



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martina Kaplanová

LDA přístup k modelování operačního rizika

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: LDA přístup k modelování operačního rizika

Autor: Martina Kaplanová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci se budeme zabývat pojmem operační riziko, tak jak se na něj dívají směrnice Basel 2, platné pro finanční instituce v Evropské unii. Hlavním problémem bude jeho modelování, tedy, jak ho měřit a následně pak řídit. V první části práce se podíváme na možnosti výpočtu kapitálového požadavku pro operační riziko právě podle Basel 2, hlavně na výpočet pomocí interního modelu. Popíšeme konkrétní postupy při vývoji interního modelu, zaměříme se na přístup LDA. Tento interní model bude založen na modelování ztráty v každé rizikové buňce zvlášť. V druhé části si ukážeme, jak modelovat pomocí interního modelu závislosti mezi rizikovými buňkami pomocí kopul a následně si k tomu uvedeme ilustrační příklad, na kterém se podíváme, zda modelování závislostí vede ke snížení celkového kapitálového požadavku.

Klíčová slova: operační riziko, kapitálový požadavek, LDA přístup, kopula

Title: LDA approach to operational risk modelling

Author: Martina Kaplanová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we will deal with the term of operational risk, as it is presented in the directives Basel 2 that are mandatory for financial institutions in the European Union. The main problem is operational risk modeling, therefore, how to measure and manage it. In the first part we will look at the possibility of calculating the capital requirements for operational risk under Basel 2, mainly the calculation with the internal model. We will describe the specific procedures for the development of the internal model and we will focus on Loss Distribution Approach. The internal model will be based on modeling of loss in each risk cell separately. In the second part we will show, how to include modeling of dependence structure between risk cells to the internal model with using copulas. Finally, we will show the illustrative example, where we will see, whether the modeling of dependence leads to a reduction of the total capital requirement.

Keywords: operational risk, capital requirement, loss distribution approach, copula

Ráda bych poděkovala především své vedoucí RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D. za čas a rady, které mi poskytla nejen při tvorbě této práce. Dále bych ráda poděkovala svým rodičům a přátelům za podporu a trpělivost, kterou mi poskytli během mého studia.

Obsah

Úvod	3
1 Operační riziko	4
1.1 Basel 2 a operační riziko	4
2 Přístupy k měření operačního rizika	6
2.1 Přístup základního indikátoru	6
2.2 Standardizovaný přístup	6
2.3 Pokročilý přístup	7
3 Pokročilý přístup	9
3.1 LDA přístup	10
3.2 Data operačního rizika	11
3.2.1 Interní data	11
3.2.2 Externí data	12
3.2.3 Analýza scénářů	13
3.2.4 Kombinace interních a externích dat	13
3.2.5 Úprava dat	13
4 LDA přístup	15
4.1 Rozdělení	17
4.1.1 Useknuté rozdělení	17
4.1.2 Rozdělení výší škod	22
4.1.3 Rozdělení počtu škod	23
4.2 Modelování extrémních ztrát	26
4.2.1 Odhad parametrů GPD a určení hranice u	27
4.3 Stanovení kapitálu	28
4.3.1 Výše škod	28
4.3.2 Počet škod	28
4.3.3 Rozdělení ztráty	29
4.3.4 Kapitálový požadavek	30
5 Agregace rizik pomocí modelování závislostí	32
5.1 Kopuly	32
5.1.1 Gaussova kopula	33
5.1.2 Gumbelova kopula	34
5.1.3 Studentova kopula	34
5.2 Využití kopul	36

6 Simulace	39
6.1 Kapitálové požadavky v jednotlivých rizikových buňkách	39
6.2 Kapitálový požadavek s využitím závislostí	45
Závěr	49
Seznam obrázků	50
Seznam tabulek	51
Seznam použité literatury	52

Úvod

Finanční rizika obecně jsou v současnosti velkým tématem, kterým se zabývá téměř každá společnost na trhu. Možné ztráty z nich plynoucí jsou hrozbou pro všechny firmy, neboť se jim žádná z nich nemůže úplně vyhnout. Operační riziko je právě jedno z finančních rizik, které musí řešit většina různých společností a firem. Jejich cílem je snaha předcházet událostem, které by jim mohly způsobit velké ztráty, či předpovídat jejich výskyt. V poslední době je snaha zabývat se operačním rizikem samostatně, dříve bylo zařazováno pod jiná finanční rizika.

V této práci se budeme zabývat právě měřením operačního rizika a ztrát z něj, které by mohly v budoucnu nastat. Problém měření a řízení operačního rizika je aktuální hlavně pro všechny finanční instituce, které mají povinnost držet určitý kapitál pro případy velkých ztrát a zabránit tak neschopnosti tyto ztráty ustát. Hlavní otázkou se tak stává, jak určit kapitál, který je potřeba držet, aby bylo splněno, že finanční instituce s jeho využitím zvládne takové ztráty pokrýt. Naopak ze strany institucí je snaha, aby tento kapitál nebyl příliš vysoký. Stanovení přiměřeně vysokého kapitálu tedy vůbec není jednoduchou záležitostí.

V prvních dvou kapitolách si uvedeme definici operačního rizika a obecně možnosti, jak ho měřit. Tyto kapitoly budeme čerpat hlavně ze zdrojů [4], [5] a [6]. Ve třetí kapitole se pak podíváme podrobněji na měření operačního rizika pomocí interního modelu. Tuto kapitolu budeme čerpat ze zdrojů [3] a [4].

Ve čtvrté kapitole si uvedeme konkrétní přístup používaný pro vytvoření interního modelu – LDA přístup. V této kapitole využijeme převážně literaturu [1], doplněnou o [2]. Velikost kapitálu určeného pro krytí operačního rizika může být významně ovlivněna výskytem extrémních ztrát. Jako součást této kapitoly tedy uvedeme i některé výsledky z teorie extrémních hodnot, pro kterou využijeme literaturu [7]. Výstupem této kapitoly je jedna z možností, jak vytvořit základní interní model.

V páté kapitole rozšíříme interní model z kapitoly čtvrté o možnost modelování závislosti pomocí kopul. Pro teorii kopul použijeme literaturu [8].

Cílem práce je ukázat možnosti a postupy, jak vytvořit interní model pro modelování operačního rizika a následně tyto postupy ukázat na ilustračních simulacích. V simulacích se nebudeme pokoušet o vytvoření skutečného interního modelu na reálných datech, nýbrž spíše ukážeme rozdíly v různých přístupech. Ilustrační simulace budou ukázány v závěrečné kapitole.

Kapitola 1

Operační riziko

Operační riziko patří mezi finanční rizika. Podle [4] je definované jako riziko ztráty plynoucí z nedostatků a selhání interních procesů, lidských faktorů a systémů nebo vlivem externích událostí. Tato definice zahrnuje i riziko právní, tedy např. riziko z nesouladu s právními normami a z toho plynoucí pokuty, penále, apod. Do operačního rizika se občas řadí i riziko reputační, tedy riziko ztráty dobré pověsti, případně riziko strategické, tj. riziko špatné současné strategie, která nepříznivě ovlivní budoucnost.

Do operačního rizika tedy mohou spadat velice různorodé události, které způsobí malé škody, ale i události, které by mohly firmě způsobit katastrofální následky, třeba i krach. To vede ke snaze toto riziko nějakým způsobem modelovat a řídit. Zpravidla se společnosti nesnaží o modelování drobnějších škod, kterých je většina, neboť tyto škody nejsou většinou fatální.

My se nebudeme zabývat modelováním operačního rizika ve všech typech společností, ale zaměříme se pouze na finanční instituce, hlavně banky. Finanční instituce se operačním rizikem musejí zabývat i proto, že se na ně vztahují regulatorní požadavky platné v Evropské Unii. Musejí tedy držet určitý kapitál, který by pokryl případné ztráty z operačního rizika. Máme dvoje hlavní směrnice vydané pro finanční instituce, ve kterých jsou popsány regulatorní požadavky. Pro banky je vydán Basel 2 a pro pojišťovny Solventnost 2. Oba tyto dokumenty užívají stejnou definici operačního rizika, a to stejnou jaká byla zmíněna o dva odstavce výše s jediným rozdílem - nezahrnují do něj reputační a strategické riziko. Důvodem může být to, že tato rizika nelze modelovat podobně jako zbytek operačních rizik a je obtížné je kvantifikovat, často se tedy užívá spíše odborného odhadu.

Poznámka. *Aktuálně jsou již vydané směrnice Basel 3. Tyto směrnice mají za cíl opět zkvalitnit kapitálovou přiměřenost. Neupravují však kapitálové požadavky na operační riziko jinak než Basel 2.*

1.1 Basel 2 a operační riziko

Basel 2 jsou doporučení vydaná Basilejským výborem pro bankovní dohled, která byla implementována do finanční regulace v Evropské unii prostřednictvím směrnic. Tyto směrnice upravují měření a řízení rizik v bankách. Do českého právního řádu jsou tyto směrnice zavedeny pomocí vyhlášek České národní banky, viz [5] a [6].

Směrnice Basel 2 jsou založeny na principu tří pilířů:

- 1. pilíř - Minimální kapitálové požadavky
- 2. pilíř - Proces dohledu (aktivity bankovního dohledu)
- 3. pilíř - Tržní disciplína

První pilíř se zabývá výpočtem minimálního alokovaného kapitálu pro dané riziko, který může být vypočten různými přístupy. Druhý pilíř je zaměřen na dohled regulátorů bankovního systému a jejich kontrolu kapitálové přiměřenosti. Třetí pilíř je založen na zveřejňování relevantních informací ohledně řízení rizik. V této práci se budeme zabývat pouze prvním pilířem.

Kapitola 2

Přístupy k měření operačního rizika

Podle Basel 2 ([4]) existují tři možnosti, jak přistupovat ke stanovení minimálního kapitálového požadavku pro operační riziko. Přístupy jsou seřazeny podle rostoucí sofistikovanosti.

2.1 Přístup základního indikátoru

Přístup základního indikátoru (The Basic Indicator Approach - BIA) je nej-jednodušší. Kapitálový požadavek pro operační riziko se vypočítá jako průměr pevně stanoveného podílu z kladných hrubých ročních příjmů za poslední 3 roky. Pevně stanovený podíl značíme α . Záporné nebo nulové roční hrubé příjmy nejsou do výpočtu zahrnuty. Kapitálový požadavek lze vyjádřit následujícím vzorcem:

$$K_{BIA} = \alpha * \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 \max(GI_i, 0), \quad (2.1)$$

kde

$$N = \sum_{i=1}^3 I_{[GI_i > 0]}$$

značí počet let s kladným hrubým ročním příjmem, GI_i označuje hrubý roční příjem v roce i a α je pevně stanovena na 15 %.

Poznámka. *Hrubý roční příjem se definuje jako součet čistého úrokového a čistého neúrokového výnosu. Hrubý výnos by se měl počítat před odečtením nákladů na tvorbu rezerv, opravných položek a provozních nákladů. Do výpočtu se nezahrnuje zisk nebo ztráta realizované z prodeje nástrojů investičního portfolia, ani mimořádné nebo nepravidelné výnosy, či výnosy z pojistného plnění. Naopak se do výpočtu zahrnují zisky nebo ztráty z přecenění finančních nástrojů na reálnou hodnotu, které jsou zahrnuty do výkazu zisku a ztrát.*

2.2 Standardizovaný přístup

Standardizovaný přístup (The Standardised Approach - TSA) je dalším možným přístupem pro stanovení kapitálového požadavku pro operační riziko. Pro tento

j	Linie podnikání (BL)	Faktor Beta
1	Podnikové financování β_1	18 %
2	Obchodování na finančních trzích β_2	18 %
3	Retailové bankovníctví β_3	12 %
4	Podnikové bankovníctví β_4	15 %
5	Zúčtovací služby pro třetí osoby β_5	18 %
6	Služby z pověření β_6	15 %
7	Obhospodařování aktiv β_7	12 %
8	Retailové makléřství β_8	12 %

Tabulka 2.1: Faktory beta pro linie podnikání.

přístup jsou aktivity banky rozděleny do 8 linií podnikání (Business lines - BL)- podnikové financování, obchodování na finančních trzích, retailové bankovníctví, podnikové bankovníctví, zúčtovací služby pro třetí osoby, služby z pověření, obhospodařování aktiv a retailové makléřství.

V každé linii podnikání se použije hrubý příjem jako měřítko expozice operačního rizika. Kapitálový požadavek v každé linii podnikání se počítá vynásobením hrubého příjmu faktorem β příslušným pro danou linii podnikání. Faktor β vyjadřuje vztah mezi ztrátou z operačního rizika (v dané linii podnikání) a celkovým hrubým příjmem pro danou linii podnikání. Hrubý příjem se počítá pro každou linii podnikání zvlášť, ne pro celou banku, na rozdíl od přístupu základního indikátoru.

Celkový kapitálový požadavek se počítá jako 3-letý průměr součtu kapitálových požadavků v jednotlivých liniích podnikání. Kapitálový požadavek pro libovolnou linii podnikání může být záporný (pokud je záporný hrubý příjem pro danou linii podnikání) a snižovat tak kapitálový požadavek pro jinou linii podnikání. Nicméně pokud celkový kapitálový požadavek pro daný rok vyjde záporný, pak se do 3-letého průměru nezapočte. Celkový kapitálový požadavek lze vyjádřit následujícím vzorcem:

$$K_{TSA} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \max\left(\sum_{j=1}^8 GI_{i,j} * \beta_j, 0\right), \quad (2.2)$$

kde $GI_{i,j}$ označuje hrubý výnos v i -tém roce a v j -té linii podnikání a β_j pevně stanovené faktory pro jednotlivé linie podnikání, viz tabulka 2.1.

2.3 Pokročilý přístup

Posledním možným přístupem je pokročilý přístup (Advanced Measurement Approach - AMA). Kapitálový požadavek pro operační riziko odpovídá míře rizika, kterou generuje interní model pro operační riziko banky. Tento přístup podléhá schválení regulatorního dohledu.

Od mezinárodně působících bank a bank, které jsou vystaveny možným významným ztrátám z operačního rizika, se očekává, že budou používat sofistikovanější

přístup než přístup základního indikátoru, tedy přístup, který odpovídá jejich rizikovému profilu.

My se nyní zaměříme právě na poslední zmíněný přístup.

Kapitola 3

Pokročilý přístup

Použití pokročilého přístupu pro modelování operačního rizika podléhá několika kvalifikačním a kvantifikačním kritériím, které musí banka splňovat.

Banka musí v interním modelu využít a vhodně kombinovat interní a relevantní externí data. Dále použít analýzu scénářů a další faktory odrážející specifické bankovní prostředí, včetně systémů interních kontrol.

Výpočet regulačního kapitálového požadavku musí dosahovat standardu srovnatelného s hladinou spolehlivosti 99,9 % pro období jednoho roku.

Basel 2 nedoporučuje žádné konkrétní přístupy a postupy, jak modelovat operační riziko, nicméně banka musí být schopná dokázat, že její interní model zahrnuje potenciální extrémní škody, které nastávají s nízkou pravděpodobností.

Interní model musí správně modelovat očekávanou i neočekávanou ztrátu z operačního rizika. Kapitálový požadavek by pak měl sloužit hlavně k pokrytí neočekávaných ztrát, zatímco očekávané ztráty by měla banka pokrýt k tomu určenými vlastními rezervami. Pokud však banka nemůže doložit pokrytí očekávaných ztrát vlastní činností a zdroji, pak je regulační kapitálový požadavek stanoven jakou součet očekávané a neočekávané ztráty.

Očekávaná ztráta je střední hodnotou celkové ztráty. A neočekávaná ztráta se stanoví například jako rozdíl hodnoty v riziku (VaR) na hladině 99,9 % a očekávané ztráty. Abychom mohli provést tento výpočet, potřebujeme tedy znát rozdělení celkové ztráty. Tím se budeme více zabývat později.

Poznámka. *Pro ztrátu přesahující 99,9%-hodnotu v riziku není vyžadován kapitál. Taková ztráta se nazývá katastrofickou ztrátou.*

V pokročilém přístupu se operační riziko a jeho události modelují v jednotlivých rizikových skupinách (buňkách), které vzniknou rozdělením aktivit banky do 8 linií podnikání (stejně jako ve standardizovaném přístupu, viz tabulka 2.1) a dále rozdělením událostí operačního rizika do 7 typů ztrátových událostí, popsaných v tabulce 3.1. Tím nám vznikne matice různých typů událostí.

Banka tedy modeluje ztráty z operačního rizika v jednotlivých liniích podnikání, kde je dělí podle typů ztrátových událostí. Každou buňku matice lze ještě detailněji rozdělit na další podskupiny a modelovat události až v nich. Nicméně to není vždy možné vzhledem k nedostatku dat a tak většinou banky využívají pouze dělení do buněk matice typů událostí.

V každé buňce se modeluje počet událostí, které v ní nastanou a k nim příslušné ztráty, které z nich plynou. K tomu je potřeba opět znát rozdělení počtů a výší ztrát v každé buňce.

k	Typ události (ET)
1	Vnitřní nekalé jednání
2	Vnější nekalé jednání
3	Pracovněprávní postupy a bezpečnost provozu
4	Klienti, produkty a obchodní postupy
5	Škody na hmotném majetku
6	Narušení činností a selhání systémů
7	Provádění transakcí, dodávky a řízení postupů

Tabulka 3.1: Typy ztrátových událostí.

Drobné nebo menší ztráty z operačního rizika mohou nastávat hodně často a takových událostí je velké množství. Takové ztráty však nejsou pro banku zásadní a neohrožují ji významně. Vzhledem k tomu se často přistupuje k omezení výše jednotlivých ztrát zdola nějakou částkou a modelují se pouze ztráty, které tuto částku přesahují. Tyto události se pak modelují pomocí useknutých rozdělení.

Také je potřeba zmínit, že některé události mohou ovlivnit více buněk v matici. Z toho pak plyne, že mezi buňkami může vznikat nějaká závislost. To znamená, že ztráty v jednotlivých buňkách mohou být na sobě závislé. To pak může výpočet celkové ztráty z operačního rizika značně ovlivnit. Závislostmi i useknutými rozděleními se budeme více zabývat v následující kapitole.

Poznámka. *Když banka používá pokročilý přístup pro modelování operačního rizika, je povoleno, aby zohlednila vliv pojištění na snížení rizika. Pojištění se zahrne do výpočtu regulatorního minimálního kapitálového požadavku pro operační riziko. Snížení kapitálového požadavku pojištěním je omezeno na 20 % z celkového kapitálového požadavku pro operační riziko.*

Možnost využít tohoto snížení kapitálového požadavku závisí na splnění několika podmínek. Například, že poskytovatel pojištění má pro schopnost placení škod minimální rating A, případně jemu ekvivalentní, nebo že pojistná smlouva nesmí být sjednána před méně než jedním rokem a období pro oznámení její výpovědi musí být alespoň 90 dní.

3.1 LDA přístup

Přístup LDA neboli „loss distribution approach“ je metoda založená na modelování počtu a výše událostí. Počet se modeluje za nějakou časovou jednotku, většinou jeden rok, ke každé z nich pak výše. Tuto metodu často využívají pojišťovny při modelování škodních událostí. Lze ji však využít pro modelování výskytu libovolných událostí, u kterých známe nebo můžeme odhadnout pravděpodobnost výskytu událostí a z nich plynoucí ztrátu. Ztrátou rozumíme například její vyčíslení v peněžních jednotkách.

Počet a výši ztrát modelujeme jako náhodné veličiny. Počet událostí N je diskrétní náhodná veličina a ztráty z jednotlivých událostí $X_i, i = 1, \dots, N$ jsou spojitě náhodné veličiny, vzájemně nezávislé a zároveň nezávislé na náhodné veličině N .

Celkovou ztrátu

$$L = \sum_{i=1}^N X_i$$

lze pak modelovat pomocí složeného rozdělení.

Basel 2 pro modelování operačního rizika pomocí pokročilého přístupu neurčuje žádné konkrétní postupy, jak již bylo řečeno, a nemá ani konkrétní předpoklady o rozděleních využitých k výpočtům. Lze tedy využít libovolné metody, včetně přístupu LDA. Právě tento přístup budeme uvažovat a využijeme ho pro stanovení rozdělení celkové ztráty z operačního rizika.

3.2 Data operačního rizika

Základem pro vytvoření interního modelu jsou data, která odráží zkušenost konkrétní banky s operačním rizikem. Basel 2 určuje, jaká data musí banka použít, aby splnila požadavky pro použití pokročilého přístupu k modelování operačního rizika. Musí být využita interní data, externí data a analýza scénářů. Kromě [4] je tato část doplněna o [3].

Data tedy mohou být brána z různých zdrojů. Pro většinu bank nejsou interní data dostatečná, hlavně pokud se jedná o škody, které nastávají zřídka a jsou vysoké. Například banka, která v minulosti měla nízkou frekvenci škod z operačního rizika, by měla nižší požadovaný kapitál. Nicméně nic jí nezajišťuje, že nižší frekvence z minulosti bude znamenat nižší ztráty do budoucna. Externí databáze přidávají informaci o škodách, se kterými se banka prozatím nesetkala. Je tedy užitečné využívat i externí zdroje a stanovit tak adekvátní požadovaný kapitál.

3.2.1 Interní data

Banka musí shromažďovat interní data o škodách z operačního rizika. To je základním předpokladem pro vývoj a funkčnost spolehlivého interního modelu.

Interní data by měla být jasně propojitelná s aktuálními obchodními aktivitami banky, s technologickými postupy a s procedurami řízení rizik.

Interní model musí být vytvořen (i validován) na základě dat o škodách z alespoň pětiletého období. V případě, že banka přechází na pokročilý přístup poprvé, pak stačí data z tříletého období.

Proces sběru interních dat o škodách musí splnit několik standardů, aby byl vyhovující pro regulační požadavky. Banka musí být schopná svoje historická interní data o škodách roztrždit do buněk matice. Vzhledem k poměrně nízkému období pro sběr dat se může stát, že mnoho buněk bude obsahovat velmi málo škod nebo dokonce žádné. Hlavně pokud půjde o škody, které nenastávají často, případně které způsobí velkou ztrátu. Dále musí být zdokumentována kritéria, na základě kterých jsou škody do jednotlivých buněk přiřazeny.

Data musí odpovídat tomu, že banka postihla všechny svoje významné aktivity a rizika plynoucí ze všech možných činností. V případě, že banka některé

aktivity nebo rizika vynechala, musí být schopná prokázat, že by neměly vliv na celkové odhady rizika.

Data mohou být nějak vhodně ohraničena (useknuta) zespoda (hranicí často bývá 10 000 EUR). Banka by měla k datům o škodách zaznamenávat i informace o datu, okolnostech a příčinách škody.

V interních datech o škodách mohou někdy nastat velice speciální případy - okamžitě nahrazené škody, škody téměř nastalé, zisková událost, škody propojené časem, škody s více efekty.

Okamžitě nahrazené škody jsou takové škody, které jsou úplně nahrazeny ve velmi krátkém čase. Není přesně stanoveno, co je bráno jako krátký čas. Lze stanovit například 5 dní.

Škody téměř nastalé jsou takové, které nevyústily ve ztrátu. Zpravidla se nezahrnují do interních dat o škodách, které se využívají pro vytvoření modelu, nicméně měly by se brát v potaz alespoň jako indikátor rizika.

Zisková událost místo ztráty z operačního rizika generuje zisk. Stejně jako škoda téměř nastalá se nezahrnuje do interních dat, ale informace o ní se zaznamenávají.

Škody propojené v čase jsou sekvence škod v různých časech, způsobených jednou událostí operačního rizika. Do interních dat se zahrnou jako jednotlivé škody, je však potřeba mít o nich informaci, že jsou vzájemně propojené.

Škody s více efekty jsou opět škody vzniklé v důsledku jedné události operačního rizika, nicméně ovlivní více linií podnikání. Takové škody jsou také zahrnuty jednotlivě do dat s informací, že mezi nimi vzniká nějaká závislost.

3.2.2 Externí data

Banka musí používat vhodná externí data, veřejná data a sdružená data z oboru, obzvláště v případě, kdy je důvodné podezření, že banka může být vystavena málo častým a potenciálně extrémně vysokým škodám. Externí data by měla zahrnovat aktuální výši škod, informaci o aktivitách, při kterých se škoda může vyskytnout, informaci o příčinách a okolnostech škody, místo, kde se škoda stala, neboť různé země mohou čelit různým rizikům, a další informace, které mohou ostatním bankám pomoci při posouzení, zda je pro ně daná škoda relevantní. Externí data jsou dostupná přes externí databáze. Existují veřejné databáze a konsorcia bank. Konsorcium bank je nejvíce využívanou externí databází. Jedná se o sdružení bank, které si předávají informace o škodách z operačního rizika.

Externí databáze sdružují data ohraničená zespoda, přesahující například 20 000 EUR nebo třeba 1 milion USD. Hlavním důvodem je právě to, že banky sdílejí extrémní škody, které nastávají s malou pravděpodobností, a většina bank je v interních datech nemá.

Banka musí mít systematický proces pro určování situací, kdy musí být externí data použita, a metodiky určující, jak data zahrnout.

Podmínky a praktiky využívání externích dat musí být revidovány, dokumentovány a musí podléhat pravidelnému nezávislému posouzení.

3.2.3 Analýza scénářů

Banka musí používat analýzu scénářů v souvislosti s využitím externích dat k vyhodnocení rizika plynoucího z extrémně vysokých škod. Tento přístup vychází ze znalostí zkušených manažerů a expertů řízení rizik a používá se k identifikování rizik, analyzování historických interních i externích škod, posuzují se aktuální i plánované kontroly v bance, atd. To může zahrnovat názory na frekvenci výskytu a velikost škod, názory na statistická rozdělení potenciálních ztrát. Výsledkem mohou být například parametry předpokládaných statistických rozdělení ztrát.

Analýza scénářů by měla být využita i k posouzení vlivu odchylek od předpokladů vložených do interního modelu pro operační riziko. Dále také k vyhodnocení potenciálních ztrát plynoucích z mnoha souběžných událostí operačního rizika.

Analýza scénářů je velmi subjektivní metoda a měla by být kombinována s analýzou dat. V průběhu času musí být výstupy z analýzy scénářů validovány a případně přehodnoceny při porovnání s aktuálními zkušenostmi/daty o ztrátách, kvůli zajištění jejich rozumnosti.

3.2.4 Kombinace interních a externích dat

Obvykle se předpokládá, že interní data a externí data pocházejí ze stejného rozdělení. Nicméně sloučení interních a externích dat vede k nepřesným kapitálovým požadavkům, hlavně proto, že externí data jsou vychýlená vzhledem k extrémním škodám. K tomuto vychýlení dochází, protože v externích databázích jsou zaznamenávány pouze extrémní škody. Je tedy potřeba se ujistit, že sloučení databází povede k nevychýleným odhadům.

3.2.5 Úprava dat

Data používaná pro vytvoření interního modelu, interní i externí, mohou být ovlivněna různými událostmi. Například změnami v procesech banky, vývojem IT technologií, případně využívá banka historických dat, která už nejsou aplikovatelná na aktuální období. Externí data mohou pocházet z různých zdrojů, které nejsou konzistentní, protože sdružují různé individuální profily. V takových případech je potřeba data nějakým vhodným způsobem upravit.

- Úprava inflace - v případě využití historických dat, je potřeba na škody použít vhodný index pro inflaci, obzvláště když využíváme data z různých zemí.
- Úprava externích dat - využití externích dat může hodně ovlivnit výsledný kapitálový požadavek. Je proto třeba vzít v úvahu přesné informace o dané škodě a její výši pak upravit pro potřeby konkrétní banky. Například vzít v úvahu počet zaměstnanců nebo hrubý výnos banky, kde škoda vznikla a banky, kde se škoda zahrne do dat a podle tohoto poměru škodu upravit. Jakýkoliv proces úprav dat by měl být systematický a měl by vést k tomu, že výstup bude konzistentní s rizikovým profilem dané banky.
- Úprava interních dat - interní data upravíme například při změnách procesů banky nebo v případě, že banka přestala provozovat nějakou konkrétní činnost, ze které plynula možnost ztrát z operačního rizika. V takovém

případě je možnost část interních dat upravit, případně úplně vynechat, protože už nejsou relevantní.

Kapitola 4

LDA přístup

V této kapitole se budeme zabývat pravděpodobnostními rozděleními, která jsou využívána pro modelování ztrát z operačního rizika. Využijeme k tomu právě přístup LDA.

Naším cílem je určit rozdělení celkové ztráty modelované pomocí náhodné veličiny L se složeným rozdělením:

$$L = \sum_{i=1}^N X_i,$$

kde N je počet událostí (frekvence) během jednoho roku modelovaná jako diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $p(k) = \mathbb{P}(N = k)$, $k = 0, 1, \dots$ a s distribuční funkcí $P(n) = \mathbb{P}(N \leq n) = \sum_{k=0}^n p(k)$.

X_i , $i = 1, \dots, N$ jsou kladné výše škod modelované jako nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se spojitou distribuční funkcí $F_X(x)$, $x \geq 0$ a hustotou $f_X(x)$. N a X_i jsou nezávislé pro všechna i . Distribuční funkci ztráty L budeme značit $F_L(x)$ a hustotu $f_L(x)$.

Distribuční funkce ztráty L je následujícího tvaru:

$$F_L(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(L \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot \mathbb{P}(L \leq x \mid N = n) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot F_X^{*n}(x), & \text{pokud } x > 0, \\ p(0), & \text{pokud } x = 0, \end{cases}$$

kde $*$ je operátor konvoluce a $F_X^{*n}(x) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq x)$ je n -tá konvoluce distribuční funkce $F_X(\cdot)$ vyjádřená jako

$$F_X^{*n}(x) = \int_0^x F_X^{*(n-1)}(x-y) f_X(y) dy,$$

kde

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

V předchozí kapitole bylo popsáno rozřazení jednotlivých škod/ztrát z operačního rizika do rizikových buněk a bylo zmíněno, že banka musí modelovat pro každou

buňku počet a výši škod. Ztrátu, tak jak je popsána výše, budeme tedy potřebovat pro každou rizikovou buňku zvlášť.

Jednotlivé ztráty by měly být tedy označeny:

$$X_i^{b,e}, b = 1, \dots, 8, e = 1, \dots, 7, i = 1, \dots, N^{b,e},$$

kde b značí jednotlivé linie podnikání, e značí jednotlivé typy událostí a $N^{b,e}$ značí počet událostí v rizikové buňce (b,e) .

Ztráta v rizikové buňce (b,e) je pak označena

$$L^{b,e} = \sum_{i=1}^{N^{b,e}} X_i^{b,e}, b = 1, \dots, 8, e = 1, \dots, 7.$$

Pokud budeme mít rozdělení ztráty pro každou rizikovou buňku, máme i celkovou ztrátu:

$$L = \sum_{b=1}^8 \sum_{e=1}^7 L^{b,e}.$$

Nyní můžeme určit kapitálový požadavek K_{AMA} . Ten spočítáme pomocí nějaké míry rizika na hladině α :

$$K_{AMA} = \rho_\alpha(L).$$

Ke ztrátám z jednotlivých rizikových buněk také můžeme spočítat příslušné kapitálové požadavky $K_{AMA}^{b,e}$. Opět s využitím nějaké míry rizika na hladině α :

$$K_{AMA}^{b,e} = \rho_\alpha(L^{b,e}).$$

Musíme však dávat pozor, neboť obecně platí:

$$K_{AMA} = \rho_\alpha(L) \neq \sum_{b=1}^8 \sum_{e=1}^7 \rho_\alpha(L^{b,e}) = \sum_{b=1}^8 \sum_{e=1}^7 K_{AMA}^{b,e}. \quad (4.1)$$

Následuje tedy otázka, jak agregovat rizika z jednotlivých buněk do celkového kapitálového požadavku.

Součet jednotlivých kapitálových požadavků lze použít v případě, že ztráty z jednotlivých rizikových buněk jsou komonotónní, tzn. jsou perfektně pozitivně závislé. Potom ve vztahu 4.1 platí rovnost.

Definice 1. *Náhodné veličiny L_1, \dots, L_k jsou komonotónní pokud existují neklesající funkce g_1, \dots, g_k a náhodná veličina Z tak, že rozdělení vektoru (L_1, \dots, L_k) je stejné jako rozdělení $(g_1(Z), \dots, g_k(Z))$.*

Další možností, kdy lze využít součet jednotlivých kapitálových požadavků je v případě, že zvolená míra rizika je subaditivní.

Definice 2. *Míra rizika ρ se nazývá subaditivní, pokud pro libovolné dvě náhodné veličiny X, Y platí:*

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Subaditivita nám tedy zaručí, že součet jednotlivých kapitálových požadavků bude větší nebo roven požadovanému celkovému kapitálovému požadavku. V takovém případě se jedná o konzervativní přístup banky ke kapitálovému požadavku. To však nemusí být po banku žádoucí. Basel 2 povoluje i měření závislostí mezi rizikovými buňkami a rizika pak lze agregovat s využitím těchto závislostí - to nám umožní použití i míru rizika, která není subaditivní. Tímto se však budeme zabývat až později.

Další otázkou je volba míry rizika, popíšeme dvě nejznámější a nejčastěji používané.

Hodnota v riziku

Hodnota v riziku na hladině α (VaR_α) je definovaná jako α -kvantil rozdělení ztráty, tj.

$$\text{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha), \alpha \in (0,1).$$

Hodnota v riziku obecně není subaditivní mírou rizika, přesto je v praxi nejčastěji používanou mírou rizika. Zpravidla se tedy předpokládá, že ztráty v jednotlivých buňkách jsou komonotónní.

Zbytková hodnota v riziku

Zbytková hodnota v riziku na hladině α (ES_α) je definovaná jako

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_p(L) dp, \alpha \in (0,1).$$

Protože rozdělení ztráty L uvažujeme se spojitou distribuční funkcí F_L , platí následující vztah:

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}(L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)).$$

Zbytková hodnota v riziku je tedy očekávaná ztráta v případě, že je ztráta větší než hodnota v riziku.

Zbytková hodnota v riziku je subaditivní mírou rizika.

4.1 Rozdělení

Abychom mohli určit rozdělení ztráty, musíme nejprve určit rozdělení počtu škod a rozdělení výší škod. V předchozím textu bylo řečeno, že ztráta se určuje pro každou rizikovou buňku zvlášť, nicméně v následujícím textu budeme ztrátu pro jednoduchost označovat pouze jako L (počet škod jako N a výše škod jako X_i). Nebudeme používat indexy určující, o kterou rizikovou buňku se jedná, neboť určování rozdělení ztráty je pro každou buňku stejné.

4.1.1 Useknuté rozdělení

Ztráty z operačního rizika jsou často hlášeny až nad nějakou minimální hranicí. Banka tudíž nemá kompletní data pro modelování operačního rizika. Takováto data se nazývají zleva useknutá. Teorii k useknutým rozdělením čerpáme z [1]

a doplníme ji o [2]. K odhadování parametrů se použijí škody nahlášené nad minimální hranicí. Nejčastější metodou pro odhadování je pak metoda maximální věrohodnosti. V praxi jsou často chybějící data úplně ignorována. To však může vést k významnému nadhodnocení nebo podhodnocení kapitálu.

Nyní budeme používat následující označení. Celková ztráta se složeným rozdělením v roce m je L_m , počet škod v roce m je N_m . Dále jednotlivé výše škod $X_i(m)$ a časy, ve kterých nastaly $T_i(m)$, $i = 1, \dots, N_m$, $m = 1, 2, \dots$ (uspořádané v čase) označíme jako X_j a T_j , platí $T_1 < T_2 < \dots$.

Dále označme distribuční funkci X_j jako $F(x | \beta)$ a hustotu $f(x, \beta)$, kde β značí parametr nebo vektor parametrů rozdělení výše škod. Pravděpodobnostní funkci N_m , $m = 1, 2, \dots$ označíme $p(n | \lambda) = \mathbb{P}(N_m = n)$, kde λ je parametr nebo vektor parametrů frekvence škod. Nakonec si označíme $\gamma = (\lambda, \beta)$ vektor parametrů frekvence a výše škod.

Nejčastěji jsou události operačního rizika modelovány pomocí homogenního bodového Poissonova procesu s intenzitou λ . Pokud máme Poissonův proces pak N_m , $m = 1, 2, \dots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s Poissonovým rozdělením:

$$\mathbb{P}(N_m = n) = p(n | \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda), \lambda > 0, n = 0, 1, \dots$$

Další vlastností Poissonova procesu je, že doby mezi nastáním událostí

$$\delta T_j = T_j - T_{j-1}, j = 1, 2, \dots$$

($T_0 = t_0$ je počátek sledovaného období) jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou a distribuční funkcí:

$$g(\tau | \lambda) = \lambda \exp(-\lambda\tau)$$

a

$$G(\tau | \lambda) = 1 - \exp(-\lambda\tau).$$

Pokud jsou ztráty pocházející z rozdělení s hustotou $f(x | \beta)$ hlášeny nad hranicí H (ta je známá), pak hustota ztrát nad hranicí H je zleva useknutá a lze ji vyjádřit takto:

$$f^H(x | \beta) = f(x | \beta | X > H) = \frac{f(x | \beta)}{\mathbb{P}(X > H)} = \frac{f(x | \beta)}{1 - F(H | \beta)}, H \leq x < \infty. \quad (4.2)$$

Příslušná distribuční funkce těchto ztrát je pak

$$F_H(x | \beta) = \mathbb{P}(X \leq x | X > H) = \frac{F(x | \beta) - F(H | \beta)}{1 - F(H | \beta)}, x > H.$$

Škody nad hranicí H se také řídí Poissonovým procesem s intenzitou

$$\lambda^H = \lambda(1 - F(H | \beta)). \quad (4.3)$$

Vztah 4.3 dokážeme později i pro jiná rozdělení (v části o rozdělení počtu škod).

Počet škod v daném roce nad hranicí H má tedy také Poissonovo rozdělení s parametrem λ^H .

Pro odhad parametrů rozdělení počtu škod lze použít buď roční počty škod, nebo časy, ve kterých události nastaly. Uvedeme nyní obě možnosti.

1. Data o počtu škod.

Máme k dispozici data o počtu škod \tilde{n}_m za rok a o výších škod \tilde{x}_j za období T let. Jedná se o škody hlášené nad hranicí H . Pro dané parametry modelu γ je věrohodnostní funkce při $\tilde{N}_m = \tilde{n}_m$ a $\tilde{X}_j = \tilde{x}_j$ následující:

$$l(\gamma) = \prod_{j=1}^J f_H(\tilde{x}_j|\beta) \prod_{m=1}^T p(\tilde{n}_m|\lambda^H). \quad (4.4)$$

2. Data o časech událostí

K dispozici máme data o časech nastalých událostí a výše škod v časovém intervalu $[t_0, t_E]$, kde t_E je maximální čas, do kterého pozorujeme data. Pak věrohodnostní funkce při $\delta\tilde{T}_j = \tilde{\tau}_j$ a $\tilde{X}_j = \tilde{x}_j$ je následující:

$$l(\gamma) = (1 - G(t_E - \tilde{t}_J|\lambda^H)) \prod_{j=1}^J f_H(\tilde{x}_j|\beta)g(\tilde{\tau}_j|\lambda^H) \quad (4.5)$$

$$= (\lambda)^J \exp(-\lambda^H(t_E - t_0)) \prod_{j=1}^J f(\tilde{x}_j|\beta), \quad (4.6)$$

kde $1 - G(t_E - \tilde{t}_J | \lambda^H)$ je pravděpodobnost, že v intervalu $[\tilde{t}_J, t_E]$ nenastane žádná událost.

Poznámka. Pokud počátek a konec sledovaného období odpovídají prvnímu a poslednímu roku, pak odvození obou věrohodnostních funkcí je ekvivalentní, protože v takovém případě se věrohodnostní funkce 4.4 a 4.6 liší pouze faktorem, který nezávisí na parametrech modelu.

Odhad metodou maximální věrohodnosti

Odhady metodou maximální věrohodnosti (MLE) $\hat{\gamma}$ jsou hodnoty parametrů γ rozdělení počtu a výše škod maximalizující věrohodnostní funkci. V případě, že máme data o počtech škod, maximalizujeme funkci 4.4 a v případě, že máme časy pozorovaných událostí, pak maximalizujeme funkci 4.6.

1. Data o počtech škod.

Z 4.4 budeme maximálně věrohodný odhad parametru γ hledat jako řešení rovnic:

$$\frac{\partial \ln l(\gamma)}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \ln l(\gamma)}{\partial \beta} = 0, \quad (4.8)$$

kde

$$\ln l(\gamma) = \sum_{j=1}^J \ln(f_H(\tilde{x}_j|\beta)) + \sum_{m=1}^T \ln(p(\tilde{n}_m|\lambda^H)). \quad (4.9)$$

Rovnice pro maximálně věrohodné odhady mají tvar:

$$\frac{\partial \ln l(\gamma)}{\partial \lambda} = (1 - F(H|\beta)) \sum_{m=1}^T \frac{\partial}{\partial \lambda^H} \ln(p(\tilde{n}_m|\lambda^H)) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \ln l(\gamma)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{j=1}^J \ln(f_H(\tilde{x}_j|\beta)) - \lambda \frac{\partial F(H|\beta)}{\partial \beta} \sum_{m=1}^T \frac{\partial}{\partial \lambda^H} \ln(p(\tilde{n}_m|\lambda^H)) = 0. \quad (4.11)$$

Z rovnice 4.10 vidíme, že $\sum_{m=1}^T \frac{\partial}{\partial \lambda^H} \ln(p(\tilde{n}_m|\lambda^H))$ je nula neboť $1 - F(H|\beta)$ je nenulové (nemá smysl uvažovat hranici H takovou, že $\mathbb{P}(X > H) = 0$). Potom z druhé rovnice vidíme, že odhad $\hat{\beta}$ pro rozdělení výší škod získáme maximalizováním pouze

$$\sum_{j=1}^J \ln f_H(\tilde{x}_j|\beta). \quad (4.12)$$

Následně z rovnice 4.10 získáme odhad $\hat{\lambda}$ dosazením Poissonovy pravděpodobnostní funkce:

$$(1 - F(H|\beta)) \sum_{m=1}^T \frac{\partial}{\partial \lambda^H} \ln \left(\frac{(\lambda^H)^{\tilde{n}_m}}{\tilde{n}_m!} \cdot \exp(-\lambda^H) \right) = 0, \quad (4.13)$$

$$(1 - F(H|\beta)) \sum_{m=1}^T \frac{\partial}{\partial \lambda^H} (\tilde{n}_m \cdot \ln(\lambda^H) - \ln(\tilde{n}_m!) - \lambda^H) = 0, \quad (4.14)$$

$$(1 - F(H|\beta)) \left(\sum_{m=1}^T \tilde{n}_m \cdot \frac{1}{\lambda^H} - 1 \right) = 0. \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

Výsledný odhad je tedy:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{1 - F(H|\hat{\beta})} \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=1}^T \tilde{n}_m. \quad (4.17)$$

Zároveň vidíme, že maximálně věrohodný odhad λ^H je:

$$\lambda^{\hat{H}} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^T \tilde{n}_m.$$

2. Data o časech událostí.

Z 4.6 budeme maximálně věrohodný odhad parametru γ opět hledat jako řešení rovnic, ve kterých položíme derivace logaritmu věrohodnostní funkce rovné 0. Tentokrát máme:

$$\ln l(\gamma) = J \cdot \ln \lambda - \lambda^H (t_E - t_0) + \sum_{j=1}^J \ln(f(\tilde{x}_j|\beta)). \quad (4.18)$$

Platí:

$$\frac{\partial \ln l(\gamma)}{\partial \lambda} = \frac{J}{\lambda} - (1 - F(H|\beta))(t_E - t_0) = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \ln l(\gamma)}{\partial \beta} = \lambda(t_E - t_0) \frac{\partial F(H|\beta)}{\partial \beta} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(f(\tilde{x}_j|\beta)) = 0. \quad (4.20)$$

Z 4.19 vidíme, že odhad $\hat{\lambda}$ je

$$\hat{\lambda} = \frac{J}{(1 - F(H|\hat{\beta}))(t_E - t_0)} \quad (4.21)$$

a to je ekvivalentní k odhadu λ v 4.17 pokud počátek a konec sledovaného období odpovídají začátku a konci prvního a posledního pozorovaného roku.

Když dosadíme $\hat{\lambda}$ do 4.20 a následně pak využijeme vztah 4.2

$$f(x) = f_H(x) \cdot (1 - F(H)), x > H$$

dostaneme:

$$0 = \frac{J}{(1 - F(H|\beta))} \cdot \frac{\partial F(H|\beta)}{\partial \beta} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(f(\tilde{x}_j|\beta)), \quad (4.22)$$

$$0 = \frac{J}{(1 - F(H|\beta))} \cdot \frac{\partial F(H|\beta)}{\partial \beta} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(f_H(\tilde{x}_j|\beta)) + J \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(1 - F(H|\beta)). \quad (4.23)$$

S využitím derivace logaritmu dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(1 - F(H|\beta)) = \frac{\partial}{\partial \beta} (1 - F(H|\beta)) \cdot \frac{1}{(1 - F(H|\beta))} = -\frac{\partial}{\partial \beta} F(H|\beta) \cdot \frac{1}{(1 - F(H|\beta))}.$$

Nyní vidíme, že odhad $\hat{\beta}$ získáme opět maximalizováním

$$\sum_{j=1}^J \ln f_H(\tilde{x}_j|\beta). \quad (4.24)$$

Máme tedy parametr Poissonova rozdělení pro počet všech kladných škod získaný na základě dat o počtu škod nad hranicí H (nebo na základě dat o časech nastalých událostí) a s využitím rozdělení výše škod.

Použití useknutého rozdělení

Data, která jsou pod minimální hranicí jsou často v analýzách ignorována s odůvodněním, že požadovaný kapitál je hlavně ovlivněn vysokými škodami s malou pravděpodobností výskytu. Nicméně, i když je vliv těchto nízkých škod malý, měly by se brát v potaz alespoň kvůli ověření vhodnosti minimální hranice.

Předpokládejme, že správný model je založen na ročních počtech škod N pocházejících z rozdělení $P(\cdot|\lambda)$ a výších škod X_j z rozdělení $F(\cdot|\beta)$ a s hustotou $f(\cdot|\beta)$. Nyní $P(\cdot|\lambda)$ je obecně rozdělení pro počet škod, nemusí se jednat o Poissonovo a λ je k němu příslušný parametr, případně vektor parametrů. Stále platí předpoklad, že výše škod jsou nezávislé stejně rozdělené a nezávislé na počtu škod. Pak frekvence \tilde{N} nad hranicí H je z rozdělení $\tilde{P}(\cdot|\lambda^H)$ (λ^H závisí na parametrech λ a β a na hranici H) a výše škod \tilde{X}_j větší než hranice H jsou z rozdělení s distribuční funkcí $F_H(x|\beta)$.

Odhadnutí správného modelu je následující:

S využitím rozdělení frekvence $\tilde{P}(\cdot|\lambda^H)$ a rozdělení výše škod $F_H(x|\beta)$ useknutých dat odhadneme parametry λ a β pomocí metody maximální věrohodnosti na datech, která jsou k dispozici. Potom roční ztráta je

$$L^{(0)} = \sum_{i=1}^N X_i, \quad N \sim P(\cdot|\lambda), \quad X_i \sim F(\cdot|\beta).$$

Tento výpočet je za předpokladu, že data pod minimální hranicí jsou generována ze stejného procesu jako data nad hranicí, což budeme nadále předpokládat.

4.1.2 Rozdělení výší škod

Abychom mohli použít metodu maximální věrohodnosti pro odhad parametrů tak jak byla popsána, musíme znát rozdělení, jehož parametry chceme odhadovat.

V tabulce 4.1 máme několik možných rozdělení vhodných pro modelování výší škod.

Pro ztráty z operačního rizika je typické, že je poměrně velká pravděpodobnost výskytu velmi vysokých hodnot. Proto se pro jejich modelování používají rozdělení s tzv. těžkými chvosty. Není jednoznačně určeno, jak určit těžké chvosty. Jednou z možností je dívat se na chování chvostů, tzn. sledovat limitní chování funkce $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = \bar{F}(x)$ pro $x \rightarrow \infty$.

Můžeme porovnat chování chvostů dvou rozdělení s distribučními funkcemi F_1 a F_2 a se stejnou střední hodnotou, tak, že spočteme limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_2}.$$

Název rozdělení	hustota rozdělení	
Log-normální (μ, σ)	$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$,	$\sigma^2 > 0, \mu \in \mathbb{R}$
Exponenciální (θ)	$f(x; \theta) = \theta \exp(-\theta x)$,	$\theta > 0$
Pareto (α, θ)	$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$,	$\alpha > 0, \theta > 0$
Weibullovo (θ, τ)	$f(x; \theta, \tau) = \frac{\tau(x/\theta)^\tau \exp(-(x/\theta)^\tau)}{x}$,	$\theta > 0, \tau > 0$
Gama (α, θ)	$f(x; \alpha, \theta) = \frac{(x/\theta)^\alpha \exp(-x/\theta)}{x\Gamma(\alpha)}$,	$\alpha > 0, \theta > 0$
Log-logistické (γ, θ)	$f(x; \gamma, \theta) = \frac{\gamma(x/\theta)^\gamma}{x[1+(x/\theta)^\gamma]}$,	$\gamma > 0, \theta > 0$

Tabulka 4.1: Rozdělení výší škod.

Pokud tato limita vyjde nekonečná, pak můžeme říct, že rozdělení s F_1 má těžší chvost než rozdělení s F_2 .

Vždy je potřeba otestovat na aktuálních datech několik různých rozdělení a pak určit, které je nejvhodnější. Přesto platí, že nejčastěji se pro modelování výší škod používá logaritmicko-normální rozdělení.

Při určování, které rozdělení je nejvhodnější se používají grafické i analytické metody. Analytickými metodami jsou hlavně statistické testy dobré shody - například Kolmogorov-Smirnovův test.

4.1.3 Rozdělení počtu škod

Zatím jsme se zabývali pouze Poissonovým rozdělením pro počty škod. Dalšími možnostmi jsou negativně binomické a binomické rozdělení. Platí, že binomické rozdělení má větší střední hodnotu než rozptyl, naopak negativně binomické má menší střední hodnotu než rozptyl a pro Poissonovo je střední hodnota rovná rozptylu. Této vlastnosti se často využívá při volbě vhodného rozdělení pro počet škod.

Další užitečnou vlastností těchto rozdělení je, že jejich typ je zachován při jejich useknutí. Tuto vlastnost jsme již dříve využili pro Poissonovo rozdělení, nyní ji zavedeme formálně. Věta s důkazem jsou převzaty z [1].

Věta 3. Frekvence useknutých škod.

Uvažujme nezávislé škody X_1, X_2, \dots, X_N s distribuční funkcí $F(x)$ během nějakého období. Předpokládejme, že škody jsou nezávislé na frekvenci N . Označme frekvenci škod nad hranicí H jako N_H . Potom

- Pokud $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, pak $N_H \sim \text{Poisson}(\lambda(1 - F(H)))$.
- Pokud $N \sim \text{NegBin}(r, p)$, kde parametr $p = \frac{1}{1+q}$ pak $N_H \sim \text{NegBin}(r, \tilde{p})$ s $\tilde{p} = \frac{1}{1+\tilde{q}}$, kde $\tilde{q} = q(1 - F(H))$.

- Pokud $N \sim \text{Bin}(n, p)$, pak $N_H \sim \text{Bin}(n, \tilde{p})$, kde $\tilde{p} = p(1 - F(H))$.

Důkaz. Ukážeme obecnější výsledek aplikovatelný na všechny 3 typy rozdělení. Obecně lze vztah rozdělení mezi N a N_H vyjádřit následovně. Předpokládejme, že pravděpodobnostní funkce počtu škod N je známá ve tvaru $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ a příslušná vytvořující funkce pravděpodobnosti je

$$\psi_N(t) = \mathbb{E}(t^N) = \sum_k p_k t^k. \quad (4.25)$$

Uvažujme součet $S = M_1 + \dots + M_N$, kde N je diskrétní náhodná veličina s vytvořující funkcí pravděpodobnosti právě $\psi_N(t)$ a M_i jsou nezávislé diskrétní náhodné veličiny s vytvořující funkcí pravděpodobnosti $\psi_M(t)$. S využitím faktu, že vytvořující funkce pravděpodobnosti součtu nezávislých náhodných veličin je součin jednotlivých vytvořujících funkcí pravděpodobnosti, je vytvořující funkce pravděpodobnosti S následující

$$\psi_S(t) = \sum_k \mathbb{P}(S = k) t^k \quad (4.26)$$

$$= \sum_k \sum_n \mathbb{P}(M_1 + \dots + M_n = k | N = n) \cdot \mathbb{P}(N = n) t^k \quad (4.27)$$

$$= \sum_n \mathbb{P}(N = n) (\psi_M(t))^n \quad (4.28)$$

$$= \psi_N(\psi_M(t)). \quad (4.29)$$

Počet škod nad hranicí H můžeme zapsat jako:

$$N_H = I_1 + \dots + I_N,$$

kde I_j jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny označující, zda daná škoda překročila hranici H :

$$\mathbb{P}(I_j = 1) = \mathbb{P}(X_j > H) = 1 - F(H), \quad (4.30)$$

$$\mathbb{P}(I_j = 0) = \mathbb{P}(X_j \leq H) = F(H), \quad (4.31)$$

s vytvořující funkcí pravděpodobnosti

$$\psi_I(t) = F(H) + t(1 - F(H)) = 1 + (1 - F(H))(t - 1).$$

Vytvořující funkce pravděpodobnosti počtu škod nad hranicí H lze spočítat jako

$$\psi_{N_H}(t) = \psi_N(\psi_I(t)).$$

Navíc, pokud rozdělení N je parametrizováno nějakým parametrem θ a jeho vytvořující funkce pravděpodobnosti má speciální tvar $\psi_N(t; \theta) = g(\theta(t - 1))$, tj. t a θ se objevují v $\psi_N(t; \theta)$ pouze jako $\theta(t - 1)$ pak

$$\psi_{N_H}(t; \theta) = g(\theta(1 - F(H))(t - 1)) = \psi_N(t; \theta(1 - F(H))).$$

To znamená, že obě náhodné veličiny N a N_H mají stejný typ rozdělení s různými parametry θ . Tedy pokud N má rozdělení $P(\cdot|\theta)$, pak N_H má rozdělení $P(\cdot|\tilde{\theta})$, kde $\tilde{\theta} = \theta(1 - F(H))$.

Posledním krokem důkazu je ověřit, že zmíněná tři rozdělení mají vytvořující funkci ve speciálním tvaru $\psi_N(t; \theta) = g(\theta(t - 1))$.

Poissonovo rozdělení:

$$\psi_{N_P}(t) = \sum_k \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda) \cdot t^k = \exp(-\lambda) \sum_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \exp(\lambda(t - 1)).$$

Binomické rozdělení:

$$\psi_{N_B}(t) = \sum_k \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \cdot t^k = (pt + (1 - p))^n = (1 - p(1 - t))^n.$$

Negativně binomické rozdělení:

$$\psi_{N_{NB}}(t) = \sum_k \binom{k + r - 1}{k} p^r \cdot (1 - p)^k \cdot t^k.$$

V tomto případě si nejprve upravíme kombinační číslo:

$$\begin{aligned} \binom{k + r - 1}{k} &= \frac{(k + r - 1)!}{(r - 1)!k!} = \frac{(k + r - 1) \dots r}{1 \cdot 2 \dots k} = \\ &= (-1)^k \frac{(-r)(-r - 1) \dots (-r - k + 1)}{1 \cdot 2 \dots k} = \\ &= (-1)^k \binom{-r}{k}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme upravit vytvořující funkci

$$\begin{aligned} \psi_{N_{NB}}(t) &= \sum_k \binom{k + r - 1}{k} p^r \cdot (1 - p)^k \cdot t^k = p^r \sum_k \binom{-r}{k} (-(1 - p)t)^k = \\ &= p^r (1 - (1 - p)t)^{-r} = \left(\frac{p}{1 - (1 - p)t} \right)^r. \end{aligned}$$

Toto vyjádření nyní upravíme pomocí $p = \frac{1}{1+q}$:

$$\psi_{N_{NB}}(t) = \frac{1}{1 + q(1 - t)}.$$

Všechny tři vytvořující funkce jsou tedy speciálního tvaru. □

4.2 Modelování extrémních ztrát

Při modelování ztrát z operačního rizika je těžké najít takové rozdělení, které by vhodně prokládalo všechna data - od nízkých po vysoké škody. Proto je možné předpokládat, že data jsou rozdělena na dvě části. První část jsou nízké ztráty, které nastávají s velkou pravděpodobností - z rozdělení běžných škod. Druhá část jsou vysoké ztráty nastávající s malou pravděpodobností - z rozdělení chvostu. Každou z těchto dvou částí budeme modelovat zvlášť, pomocí různých rozdělení. K modelování vysokých ztrát použijeme teorii extrémních hodnot. Tuto teorii budeme čerpat z [7]. V této části nebudeme uvažovat hlášení škod nad minimální hranicí H .

Horní hranici, nad kterou jsou ztráty definovány jako extrémní, označíme u . Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí F . Při dané hranici u je rozdělení excesů (překročení X přes hranici u):

$$F_u(y) = \mathbb{P}(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (4.32)$$

Základním modelem pro modelování excesů je zobecněné Paretovo rozdělení (budeme značit GPD). Použití právě tohoto rozdělení je podloženo teorií extrémů (Věta Pickands-Balkema-de Haanova), která říká, že pro dostatečně velká u lze rozdělení excesů nad hranicí u aproximovat zobecněným Paretovým rozdělením. Proto lze toto rozdělení použít jako model vystihující rozdělení výše excesů nad touto hranicí. Distribuční funkce GPD je:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{pokud } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \text{pokud } \xi = 0, \end{cases}$$

kde $y \geq 0$ když $\xi \geq 0$ a $0 \leq y \leq \frac{-\beta}{\xi}$ pokud $\xi < 0$.

$\xi \in \mathbb{R}$ je parametr tvaru a $\beta > 0$ je parametr měřítka.

Pokud chceme určit rozdělení škod překračujících hranici u můžeme k tomu využít rozdělení excesů nad hranicí u :

$$\mathbb{P}(X \leq x \mid X > u) = \mathbb{P}(X - u \leq x - u \mid X > u) = F_u(x - u) = G_{\xi, \beta}(x - u). \quad (4.33)$$

Často potřebujeme modelovat celé rozdělení výší škod a ne pouze jeho chvost, s využitím vztahů 4.32 a 4.33 dostaneme distribuční funkci:

$$F(x) \cong \begin{cases} (1 - F(u))G_{\xi, \beta}(x - u) + F(u), & x > u, \\ F(x), & x \leq u. \end{cases} \quad (4.34)$$

Pro vysokou hranici u můžeme $F(u)$ odhadnout empirickým odhadem distribuční funkce $\hat{F}(u) = \frac{n - N_u}{n}$, kde N_u značí počet extrémních pozorování a n je počet všech pozorování.

Odhad rozdělení chvostu je pak:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad x > u.$$

Pro danou pravděpodobnost $q > \frac{n-N_u}{n}$ můžeme stanovit odhad kvantilu $\hat{F}^{-1}(q)$ invertováním odhadu rozdělení chvostu:

$$\hat{F}^{-1}(q) = u + \frac{\beta}{\xi} \left[\left(\frac{n}{N_u} (1-q) \right)^{-\xi} - 1 \right].$$

Odhad kvantilu je zároveň odhadem hodnoty v riziku $\hat{V}ar_q$ na hladině q .

4.2.1 Odhad parametrů GPD a určení hranice u

Pokud je určená hranice u , pak parametry GPD jsou odhadnuty na datech větších než u . Nejběžnější metodou pro odhad parametrů je metoda maximální věrohodnosti. GPD má následující hustotu:

$$g_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{y}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, & \text{pokud } \xi \neq 0, \\ \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Máme-li pozorování (excesy) y_1, \dots, y_{N_u} nad hranicí u , logaritmus věrohodnostní funkce je tvaru:

$$l(\xi, \beta) = \sum_{i=1}^{N_u} \ln(g_{\xi,\beta}(y_i))$$

a odhady parametrů získáme jako:

$$(\hat{\xi}, \hat{\beta}) = \arg \max_{\xi, \beta} l(\xi, \beta).$$

Určení hranice u je poměrně zásadní věc pro další modelování. Při nízké hranici bude relevantní počet dat, ale nebude zajištěno, že všechna data jsou extrémní. Naopak při příliš velké hranici bude málo dat k dispozici, tudíž se sníží kvalita odhadů a zvětší se jejich rozptyl. Jednou z možností je zvolit u pomocí grafické metody s využitím střední hodnoty excesů. Střední hodnota excesů je definovaná jako:

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u \mid X > u)$$

a její empirický odhad je:

$$\hat{e}_u = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} y_i.$$

Pokud graf empirické střední hodnoty excesů v závislosti na u vypadá, že je lineární nad nějakou hranicí u , pak excesy nad touto hranicí mají GPD. Grafická metoda může být problematická vzhledem k subjektivnímu posouzení grafu. Grafická metoda je založena na vztahu, který říká, že pokud rozdělení excesů je GPD s parametrem tvaru ξ a parametrem měřítka β , pak střední hodnota excesů je lineární funkcí hranice u :

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}.$$

Máme-li již odhadnuté parametry ξ a β , můžeme tento vztah použít k posouzení vhodnosti hranice u .

4.3 Stanovení kapitálu

V předchozích částech jsme se zabývali jednotlivými možnostmi, jak modelovat počty škod, výše škod a extrémní škody. V této části dáme některé modely dohromady a popíšeme, jak dospět ke kapitálovému požadavku. Výsledné rozdělení roční ztráty a z něj spočtený příslušný kapitálový požadavek se budou vztahovat k jedné rizikové buňce. Když máme spočteny kapitálové požadavky pro každou rizikovou buňku zvlášť, spočte se celkový kapitálový požadavek. Úlohou, jak agregovat jednotlivé buňky dohromady se budeme zabývat v následující kapitole.

Rozdělení celkové ztráty za rok se skládá z rozdělení počtu škod a výše škod. Tato dvě rozdělení budeme uvažovat a popisovat zvlášť. Zároveň vzhledem k využití teorie extrémů musíme oddělit rozdělení běžných škod a rozdělení chvostu.

4.3.1 Výše škod

Modelujeme zvlášť škody pod hranicí u a škody nad hranicí u . Pro odhadnutí rozdělení a parametrů pro škody pod hranicí u se použijí pouze interní data, zatímco pro odhadnutí rozdělení chvostu se využijí interní i externí data, případně data generovaná ze scénářů.

Hranice u se stanoví tak, aby data z různých zdrojů byla homogenní a zároveň aby jich byl dostatek nad hranicí u .

Na základě věty o úplné pravděpodobnosti můžeme distribuční funkci X zapísat jako

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(X \leq x \mid X \leq u) \cdot \mathbb{P}(X \leq u) \\ &\quad + \mathbb{P}(X \leq x \mid X > u) \cdot \mathbb{P}(X > u) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x \mid X \leq u) \cdot \omega \\ &\quad + \mathbb{P}(X \leq x \mid X > u) \cdot (1 - \omega),\end{aligned}$$

kde $\omega = F(u)$, $1 - \omega = 1 - F(u)$ jsou váhy rozdělení běžných škod a rozdělení chvostu. Vidíme, že rozdělení výší škod je směsí rozdělení běžných škod a rozdělení chvostu.

Již bylo zmíněno, že pro rozdělení běžných škod je potřeba otestovat několik různých rozdělení (viz tabulka 4.1) a následně odhadnout jejich parametry metodou maximální věrohodnosti.

V části chvostu se rozdělení aproximuje jako GPD. Jeho distribuční funkce i hustota byly popsány v předchozí sekci o teorii extrémních hodnot.

4.3.2 Počet škod

Rozdělení počtu škod a jeho parametry jsou odhadnuty na základě interních dat. Můžeme zvolit mezi již zmíněnými vhodnými rozděleními pro počty škod - Poissonovo, negativně binomické nebo binomické rozdělení. My se nyní zaměříme pouze na Poissonovo rozdělení. Je to nejčastěji používané rozdělení pro počty škod a zároveň jeho použití je jednodušší díky odhadování pouze jednoho parametru.

Stejně jako jsme při modelování výší škod rozlišovali rozdělení nad a pod hranicí u , uděláme to i při modelování počtu škod. Budeme mít dvě rozdělení - počet běžných škod a počet škod nad hranicí u . Využijeme k tomu vlastnost

Poissonova rozdělení - pokud má celkový počet škod Poissonovo rozdělení, pak i pokud škody rozdělíme na dvě části - pod a nad hranicí, pak i tyto dvě části zvlášť mají každá Poissonovo rozdělení. Navíc platí, že parametr λ pro celkový počet škod je roven součtu jednotlivých parametrů λ_{bs} a λ_{ch} dvou Poissonových rozdělení. Platí tedy

$$\lambda = \lambda_{bs} + \lambda_{ch}.$$

Pokud nyní nebereme v potaz minimální hranici H , z věty 3 ze sekce 4.1.3 již umíme určit tvar pro parametr λ_{ch} rozdělení počtu škod nad hranicí u

$$\lambda_{ch} = \lambda \cdot (1 - F(u)) = \lambda \cdot (1 - \omega)$$

a potom platí, že

$$\lambda_{bs} = \lambda - \lambda_{ch} = \lambda \cdot F(u) = \lambda \cdot \omega.$$

4.3.3 Rozdělení ztráty

Rozdělení celkové ztráty za jeden rok vznikne součtem jednotlivých výší škod:

$$L = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Distribuční funkce náhodné veličiny L je ve tvaru:

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \mathbb{P}(L \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot \mathbb{P}(L \leq x \mid N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot F_X^{*n}(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Většinou není možné najít uzavřenou formu pro F_L , takže je nutné použít numerické metody. Některé z možností jsou metoda Monte Carlo, Panjerova rekurze nebo rychlá Fourierova transformace.

My zde popíšeme metodu Monte Carlo, která je poměrně jednoduchá na aplikaci. Máme následující algoritmus:

Monte Carlo algorismus

1. Pro $j = 1, \dots, J$
 - a. Simulujeme počet škod N z rozdělení frekvence.
 - b. Simulujeme nezávislé výše škod X_1, \dots, X_N z rozdělení výše škod.
 - c. Spočteme roční ztrátu v roce j jako součet hodnot simulovaných v předchozím kroku: $L_j = \sum_{i=1}^N X_i$.
2. Zvýšíme j o 1: $j \rightarrow j + 1$ a vrátíme se do prvního kroku.

Algoritmus se opakuje J -krát. Čím větší J , tím lepší přesnost odhadování. Obecně

se doporučuje alespoň $J = 1\,000\,000$, nicméně při použití $J = 10\,000\,000$ budou výsledky ještě přesnější.

Protože modelujeme extrémní hodnoty zvlášť, budeme i Monte Carlo aplikovat zvlášť pro 2 části. Při daných λ_{bs} a λ_{ch} máme následující realizace:

$N_j^{bs}, j = 1, \dots, J$ z Poissonova rozdělení s parametrem λ_{bs}

$N_j^{ch}, j = 1, \dots, J$ z Poissonova rozdělení s parametrem λ_{ch}

Simulujeme N_j^{bs} ztrát pod hranicí u pro každý rok j . Roční ztráta pro každý rok j :

$$L_j^{bs} = \sum_{i=1}^{N_j^{bs}} X_{ij}^{bs}, j = 1, \dots, J.$$

Dále simulujeme N_j^{ch} ztrát větších než u pro každý rok j z GPD. Roční ztráta je pak:

$$L_j^{ch} = \sum_{i=1}^{N_j^{ch}} X_{ij}^{ch}, j = 1, \dots, J.$$

Nyní spočteme celkovou roční ztrátu jako

$$L_j = L_j^{bs} + L_j^{ch}$$

a máme k dispozici náhodný výběr pro další výpočty.

4.3.4 Kapitálový požadavek

Označíme realizaci náhodného výběru z předchozí části jako $[l_1, \dots, l_J]$ a můžeme stanovit kapitálový požadavek pomocí některé z měr rizika.

První možností je hodnota v riziku. Ztráty l_j si srovnáme vzestupně:

$$\tilde{l}_1 \leq \tilde{l}_2 \leq \dots \leq \tilde{l}_J.$$

Hodnotu v riziku na hladině α získáme jako:

$$\text{VaR}_\alpha = \hat{F}_L^{-1}(\alpha) = \tilde{l}_{\lfloor J\alpha \rfloor + 1},$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí dolní celou část čísla. Hladinu α nastavíme podle Basel 2 na 99,9%.

S využitím definice neočekávané ztráty (UL)

$$\text{UL} = \text{VaR} - \text{EL},$$

kde EL značí očekávanou ztrátu, můžeme hodnotu v riziku vyjádřit jako

$$\text{VaR} = \text{EL} + \text{UL}.$$

Očekávanou ztrátu je možné z kapitálového požadavku odečíst. Jsou dva způsoby, jak určit očekávanou ztrátu. Prvním je odhadnout ji jako průměr z ročních ztrát:

$$\text{EL} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J l_j.$$

Tato statistika však nemusí být nevhodnější, vzhledem k tomu, že může být hodně ovlivněná extrémními ztrátami, které nemůžeme klasifikovat jako očekávané. Z tohoto důvodu je lepším a stabilnějším způsobem odhadnout očekávanou ztrátu jako medián:

$$EL = \hat{F}_L^{-1}(0,5).$$

Další možností je zbytková hodnota v riziku. Pro její odhad potřebujeme odhad hodnoty v riziku:

$$\hat{ES}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^J l_i \cdot \mathbb{I}_{[l_i \geq \hat{VaR}_\alpha]}}{\sum_{i=1}^J \mathbb{I}_{[l_i \geq \hat{VaR}_\alpha]}} = \frac{\sum_{i=1}^J l_i \cdot \mathbb{I}_{[l_i \geq \hat{VaR}_\alpha]}}{J - \lfloor J\alpha \rfloor}.$$

Kapitola 5

Agregace rizik pomocí modelování závislostí

V předchozí kapitole jsme si ukázali, jak dospět ke kapitálovému požadavku v jedné rizikové buňce. Nyní se podíváme na to, jak dát tyto kapitálové požadavky dohromady a získat celkový kapitálový požadavek.

Už víme, že pouhý součet jednotlivých kapitálových požadavků nemusí být roven celkovému kapitálovému požadavku. Dále také víme, že hodnota v riziku není subaditivní a tudíž nemusí platit následující nerovnost:

$$\text{VaR}_\alpha(L) \leq \sum_{k=1}^K \text{VaR}_\alpha(L^k),$$

kde k značí jednotlivé rizikové buňky a L^k značí ztrátu v buňce k .

K modelování závislostí využijeme kopuly. Teorii kopul budeme čerpat z [8].

5.1 Kopuly

Kopuly jsou jednou z možností, jak modelovat závislosti mezi riziky.

Definice 4. *Kopula je d -rozměrná distribuční funkce C náhodného vektoru, jehož všechna marginální rozdělení jsou rovnoměrná na intervalu $[0,1]$.*

Platí tedy, že:

1. $C : [0,1]^d \longrightarrow [0,1]$.

2. C má marginální funkce C_i tak, že:

$$C_i(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u, \quad \forall u \in [0,1].$$

Kopuly lze využít k vyjádření sdružených rozdělení, pomocí Sklarovy věty převzaté z [8].

Věta 5. Sklarova věta.

Nechť F je d -rozměrná distribuční funkce s marginálními distribučními funkcemi F_1, \dots, F_d . Pak existuje d -rozměrná kopula C tak, že pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ platí:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (5.1)$$

Když F_1, \dots, F_d jsou spojité, pak C je určena jednoznačně, jinak je C definovaná na $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_d$, kde $\text{Ran}F_i$ je obor hodnot distribuční funkce F_i . Naopak, když C je d -rozměrná kopula a F_1, \dots, F_d jsou distribuční funkce, pak funkce F definovaná jako 5.1 je d -rozměrná distribuční funkce s marginálními distribučními funkcemi F_1, \dots, F_d .

Důkaz. Viz [8], strana 46. □

Kopula tedy může být využita k odhadu nebo simulaci vícerozměrných rozdělení, pokud známe marginální rozdělení.

Definice 6. Nechť F je distribuční funkce. Pak kvazi-inverzní funkce k F je nějaká funkce $F^{(-1)}$ s nosičem $[0,1]$ taková, že

1. pokud t patří do $\text{Ran}F$, pak $F^{(-1)}(t)$ je nějaké reálné číslo x tak, že $F(x) = t$, tzn. pro každé t reálné z $\text{Ran}F$ platí

$$F(F^{(-1)}(t)) = t;$$

2. pokud t nepatří do $\text{Ran}F$, potom

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

Pokud je F rostoucí, pak je kvazi-inverzní funkce určena jednoznačně a rovná se přesné inverzní funkci F^{-1} .

Důsledek 7. Nechť F, C, F_1, \dots, F_d jsou stejné jako ve větě 5 a nechť $F_1^{(-1)}, \dots, F_d^{(-1)}$ jsou kvazi-inverzní funkce k F_1, \dots, F_d . Pak pro každé $\mathbf{u} \in [0,1]^d$ platí

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_d^{(-1)}(u_d)).$$

Sdruženou distribuční funkci pro ztrátu získáme s využitím Sklarovy věty:

$$F_L(l_1, \dots, l_d) = C(F_{L_1}(l_1), \dots, F_{L_d}(l_d)).$$

Uvedeme nyní tři kopuly – Gaussovu, Gumbelovu a Studentovu.

5.1.1 Gaussova kopula

D -rozměrnou Gaussovu kopulu získáme transformací d -rozměrného normálního rozdělení:

$$C^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = F^\Sigma(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_d)),$$

kde F je distribuční funkce standardního normálního rozdělení a F^Σ je distribuční funkce standardního vícerozměrného normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a korelační maticí $\Sigma = \{\sigma_{i,j}\}$. Korelační matice Σ se skládá z lineárních korelačních koeficientů.

K odhadu matice $\hat{\Sigma}$ lze využít některého z následujících korelačních koeficientů:

Definice 8. Uvedeme definici dvou korelačních koeficientů.

- *Lineární korelační koeficient pro dvě náhodné veličiny X_1 a X_2 s konečným rozptylem je definován následovně:*

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \cdot \text{Var}(X_2)}}.$$

- *Kendallův korelační koeficient (Kendalovo tau) pro dvě náhodné veličiny X_1 a X_2 je definován jako:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \mathbb{P}[(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0],$$

kde $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ a (X_1, X_2) jsou nezávislé náhodné vektory ze stejného rozdělení.

Zobrazení Gaussovy dvourozměrné kopuly s korelační maticí

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

na intervalu $(x, y) \in [-0.2, 1.2]^2$ máme na obrázku 5.1.

5.1.2 Gumbelova kopula

Gumbelova kopula patří do skupiny archimédovských kopul. Ty lze zapsat jako:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)),$$

kde ϕ je spojitá klesající funkce z $[0, 1]$ do $[0, \infty]$ taková, že $\phi(1) = 0$ a $\phi^{[-1]}$ je určená následovně:

$$\begin{aligned} \phi^{[-1]}(t) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \phi(0), \\ \phi(0), & \phi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \\ &= \min(t, \phi(0)). \end{aligned}$$

Funkce ϕ se nazývá se generátor. Gumbelova kopula vypadá následovně:

$$C^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \right\},$$

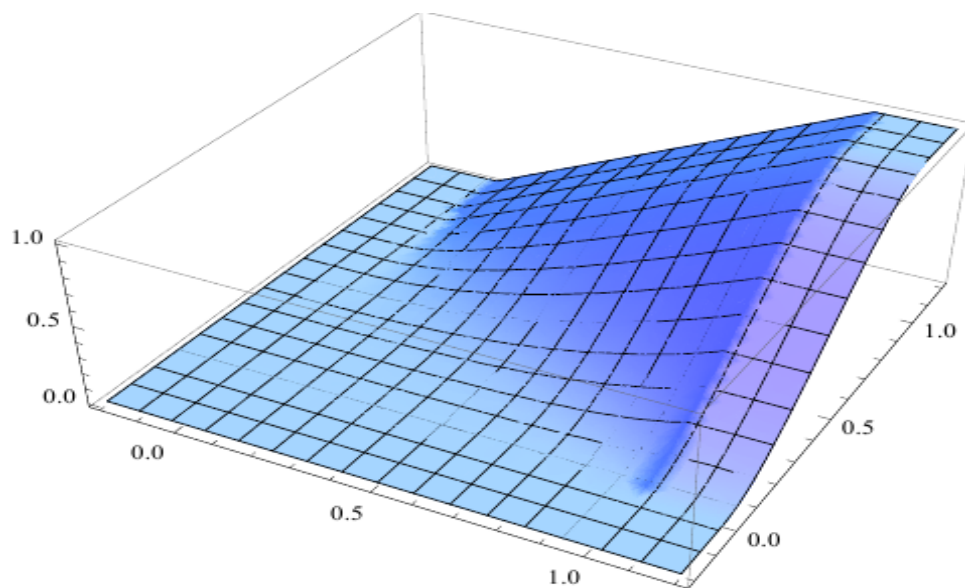
kde $\rho \geq 1$ je parametr závislosti. Literatura [2] uvádí, že jako odhad tohoto parametru lze uvažovat Kendallovo τ zprůměrované přes všechny dvojice rizikových buněk.

Zobrazení Gumbelovy dvourozměrné kopuly s parametrem $\rho = 3$ na intervalu $(x, y) \in [-0.2, 1.2]^2$ máme na obrázku 5.2.

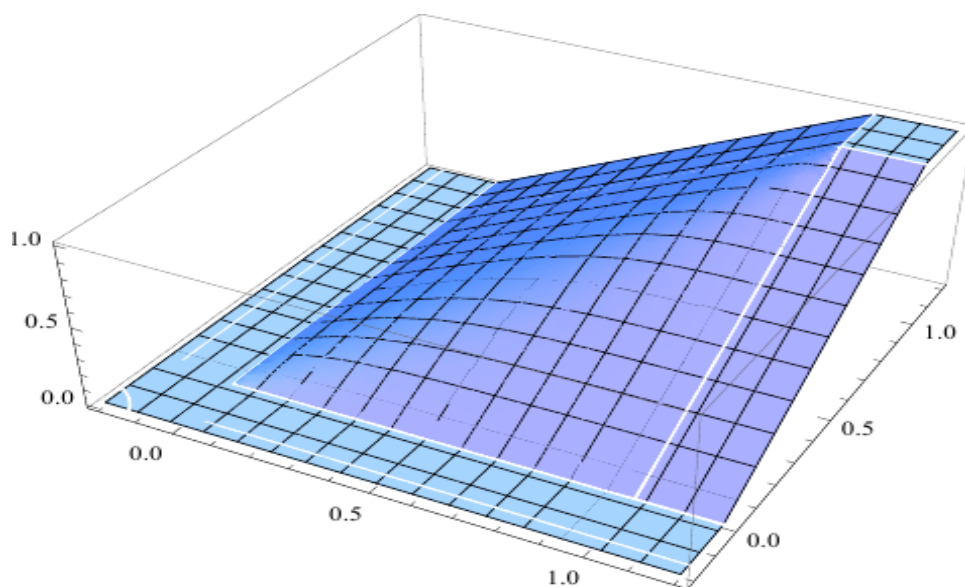
5.1.3 Studentova kopula

Studentova kopula je definována následovně: Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ je vektor s d -rozměrným t -rozdělením s ν stupni volnosti. Kopula vektoru \mathbf{X} může být zapsána jako:

$$C^t(u_1, \dots, u_d) = t_\nu^d(t_{R,\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)),$$



Obrázek 5.1: Gaussova kopula.



Obrázek 5.2: Gumbelova kopula.

kde $t_{R,\nu}^d$ značí d -rozměrnou distribuční funkci náhodného vektoru $\sqrt{\nu}Y/\sqrt{S}$, kde náhodná veličina S má χ^2 rozdělení s parametrem ν a náhodný vektor \mathbf{Y} má d -rozměrné standardní normální rozdělení. S a \mathbf{Y} jsou nezávislé. t_ν označuje marginály $t_{R,\nu}^d$ a R je korelační matice Studentovy kopuly. Tato korelační matice se odhaduje podobně jako ta pro Gaussovou kopulu.

Pokud je počet stupňů volnosti dostatečně velký, chová se Studentova kopula jako Gaussova.

Zobrazení Studentovy dvourozměrné kopuly se dvěma stupni volnosti a s korelační maticí

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

na intervalu $(x,y) \in [-0.2,1.2]^2$ máme na obrázku 5.3.

5.2 Využití kopul

Abychom mohli použít kopuly k modelování závislostí, musíme si nejprve nějakou zvolit. Gumbelova a Studentova kopula na rozdíl od Gaussovy dobře modelují závislost chvostů. U Studentovy kopuly však toto platí pouze pro nízký počet stupňů volnosti, protože pro $\nu \rightarrow \infty$ konverguje Studentova kopula ke Gaussově.

Využití Gumbelovy kopuly je poměrně omezující, vzhledem k použití pouze jednoho parametru určujícího celou závislostní strukturu mezi rizikovými buňkami. Studentova kopula tedy může být nevhodnější volbou pro modelování ztrát z operačního rizika.

Kapitálový požadavek s využitím kopul získáme metodou Monte Carlo. Předpokládejme, že máme distribuční funkce F_{L^k} , $k = 1, \dots, K$ ročních ztrát pro jednotlivé rizikové buňky. Distribuční funkci celkové roční ztráty získáme aplikací následujícího algoritmu:

Monte Carlo algoritmus

1. Pro $j = 1, \dots, J$

- a. Simulujeme vektor (U_1, \dots, U_K) ze zvolené kopuly C .
- b. Ztráty pro jednotlivé rizikové buňky získáme jako:

$$L_j(k) = F_{L^k}^{-1}(U_k).$$

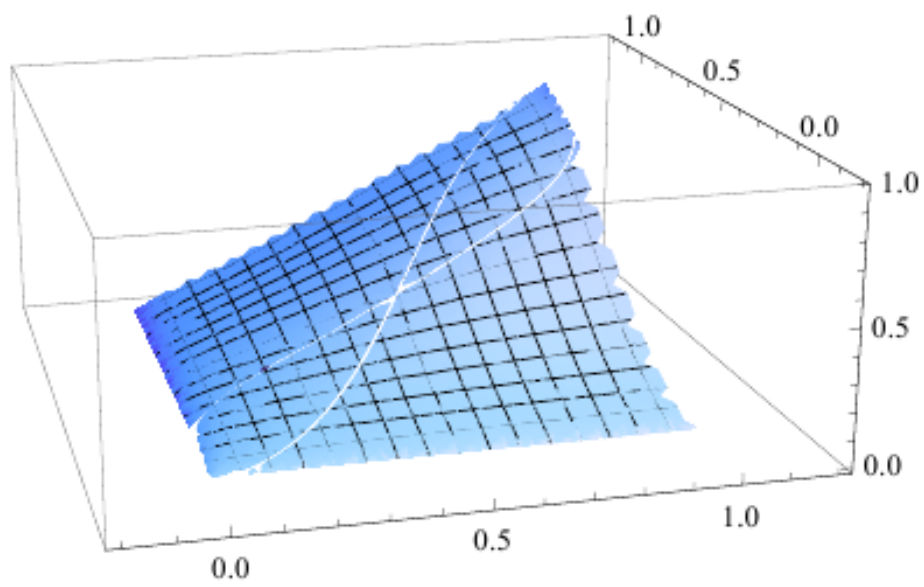
- c. Celkovou roční ztrátu L_j získáme součtem ztrát z jednotlivých buněk:

$$L_j = \sum_{k=1}^K L_j(k).$$

2. Zvýšíme j o 1: $j \rightarrow j + 1$ a vrátíme se do prvního kroku.

Počet opakování J by měl být nastaven alespoň na 1 000 000.

Kapitálový požadavek získáme použitím některé z měr rizika (například hodnoty v riziku) na empirické rozdělení ztráty na hladině 99,9 % stejným způsobem jako bylo uvedeno získání kapitálového požadavku pro jednu rizikovou buňku v předchozí kapitole.



Obrázek 5.3: Studentova kopula.

Kapitola 6

Simulace

V této kapitole budeme ilustrovat popsanou teorii na simulacích. Na simulacích ukážeme rozdíl při modelování bez závislostí a s využitím závislostí. Všechny simulace jsou zpracované v programu Wolfram Mathematica 9.0. Výpočty nejsou provedeny na žádných reálných datech, jedná se pouze o ilustrativní příklady.

Pro zjednodušení budeme uvažovat, že máme 4 rizikové buňky. Nejprve si spočteme kapitálový požadavek pouze jako součet jednotlivých kapitálových požadavků z jednotlivých buněk. Následně pak zavedeme nějakou závislostní strukturu a s využitím kopul spočítáme celkový kapitálový požadavek. Všechna uvedená čísla jsou bez nějaké konkrétní měny, neboť se jedná pouze o ilustrační čísla.

6.1 Kapitálové požadavky v jednotlivých rizikových buňkách

Pro tento výpočet využijeme postup popsaný v sekci 4.3. V jednotlivých buňkách budeme pro výše škod uvažovat rozdělení popsaná v tabulce 4.1. Před stanovením rozdělení běžných škod a rozdělení chvostu je nutné určit hranici u , která odděluje běžné škody od těch extrémních. Nastavení hranice pro jednotlivé buňky je v tabulce 6.2.

V tabulce 6.1 máme popsaná rozdělení pro běžné škody v jednotlivých buňkách a v tabulce 6.2 jsou rozdělení pro extrémní škody v jednotlivých buňkách.

	Rozdělení běžných škod	
	počet	výše
Buňka 1	Poisson (2)	Log-N (6.5,1.2)
Buňka 2	Poisson (4)	Log-N (7.6, 1.05)
Buňka 3	Poisson (7)	Gama (0.65,500000)
Buňka 4	Poisson (3)	Gama (0.35,700000)

Tabulka 6.1: Rozdělení běžných škod v jednotlivých buňkách.

K výpočtu využijeme algoritmus Monte Carlo. Počet opakování algoritmu J nastavíme na 1 000 000.

Pro každou buňku simulujeme počty běžných škod a k nim výše, pak počty škod na chvostu a k nim výše a nakonec spočteme celkové ztráty. Výstupem

	Rozdělení chvostu		
	počet	výše	Hranice u
Buňka 1	Poisson (1/10)	GPD (1.2,4500)	200 000
Buňka 2	Poisson (1/20)	GPD (0.7,8200)	300 000
Buňka 3	Poisson (1/100)	GPD (0.9,28000)	1 000 000
Buňka 4	Poisson (1/50)	GPD (0.8,13000)	600 000

Tabulka 6.2: Rozdělení extrémních škod v jednotlivých buňkách.

je tedy realizace náhodného výběru ztrát, z něhož můžeme stanovit kapitálový požadavek pro jednotlivé buňky.

Na obrázcích 6.1, 6.2, 6.3 a 6.4 vidíme empirické distribuční funkce ztrát v jednotlivých rizikových buňkách. Vidíme, že ztráty v různých buňkách nabývají různých hodnot, ve třetí buňce jsou dokonce o řád větší. Dále vidíme, že většina ztrát je tvořena extrémními škodami.

Na obrázcích 6.5, 6.6, 6.7 a 6.8 pak vidíme zobrazení empirických kvantilových funkcí jednotlivých rizikových buněk. Již z těchto obrázků lze odhadnout, jaká bude hodnota v riziku na hladině 99,9 %.

Spočteme odhady hodnoty v riziku a zbytkové hodnoty v riziku, obě na hladině 99,9 %.

Výsledky vidíme v tabulce 6.3.

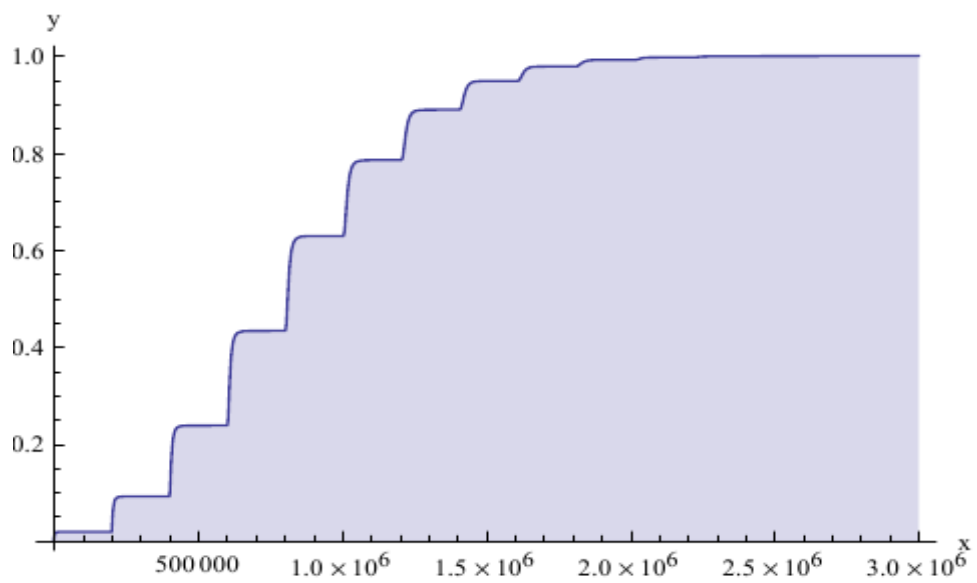
	Hodnota v riziku	Zbytková hodnota v riziku
Buňka 1	2 281 490	2 518 560
Buňka 2	3 457 170	3 796 600
Buňka 3	11 078 600	12 396 100
Buňka 4	6 678 590	7 455 960

Tabulka 6.3: Kapitálové požadavky v jednotlivých buňkách.

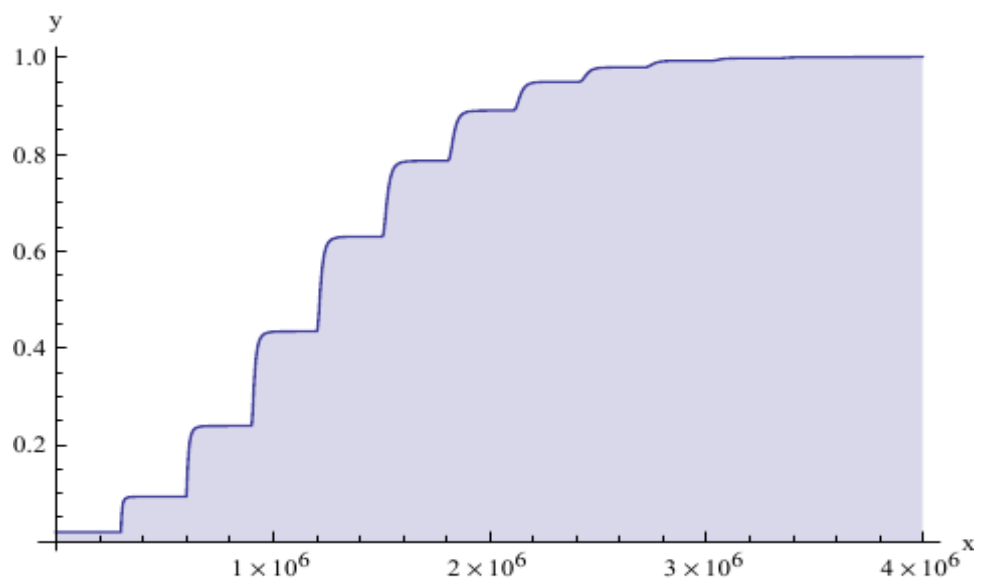
Pro výpočet celkového kapitálového požadavku použijeme spočtené hodnoty v riziku a zbytkové hodnoty v riziku a stanovíme ho jako součet jednotlivých kapitálových požadavků (přestože bylo řečeno, že hodnoty v riziku nelze sčítat bez dalších předpokladů). Výsledky jsou v tabulce 6.4.

Kapitálový požadavek	
Hodnota v riziku	Zbytková hodnota v riziku
23 495 800	26 167 220

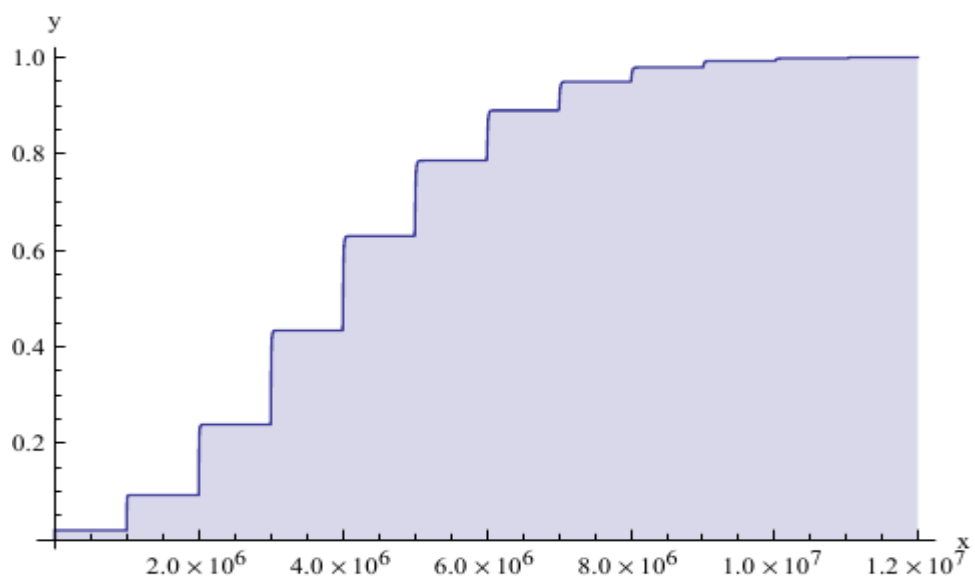
Tabulka 6.4: Celkový kapitálový požadavek



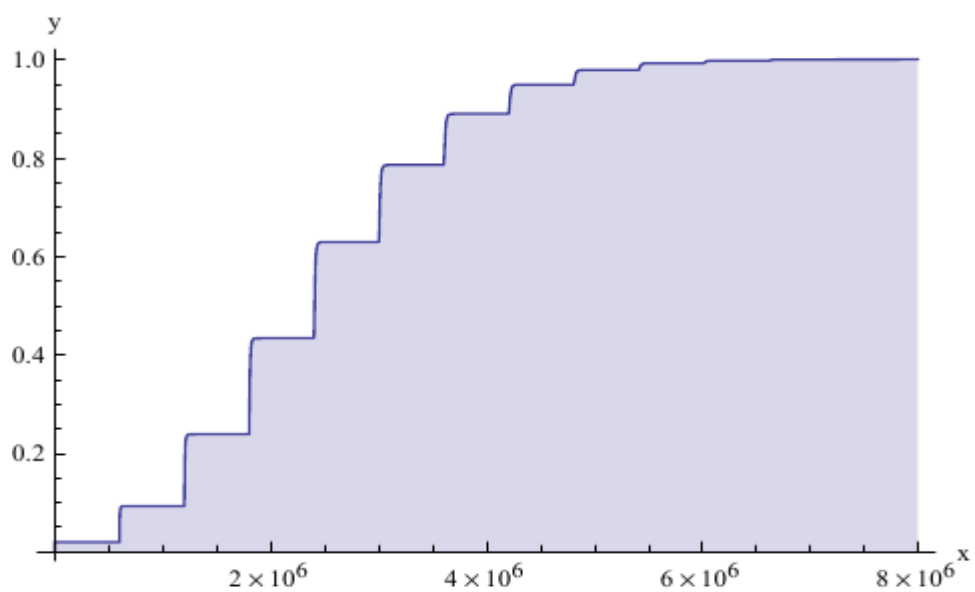
Obrázek 6.1: Empirická distribuční funkce buňky 1.



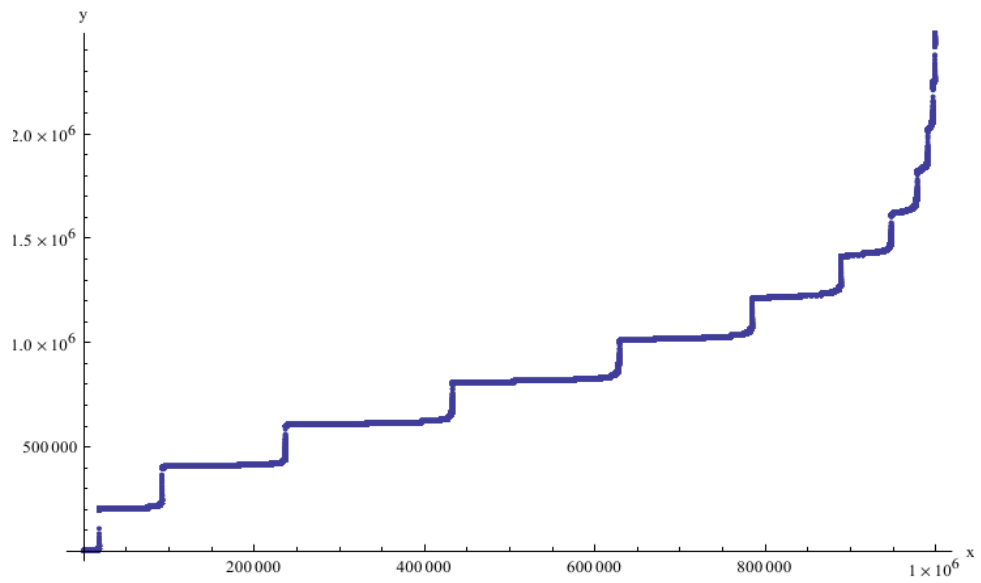
Obrázek 6.2: Empirická distribuční funkce buňky 2.



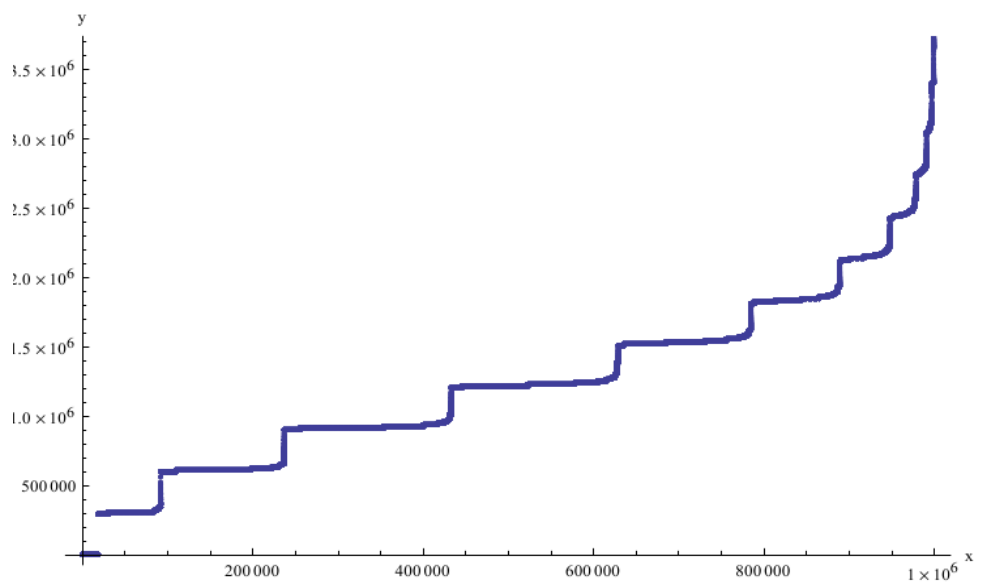
Obrázek 6.3: Empirická distribuční funkce buňky 3.



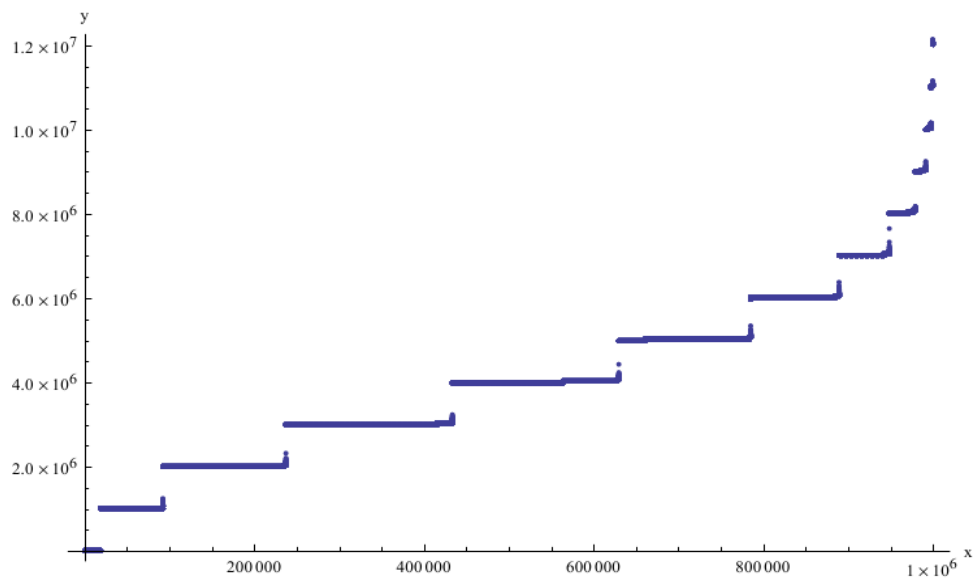
Obrázek 6.4: Empirická distribuční funkce buňky 4.



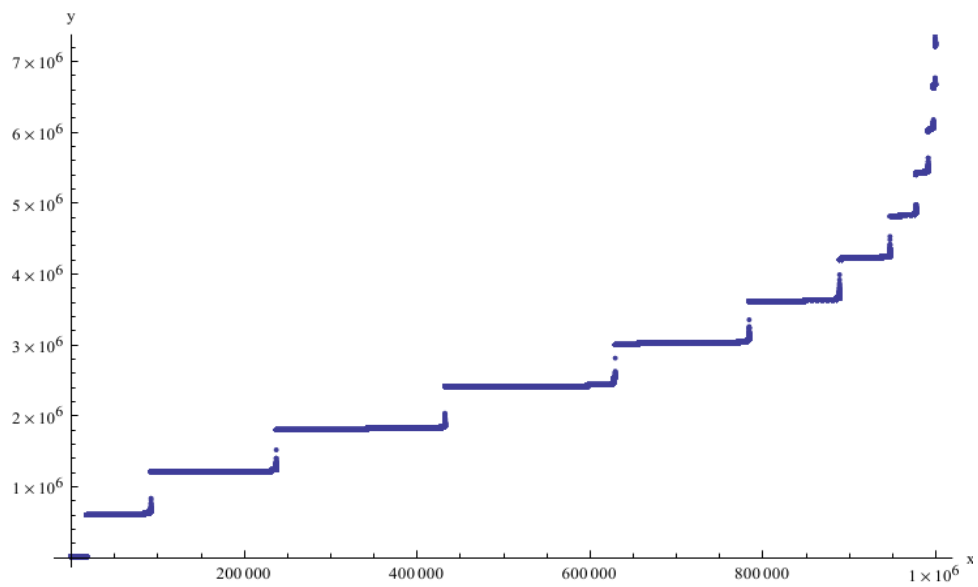
Obrázek 6.5: Empirická kvantilová funkce buňky 1.



Obrázek 6.6: Empirická kvantilová funkce buňky 2.



Obrázek 6.7: Empirická kvantilová funkce buňky 3.



Obrázek 6.8: Empirická kvantilová funkce buňky 4.

6.2 Kapitálový požadavek s využitím závislosti

V této části budeme uvažovat možnost modelovat závislosti mezi buňkami pomocí kopul.

Marginální rozdělení máme popsána v předchozí sekci. Musíme tedy pouze určit kopulu. Pro ilustraci provedeme výpočet pro Gaussovu a Studentovu kopulu. Máme 4 buňky, kopuly tedy budou 4-rozměrné. Studentovu kopulu budeme uvažovat se 3 stupni volnosti. Korelační matice uvažujeme pro obě kopuly stejné:

$$R = \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

K výpočtu použijeme opět algoritmus Monte Carlo popsaný v sekci 5.2. Počet opakování nastavíme na 1 000 000.

Simulujeme vektory z kopuly a z nich pak spočteme ztráty pro jednotlivé rizikové buňky. Ty sečteme a získáme celkové ztráty v jednom roce. Výstupem je tedy realizace náhodného výběru ztrát, z něhož můžeme přímo stanovit celkový kapitálový požadavek.

Na obrázcích 6.9 a 6.10 máme opět ukázanou empirickou distribuční a kvantilovou funkci ztráty generované z Gaussovy kopuly. Z empirické kvantilové funkce vidíme, že hodnota v riziku na hladině 99,9 % bude nejspíše větší než 20 000 000.

Na obrázcích 6.11 a 6.12 máme opět ukázanou empirickou distribuční a kvantilovou funkci ztráty tentokrát generované ze Studentovy kopuly. Vidíme, že distribuční funkce obou kopul jsou na první pohled nerozeznatelné. Naopak co se kvantilových funkcí týče, vidíme, že ze Studentovy kopuly jsou generované ztráty vyšší.

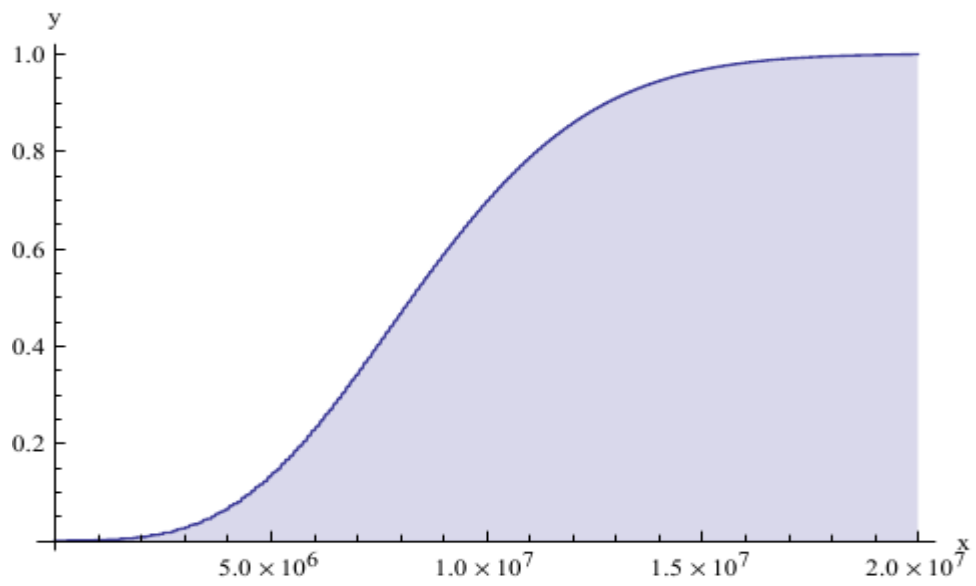
Opět spočteme odhady hodnoty v riziku a zbytkové hodnoty v riziku, obě na hladině 99,9 %. Výsledky máme v tabulce 6.5. Vidíme, že se stejnou korelační maticí nám vyšly nižší obě statistiky pro Gaussovu kopulu, rozdíl však není velký.

	Gaussova kopula	Studentova kopula
Hodnota v riziku	20 171 800	21 697 600
Zbytkový hodnota v riziku	21 436 800	23 148 900

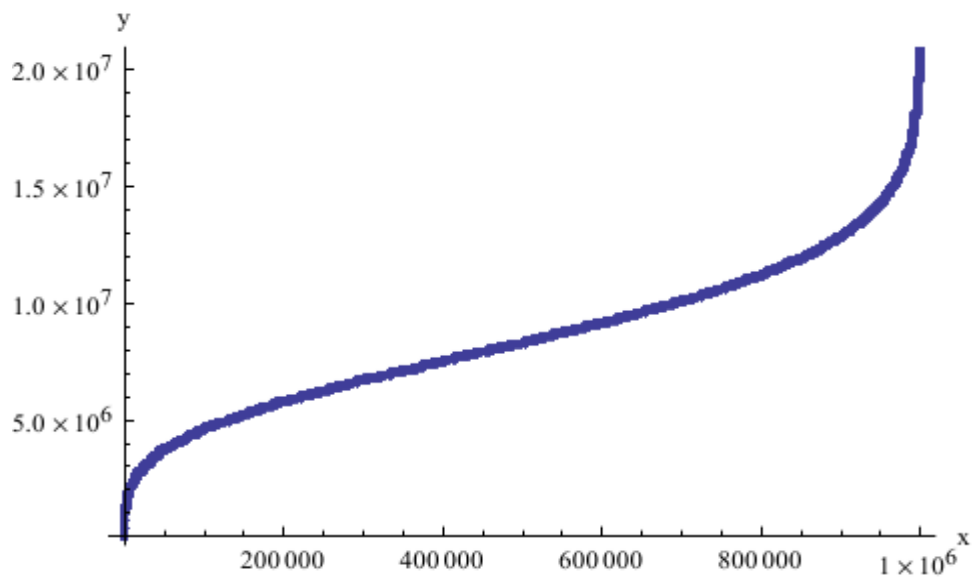
Tabulka 6.5: Kapitálové požadavky s využitím kopul.

Nyní se podíváme na porovnání kapitálových požadavků, viz tabulka 6.6 - hodnot v riziku s modelováním závislosti a bez něj.

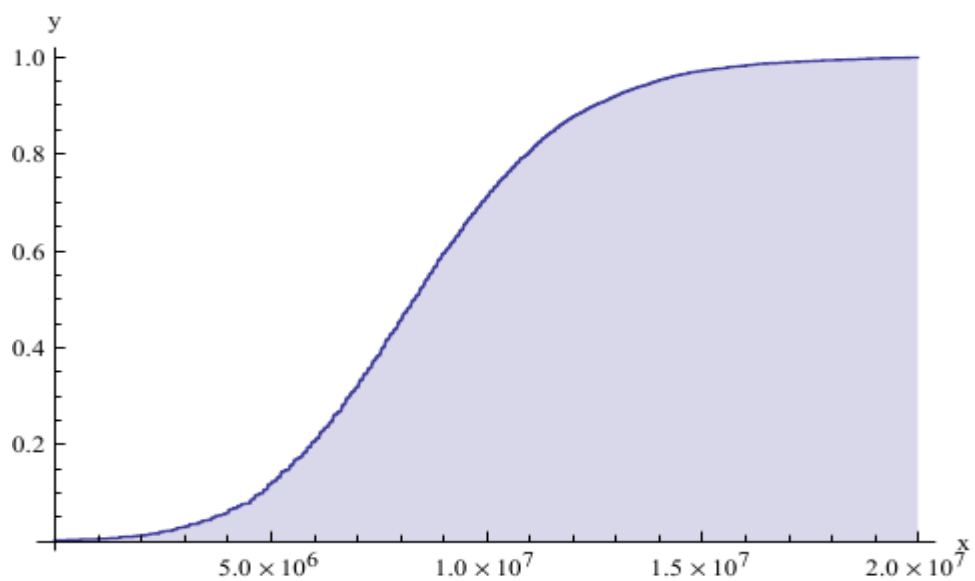
Vidíme, že kapitálové požadavky spočtené s využitím modelování závislosti jsou nižší. To znamená, že využít možnosti modelovat závislosti mezi buňkami je pro banky výhodné, neboť jim to může umožnit držet nižší požadovaný kapitál. Jak moc je kapitál snížen je určeno závislostní strukturou kopuly určenou korelační maticí, která v naší ilustraci nebyla odhadnuta na reálných datech. Je proto možné, že s využitím skutečných závislostí bude mít banka spočtený kapitál mnohem nižší než ten bez modelování závislosti.



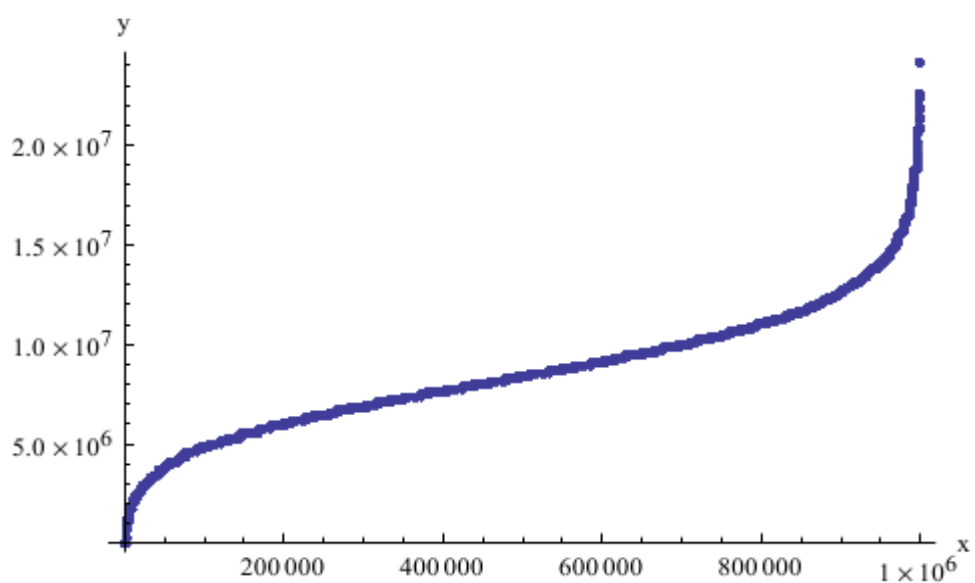
Obrázek 6.9: Empirická distribuční funkce ztráty z Gaussovy kopuly.



Obrázek 6.10: Empirická kvantilová funkce ztráty z Gaussovy kopuly.



Obrázek 6.11: Empirická distribuční funkce ztráty ze Studentovy kopuly.



Obrázek 6.12: Empirická kvantilová funkce ztráty ze Studentovy kopuly.

	Kapitálový požadavek	
	Hodnota v riziku	Zbytková hodnota v riziku
Bez závislostí	23 495 800	26 167 220
Gaussova kopula	20 171 800	21 436 800
Studentova kopula	21 697 600	23 148 900

Tabulka 6.6: Porovnání kapitálových požadavků.

Závěr

V práci jsme si ukázali, jaké mají banky v současnosti možnosti pro modelování operačního rizika a následný výpočet kapitálového požadavku. Zaměřili jsme se hlavně na to, jak postupovat při vytváření interního modelu pro ztráty z operačního rizika. Vývoj interního modelu jsme popsali postupně. Nejprve jsme se podívali na sběr dat a jejich kombinování. Následně jsme ukázali odhad konkrétních rozdělení, až po získání celkového rozdělení ztráty. Tyto metody byly aplikovatelné na každou rizikovou buňku zvlášť. Nakonec jsme tyto postupy rozšířili o modelování závislostí mezi jednotlivými buňkami pomocí kopol.

Některé popsané metody byly ukázány na ilustračních simulacích. V těchto simulacích jsme si hlavně ukázali, že se bankám vyplatí v interním modelu zohlednit závislostní strukturu mezi jednotlivými rizikovými buňkami a díky tomu si tak snížit kapitálový požadavek pro operační riziko. Otázkou zůstává, zda se v praxi tento přístup vyplatí každé bance. V každém individuálním případě je potřeba posoudit, zda je tohle snížení kapitálu dostatečné, aby se vůbec vyplatilo vynaložit náklady na vývoj sofistikovanějšího interního modelu.

Seznam obrázků

5.1	Gaussova kopula.	35
5.2	Gumbelova kopula.	35
5.3	Studentova kopula.	38
6.1	Empirická distribuční funkce buňky 1.	41
6.2	Empirická distribuční funkce buňky 2.	41
6.3	Empirická distribuční funkce buňky 3.	42
6.4	Empirická distribuční funkce buňky 4.	42
6.5	Empirická kvantilová funkce buňky 1.	43
6.6	Empirická kvantilová funkce buňky 2.	43
6.7	Empirická kvantilová funkce buňky 3.	44
6.8	Empirická kvantilová funkce buňky 4.	44
6.9	Empirická distribuční funkce ztráty z Gaussovy kopuly.	46
6.10	Empirická kvantilová funkce ztráty z Gaussovy kopuly.	46
6.11	Empirická distribuční funkce ztráty ze Studentovy kopuly.	47
6.12	Empirická kvantilová funkce ztráty ze Studentovy kopuly.	47

Seznam tabulek

2.1	Faktory beta pro linie podnikání.	7
3.1	Typy ztrátových událostí.	10
4.1	Rozdělení výší škod.	23
6.1	Rozdělení běžných škod v jednotlivých buňkách.	39
6.2	Rozdělení extrémních škod v jednotlivých buňkách.	40
6.3	Kapitálové požadavky v jednotlivých buňkách.	40
6.4	Celkový kapitálový požadavek	40
6.5	Kapitálové požadavky s využitím kopul.	45
6.6	Porovnání kapitálových požadavků.	48

Seznam použité literatury

- [1] SHEVCHENKO, P. V., *Modelling Operational Risk Using Bayesian Inference*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2011, ISBN 978-3-642-15922-0
- [2] SOPRANO, A., CRIELAARD, B., PIACENZA, F., RUSPANTINI, D., *Measuring Operational and Reputational Risk: A Practitioner's Approach*, John Wiley & Sons, Chichester 2009, ISBN 978-0-470-51770-3
- [3] ČNB, *Podrobnější vymezení požadavků na jednotlivé přístupy pro výpočet kapitálového požadavku k operačnímu riziku*, vydáno srpen 2014, článek v Journal of Operational Risk
- [4] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, vydáno červen 2004, datum přístupu ke zdroji: 31.1.2016, dostupné jako soubor PDF <https://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>
- [5] ČNB, *Měření operačního rizika, stanovení kapitálového požadavku k operačnímu riziku*, vydáno prosinec 2010, datum přístupu ke zdroji: 25.4.2016, dostupné jako soubor PDF https://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/vestnik/2010/download/v_2010_20_23010560.pdf
- [6] GALLOPPO, G., PREVIATI, D., *A review of methods for combining internal and external data*, vydáno jako příloha k vyhlášce ČNB v prosinci 2010, datum přístupu ke zdroji: 25.4.2016, dostupné jako soubor PDF http://www.cnb.cz/cs/legislativa/obezretne_podnikani/download/vyhlaska_priloha_22.pdf
- [7] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlín 1997, ISBN 3-540-60931-8
- [8] NELSEN, R. B. *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 2006, ISBN 0-387-28659-4