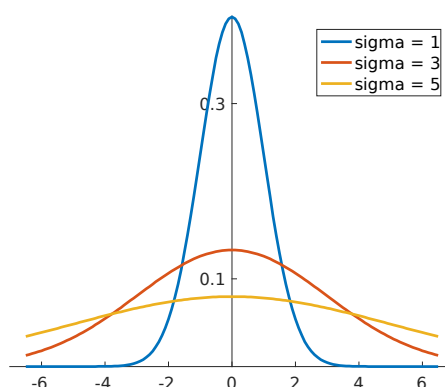
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$\exp(x)$ je exponenciální funkce. Náhodná veličina Y se nazývá *normální rozdělení* a symbolicky je vyjádřena jako $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Její střední hodnota je μ a rozptyl je σ^2 .

Platí následující vztah mezi normovanou normální veličinou a normální veličinou Y (Zvára & Štěpán, 2002):

$$F_Y(y) = P[\mu + \sigma X < y] = P\left[X < \frac{y-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

Hodnota μ posouvá graf funkce ϕ a σ^2 mění výšku grafu funkce $f_Y(y)$, viz obr. 34.



Obr. 34: Vliv hodnoty σ^2 na tvar grafu funkce $f_Y(y)$. Velikost σ^2 ovlivňuje rozprostření grafu. Čím je hodnota σ^2 menší, tím je graf „užší“. Hodnota μ pouze posouvá graf způsobem, aby se nejvyšší hodnota nacházela v μ .

Podmíněná pravděpodobnost

Někdy je zkoumána pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B . Potom se mluví o podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$, která je dána rovnicí (Zvára & Štěpán, 2002):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Při počítání s podmíněnou pravděpodobností se využívá *Bayesův vzorec* (Zvára & Štěpán, 2002):

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Rovnice pro podmíněnou pravděpodobnost dává vzorec pro výpočet sdružené pravděpodobnosti:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Pokud platí, že $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, jevy A a B se nazývají jevy *nezávislé* (Zvára & Štěpán, 2002).

Náhodné jevy $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ se nazvou *úplný systém jevů*, pokud platí (Zvára & Štěpán, 2002):

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$, pro $i \neq j$ a
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

Někdy je výhodné si pravděpodobnost $P(B)$ rozepsat použitím úplných systémů jevů $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$, pro které platí $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots$. Formule se nazývá *vzorec pro úplnou pravděpodobnost* (Zvára & Štěpán, 2002):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

Statistika

Základním pojmem statistiky je *statistický soubor*, což je dobře definovaná množina *statistických jednotek*. Nad každou statistickou jednotkou se měří jeden, nebo několik *statistických znaků* (Zvára & Štěpán, 2002). Příkladem statistického souboru jsou žáci na škole. Statistickou jednotkou je pak žák, u kterého se může zjišťovat výška, váha, známka z fyziky atd.

Mějme soubor pozorování $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, množina parametrů funkce f Θ a předpokládejme, že jsou dána rozdělením (Zvára & Štěpán, 2002):

$$f(x; \theta) = P[X = x | \theta], \theta \in \Theta, \text{ tzv. věrohodnostní funkce.}$$

Pro sdruženou pravděpodobnost pozorování \mathbf{x} platí (Zvára & Štěpán, 2002):

$$f(\mathbf{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

Z technického hlediska je výhodnější pracovat s *logaritmickou věrohodnostní funkcí* (Zvára & Štěpán, 2002):

$$l(\Theta) = \ln f(\mathbf{x}; \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta).$$

Odhad parametrů θ metodou *maximální věrohodnosti* (dále jen MLE z anglického *maximal likelihood estimation*) je nalezení hodnoty $\hat{\theta} \in \Theta$ maximalizující logaritmickou funkci (Zvára & Štěpán, 2002):

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} l(\theta).$$

Θ je množina všech možných hodnot pro parametry v θ .

Pokud se při výpočtu vezmou v úvahu rozdělení pravděpodobnosti parametrů θ , vznikne metoda MAP (z anglického *maximum a posteriori estimation*) (Kamen & Su, 2012):

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} l(\theta) g(\theta).$$

$g(\theta)$ je rozdělení parametrů θ .