Posudek vedoucího na diplomovou práci

R. Puček: Applications of invariant operators in real parabolic geometries

Téma předkládané diplomové práce patří do globální analýzy, resp. diferenciální geometrie. Konkrétní problém studovaný v práci má historické kořeny. Projektivní struktura na varietě M je standardně zadána volbou třídy ekvivalence kovariantních derivací, které mají tu vlastnost, že všechny mají tutéž třídu neparametrizovaných geodetik. U. Dini a R. Liouville se v druhé polovině 19. století zajímali problém, jestli je možné najít Riemannovu metriku na varietě M, která má tutéž třídu neparametrizovaných geodetik, což znamená, že se hledá Riemannova metrika, jejíž Levi-Civitova kovariantní derivace patří do třídy zadávající projektivní strukturu na M. A objevili překvapující fakt, že řešení tohoto nelineárního problému je možné (pro nedegenerované metriky) převést na problém řešení vhodné soustavy *lineárních* parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu na varietě M. Různé zobecnění tohoto problému pro další typy geometrií byly postupně studovány řadou matematiků a celá problematika se v poslední době stala středem zájmu v souvislosti se zobecněním celého problému v rámci tzv. parabolických geometrií, tj. variet se zadanou geometrickou strukturou jistého typu.

Struktura parabolické geometrie závisí na volbě jednoduché Lieovy grupy G a její parabolické podgrupy P. Homogenní model dané parabolické geometrie je vlajková varieta G/P a její struktura je dána Maurer-Cartanovou formou ω. Obecná struktura parabolické geometrie je zadána zobecněním hlavního fíbrovaného prostoru $G \to G/P$ a zadáním Cartanovy formy ω na M. Cartanova forma neurčuje jednu kovariantní derivaci na asociovaných vektorových fíbrovaných prostorech, ale celou třídu tzv. Weylových kovariantních derivací. Zároveň je pak kanonicky určen jistý vektorový fíbrovaný podprostor $\mathcal{H}$ tečného fíbrovaného prostoru. Pro obecný případ parabolické geometrie se pak hledá Weylova kovariantní derivace ∇ s vlastností, že existuje nedegenerovaná metrika na $\mathcal{H}$ anihilovaná kovariantní derivací ∇ ve směrech z $\mathcal{H}$. To je obecná verse původního problému Diniho a Liouvilla.

Hlavní myšlenky řešení tohoto obecného problému v rámci parabolických geometrií jsou obsaženy v dokončovaném preprintu D. Calderbanka, J. Slováka a V. Součka. Hlavní metoda jak řešit popsaný problém je spojena s vlastnostmi soustav invariantních parciálních diferenciálních rovnic 1. řádu na varietě M. Tyto vlastnosti jsou shrnuty v druhé kapitole práce. Hlavní roli zde hrají invariantní diferenciální operátory, nazývané tradičně BGG operátory.

Jejich použití pro řešení daného problému je podrobě popsáno v 3. kapitole práce. Ukazuje se, že je výhodnější zkoumat duální problém, tj. problém hledat vhodné metriky na duálním prostoru $\mathcal{H}^*$. V celé práci se systematicky využívá toho, že vlastnosti asociovaných fíbrovaných prostorů mohou být studovány pomocí vlastností indukujících representací, což převádí řadu analytických problémů na varietě na problémy algebraické. Ve studovaném problému se nejdřív representace indukující prostor metrik na $\mathcal{H}^*$ rozdělí na ireducibilní části a pak se zkoumá daný problém pro každou komponentu B zvlášť. Pro možnost použití vlastností soustav lineárních diferenciálních operátorů na daný problém je podstatný počet komponent v rozkladu tensorového součinu B s representací indukující prostor $\mathcal{H}$, který musí být velmi malý. To vede na algebraickou podmínku použitelnosti metody (označovanou ALC), formulovanou v Definici 4 práce. V dalším se tedy původní problém redukuje na algebraický problém nalezení případů, kdy ALC je splněna. Tomu jsou věnovány další kapitoly práce. Hledání případů, kdy je ALC splněna je složité tím, že je třeba probrat velké množství případů. Je třeba probrat všechny jednoduché komplexní Lieovy algebry, jejich všechny reálné verse, všechny parabolické podalgebry uvažovaného typu (často maximální podalgebry) a všechny možnosti volby ireducibilní části B. Celá věc je ještě komplikovaná tím, že v diferenciální geometrii se typicky vyskytují reálné representace příslušných Lieových grup a algeber a pro porozumění jejím vlastnostem je třeba pracovat s jejich komplexifikacemi.

V kapitole čtvrté je ilustrován proces klasifikace případů, splňujících ALC podmínku na případě, kdy (reálná) representace indukující $\mathcal{H}$ je ireducibilní a Lieova grupa G je $SL_n(R)$. Jedná se o podrobnou verzi části klasifikace obsažené ve výše zmíněném dokončovaném preprintu.

Hlavní nové výsledky obsažené v předložené diplomové práci jsou obsaženy v 5. kapitole. Je zde podána úplná klasifikace případů komplexních jednoduchých Lieových group G a jejich parabolických podgrup (uvažovaných jako reálné Lieovy grupy), pro které je kdy je $\mathcal{H}$ ireducibilní a pro které je ALC podmínka formulovaná v Definici 4 splněna. Úvodní lemata slouží k podstatné redukci počtu případů, které je třeba zkoumat a důkaz samotné klasifikační věty pak rozebírá jednotlivé zbylé případy a počet komponent v příslušných tensorových součinech. Obecně je problém rozkladu tensorového součinu na komponenty velmi složitý. V případech, které je třeba studovat v důkazu věty se jedná většinou o případy součinu jednodušších representací, kdy stačí používat základní věty o součinu (Klimykova formule). V případech algeber typu E,F,G je možné v některých případech s výhodou použít počítačový program Lie. Odkaz na výsledky obsažené v páté kapitole bude součástí dokončovaného preprintu zmíněného výše.

V případě homogenního modelu příslušné geometrie je možné popsat prostor řešení odpovídajícího BGG operátoru zcela explicitně, je to vždy konečně dimensionální komplexní vektorový prostor. Příklady takového popisu jsou uvedeny v 6. kapitole práce. Konečně v kapitole sedmé je uvedeno, jak je možné zobecnit ALC podmínku pro případ geometrií, které nejsou ireducibilní a sestrojeno několik případů, kdy je tato obecnější ALC podmínka splněna. Záverečných 5 Appendixů shrnuje velmi stručně základní pojmy z teorie parabolických geometrií a teorie representací používané v práci.

Autora předložené práce je třeba ocenit, protože jako přípravu pro předloženou diplomovu práci musel absolvovat kromě svého základního studia v magisterském oboru Matematická analýza také většinu přednášek z oboru Matematické struktury a porozumět podstatné části ze základní monografie A. Čapa a J. Slováka o parabolických geometriích (jejíž četba je obvykle součástí až doktorandského studia). A k tomu navíc příslušnou současnou časopiseckou literaturu. Výsledky dosažené v práci jsou velmi pěkné (pátá kapitola obsahuje zajímavé nové výsledky) a jsou systematicky a srozumitelně presentovány. Slabší stránkou práce je fakt, že autor ještě musí zlepšit úroveň prezentace v anglickém jazyce (v práci je řada drobných prohřešků v tomto směru). V každé práci se najde určitý počet misprintů, v předložené práci je jejich počet větší než obvyklý. Práce získala (dělenou) 1. cenu ve svém oboru v posledním ročníku soutěže SVOČ. Práci doporučuji k obhajobě.

Praha, 7.9.2016 Vladimír Souček