MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Simona Oberhauserová

Optimální řízení v markovských řetězcích s aplikacemi při obchodování s proporcionálními transakčními náklady

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2016

Na tomto mieste chcem poďakovať môjmu vedúcemu mojej diplomovej práce Mgr. Petrovi Dostálovi, Ph.D., za jeho pomoc, cenné rady a hlavne za čas, ktorý mi venoval pri konzultáciach. Zároveň ďakujem rodine a priateľom za podporu počas celého môjho štúdia.

Vyhlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a dalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavrenie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe, dňa 27. júla 2016 Simona Oberhauserová

Názov práce: Optimální řízení v markovských řetězcích s aplikacemi při obchodování s proporcionálními transakčními náklady

Autor: Simona Oberhauserová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cieľom práce je nájsť optimálne riadenie v Markovovských reťazcoch, ktoré majú diskontované ocenenie prechodov, ako aj v diskrétnom, tak aj spojitom čase. Predstavíme algoritmus na nájdenie optimálneho riadenia s názvom Howardov iteračný algoritmus. Následne aplikujeme do problému optimálneho obchodovania, kde chceme maximalizovať tržnú hodnotu portfólia v nekonečnom časovom horizonte, prihliadnuc na existenciu proporcionálnych transakčných nákladov. Tržná cena portfólia je modelovaná na základe Brownovho pohybu.

Klíčová slova: Markovov reťazec, Howardov algoritmus, Brownov pohyb

Title: Optimal control in Markov chains with applications in trading with proportional transaction costs

Author: Simona Oberhauserová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

Abstract: The aim of this thesis is to find the optimal control of Markov chain with discounted evaluation of transitions in discrete and also in continuous time. We present Howard's iterative algorithm, the algorithm for finding the optimal control. Then the strategy is applied to the problem of optimal trading, where the goal is to maximize market price of the portfolio in infinite time horizont, given the existence of the proportional transaction costs. Market price is simulated with Brownian motion.

Keywords: Markov chain, Howard's algorithm, Brownian motion

Obsah

Použité značenie

$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálnych čísel
$\mathbb{R}^+$	množina nezáporných reálnych čísel
$\mathbb{E}$	vektor stredných hodnôt
$\mathbf{x}$	stĺpcový vektor
$\mathbf{A}$	obecná matica
$\mathbf{I}$	jednotková matica
$\mathbf{0}$	nulová matica
$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$	normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom σ^2
$\mathcal{R}(0, 1)$	rovnomerné rozdelenie na intervale (0,1)
$Exp(\lambda)$	exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou λ
$X \sim \mathcal{R}(0, 1)$	náhodná veličina s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, 1)$
$i.i.d.$	nezávislé, rovnako rozdelené
NSD	najväčší spoločný deliteľ
$\beta \in (0, 1)$	diskontný faktor

Úvod

Táto diplomová práca sa zaoberá optimálnym riadením v Markovových reťazcoch, kde je nakoniec aplikovaná na obchodovanie pri existencii proporcionálnych transakčných nákladov.

Prvá kapitola sa venuje Markovovým reťazcom s diskrétnym časom (zdroj [9]), postupne je pridaný pojem riadenia v reťazcoch a diskontovanie (publikácie [2] a [9]). Kapitola je ukončená algoritmom, ktorý sa používa k nájdeniu optimálnej obchodnej stratégie s názvom Howardov iteračný algoritmus.

V druhej kapitole sa zaoberáme Markovovými reťazcami so spojitým časom. Kľúčovou časťou je taktiež definovanie a dôkaz Howardovho iteračného algoritmu. Ako zdroje boli používané publikácie [3], [5] a [9].

V tretej kapitole je priblížená teória stochastickej analýzy potrebná k vybudovaniu modelu, ktorý je založený na Brownovom pohybe. Definovaný je spojitý aj diskrétny model a na záver je takisto sformulovaný a vyriešený príklad ku ktorému bola napísaná programová realizácia - nájdenie optimálneho reťazca Howardovým iteračným algoritmom. Teória bola čerpaná hlavne z publikácií [4] a [6].

Kapitola 1

Markovové reťazce s diskrétnym časom

1.1 Teória Markovových reťazcov s diskrétnym časom

1.1.1 Základné vzťahy

Definícia 1.1. *Náhodný proces* je rodina náhodných veličín $\{X_t,\, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ definovaných na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Poznámka 1.2. Nech S je množina hodnôt náhodných veličín X_t a ε je σ-algebra podmnožín S. Takto definovanú dvojicu (S, ε) nazývame *stavový priestor.*
$\{X_t,\, t \in T\}$ nazývame procesom s *diskrétnymi stavmi*, ak je množina S spočetná. Naopak, ak nadobúda hodnoty z nejakého intervalu, ide o proces so *spojitými stavmi.*
Ďalej môžeme klasifikovať náhodné procesy podľa T. V prípade $T \subseteq \mathbb{Z}$ hovoríme o procese s *diskrétnym časom.* Ak $T = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ide o proces so *spojitým časom.* V tejto kapitole sa budeme venovať Markovovým reťazcom s diskrétnym časom, takže uvažujeme $T \triangleq \mathbb{N}_0$.

Definícia 1.3. Systém celočíselných náhodných veličín $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ s hodnotami v S sa nazýva *Markovov reťazec s diskrétnym časom* a spočetnou množinou stavov S, ak platí

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \qquad (1.1)$$

pre všetky $i, j, i_1, \ldots, i_n \in S$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré $P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots X_0 = i_0) > 0$. Vzťah (1.1) označujeme ako *markovovskú vlastnosť.*

Definujme *pravdepodobnosti prechodu* zo stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ ako

$$p_{ij}(n, n+1) := P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

ktoré označujeme tiež ako *pravdepodobnosti prechodu 1.rádu.* Analogicky označíme *pravdepodobnosti prechodu m-tého rádu*

$$p_{ij}(n, n+m) := P(X_{n+m} = j | X_n = i),\ m \geq 1.$$

Markovov reťazec je *homogénny*, ak pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(n, n+m)$ závisia iba na rozdiele n a $n+m$, čiže na prírastku času m. Ďalej sa budeme zaoberať homogénnymi markovovými reťazcami.

Definujme ešte *počiatočné rozdelenie* Markovového reťazca $\mathbf{p} = \{p_i,\, i \in S\}$ s vlastnosťou pravdepodobnostného vektora

$$\forall i \in S: \, p_i \geq 0, \, \sum_{i \in S} p_i = 1$$

a *maticu pravdepodobností prechodu* $\mathbf{P} = \{p_{ij},\, i, j \in S\}$, ktorá je stochastickou maticou, t.z. je to štvorcová matica s vlastnosťami

(i) $p_{ij} \geq 0$, pre $\forall i, j \in S$,

(ii) $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, pre $\forall i \in S$.

Absolútnymi pravdepodobnosťami v čase n voláme nepodmienené pravdepodobnosti $p_j(n) = P(X_n = j)$, $j \in S$.

Veta 1.4.

(i) Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S, s počiatočným rozdelením $\mathbf{p} = \{p_j,\, j \in S\}$ a s maticou pravdepodobností prechodu $\mathbf{P} = \{p_{ij},\, i, j \in S\}$. Potom konečnerozmerné rozdelenia sú dané výrazom:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k}, \tag{1.2}$$

(ii) Nech je daný vektor $\mathbf{p} = \{p_j,\, j \in S\}$, $p_j \geq 0$, $\sum_{j \in S} p_j = 1$ a nech $\mathbf{P} = \{p_{ij}(t),\, i, j \in S\}$ je stochastická matica. Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je postupnosť náhodných veličín s hodnotami v S, pre ktorú platí (1.2).
Potom $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S, počiatočným rozdelením $\mathbf{p}$ a maticou pravdepodobností prechodu $\mathbf{P}$.

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v publikácii [9] na strane 17 a 18. □

Ďalej ukážeme, ako je možné vypočítať pravdepodobnosti prechodov vyšších rádov u homogénneho Markovovho reťazca. Označme

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}, \text{ kde } \delta_{ij} \text{ je Kroneckerov symbol, } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}, \tag{1.4}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}, \, n \geq 1, \tag{1.5}$$

maticovo

$$\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I},$$
$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P},$$
$$\mathbf{P}^{(n+1)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{n+1}.$$

Poznámka 1.5. Matematickou indukciou sa dá ukázať, že $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ sú stochastické matice pre $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka 1.6. Pre $m, n \in \mathbb{N}_0$ vieme zobecniť vzťah (1.5) ako

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \tag{1.6}$$

maticový zápis

$$\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)} \mathbf{P}^{(n)}. \tag{1.7}$$

Rovnice (1.6) a (1.7) nazývame *Chapman-Kolmogorovova* rovnosť.

Veta 1.7. *Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s maticou pravdepodobností prechodu $\mathbf{P} = \{p_{ij},\, i, j \in S\}$. Potom pre pravdepodobnosť prechodu platí*

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}, \tag{1.8}$$

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia možno nájsť v publikácii [9], veta 2.2. □

1.1.2 Klasifikácia stavov Markovového reťazca

Na klasifikovanie stavov Markovového reťazca si najprv pripravíme pomocné definície.

Definícia 1.8. Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je postupnosť náhodných veličín s hodnotami v S definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom zobrazenie $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ je *Markovovský čas (stopping time)* procesu $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$, ak prvky $\{\omega : \tau(\omega) = k\} \in \sigma\{X_0, \ldots, X_k\}$.

Definícia 1.9. Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ so stavmi S. Definujeme na Ω zobrazenie $\tau_j(1)$ predpisom

$$\tau_j(1) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = j\}, \tag{1.9}$$

ak by sa $\inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = j\} = \emptyset$, položíme $\tau_j(1) = +\infty$. Potom $\tau_j(1)$ označuje čas prvého vstupu do stavu j, pokiaľ $X_0 \neq j$ a čas prvého návratu do stavu j, ak $X_0 = j$.

Poznámka 1.10. $\tau_j(1)$ je Markovovský čas, pretože platí

$$[\tau_j(1) = k] = [X_0 \in S, X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j] \in \sigma\{X_0, \ldots, X_k\}.$$

Definícia 1.11. Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S. Stav $j \in S$ Markovovho reťazca je *trvalý*, ak platí

$$P(\tau_j(1) < \infty | X_0 = j) = 1, \tag{1.10}$$

čo znamená, že reťazec vychádzajúci zo stavu j sa do j vráti po konečne veľa krokoch s pravdepodobnosťou 1. Stav j je *prechodný*, ak

$$P_j(\tau_j(1) = \infty | X_0 = j) > 0. \tag{1.11}$$

Ďalej delíme trvalé stavy na *nulové*, a to v prípade $\mu_j := E(\tau_j(1)|X_0 = j) = \infty$ a *nenulové*, ak $\mu_j < \infty$.

Definícia 1.12. Stav $j \in S$ Markovovho reťazca je *periodický s periódou* d_j, ak $d_j > 1$, kde $d_j := NSD\{n \in \mathbb{N} : p_{jj}^{(n)} > 0\}$. V prípade d_j=1 hovoríme, že stav j je *neperiodický*.

Definícia 1.13. Stav $j \in S$ je *dosiahnuteľný* zo stavu $i \in S$, ak existuje $n \in \mathbb{N}_0$ také, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Definícia 1.14. Neprázdna množina stavov C je *uzavrená*, ak žiadny stav mimo množiny C nie je dosiahnuteľný zo žiadneho stavu patriacemu množine C. Uzavrená množina stavov je *nerozložiteľná*, ak neobsahuje žiadnu uzavrenú vlastnú podmnožinu.

Definícia 1.15. Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S. Povieme, že je *nerozložiteľný*, ak je množina stavov S nerozložiteľná, t.z. neobsahuje žiadnu vlastnú uzavretú podmnožinu. Inými slovami, každý stav je dosiahnuteľný z každého stavu. V opačnom prípade je reťazec *rozložiteľný*.

Lemma 1.16. *V nerozložiteľnom reťazci sú všetky stavy rovnakého typu.*

Poznámka 1.17. To, že sú dva stavy rovnakého typu znamená, že sú buď oba prechodné alebo trvalé nulové, prípadne oba trvalé nenulové a súčasne sú oba aperiodické alebo periodické s rovnakou periódou.

Dôkaz. Lemma plynie priamo z vety 2.13 v [9], ktorá hovorí o tom, že ak sú dva stavy navzájom dosažiteľné, potom sú rovnakého typu. □

Lemma 1.18. *V reťazci s konečne mnoho stavmi nemôžu byť všetky stavy prechodné a neexistujú tu stavy nulové.*

Dôkaz. V publikaci [9], vety 2.16 a veta 2.17. □

Veta 1.19. *V nerozložiteľnom reťazci s konečne mnoho stavmi sú všetky stavy trvalé nenulové.*

Dôkaz. Veta je priamym dôsledkom lemmy 1.16 a 1.18. □

1.1.3 Stacionárne rozdelenie

Definícia 1.20. Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S a maticou pravdepodobností prechodu $\mathbf{P}$. Vektor $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j,\, j \in S\}$ s vlastnosťami $\pi_j \geq 0,\, j \in S,\, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$ definujeme ako *stacionárne rozdelenie*, ak platí

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj},\ j \in S, \text{ maticovo } \boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}. \tag{1.12}$$

Veta 1.21.

(i) Ak sú všetky stavy trvalé nulové alebo prechodné, stacionárne rozdelenie neexistuje.

(ii) Ak sú všetky stavy v reťazci trvalé nenulové, potom stacionárne rozdelenie existuje a je jediné. V prípade, že sú tieto stavy neperiodické, stacionárne rozdelenie má tvar

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0, \quad i, j \in S, \tag{1.13}$$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) > 0, \quad j \in S. \tag{1.14}$$

V prípade, že sa jedná o trvalé nenulové stavy, ktoré sú periodické, stacionárne rozdelenie má predpis

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}, \quad i, j \in S, \tag{1.15}$$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j(k), \quad j \in S. \tag{1.16}$$

Dôkaz. Dôkaz je sformulovaný v [9], veta 2.25. □

Poznámka 1.22. Vzťah (1.13) znamená maticovo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{\Pi}, \tag{1.17}$$

kde

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}^T \\ \boldsymbol{\pi}^T \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Veta 1.23. *V nerozložiteľnom reťazci s konečne mnoho stavmi stacionárne rozdelenie existuje.*

Dôkaz. Z vety 1.19 plynie, že v nerozložiteľnom reťazci s konečne mnoho stavmi sú všetky stavy trvalé nenulové. Tým z vety 1.21 (*ii*) plynie, že existuje stacionárne rozdelenie a je jediné. □

Definícia 1.24. *Ergodickým reťazcom* budeme označovať nerozložiteľný reťazec, ktorý má všetky stavy trvalé nenulové a neperiodické.

1.2 Markovové reťazce s diskontovaným ocenením prechodov

Predpokladajme, že kapitál je úročený a uvažujme jeho hodnotu prepočítanú k počiatočnému okamihu. Tento prístup sa nazýva diskontovanie a diskontný faktor označíme ako parameter $\beta \in (0, 1)$.

Nech $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s konečne mnoho stavmi z množiny S a maticou pravdepodobnosti prechodu $\mathbf{P}$. Zavedieme maticu ocenenia $\mathbf{Z} = \{z_{ij},\ i, j \in S\}$ (každému prechodu zo stavu i do stavu j je priradené ocenenie z_{ij}, prechody sú za jednotku času).

Poznámka 1.25. Ak sa uskutoční prechod zo stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ a toto ocenenie má v čase n hodnotu z_{ij}, potom pri diskontnom princípe bude ocenenie tohto prechodu prepočítané k počiatočnému okamihu ako $\beta^n z_{ij}$. V prípade realizácie $[X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n]$ dostávame výnos

$$(z_{ii_1} + \beta z_{i_1 i_2} + \beta^2 z_{i_2 i_3} + \ldots + \beta^{n-1} z_{i_{n-1} i_n}).$$

Očakávaný stredný výnos realizácie $[X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n]$ teda bude

$$(z_{ii_1} + \beta z_{i_1 i_2} + \beta^2 z_{i_2 i_3} + \ldots + \beta^{n-1} z_{i_{n-1} i_n}) p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n},$$

kde sme využili vzťah konečnerozmerných rozdelení (1.2).

Označme stredný výnos za n období ako vektor $\mathbf{v}(n)$, ktorý má zložky $v_i(n)$, ktoré označujú stredný výnos za n období, ak reťazec vychádzal zo stavu i. Dodefinujme ešte $v_i(0) := 0$ a nech vektor $\mathbf{q}$ so zložkami q_i, $i \in S$ je vektor výnosov realizovaných za jedno obdobie a je definovaný predpisom

$$q_i := v_i(1) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} p_{ij}. \tag{1.18}$$

Potom môžeme odvodiť očakávaný výnos z realizácie dĺžky n, ak je systém na počiatku v stave i. Platí pre $1 \leq n < \infty$ a $i, i_1, \ldots i_n \leq n \in S$

$$\begin{aligned}
v_i(n) &= \sum_{i_1 \in S} \sum_{i_n \in S} \ldots \sum_{i_n \in S} (z_{ii_1} + \beta z_{i_1 i_2} + \ldots + \beta^{n-1} z_{i_{n-1}} z_{i_n}) p_{ii_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n} && (1.19)\\
&= \sum_{i_1 \in S} p_{ii_1} z_{ii_1} + \beta \sum_{i_1} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1) = v_i(1) + \beta \sum_{i_1 \in S} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1) && (1.20)\\
&= q_i + \beta \sum_{i_1 \in S} p_{ii_1} v_{i_1}(n-1). && (1.21)
\end{aligned}$$

Vektorovo

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(n) &= \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1) && (1.22)\\
&= \mathbf{q} + \beta \mathbf{P}(\mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-2)) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{q} + \beta^2 \mathbf{P}^2 \mathbf{v}(n-2) && (1.23)\\
&= \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{q} + \ldots + \beta^{n-1} \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{q} && (1.24)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q}. && (1.25)
\end{aligned}$$

Poznámka 1.26. Keďže $\beta \in (0,1)$ a $\mathbf{P}$ je stochastická matica, platí $\beta^n \mathbf{P}^n \to 0$, pretože $\beta^n \mathbf{P}^n$ má nezáporné prvky a súčty na každom riadku sú β^n a platí $0 < \beta^n < 1$.

Podľa poznámky 1.26 sme splnili predpoklad pre použitie vety z dodatku a tak za pomoci vzťahov z dodatku (A.1) a (A.2) dostávame

$$\mathbf{v}(\infty) \triangleq \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = \lim_{n\to\infty} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q} = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}. \tag{1.26}$$

Ďalej môžeme na základe (1.25) odvodiť

$$\mathbf{v}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\mathbf{P})^k \mathbf{q} - \sum_{k=n}^{\infty} (\beta\mathbf{P})^k \mathbf{q} = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} - \beta^n \mathbf{P}^n (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} \tag{1.27}$$

$$= (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}[\mathbf{I} - \beta^n \mathbf{P}^n]\mathbf{q} \tag{1.28}$$

a pre $n \to \infty$ dostaneme z (1.27)

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{v}(\infty) - \beta^n \mathbf{P}^n (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{v}(\infty) + O(\beta^n), \tag{1.29}$$

s využitím vzťahu $\mathbf{P}^n(\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{\Pi}(\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$.

Zhrnieme si dôležité vzťahy, ktoré sme v tejto podkapitole dokázali odvodením (1.22), (1.26), (1.27) a (1.29).

V homogénnom reťazci s diskontovaným ocenením prechodov a konečnou množinou stavov S platí pre stredný výnos za n období

(i) $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$,

(ii) $\mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}[\mathbf{I} - \beta^n \mathbf{P}^n]\mathbf{q}$,

(iii) $\mathbf{v}(\infty) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$,

(iv) $\mathbf{v}(n) = \mathbf{v}(\infty) + O(\beta^n)$, $n \to \infty$.

1.3 Riadené Markovové reťazce

Nech $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogénny Markovov reťazec s konečnou množinou stavov S. Nech ku každému stavu $i \in S$ existuje množina rozhodnutí $\mathbf{R}_i$. Celkovú množinu riadení označme predpisom $\mathbf{R} := \prod_{i \in S} \mathbf{R}_i$. *Homogénnym riadením* reťazca $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ potom rozumieme nejaký systém rozhodnutí

$$\mathbf{r} = (r_i)_{i \in S} \in \mathbf{R}, \tag{1.30}$$

ktorý ku každému stavu $i \in S$ priradí reťazcu rozhodnutie $r_i \in \mathbf{R}_i$.

Danému riadeniu $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ odpovedá Markovov reťazec s diskrétnym časom, charakterizovaný maticou pravdepodobností prechodu ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}$ a maticou ocenenia prechodov ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{r}}\mathbf{P} &= ({}_{r_i}\mathbf{p}_i^{\mathsf{T}})_{i \in S} = ({}_{r_i}p_{ij})_{i,j \in S}, \\ {}_{\mathbf{r}}\mathbf{Z} &= ({}_{r_i}\mathbf{z}_i^{\mathsf{T}})_{i \in S} = ({}_{r_i}z_{ij})_{i,j \in S}. \end{aligned}$$

Analogicky ako vo vzťahu (1.18) kde sme definovali vektor $\mathbf{q}$, označíme výpočet tohto vektora pre dané riadenie $\mathbf{r}$ predpisom ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{q}$, kde

$${}_{\mathbf{r}}\mathbf{q} = ({}_{r_i}q_i)_{i \in S} = ({}_{r_i}v_i(1))_{i \in S} = ({}_{r_i}\mathbf{z}_i\ {}_{r_i}\mathbf{p}_i{}^{\mathsf{T}})_{i \in S}. \tag{1.31}$$

Poznámka 1.27. Princíp riadených Markovových reťazcov je to, že v každom kroku (čase) môžeme voliť, ktorými maticami ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}$ a ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{Z}$ sa bude reťazec $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ riadiť a podľa toho vypočítame im prislúchajúci vektor ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{q}$.

Nehomogénnemu riadeniu Markovového reťazca na intervale $(0, N)$ rozumieme postupnosť homogénnych riadení $(\mathbf{r}^1, \ldots, \mathbf{r}^N) \in \mathbf{R}^N$. Pre pevne zvolené riadenie $\mathbf{r}$ označíme $v_i(n, N)$ ako očakávaný výnos za časový interval (n, N) a položíme pre $\forall i \in S : v_i(N, N) := 0$. Ďalej odvodíme zo vťahu (1.22)

$$\mathbf{v}(n, N) = {}_{\mathbf{r}}\mathbf{q} + \beta_r\mathbf{P}\mathbf{v}(n + 1, N). \tag{1.32}$$

Definujeme pre $n \in \{1, \ldots, N\}$

$$\hat{v}_i(n-1, N) := \max_{r_i \in R_i}\{{}_{r_i}q_i + \beta \sum_{j \in S} {}_{r_i}p_{ij}\hat{v}_j(n, N)\} = \max_{r_i \in R_i}\{{}_{r_i}q_i + \beta_{r_i}\mathbf{p}_j^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{v}}(n, N)\}. \tag{1.33}$$

Potom platí

$$\mathbf{v}(n, N) \leq \hat{\mathbf{v}}(n, N). \tag{1.34}$$

Dôkaz vzťahu (1.34) je v [2] na strane 124 pre Markovovské reťazce s ocenením prechodu, pre diskontovaný prípad by sme dokazovali analogicky. Príslušné nehomogénne riadenie je teda na intervale $(0, N)$ optimálne.

1.4 Howardov iteračný algoritmus

V tejto podkapitole predstavíme algoritmus, ktorý hľadá optimálne riadenie s cieľom maximalizovať očakávaný diskontovaný výnos. Uveďme najprv značenie, ktoré budeme používať. Predný index, ktorý odpovedá riadeniu $\mathbf{r}^k$ v k-tom kroku algoritmu budeme označovať ako k. Takže namiesto ${}_{\mathbf{r}^k}\mathbf{P}$ píšeme skrátene ${}_k\mathbf{P}$ a podobne platí pre ostatné matice a vektory.

Algoritmus je iteračný, najprv zvolíme nejaké homogénne riadenie, z ktorého budeme vychádzať. Algoritmus popíšeme nasledovne:

1. Zvolíme nulté priblíženie $\mathbf{r}^k, k = 0$ k hľadanému homogénnemu riadeniu.

2. Riadenie $\mathbf{r}^k$ jednoznačne určuje matice ${}_k\mathbf{P}$ a ${}_k\mathbf{Z}$. Ich dosadením do vzorca (1.31) pre $i \in S$ tak vypočítame zložky vektora ${}_k\mathbf{q}$, teda stredný výnos za obdobie dĺžky 1, ktoré nám prinieslo riadenie $\mathbf{r}^k$.

3. Ku riadeniu $\mathbf{r}^k$ vypočítame diskontovaný očakávaný výnos ${}_k\mathbf{v}$ podľa vzorca

$$ {}_k\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \beta_k\mathbf{P})^{-1}{}_k\mathbf{q}. \tag{1.35}$$

4. S vypočítanými hodnotami ${}_k\mathbf{v}$ a ${}_k\mathbf{q}$ nájdeme pre všetky stavy $i \in S$ rozhodnutia $r_i^{k+1} \in R_i$, ktoré prinesú maximálny zisk, a teda

$$ r_i^{k+1} = \arg\max_{\rho \in R_i} ({}_\rho q_i + {}_\rho\mathbf{p}_i^\intercal {}_k\mathbf{v}). \tag{1.36}$$

   V prípade, že rozhodnutie r_i^{k+1} nie je určené jednoznačne, volíme riadenie z minulého kroku r_i^k. To znamená, že v prípade, že zmeníme riadenie, zvýši sa výnos. S hodnotami $\mathbf{r}^{k+1} = (r_i^{k+1})_{i\in S}$ znovu pokračujeme od bodu 2. Algoritmus sa skončí nájdením optimálneho riadenia, teda v prípade, ak ďalší iteračný krok nevedie k vyššiemu očakávanému výnosu.

Poznámka 1.28. Z algoritmu z bodu 4 plynie vzťah

$$ {}_{k+1}\mathbf{q} + \beta_{k+1}\mathbf{P}_k\mathbf{v} \geq {}_\mathbf{r}\mathbf{q} + \beta_\mathbf{r}\mathbf{P}_k\mathbf{v}, \tag{1.37}$$

pre ľubovoľné riadenie $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$.

Dôkaz Howardovho iteračného algoritmu:

(i) Pre $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$ {}_{k+1}\mathbf{v} \geq {}_k\mathbf{v}. \tag{1.38}$$

Ak máme vo vzťahu (1.38) rovnosť, potom platí pre ľubovoľné riadenie $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$

$$ {}_k\mathbf{v} \geq {}_\mathbf{r}\mathbf{v}. $$

Riadenie $\mathbf{r}^k$ je potom optimálne.

Dôkaz. Voľbou $\mathbf{r} = \mathbf{r}^k$ máme z poznámky (1.28)

$$_{k+1}\mathbf{q} + \beta_{k+1}\mathbf{P}_{k}\mathbf{v} \geq {}_{\mathbf{k}}\mathbf{q} + \beta_{\mathbf{k}}\mathbf{P}_{k}\mathbf{v}.$$

Z tohto vzťahu a z rovnosti $_k\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \beta_k\mathbf{P})^{-1}{}_k\mathbf{q}$, ktorá sa dá inak prepísať ako $_k\mathbf{q} + \beta_k\mathbf{P}_k\mathbf{v} = {}_k\mathbf{v}$, plynie

$$_{k+1}\mathbf{q} \geq {}_k\mathbf{v} - \beta_{k+1}\mathbf{P}_k\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \beta_{k+1}\mathbf{P})_k\mathbf{v}.$$

Vynásobením tejto nerovnosti nezápornou maticou $(\mathbf{I} - \beta_{k+1}\mathbf{P})^{-1}$ dostaneme

$$_{k+1}\mathbf{v} \geq {}_k\mathbf{v},$$

čo znamená, že ďalším iteračným krokom pri zmene riadenia nedochádza ku poklesu výnosu.
Za predpokladu, že vo vzťahu $_{k+1}\mathbf{v} = {}_k\mathbf{v}$ dochádza k rovnosti, platí z poznámky (1.28) pre ľubovoľné riadene $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$

$$\underbrace{_{k+1}\mathbf{q} + \beta_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{v}}_{={}_{k+1}\mathbf{v}={}_k\mathbf{v}} \geq {}_{\mathbf{r}}\mathbf{q} + \beta_{\mathbf{r}}\mathbf{P}_k\mathbf{v},$$

čo je po úprave $_k\mathbf{v}(\mathbf{I} - \beta_{\mathbf{r}}\mathbf{P}) \geq {}_{\mathbf{r}}\mathbf{q}$. Vynásobením predchádzajúcej nerovnosti nezápornou maticou $(\mathbf{I} - \beta_{\mathbf{r}}\mathbf{P})^{-1}$ získavame

$$_k\mathbf{v} \geq (\mathbf{I} - \beta_{\mathbf{r}}\mathbf{P})^{-1}{}_{\mathbf{r}}\mathbf{q} = {}_{\mathbf{r}}\mathbf{v},$$

t.j. $_k\mathbf{v} \geq {}_{\mathbf{r}}\mathbf{v}$, takže pri zastavení Howardovho algoritmu je riadenie $\mathbf{r}^k$ optimálne. □

(ii) Algoritmus skončí po konečne veľa krokoch.

Dôkaz. Plynie z toho, že máme konečný počet riadení a faktom, že algoritmus sa zastaví, ak ďalší iteračný krok nevedie k vyššiemu výnosu. □

Kapitola 2

Markovové reťazce so spojitým časom

2.1 Teória Markovových reťazcov so spojitým časom

2.1.1 Základné pojmy

Definícia 2.1. Systém celočíselných náhodných veličín $\{X_t,\ t \geq 0\}$ definovaných na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s hodnotami v S sa nazýva *Markovov reťazec so spojitým časom*, ak

$$P(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j | X_s = i) \qquad (2.1)$$

pre všetky $i, j, i_1, \ldots i_n \in S$ a pre $t > s > t_n > \ldots > t_2 > t_1 \geq 0$, pre ktoré $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots X_{t_1} = i_1) > 0$. Vzťah (2.1) označujeme ako *markovovskú vlastnosť.*

Označme:
$p_{ij}(s,t) := P(X_t = j | X_s = i)$ ... *pravdepodobnosti prechodu zo stavu i v čase s do stavu j v čase t*
$\mathbf{p}_j = p_j(0) = P(X_0 = j),\ j \in S$ ... *počiatočné pravdepodobnosti*
$\mathbf{P}(t) = \{p_{ij}(t),\ i, j \in S\}$ ... *matica pravdepodobností prechodu v čase t*

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Platí $p_j(t) \geq 0$ pre všetky $j \in S$, $t \geq 0$ a $\sum p_j(t) = 1$, $t \geq 0$.
Hovoríme, že reťazec je *homogénny*, ak funkcia $p_{ij}(s, s+t)$ je funkciou t, čiže $p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(t)$, $s \geq 0$, $t > 0$. V opačnom prípade je reťazec heterogénny. Ďalej sa budeme zaoberať homogénnymi markovovými reťazcami.

Definícia 2.2. Proces $\{X_t,\ t \in T\}$ sa nazýva *stochasticky spojitý* v bode $t_0 \in T$, ak pre každé $\epsilon > 0$ platí

$$\lim_{t \to t_0} P(|X_t - X_{t_0}| > \epsilon) = 0$$

Proces je stochasticky spojtý, ak je stochasticky spojitý v každom bode T.

Veta 2.3.

(i) *Nech* $\{X_t,\, t \geq 0\}$ *je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov* S*, s počiatočným rozdelením* $\mathbf{p} = \{p_j,\, j \in S\}$ *a systémom matíc pravdepodobností prechodu* $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$*. Potom konečnerozmerné rozdelenia sú dané výrazom:*

$$P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_0}(0)p_{i_0i_1}(t_1)p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\ldots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1}), \tag{2.2}$$

odkiaľ špeciálne dostávame

$$p_j(t) = P(X_t = j) = \sum_{i \in S} p_i(0)p_{ij}(t),\; j \in S, \tag{2.3}$$

maticový zápis

$$\mathbf{p}(t)^T = \mathbf{p}(0)^T\mathbf{P}(t). \tag{2.4}$$

(ii) *Nech je daný vektor* $\mathbf{p} = \{p_j(t),\, j \in S\}$, $p_j \geq 0$, $\sum_{j \in S} p_j = 1$ *a nech* $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$ *je systém stochastických matíc. Nech* $\{X_t,\, t \geq 0\}$ *je postupnosť náhodných veličín s hodnotami v* S*, pre ktorú platí* (2.2)*.*
Potom $\{X_t,\, t \geq 0\}$ *je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov* S*, počiatočným rozdelením* $\mathbf{p}$ *a systémom matíc pravdepodobností prechodu* $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$*.*

Dôkaz.

(i) Nech je $\{X_t,\, t \geq 0\}$ Markovov reťazec so spojitým časom a množinou stavov S. Podľa podmienenej pravdepodobnosti platí pre všetky $t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > 0$

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\\
&\quad= P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0).
\end{aligned}$$

S využitím markovskej vlastnosti (2.1) dostávame

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\\
&\quad= P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1})P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\\
&\quad= p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1})P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0).
\end{aligned}$$

Takýmto spôsobom budeme pokračovať vo vyjadrovaní podmienenej pravdepodobnosti s využitím (2.1) až do eliminácie posledného člena $P(X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0)$

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\\
&\quad= p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1})\ldots p_{i_1i_2}(t_2 - t_1)P(X_{t_1} = i_1, X_0 = 0)\\
&\quad= p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1})\ldots p_{i_1i_2}(t_2 - t_1)P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = 0)P(X_0 = i_0)\\
&\quad= p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1})\ldots p_{i_1i_2}(t_2 - t_1)p_{i_0i_1}(t_1)p_{i_0}(0),
\end{aligned}$$

a tým je tvrdenie dokázané.

(ii) Nech pre dané $\mathbf{p}$ a $\mathbf{P}(t)$ existuje náhodný proces so spojitým časom, pre ktorý platí (2.2). Chceme ukázať, že tento náhodný proces je Markovov reťazec a teda spĺňa markovovskú vlastnosť.

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0) &= \sum_{i_1 \in S} \sum_{i_2 \in S} \dots \sum_{i_n \in S} p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \\ &= p_{i_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &\quad = \frac{P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1})}{P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1})} \\ &\quad = \frac{\sum_{i_0 \in S} \sum_{i_1 \in S} \dots \sum_{i_{n-2} \in S} p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})}{\sum_{i_0 \in S} \sum_{i_1 \in S} \dots \sum_{i_{n-2} \in S} p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2})} \\ &\quad = p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) \\ &\quad = \frac{P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}{P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)} \\ &\quad = \frac{p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})}{p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) \dots p_{i_{n-2} i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2})} \\ &\quad = p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že pre všetky $t_n > t_{n-1} > \dots t_1 > 0$ platí (2.1), a tým je reťazec $\{X_t,\, t \geq 0\}$ Markovov.

□

Veta 2.4. *Nech* $\{X_t,\, t \geq 0\}$ *je homogénny Markovov reťazec so systémom matíc pravdepodobností prechodu* $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$*. Potom pre všetky* $s, t \geq 0$ *platí*

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t),\ i, j \in S, \tag{2.5}$$

maticovo

$$\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t) \tag{2.6}$$

Vzťah (2.5) *a* (2.6) *označujeme ako* Chapman-Kolmogorovovú rovnosť.

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia možno nájsť vo vete 1 v publikácii [3]. □

Veta 2.5. *Nech* $\{X_t,\, t \geq 0\}$ *je homogénny Markovov reťazec so spojitým časom, množinou stavov* S *a maticami* $\{p_{ij}(t),\, t \geq 0\}$*. Nech* $\lim_{k \to 0_+} p_{ij}(k) = \delta_{ij}$*. Potom pravdepodobnosti prechodu* $p_{ij}(t)$ *sú stejnomerne spojité funkcie* t*.*

Dôkaz. Chceme dokázať, že pre ľubovoľné t platí: $p_{ij}(t+h) \xrightarrow{h\to 0_+} p_{ij}(t)$. Využijeme vzťah (2.5)

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= \sum_{k\in S} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t) \\ &= p_{ii}(h)p_{ij}(t) + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t) \\ &= -p_{ij}(t)(1-p_{ii}(h)) + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned} \mid p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \mid &\leq p_{ij}(t)(1-p_{ii}(h)) + \underbrace{\sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(h)}_{1-p_{ii}(h)} \\ &\leq (1-p_{ii}(h))(1+p_{ij}(t)) \leq 2(1-p_{ii}(h)) \end{aligned}$$

Po limitnom prechode $h \to 0_+$ dostávame

$$\lim_{h\to 0_+} \mid p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \mid \leq \lim_{h\to 0_+} 2(1-p_{ii}(h)) = 0,$$

z čoho vyplýva stejnomerná spojitosť $p_{ij}(t)$, a tým je tvrdenie dokázané. □

Veta 2.6. *Nech $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec so spojitým časom a pravdepodobnosťami prechodu $p_{ij}(t)$, $t \geq 0$ a množinou stavov S. Nech pre $i, j \in S$ platí $\lim_{k\to 0_+} p_{ij}(k) = \delta_{ij}$. Potom $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je stochasticky spojitý proces.*

Dôkaz. Stačí dokázať, že pre všetky $t \geq 0$ platí $X_{t+h} - X_t \xrightarrow{h\to 0_+} 0$ a $X_{t-h} - X_t \xrightarrow{h\to 0_+} 0$.

$$P(X_{t+h} = X_t) = \sum_{j\in S} P(X_t = j, X_{t+h} = j) = \sum_{j\in S} p_j(t)p_{jj}(h).$$

Po limitnom prechode $h \to 0_+$ máme

$$\lim_{h\to 0_+} P(X_{t+h} = X_t) = \sum_{j\in S} p_j(t) \lim_{h\to 0_+} p_{jj}(h) = 1.$$

Analogicky pre $P(X_{t-h} = X_t)$. □

Veta 2.7. *Pre každé $i \in S$ existuje limita*

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} := q_i \leq \infty, \tag{2.7}$$

pre každé $i, j \in S$, $i \neq j$ existujú limity

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} := q_{ij} < \infty, \tag{2.8}$$

a pre každé $i \in S$ platí

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} \leq q_i. \tag{2.9}$$

Dôkaz. Dôkaz vzťahov (2.7) a (2.8) nájdeme v [1] vo vete II.2.4 a II.2.5. Podľa vlastnosti stochastickej matice je pre každé $h \geq 0$ a $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \sum_{j \in S, j \neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq \sum_{j=0, j \neq i}^{N} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Po limitnom prechode pre $h \to 0_+$ a $N \to \infty$ s využitím (2.7) a (2.8) dostávame dôkaz vzťahu (2.9)

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ij}(h)}{h} = q_i \geq \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} q_{ij}$$

□

Poznámka 2.8. V nerovnosti (2.9) nastáva rovnosť vždy, keď je množina stavov S konečná.

Definícia 2.9. Nezáporné čísla q_{ij} definované vo vete 2.7 sa nazývajú *intenzity prechodu* zo stavu i do stavu j, nezáporné číslo q_i sa nazýva *celková intenzita.* Matica $\mathbf{Q} = \{q_{ij},\ i, j \in S\}$, kde $q_{ii} = -q_i$, sa nazýva *matica intenzít* prechodu.

Veta 2.10. *(Kolmogorovove diferenciálne rovnice) Predpokladajme, že pre všetky $i \in S$ platí $q_i < \infty$ a $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$. Potom pravdepodobnosti prechodu $p_{ij}(t)$ sú diferencovateľné pre všetky $i, j \in S$ a $t > 0$ a platí*

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) \tag{2.10}$$

(retrospektívne rovnice).
Ak je konvergencia stejnomerná v i, potom pre každé $i, j \in S$ a $t > 0$

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} \tag{2.11}$$

(prospektívne rovnice).
Maticovo môžeme sústavu retrospektívnych rovníc prepísať ako $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{QP}(t)$ a sústavu prospektívnych rovníc ako $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$.

Poznámka 2.11. Všimnime si, že v retrospektívnej rovnici sú derivácie $p'_{ij}(t)$ vyjadrené pomocou všetkých možných pravdepodobností do stavu j, zatiaľ čo v prospektívnej rovnici do stavu i.

Dôkaz.

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h}$$

Budeme vychádzať z Chapman-Kolmogorovovej rovnosti:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) &= \sum_{k \in S} p_{ik}(h) p_{kj}(t) = p_{ii}(h) p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \\ &= p_{ii}(h) p_{ij}(t) + \sum_{k=0, k \neq i}^{N} p_{ik}(h) p_{kj}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_{ik}(h) p_{kj}(t),\ N > i, \end{aligned}$$

kde dostaneme

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \frac{(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)}{h} + \sum_{k=0,k\neq i}^{N} \frac{p_{ik}(h)p_{kj}(t)}{h} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{p_{ik}(h)p_{kj}(t)}{h}}_{:=h_N(h,t)}$$

Pre všetky $h>0, t\geq 0$ platí

$$0 \leq h_n(h,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{p_{ik}(h)}{h} \underbrace{p_{kj}(t)}_{\leq 1} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{p_{ik}(h)}{h} = \frac{1-\sum_{k=0}^{N} p_{ik}(h)}{h} =$$

$$= \frac{1-p_{ii}(h)}{h} - \sum_{k=0,k\neq i}^{N} \frac{p_{ik}(h)}{h},$$

odkiaľ platí

$$\begin{aligned}
\frac{(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)}{h} + \sum_{k=0,k\neq i}^{N} \frac{p_{ik}(h)p_{kj}(t)}{h} &\leq \\
&\leq \frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} \leq \\
&\leq \frac{(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)}{h} + \sum_{k=0,k\neq i}^{N} \frac{p_{ik}(h)p_{kj}(t)}{h} + \frac{1-p_{ii}(h)}{h} - \sum_{k=0,k\neq i}^{N} \frac{p_{ik}(h)}{h}
\end{aligned}$$

Limitným prechodom pre $h\to 0_+$ s využitím (2.7) a (2.8) dostávame

$$-q_i p_{ij}(t) + \sum_{k=0,k\neq i}^{N} q_{ik}p_{kj}(t) \leq p'_{ij}t \leq -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k=0,k\neq i}^{N} q_{ik}p_{kj}(t) + q_i - \sum_{k=0,k\neq i}^{N} q_{ik},$$

kde $p'_{ij}(t)$ značí deriváciu p_{ij} v bode t sprava.
Limitným prechodom pre $N\to\infty$ zistíme, že $p'_{ij}(t)$ vyhovuje vzorcu (2.10). Analogicky odvodíme prospektívnu sústavu. $\square$

Veta 2.12. *Nech štvorcová matica* $\mathbf{Q}$ *s prvkami* q_{ij}*, kde pre* $i, j \in S, i \neq j$ *platí* $q_{ij} \geq 0$ *a* $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0$*. Potom existuje práve jedno riešenie sústav diferenciálnych rovníc* (2.10) *a* (2.11) *rovnaké pre obe sústavy vyhovujúce počiatočnej podmienke* $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ *a je rovné*

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{Q}^k}{k!}. \tag{2.12}$$

$\mathbf{P}(t)$ *je matica pravdepodobností prechodu nejakého homogénneho Markovového reťazca s množinou stavov* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia môžeme nájsť v [9] vo vete 3.10. □

2.1.2 Klasifikácia stavov Markovového reťazca

Na klasifikáciu stavov Markovovho reťazca si najprv zadefinujeme pojem markovovský čas.

Definícia 2.13. Nech $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je náhodný proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ktorý má sprava spojité trajektórie a spočetnú množinu stavov S. Nech $\mathcal{F}_t$ je σ-algebra generovaná rodinou náhodných veličín $\{X_s,\, s \leq t\}$, t.j. $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$. Náhodná veličina $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ sa nazýva *markovovský čas* procesu $\{X_t,\, t \geq 0\}$, ak platí $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \geq 0$.

Poznámka 2.14. Čas prvého výstupu zo stavu j Markovovho reťazca budeme značiť ako $\tau_j = \inf\{t \geq 0,\, X_t \neq j\}$ a je to tiež markovovský čas. Vzhľadom k separabilite (Q je hustá spočetná v $[0, \infty)$) platí

$$[\tau_j > t] = [X_s = j, 0 \leq s < t] = \bigcap_{s \in (0,t) \cap Q} [X_s = j] \in \mathcal{F}_t$$

a teda $[\tau_j \leq t] \in \mathcal{F}_t$.
Nech

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t) = \sigma\{X_t, t \geq 0\}.$$

Platí $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{A}$.

Veta 2.15. *Nech* τ *je markovovský čas procesu* $\{X_t,\, t \geq 0\}$*. Potom* X_τ *je* $\mathcal{F}_\tau$*-merateľná náhodná veličina, kde*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t,\, t \geq 0\}.$$

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia je v publikácii [9] ako dôkaz vety 3.7. □

Definícia 2.16. Stav $j \in S$ Markovovho reťazca so spojitým časom a maticou intenzít Q je

- *trvalý*, ak buď $q_j = 0$ alebo $q_j > 0$ a platí

$$P_j(\tau_j(1) < \infty) \triangleq P(\tau_j(1) < \infty \mid X_0 = j) = 1;$$

- *prechodný*, ak $q_j > 0$ a $P_j(\tau_j(1) = \infty) > 0$;
- *trvalý nulový*, ak $E_j(\tau_j(1)) \triangleq E(\tau_j(1)|X_0 = j) = \infty$;
- *trvalý nenulový*, ak buď $q_j = 0$ alebo $q_j > 0$ a $E_j(\tau_j(1)) < \infty$.

Poznámka 2.17. Symbolom $\mathbb{E}$ budeme označovať vektor stredných hodnôt E_j pre $j \in S$ nejakej náhodnej veličiny, t.j. $\mathbb{E}(A) = (E(A|X_0 = j))_{j\in S}$ pre nejakú náhodnú veličinu A. Podobne $\mathbb{P}$ bude znamenať vektor podmienených pravdepodobností, ak $X_0 = j$ pre $j \in S$.

Definícia 2.18. Nech $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovov reťazec so spojitým časom, množinou stavov S a maticami $\mathbf{P}(t)$. Povieme, že stav j je dosiahnuteľný zo stavu i, ak existuje $t > 0$ také, že $p_{ij}(t) > 0$. Reťazec je nerozložiteľný, ak každý stav je dosiahnuteľný z každého stavu.

Definícia 2.19. Stav i taký, že $q_i = 0$ sa nazýva *absorpčný stav.* Stav i voláme *stabilný*, ak $0 \leq q_i < \infty$ a *nestabilný* ak $q_i = \infty$.

2.1.3 Stacionárne a limitné rozdelenie

Definícia 2.20. Nech $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S a maticami $\mathbf{P}(t)$, $t \geq 0$. Nech $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, j \in S\}$ je pravdepodobnostné rozdelenie na S. Potom $\boldsymbol{\pi}$ je *stacionárne rozdelenie*, ak

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}(t),\ t \geq 0. \tag{2.13}$$

Vektor $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i \geq 0, i \in S\}$ taký, že

$$\boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}(t),\ t \geq 0 \tag{2.14}$$

sa nazýva *invariantná miera* procesu $\{X_t, t \geq 0\}$ na S vzhľadom k $\{\mathbf{P}_t, t \geq 0\}$.

Definícia 2.21. Nech $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S a maticami $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$. Pravdepodobnostný vektor $\mathbf{a} = \{a_j, j \in S\}$ na S sa nazýva *limitné rozdelenie* v $\{X_t, t \geq 0\}$, ak pre všetky $i, j \in S$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j. \tag{2.15}$$

Veta 2.22. *Pokiaľ existuje limitné rozdelenie Markovového reťazca, je to stacionárne rozdelenie.*

Dôkaz. Nech existuje $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$, $a_j \geq 0$, $\sum_{j\in S} a_j = 1$.
Chceme ukázať, že $a^T = a^T\mathbf{P}(t)$, $t \geq 0$, $a_j = \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(t)$, $j \in S$. Pre $h \geq 0$ pevné

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)p_{kj}(h) \geq \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t)p_{kj}(h),$$

a teda

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h) \geq \sum_{k=0}^{N} \lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(h) = \sum_{k=0}^{N} a_k p_{kj}(h).$$

Po limitnom prechode $N \to \infty$ dostávame pre ľubovoľné $j \in S$

$$a_j \geq \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(h),\ h \geq 0.$$

Sporom dokážeme, že v tomto vzťahu platí pre každé $j \in S$ rovnosť. Nech teda existuje $j \in S$ také, pre ktoré platí $a_j > \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(h)$. Potom

$$\sum_{j\in S} a_j > \sum_{j\in S} (\sum_{k\in S} a_k p_{kj}(h)) = \sum_{k\in S} a_k \underbrace{\sum_{j\in S} p_{kj}(h)}_{=1} = \sum_{k\in S} a_k$$

Dospeli sme teda k sporu $\sum_{j\in S} a_j > \sum_{k\in S} a_k$, z čoho vyplýva pre ľubovoľné $j \in S$: $a_j = \sum_{k\in S} a_k p_{kj}(h)$, takže pokiaľ existuje limitné rozdelenie, tak je rovné stacionárnemu. $\square$

2.2 Konečné homogénne Markovove reťazce so spojitým časom a diskontovaným ocenením prechodu a doby zotrvania

Nech $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je nerozložiteľný homogénny Markovov reťazec s konečnou množinou stavov $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ charakterizovaný maticou intenzít prechodu $\mathbf{Q} = \{q_{ij},\, i, j \in S\}$ a nech $q_{ii} = -q_i$.

Majme maticu ocenenia $\mathbf{Z} = \{z_{ij},\, i, j \in S\}$, čiže nech prechod zo stavu i do stavu j dáva výnos z_{ij} a nech $z_{ii} := 0$. Zadefinujme vektor výnosu zotrvania za jednotku času ako $\mathbf{z} = (z_i)_{i \in S}$, t.j. ak reťazec zotrvá v stave i po dobu $h > 0$, dostávame výnos $z_i h$.

Sledujeme proces do času t. Pre $i, j \in S$ definujme počet prechodov zo stavu i do stavu j ktoré sa uskutočnili v intervale $(0, t)$ ako $\varphi_{ij}(t)$ a $\varphi_i(t)$ označme ako celkovú dobu, po ktorú je systém v stave $i \in S$ behom intervalu $(0, t)$.

Potom výnos z realizácie reťazca za dobu t je rovný

$$\sum_{i=0}^{N} z_i \varphi_i(t) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} z_{ij} \varphi_{ij}(t). \tag{2.16}$$

Poznámka 2.23. Opäť uvažujeme, že kapitál je úročený spojito, zaujíma nás však jeho hodnota prepočítaná k počiatočnému obdobiu. Budeme teda diskontovať spojito s parametrom intenzity úroku $\delta := \log(1 + i)$, kde i je úroková miera a spojité diskontovanie z času 0 do času t sa vypočíta ako $\int_0^t e^{-\delta s} ds$.

Označíme $\mathbf{V}_\delta(t)$ ako diskontovaný výnos za čas t pri danej intenzite úroku δ. Výnos z realizácie reťazca za dobu t diskontovaný k počiatku je potom rovný

$$\mathbf{V}_\delta(t) = \sum_{i=0}^{N} z_i \int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_i(s) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} z_{ij} \int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_{ij}(s). \tag{2.17}$$

Vidíme, že $\mathbf{V}_\delta$ je náhodná veličina. Položme $\mathbf{v}_\delta(t) := \mathbb{E}\mathbf{V}_\delta(t)$.

Poznámka 2.24. Pre prehľadnosť zápisu v ďalších vzťahoch označme vektor $\boldsymbol{\rho}$ ako vektor s prvkami

$$\rho_i \triangleq z_i + \sum_{j=0}^{N} z_{ij} q_{ij}. \tag{2.18}$$

Veta 2.25. *Pre diskontovaný stredný výnos za čas t platí*

$$\mathbf{v}_\delta(t) = \int_0^t e^{-\delta s} \mathbf{P}(s)\, ds \boldsymbol{\rho}. \tag{2.19}$$

Dôkaz.

$$\mathbf{v}_\delta(t) = \mathbb{E}\mathbf{V}_\delta(t) = \mathbb{E} \sum_{i=0}^{N} z_i \int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_i(s) + \mathbb{E} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} z_{ij} \int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_{ij}(s) \tag{2.20}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} z_i\, \mathbb{E} \int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_i(s) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} z_{ij} \underbrace{\mathbb{E} \int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_{ij}(s)}_{J}. \tag{2.21}$$

Za predpokladu

$$\mathbb{E}\varphi_{ij}(s) = \int_0^s \mathbb{P}(X_u = i)\, q_{ij}\, du, \tag{2.22}$$

si odvodíme označené J z rovnice (2.21). Budeme integrovať metódou per partes:

$$\begin{aligned}
J &= \mathbb{E}\int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_{ij}(s) = \mathbb{E}[-\delta e^{-\delta s}\varphi_{ij}(s)]_0^t + \mathbb{E}\int_0^t \delta e^{-\delta s}\varphi_{ij}(s)\, ds \\
&= [-\delta e^{-\delta s}\int_0^s \mathbb{P}(X_u = i)\, q_{ij}\, du]_0^t + \int_0^t \delta e^{-\delta s}\int_0^s \mathbb{P}(X_u = i)\, q_{ij}\, du\, ds \\
&= \int_0^t e^{-\delta s}\mathbb{P}(X_s = i)\, q_{ij}\, ds.
\end{aligned}$$

Teraz dosadíme vyjadrené J do rovnice (2.21) a pokračujeme vo výpočte $\mathbf{v}_\delta(t)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_\delta(t) &= \mathbb{E}\sum_{i=0}^N z_i \int_0^t e^{-\delta s} d\varphi_i(s) + \sum_{i=0}^N\sum_{j=0}^N z_{ij}\int_0^t e^{-\delta s}\mathbb{P}(X_s = i)\, q_{ij}\, ds \\
&= \sum_{i=0}^N \int_0^t e^{-\delta s}\mathbb{P}(X_s = i)\, ds\, \underbrace{[z_i + \sum_{j=0}^N z_{ij}q_{ij}]}_{:=\rho_i} \\
&= \int_0^t e^{-\delta s}\sum_{i\in S}\rho_i\mathbb{P}(X_s = i)\, ds \\
&= \int_0^t e^{-\delta s}\mathbf{P}(s)\, ds\boldsymbol{\rho}.
\end{aligned}$$

□

Veta 2.26. *Pre diskontovaný stredný výnos platí*

$$\mathbf{v}_\delta(\infty) = (\delta\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\boldsymbol{\rho}. \tag{2.23}$$

Dôkaz.

$$\mathbf{v}_\delta(\infty) = \mathbb{E}\mathbf{V}_\delta(\infty) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\mathbf{P}(t)\, dt\boldsymbol{\rho}. \tag{2.24}$$

S využitím vzťahu $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$ z rovnice (2.12) dostávame

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_\delta(\infty) &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\mathbf{P}(t)\, dt\boldsymbol{\rho} = \int_0^\infty e^{-\delta t}e^{\mathbf{Q}t}\, dt\boldsymbol{\rho} = \int_0^\infty e^{(\mathbf{Q}-\delta\mathbf{I})t}\, dt\boldsymbol{\rho} \qquad (2.25)\\
&= (\delta\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\boldsymbol{\rho}, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

čím sme tvrdenie dokázali. Vo vzťahu (2.25) sme pre súčin $e^{-\delta t}e^{\mathbf{Q}t}$ využili vetu (A.6) z dodatku. □

2.3 Riadené Markovové reťazce

Nech $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec s konečnou množinou stavov S. Podobne ako v diskrétnom prípade uvažujeme, že ku každému stavu $i \in S$ máme k dispozícii konečnú množinu rozhodnutí $\mathbf{R}_i$. Celkovú množinu riadení označíme opäť $\mathbf{R}$. Systém rozhodnutí $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in S}$, ktorý priradí každému stavu $i \in S$ rozhodnutie $r_i \in \mathbf{R}_i$ voláme homogénnym riadením.

Danému riadeniu $\mathbf{r}$ prislúcha Markovov reťazec so spojitým časom charakterizovaný maticou intenzít prechodu ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q}$, maticou ocenení prechodu ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{Z}$ a vektorom ocenenia zotrvania ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{z}$.

Uvažujme nehomogénne riadenie, ktoré budeme označovať s dolným indexom $\mathbf{m}$ a ktoré sa na intervale $(0,t)$ riadi riadením $\mathbf{r}$ a na intervale (t,∞) iným riadením, ktoré nebudeme pre naše potreby označovať. Platí

$$ {}_{\mathbf{m}}\mathbf{v}_\delta(\infty) = \int_0^\infty e^{-\delta s}\,{}_{\mathbf{m}}\mathbf{P}(s)ds\,{}_{\mathbf{m}}\boldsymbol{\rho} = \int_0^t e^{-\delta s}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(s)ds\,{}_{\mathbf{r}}\boldsymbol{\rho} + \int_t^\infty e^{-\delta s}\underbrace{{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s-t)}_{={}_{\mathbf{m}}\mathbf{P}(s)\ z\ (2.6)}ds\,\boldsymbol{\rho} \tag{2.27} $$

Označíme $J_1 := \int_0^t e^{-\delta s}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(s)ds\,{}_{\mathbf{r}}\boldsymbol{\rho}$ a $J_2 := \int_t^\infty e^{-\delta s}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s-t)ds\,\boldsymbol{\rho}$. Postupne pre J_1 a J_2 odvodíme

$$ J_2 = {}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t)e^{-\delta t}\int_t^\infty e^{-\delta(s-t)}\mathbf{P}(s-t)ds\,\boldsymbol{\rho} = e^{-\delta t}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t)\mathbf{v}_\delta(\infty). \tag{2.28} $$

$$ J_1 = {}_{\mathbf{r}}\mathbf{v}_\delta(\infty) - \int_t^\infty e^{-\delta s}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(s)ds\,{}_{\mathbf{r}}\boldsymbol{\rho} = {}_{\mathbf{r}}\mathbf{v}_\delta(\infty) - {}_{\mathbf{r}}(J_2) = [\mathbf{I} - e^{-\delta t}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t)]\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{v}_\delta(\infty). \tag{2.29} $$

Dosadením odvodených vzťahov (2.29) a (2.28) do (2.27) dostaneme

$$ {}_{\mathbf{m}}\mathbf{v}_\delta(\infty) = [\mathbf{I} - e^{-\delta t}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t)]\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{v}_\delta(\infty) + e^{-\delta t}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t)\mathbf{v}_\delta(\infty). \tag{2.30} $$

Zo vťahu (2.12): ($\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$) ďalej plynie

$$ e^{-\delta t}\,{}_{\mathbf{r}}\mathbf{P}(t) = e^{({}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q}-\delta\mathbf{I})t}, $$

a to môžeme pomocou Taylorovho rozvoja ($e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$) vyjadriť ako

$$ \exp\{({}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I})t\} = \mathbf{I} + ({}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I})t + O(t),\ t \to \infty. \tag{2.31} $$

Dosadením (2.31) a (2.26) do vzťahu (2.30) dostaneme

$$ {}_{\mathbf{m}}\mathbf{v}_\delta(\infty) = \mathbf{v}_\delta(\infty) + [{}_{\mathbf{r}}\boldsymbol{\rho} + ({}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I})\mathbf{v}_\delta(\infty)]t + O(t),\ t \to \infty. \tag{2.32} $$

Úlohou bude teda maximalizovať

$$ \max_{\mathbf{r}\in\mathbf{R}}({}_{\mathbf{r}}\boldsymbol{\rho} + {}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q}\mathbf{v}_\delta(\infty)). \tag{2.33} $$

2.4 Howardov iteračný algoritmus

Podobne ako v diskrétnom prípade preznačíme predný index odpovedajúci riadeniu $\mathbf{r}^k$ v k-tom kroku algoritmu skrátene ako k. Namiesto k Teda namiesto ${}_{\mathbf{r}^k}\mathbf{Q}$ píšeme len ${}_k\mathbf{Q}$. U ostatných symbolov analogicky.

Hovardov iteračný algoritmus:

1. Zvolíme nulté priblíženie $\mathbf{r}^k$, $k = 0$ k hľadanému homogénnemu riadeniu.
2. Riadenie $\mathbf{r}^k$ jednoznačne určuje matice ${}_k\mathbf{Q}$, ${}_k\mathbf{Z}$ a vektor ${}_k\mathbf{z}$. Dosadením do vzorca (2.18) vypočítame hodnoty ${}_k\boldsymbol{\rho}$.
3. Ku riadeniu $\mathbf{r}^k$ vypočítame podľa vzorca (2.26) očakávaný diskontovaný výnos ${}_k\mathbf{v}_\delta(\infty)$.
4. S vypočítanými hodnotami ${}_k\mathbf{v}_\delta$ a ${}_k\boldsymbol{\rho}$ nájdeme ku každému stavu $i \in S$ také rozhodnutia $r_i^{k+1} \in \mathbf{R}_i$, ktoré vedú k najväčšiemu zisku, teda

$$r_i^{k+1} = \arg\max_{\rho \in \mathbf{R}_i} ({}_\rho\boldsymbol{\varrho} + {}_\rho\mathbf{q_i}\,{}_k\mathbf{v}_\delta(\infty)). \tag{2.34}$$

   Pokiaľ nie je voľba určená jednoznačne (iné riadenie ako v minulom kroku neviedlo k zlepšeniu), volíme riadenie r_i^k z minulého kroku. S hodnotami $\mathbf{r}^{k+1} = (r_i^{k+1})_{i \in S}$ pokračujeme znovu od bodu 2.

Poznámka 2.27. Z algoritmu z bodu 4 plynie

$${}_{k+1}\boldsymbol{\rho} + {}_{k+1}\mathbf{Q}\,{}_k\mathbf{v}_\delta(\infty) \geq {}_\mathbf{r}\boldsymbol{\rho} + {}_\mathbf{r}\mathbf{Q}\,{}_k\mathbf{v}_\delta(\infty), \tag{2.35}$$

to je

$${}_{k+1}\boldsymbol{\rho} + [{}_{k+1}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I}]\,{}_k\mathbf{v}_\delta(\infty) \geq {}_\mathbf{r}\boldsymbol{\rho} + [{}_\mathbf{r}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I}]\,{}_k\mathbf{v}_\delta(\infty), \tag{2.36}$$

pre ľubovoľné riadenie $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$.

Dôkaz Howardovho iteračného algoritmu:

(i) Pre $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$${}_{k+1}\mathbf{v}_\delta(\infty) \geq {}_k\mathbf{v}_\delta(\infty). \tag{2.37}$$

Ak máme vo vzťahu (2.37) rovnosť, potom platí pre ľubovoľné riadenie $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$

$${}_k\mathbf{v}_\delta(\infty) \geq {}_\mathbf{r}\mathbf{v}_\delta(\infty).$$

Riadenie $\mathbf{r}^k$ je potom optimálne.

Dôkaz. Voľbou $\mathbf{r} = \mathbf{r}^k$ máme zo vzťahu (2.36)

$${}_{k+1}\boldsymbol{\rho} + [{}_{k+1}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I}]\,{}_k\mathbf{v}_\delta(\infty) \geq {}_k\boldsymbol{\rho} + [{}_k\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I}]\,{}_k\mathbf{v}_\delta(\infty) = 0.$$

Keďže

$$0 \leq \int_0^\infty e^{-\delta t}\mathbf{P}(t)dt = \int_0^\infty e^{(\mathbf{Q}-\delta\mathbf{I})t}dt = (\delta\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1},$$

dostaneme po vynásobení touto maticou odpovedajúcou riadeniu $\mathbf{r}^{k+1}$ nasledujúcu nerovnosť

$$0 \leq (\delta\mathbf{I} - {}_{k+1}\mathbf{Q})^{-1}{}_{k+1}\boldsymbol{\rho} - {}_{k}\mathbf{v}_\delta(\infty) = {}_{k+1}\mathbf{v}_\delta(\infty) - {}_{k}\mathbf{v}_\delta(\infty),$$

čo znamená, že ďalším iteračným krokom pri zmene riadenia nedochádza ku poklesu výnosu, t.j. ${}_{k}\mathbf{v}_\delta(\infty) \leq {}_{k+1}\mathbf{v}_\delta(\infty)$. Pokiaľ je vo vzťahu (2.37) rovnosť, potom platí

$${}_{k+1}\boldsymbol{\rho} + [{}_{k+1}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I}]\, {}_{k+1}\mathbf{v}_\delta(\infty) \geq {}_{\mathbf{r}}\boldsymbol{\rho} + [{}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q} - \delta\mathbf{I}]\, {}_{k}\mathbf{v}_\delta(\infty) = 0.$$

Vynásobením predchádzajúcej nerovnosti nezápornou maticou $(\delta\mathbf{I} - {}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q})^{-1}$ získavame

$$0 \geq (\delta\mathbf{I} - {}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q})^{-1}{}_{\mathbf{r}}\boldsymbol{\rho} - {}_{k}\mathbf{v}_\delta(\infty) = {}_{\mathbf{r}}\mathbf{v}_\delta(\infty) - {}_{k}\mathbf{v}_\delta(\infty),$$

t.j. ${}_{\mathbf{r}}\mathbf{v}_\delta(\infty) \leq {}_{k}\mathbf{v}_\delta(\infty)$, takže pri zastavení Howardovho algoritmu je riadenie $\mathbf{r}^k$ optimálne. □

(ii) Algoritmus skončí po konečne veľa krokoch.

Dôkaz. Plynie z toho, že máme konečný počet riadení a faktom, že algoritmus sa zastaví, ak ďalší iteračný krok nevedie k vyššiemu výnosu. □

Kapitola 3

Optimálna obchodná stratégia

3.1 Itôova formula

Definícia 3.1. *Stochastický proces* na $T \subset \mathbb{R}^+$ je súbor $X = (X_t, t \in T)$ náhodných veličín na pravdepodobnostnom priestore (Ω, A, P).
Trajektória $X(\omega)$ stochastického procesu X na $T \subset \mathbb{R}^+$ je funkcia na $\mathbb{R}^T$ daná $t \to X_t(\omega)$ pre daný náhodný jav $\omega \in \Omega$.
Stochastický proces s hodnotami v E, inak povedané E - *hodnotový náhodný proces* je súbor $X = (X_t, t \in T)$ a $(\mathcal{F}, \varepsilon)$-merateľných funkcií $X_t : \Omega \to E$, kde (E, ε) je merateľný priestor (stavový). Ak nie je E špecifikované, rozumieme $E = \mathbb{R}$. Namiesto $\mathbb{R}^n$-hodnotového procesu hovoríme spravidla o n-dimenzionálnom.

Definícia 3.2. Stochastický proces $X = (X_t, t \in T)$ je (sprava, zľava) *spojitý*, pokiaľ je jeho trajektória $X(\omega) : t \in T \to X_t(\omega)$ (sprava, zľava) spojitá funkcia.

Definícia 3.3. Náhodný proces X má *konečnú variáciu*, ak pre všetky jeho trajektórie $X(\omega)$ platí

$$X^v(t, \omega) = supV^{\triangle(t)}(X(\omega)) < \infty, \; \triangle(t) = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = t\},$$

kde $\triangle(t)$ obieha všetky konečné delenia intervalu $(0, t)$ a kde pre konkrétne delenie $\triangle(t) = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = t\}$ je funkcia $V^{\triangle(t)}$ definovaná ako

$$V^{\triangle(t)}(X(\omega)) = \sum_{j=1}^{k} \mid X(t_j, \omega) - X(t_{j-1}, \omega) \mid .$$

Zobrazenie $t \to X^v(t, \omega)$ nazývame *konečnou variáciou* $X(t)$.

Veta 3.4. *Nech X je spojitý náhodný proces s konečnou variáciou, potom X^v je spojitý neklesajúci náhodný proces, ktorý označujeme variácia procesu X.*

Dôkaz. Dôkaz možno nájsť v publikácii [4] na strane 232. □

Definícia 3.5. Náhodný proces X má *konečnú kvadratickú variáciu*, ak existuje spojitý náhodný proces $\{\langle X\rangle(t), \; t \in \mathbb{R}^+\}$ taký, že

$$\langle X\rangle(t) = p\lim_n Q^{\triangle n(t)}(X), \; \forall \mid \triangle_n(t) \mid \to 0, \; \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

kde $Q^{\triangle n(t)}(X) = \sum_{j=1}^{k} \mid X(t_j^n) - X(t_{j-1}^n) \mid^2$.Tento proces budeme nazývať *kvadratická variácia* procesu X.

Veta 3.6. *Ak je X spojitý proces konečných kvadratických variácií, potom pre všetky $t \in \mathbb{R}^+$ a mimo P-nulovej množiny platí, ak $X^v(t,\omega) < \infty$, potom $\{\langle X\rangle(t,\omega) = 0$.*

Dôkaz. Dôkaz možno nájsť v publikácii [4] na strane 233, Lemma 1.1.5. □

Poznámka 3.7. Množina A je *P-nulová*, ak miera množiny A je rovná 0.

Definícia 3.8. Nech L je lineárny priestor procesov s konečnou variáciou. Potom definujeme *bilineárnu formu* na L

$$\langle X,Y\rangle(t) = \frac{1}{4}(\langle X+Y\rangle(t) - \langle X+Y\rangle(t)) = plim Q^{\triangle^n(t)}(X,Y),\ t \in \mathbb{R}^+,$$

kde $Q^{\triangle(t)}(X,Y)$ je definovaná ako

$$\sum_{j=1}^{k}(X(t^j) - X(t^{j-1}))(Y(t^j) - Y(t^{j-1})) = \frac{1}{4}(Q^{\triangle(t)}(X+Y) - Q^{\triangle(t)}(X+Y)).$$

Proces $\langle X,Y\rangle = (\langle X,Y\rangle(t),\ t \geq 0)$ definujeme ako *kovariancia* procesov X a Y.

Definícia 3.9. *Filtráciou* sa v merateľnom priestore $(\Omega,\mathcal{F})$ nazýva neklesajúci systém $\{F_t, t \geq 0\}$, ak pre všetky t je $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ σ-algebra.
Značíme

$$\mathcal{F}_\infty := \vee_{t\in T}\mathcal{F}_t = \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t).$$

Definícia 3.10. *Kanonická filtrácia* procesu X na $(\Omega,\mathcal{F},P)$ je filtrácia

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s),\ s \leq t),$$

Definícia 3.11. Nech na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega,\mathcal{A},P)$ existuje filtrácia $\{\mathcal{F}_t\}$. Náhodný proces X nazývame *$\{\mathcal{F}_t\}$-adaptívny proces*, pokiaľ $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ pre všetky $t \geq 0$.

Definícia 3.12. Stochastický proces je *$\mathcal{F}$-progresívny*, ak $(s,\omega) \longrightarrow X(s,\omega)$ je $\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$-merateľná mapa $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Množinu všetkých $\mathcal{F}_t$ progresívnych procesov označíme $PM(\mathcal{F}_t)$.

Definícia 3.13. Stochastický proces $(X_t,\ t \in T)$, kde $T \subset \mathbb{R}^+$ je $\mathcal{F}_t$-adaptívny proces a pre $\forall t \in T:\ X_t \in \mathcal{L}_1$. Potom

(i) $(X_t,\ t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t,\ t \in T)$ *submartingal*, ak $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ pre $\forall s < t,\ s,t \in T$,

(ii) $(X_t,\ t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t,\ t \in T)$ *supermartingal*, ak $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ pre $\forall s < t,\ s,t \in T$,

(iii) $(X_t,\ t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t,\ t \in T)$ *martingal*, ak $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ pre $\forall s < t,\ s,t \in T$.

Definícia 3.14. Stochastický proces $(X_t,\ t \in T)$ je *martingal (supermartingal, submartingal)*, ak $(X_t,\ t \in T)$ je $(X_t,\ t \in T)$-martingal (supermartingal, submartingal) pre prirodzenú filtráciu $X_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$.

Poznámka 3.15. Obecne platí: $(X_t,\, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$-martingal (supermartingal, submartingal) $\Rightarrow$ j$(X_t,\, t \in T)$ je martingal (supermartingal, submartingal).

Definícia 3.16. Stochastický proces $(X_t,\, t \in T)$ je $\mathcal{F}_t$-*lokálny martingal*, ak existujú $\mathcal{F}_t$-markovovské časy $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ také, že $\tau_n \to \infty$ a $X^{\tau_n} \triangleq X(\min\{\tau_n, t\})$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Poznámka 3.17. Ak $(X_t,\, t \in T)$ je martingal, potom je aj lokálny martingal.

Označme

$$CM_{loc}(\mathcal{F}_t) = \{\text{spojité lokálne}\, \mathcal{F}_t \,\text{martingaly}\, M \; s \; M(0) = 0 \, s.j.\},$$

$$PM_p(B, \mathcal{F}_t) = \{G \in PM(\mathcal{F}_t) : \int_0^t \mid G(s) \mid^p dB_v(s) < \infty \,\text{s.j. pre všetky}\, t \in \mathbb{R}^+\}.$$

$X \in CSM(\mathcal{F}_t)$, kde $CSM(\mathcal{F}_t)$ nech je množina spojitých semimartingalov, kde vieme rozložiť súčet X na $X(0) + B + M$, kde $B \in CFV(\mathcal{F}_t)$ a $M \in CM_{loc}(\mathcal{F}_t)$.

Veta 3.18. *Nech G je otvorená množina v $\mathbb{R}^d$, $f \in C^2(G)$ a $X \in CSM^d$ taký, že $X \in G$ všade na $\mathbb{R}^d\Omega$. Pre $x = (x_1, \ldots, xd)^T \in G$ označme*

$$f_i(x) = \frac{df}{dx_i}(x), \qquad f_{ij}(x) = \frac{df}{dx_i dxj}(x) \tag{3.1}$$

Potom proces $f(X) \in CSM$ a jeho stochastický diferenciál je rovný

$$df(X) = \sum_{i=1}^{d} f_i(X) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} f_{ij}(X) d\langle X_i, X_j \rangle, \qquad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Dôkaz. Dôkaz je v publikácii [4]. □

Vzťah (3.2) sa nazýva Itôova formula. My ju však budeme využívať v inej aproximovanej forme pre $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ a pre $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

$$\Delta f(X) \sim f'(X_0)(\mu \Delta t + \epsilon \sigma \sqrt{\Delta t}) + \frac{f''(X_0)}{2} \epsilon^2 \sigma^2 \Delta t. \tag{3.3}$$

Odvodenie je možné nájsť v [10] na strane 17.

3.2 Brownov pohyb a Wienerov proces

Definícia 3.19. Náhodný proces X je *Brownov pohyb*, ak $X(0) \triangleq 0$, je to proces s nezávislými prírastkami a pre ľubovoľné $s, t \in T$ je $X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$.

Definícia 3.20. Náhodný proces $W = (W(t), t \geq 0)$ nazývame *Wienerov proces*, ak

(i) $W(0) = 0$;

(ii) W má spojité trajektórie s.v.;

(iii) W má nezávislé prírastky, t.j. $W(t_n) - W(t_{n-1}), \ldots, W(t_2) - W(t_1)$ sú nezávislé náhodné veličiny pre $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$;

(iv) $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ pre všetky $s < t \in \mathbb{R}^+$.

Poznámka 3.21. Spojitý Brownov pohyb je Wienerov proces.

Veta 3.22.

(i) Pre nejaké $t > 0$ je $W_t(s) := (W(t+s) - W(t), s \geq 0)$ je Wienerov proces nezávislý na σ - algebre $\mathcal{F}_t^W := \sigma\{W(u), u \leq t\}$;

(ii) $\overleftarrow{W}$ definovaný ako $\overleftarrow{W_t} := tW(t^{-1}), \overleftarrow{W_0} = 0$ je Brownov pohyb so spojitými trajektóriami na $(0, \infty)$;

(iii) W je proces konečných kvadratických variácií s $\langle W \rangle \langle t \rangle = t$ pre všetky $t \in \mathbb{R}^+$.

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v [4] vo vete 1.2.2. □

Poznámka 3.23. Analogický zápis vzťahu $\langle W \rangle \langle t \rangle = t$ je

$$(dW(t))^2 = dt.$$

Nech μ_t a σ_t sú spojité procesy, ktorých história do času t je nezávislá s $(W(T) - W(t), T \geq t)$ a nech infinitezimálny prírastok procesu X_t sa dá zapísať ako

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t. \tag{3.4}$$

Potom proces X_t nazývame *Itôov proces s driftom* μ_t a *disperzným koeficientom* σ_t. σ_t^2 nazývame *difúzny koeficient.*

Dosadením špeciálnej voľby $\mu_t = \mu X_t$ a $\sigma_t = \sigma X_t$ do (3.4) získavame

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW. \tag{3.5}$$

Vzťah (3.5) nazývame *geometrický Brownov pohyb.*

3.3 Spojitý model

Náš investor investuje na akciovom a peňažnom trhu. Predpokladajme, že tržná cena akcie K_t je modelovaná pomocou (3.5), t.j. podľa geometrického Brownovho pohybu

$$dK_t = \mu K_t dt + \sigma K_t dW_t, \quad K_0 = k_0. \tag{3.6}$$

Označme

- X_t - tržná cena portfólia;
- Y_t - počet akcií v portfóliu;
- π_t - investorova pozícia v čase t, ktorá je určená podielom investícií na akciovom trhu v investorovom portfóliu, predpokladajme $\pi_t \in (0, 1)$.

S takýmto označením môžeme cenu akciovej časti portfólia vyjadriť ako:

$$\pi_t X_t = Y_t K_t. \tag{3.7}$$

Ak investor neobchoduje, počet akcií sa nezmenil a preceníme portfólio len o zmenu tržnej ceny akcií. S využitím vzťahu (3.6) je prírastok tržnej ceny portfólia potom rovný

$$dX_t = Y_t dK_t = Y_t K_t(\mu dt + \sigma dW_t) = \pi_t X_t(\mu dt + \sigma dW_t). \tag{3.8}$$

Zo vzťahu (3.8) a Itôovej formuly s voľbou $f(x) = x^{-1}$ platí:

$$X_t dX_t^{-1} = -\frac{dX_t}{X_t} + \left(\frac{dX_t}{X_t}\right)^2 = \pi_t(-\mu + \sigma^2\pi_t)dt - \pi_t\sigma dW_t. \tag{3.9}$$

Zo vzťahu (3.8) a Itôovej formuly s voľbou $f(x) = \ln x$ dostávame

$$d\ln X_t = (\mu\pi_t - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2)dt + \sigma\pi_t dW_t. \tag{3.10}$$

Podľa vzorca stochastickej verzie per partes vzťahu (3.7) s využitím (3.8) a s predpokladom, že Y_t je konštantné dostaneme

$$\begin{aligned} d\pi_t &= Y_t X_t^{-1} dK_t + Y_t K_t X_t^{-1} X_t dX_t^{-1} + Y_t(dK_t)(dX_t^{-1}) && (3.11)\\ &= \pi_t(1-\pi_t)[(\mu - \sigma^2\pi_t)dt + \sigma dW_t]. && (3.12)\end{aligned}$$

Označme drift ako $B(x)$ a difúzny koeficient $S^2(x)$. Z definovania driftu a difúzie (vzťah (3.4)) aplikovanej na predošlý vzťah plynie

$$\begin{aligned} B(x) &= x(1-x)[\mu - \sigma^2 x], && (3.13)\\ S(x) &= \sigma x(1-x). && (3.14)\end{aligned}$$

Prírastok pozície pri neobchodovaní sa dá zapísať v tvare

$$d\pi_t = B(\pi_t)dt + S(\pi_t)dW_t. \tag{3.15}$$

Predpokladajme, že v čase t kúpime $\Delta Y_t \geq 0$ akcií, potom $Y_t K_t = X_t \pi_t$ sa navýši o hodnotu $K_t \Delta Y_t$, čo ukazuje objem tohto obchodu. Predpokladajme, že pri nákupe platíme $(1+\delta)$-krát tržnú cenu akcie, kde $\delta > 0$. Následná výška transakčných nákladov je potom rovná

$$\delta K_t \Delta Y_t = \Delta(\delta K_t Y_t).$$

Nákup sa uskutoční v nekonečne krátkom časovom intervale $[t, t+td]$, počas ktorého sa cena akcie K_t nezmení. O túto hodnotu musí klesnúť tržná cena portfólia. Nasledujúca hodnota počas nákupu ostáva konštantná

$$X_t + \delta Y_t K_t = X_t(1+\delta\pi_t).$$

Diferenciálnu podobu zapíšeme:

$$d^+ lnX_t = -d^+ ln(1+\delta\pi_t) = \vartheta_+(\pi_t) d^+\pi_t,$$

kde d^+ je infinitezimálna zmena spôsobená nákupom akcií zodpovedajúca infinitezimálnej zmene pozície $d^+\pi_t = d\pi_t^+$ a kde

$$\vartheta_+(x) = \frac{\delta}{1+\delta x}. \tag{3.16}$$

Môžeme predpokladať, že pri predaji dostaneme $(1-\epsilon)$-krát tržnú cenu akcie, kde $0 < \epsilon < 1$. Tak ako pri nákupe, aj pri predaji ostáva konštantná nasledujúca hodnota

$$X_t - \epsilon Y_t K_t = X_t(1-\epsilon\pi_t).$$

V diferenciálnej podobe s využitím d^-, ktoré prezentuje zmenu spôsobenú predajom akcií zodpovedajúcim infinitezimálnej zmene pozície $-d^-\pi_t =: -d\pi_t^-$ dostaneme,

$$d^- lnX_t = -d^- ln(1-\epsilon\pi_t) = -\vartheta_-(\pi_t)d^-(\pi_t) = -\vartheta_-(\pi_t)d\pi_t^-,$$

kde

$$\vartheta_-(x) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon x}. \tag{3.17}$$

Všeobecne potom celkový prírastok pozície vyjadruje rovnica:

$$d\pi_t = B(\pi_t)dt + S(\pi_t)dW_t + d\pi_t^+ - d\pi_t^-. \tag{3.18}$$

Predchádzajúcu rovnosť chápeme tiež ako definičnú rovnosť pre diferenciály $d^+\pi_t$ a $d^-\pi_t$ spolu s obmedzujúcim predpokladom, že ich neurčité integrály sú neklesajúce procesy, čo v diferenciálnej symbolike napíšeme v tvare

$$d^+\pi_t,\ d^-\pi_t \geq 0.$$

Celkovú dynamiku tržnej ceny portfólia následne môžeme zapísať do rovnice

$$dlnX_t = \left(\mu\pi_t - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2\right)dt + \sigma\pi_t dW_t - \vartheta_+(\pi_t)d\pi_t^+ - \vartheta_-(\pi_t)d\pi_t^-. \tag{3.19}$$

3.4 Aproximácia spojitého modelu diskrétnym

Spojitý model investorovej pozície (3.18) aproximujeme modelom diskrétnym. Aby však bola aproximácia vhodná, mali by ostať zachované vlastnosti daného modelu ako je stredná hodnota a rozptyl. Predpokladajme, že počiatočná pozícia investora v čase 0 je $\pi_0 = x$.

Pri výpočte podmienenej strednej hodnoty a rozptylu využijeme vzťah (3.18) a vlastnosti Wienerovho procesu, ktorého prítastok $dW(t) \sim N(0, dt)$.

Výpočet podmienej strednej hodnoty:

$$E[\pi_{dt} - \pi_0 | \pi_0 = x] \sim B(x)dt, \tag{3.20}$$

kde $d\pi_t \triangleq \pi_{dt} - \pi_0$.

Výpočet rozptylu:

$$\begin{aligned} var[\pi_{dt} - \pi_0 \mid \pi_0 = x] &\sim E[(\pi_{dt} - \pi_0)^2 \mid \pi_0 = x] - (E[\pi_{dt} - \pi_0 \mid \pi_0 = x])^2 \\ &\sim S^2(x)dt - B^2(x)(dt)^2. \end{aligned}$$

Za predpokladu, že časové prírastky dt sú dostatočne malé, môžeme zanedbať výraz $(E[\pi_{dt} - \pi_0 \mid \pi_0 = x])^2 \sim B^2(x)(dt)^2$, z čoho plynie pre podmienený rozptyl vzťah

$$var[\pi_{dt} - \pi_0 \mid \pi_0 = x] \sim E[(\pi_{dt} - \pi_0)^2 \mid \pi_0 = x]) \sim S^2(x)dt.$$

Podla predpokladu je počiatočná investorova pozícia v čase 0 v bode x. V čase dt bude s pravdepodobnostou $P_+(x)$ investorova pozícia π_{dt} v $x + h$ a s pravdepodobnosťou $P_-(x)$ v bode $x - h$. S pravdepodobnosťou $P_0(x)$ bude investorova pozícia $\pi_{dt} = x$. Kedže súčet pravdepodobností týchto javov musí byť 1, platí

$$P_0(x) = 1 - P_+(x) - P_-(x). \tag{3.21}$$

Pre strednú hodnotu investorovej pozície π_{dt} platí

$$E[\pi_{dt} \mid \pi_0 = x] = P_-(x)(x - h) + P_0(x)x + P_+(x)(x + h),$$

kde dosadením (3.21) dostaneme

$$E[\pi_{dt} \mid \pi_0 = x] = x + P_-(x)(-h) + P_+(x)h.$$

Po odčítaní π_0 získame vyjadrenie pre strednú hodnotu a rozptyl prírastku tohto diskétneho modelu

$$E[\pi_{dt} - \pi_0 \mid \pi_0 = x] = h(P_+(x) - P_-(x)) \tag{3.22}$$

$$var[\pi_{dt} - \pi_0 \mid \pi_0 = x] \sim E[(\pi_{dt} - \pi_0)^2 \mid \pi_0 = x] \tag{3.23}$$

$$\sim h^2(P_-(x) + P_+(x)). \tag{3.24}$$

Vo vzťahu (3.23) sme opäť zanedbali druhý člen rozptylu, čo je možné ak predpokladáme iba malé zmeny investorovej pozície h. Porovnaním výsledkov spojitého a diskrétneho prístupu máme odhady $P_+(x)$ a $P_-(x)$:

$$B(x)\,dt \sim h[P_+(x) - P_-(x)] \tag{3.25}$$

$$S^2(x)\,dt \sim h^2[P_+(x) + P_-(x)]. \tag{3.26}$$

Riešením sústavy rovníc (3.25) a (3.26) pre $dt \to 0$ a $h \to 0$ plynie

$$P_+(x) \sim \frac{hB(x)dt + S^2(x)dt}{2h^2} \geq 0 \tag{3.27}$$

$$P_-(x) \sim \frac{-hB(x)dt + S^2(x)dt}{2h^2} \geq 0. \tag{3.28}$$

Dopočítame $P_0(x)$ z (3.21):

$$P_0(x) = 1 - [P_+(x) + P_-(x)] \sim 1 - \frac{S^2(x)dt}{h^2}, \tag{3.29}$$

s pozornosťou na to, že $P_0(x) \geq 0$. To platí pokiaľ $S^2(x)dt \leq h^2$ a vtedy môžme zvoliť

$$dt = \frac{h^2}{k}$$

kde $k \geq S^2(x)$ platí pre všetky používané x.

3.5 Diskrétny model - príklad

Nech množina stavov S Markovového reťazca je v tvare $S = \{1, 2, \dots m\}$, kde $m := 1/h - 1$. To odpovedá investorovej pozícii $\pi = \{\pi_k,\ k = 1, \dots, m\} \subseteq (0, 1)$, kde $\pi_k = h \cdot k$.

Nech sú rozhodnutia investora nasledovné

- $(+)$: kúpiť akcie;
- $(-)$: predať akcie;
- (0): neobchodovať.

Množiny možných riadení reťazca v jednotlivých stavoch sú $\mathbf{R} = \prod_{i=1}^{m} R_i$, kde R_i definujeme nasledovne

- $R_1 = \{+\}$, $R_m = \{-\}$: krajné polohy, v tomto prípade zahájime okamžitý nákup, respektíve predaj s cieľom udržať investorovu pozíciu π_t v $[h, 1-h]$;

- $R_2 = \{+, 0\}$, $R_{m-1} = \{-, 0\}$: v stavoch, ktoré susedia s krajnými polohami volíme stratégiu tak, aby bola udržaná investorova pozícia π_t v $[h, 1-h]$;
- $R_i = \{+, 0, -\}$ kde $i \in \{3, 4, \dots, m-2\}$ neobmedzujeme investorovo rozhodnutie.

Pre každé riadenie musíme určiť maticu pravdepodobností prechodu $\mathbf{P}$, ktorej členy závisia podľa toho, ako sa investor rozhodne. Ak sa investor rozhodne neobchodovať v stave i, rozdelenie pravdepodobností prechodu je dané vzťahmi (3.27), (3.28) a (3.29) nasledovne

$$(0) = \begin{cases} p_{i,i-1} & = P_-(\pi_i); \\ p_{i,i} & = P_0(\pi_i); \\ p_{i,i+1} & = P_+(\pi_i). \end{cases}$$

Ak sa investor rozhodne nakupovať, pravdepodobnosti prechodu sú dané

$$(+) = \begin{cases} p_{i,i} & = P_-(\pi_{i+1}); \\ p_{i,i+1} & = P_0(\pi_{i+1}); \\ p_{i,i+2} & = P_+(\pi_{i+1}). \end{cases}$$

Ak sa rozhodne investor predávať, potom sú pravdepodobnosti prechodu nasledovné

$$(-) = \begin{cases} p_{i,i-2} & = P_-(\pi_{i-1}); \\ p_{i,i-1} & = P_0(\pi_{i-1}); \\ p_{i,i} & = P_+(\pi_{i-1}). \end{cases}$$

Investor sa rozhoduje na základe matice ocenenia $\mathbf{Z}$ s cieľom maximalizovať zisk.

Pre maticu ocenenia $\mathbf{Z}$ a transakčné náklady platí:

- Ak investor neobchoduje, nie je zaťažený žiadnymi transakčnými nákladmi. Ocenenie prechodu odpovedá

$$ {}_0z_i = {}_0z(\pi_i) := (\mu\pi_i - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_i^2)dt. \tag{3.30}$$

- Ak investor nakupuje, platí transakčné náklady $h\vartheta_+(\pi)$ určené (3.16). Príslušné ocenienie je rovné

$$ {}_+z_i = {}_+z(\pi_i) := {}_0z(\pi_i) - h\vartheta_+(\pi_i). \tag{3.31}$$

- V prípade predaja činia transakčné náklady $h\vartheta_-(\pi)$ zo vzťahu (3.17) a ocenenie prechodu je

$$ {}_-z_i = {}_-z(\pi_i) := {}_0z(\pi_i) - h\vartheta_-(\pi_i). \tag{3.32}$$

Predpokladajme, že ocenenie z_{ij} nezávisí na j, čiže ${}_r\mathbf{z}_i = {}_rz_i.\mathbf{1}$, keďže oceňujeme zotrvanie reťazca v jednotlivých stavoch a nie prechody medzi nimi. Diskontný faktor β položme $\beta = exp\{-\alpha.dt\}$. Na takto formulovanú úlohu, už môžeme použiť Howardov algoritmus, kde by sme počiatočné priblíženie položili

$$ {}_0\mathbf{r} \triangleq (+, 0, \dots, 0, -). \tag{3.33}$$

3.6 Riešenie príkladu

Pre lepšiu predstavivosť čitateľa ako funguje Howardov algoritmus ukážeme podrobnejšie jeho prvý iteračný krok.

Najprv položme premenné transakčných nákladov $\delta = \epsilon = 2\%$, volatilitu $\sigma = 1$, $\mu = 1/2$ a $\alpha = 0,005$. Parametre aproximácie spojitého modelu na diskrétny sú volené $h = 0,005$, časová zmena $dt = 0,0004$ pri voľbe $\epsilon = 0,00001$.

Pri takejto voľbe h dostávame$m = 1/h - 1 = 199$. Budeme postupovať na základe Howardovho iteračného algoritmu, ktorý bol predstavený a popísaný v kapitole 1.

Hovardov iteračný algoritmus:

1. Zvolíme nulté priblíženie $\mathbf{r}^k$, $k = 0$ k hľadanému homogénnemu riadeniu. To je v našom prípade rovné riadeniu $(+, 0, \ldots, 0, -)$.

2. Riadenie $\mathbf{r}^k$ jednoznačne určuje matice ${}_k\mathbf{P}$ a ${}_k\mathbf{Z}$. V prvom iteračnom kroku vyzerá matica ${}_0\mathbf{P}$ pre riadenie $(+, 0, \ldots, 0, -)$ nasledovne

$$
{}_0\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
P_-(2h) & P_0(2h) & P_+(2h) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
P_-(2h) & P_0(2h) & P_+(2h) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & P_-(3h) & P_0(3h) & P_+(3h) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & P_-(4h) & P_0(4h) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & P_-(198h) & P_0(198h) & P_+(198h) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & P_-(198h) & P_0(198h) & P_+(198h)
\end{pmatrix}
$$

Pre zadanú voľbu $h = 0,005$ vypočítame maticu $\mathbf{P}$ pomocou vzorcov (3.27), (3.28) a (3.29). Do ich vzorcov vstupujú drift $B(x)$ a difúzia $S^2(x)$, ktoré sú vyjadrené vzťahom (3.13).

Matica ocenenia bude pre riadenie $(+, 0, \ldots, 0, -)$ vyzerať ako m-rozmerná štvorcová matica

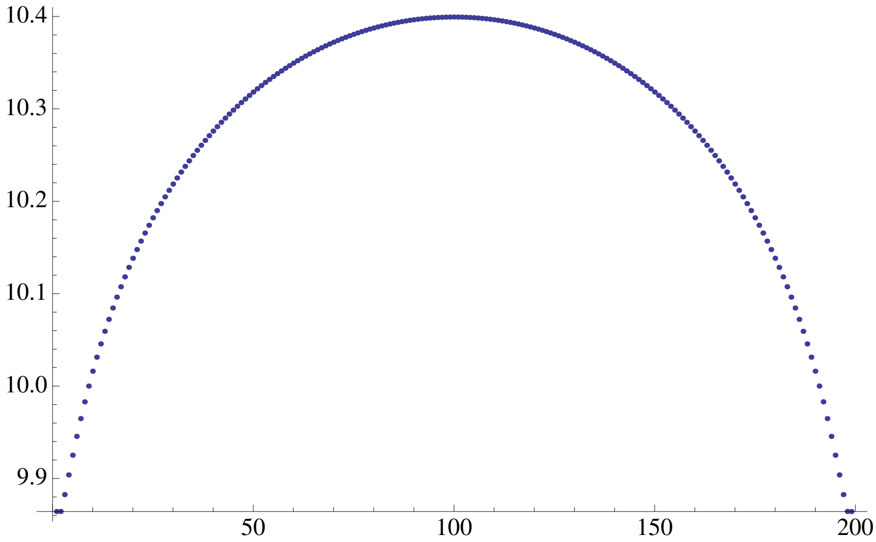
$$
{}_0\mathbf{Z} = \begin{pmatrix}
{}_+z(2h) & {}_+z(2h) & \ldots & {}_+z(2h) & {}_+z(2h) \\
{}_0z(2h) & {}_0z(2h) & \ldots & {}_0z(2h) & {}_0z(2h) \\
{}_0z(3h) & {}_0z(3h) & \ldots & {}_0z(3h) & {}_0z(3h) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
{}_0z(198h) & {}_0z(198h) & \ldots & {}_0z(198h) & {}_0z(198h) \\
{}_-z(198h) & {}_-z(198h) & \ldots & {}_-z(198h) & {}_-z(198h)
\end{pmatrix}
$$

Vypočítame ju dosadením vzťahov (3.31), (3.32) a (3.30). Keďže už máme vyjadrené matice ${}_k\mathbf{P}$ a ${}_k\mathbf{Z}$, môžeme vypočítať vektor ${}_k\mathbf{q}$ rovnicou (1.31).

3. Ku riadeniu $\mathbf{r}^k$ vypočítame diskontovaný očakávaný výnos ${}_k\mathbf{v}$ podľa vzorca ${}_k\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \beta {}_k\mathbf{P})^{-1} {}_k\mathbf{q}$. Na nasledujúcom obrázku 3.1 môžeme vidieť vektor ${}_0\mathbf{v}$.

4. S vypočítanými hodnotami ${}_k\mathbf{v}$ a ${}_k\mathbf{q}$ nájdeme pre všetky stavy $i \in S$ rozhodnutia $r_i^{k+1} \in R_i$, ktoré prinesú maximálny zisk, a teda

$$r_i^{k+1} = \arg\max_{\rho \in R_i} ({}_\rho q_i + {}_\rho\mathbf{p}_i^\intercal {}_k\mathbf{v}).$$



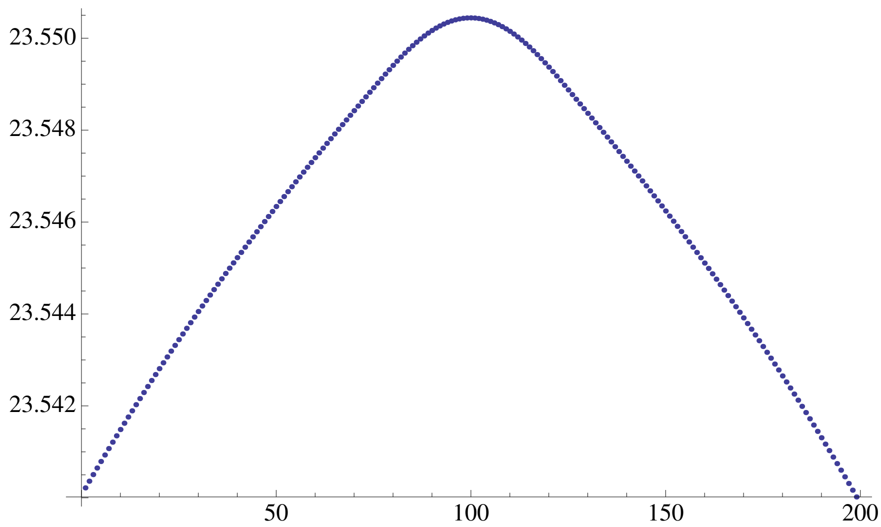
Obr. 3.1: Diskontovaný očakávaný výnos pre prvú iteráciu

S hodnotami $\mathbf{r}^{k+1} = (r_i^{k+1})_{i \in S}$ by sme pokračovali od bodu 2 ďalšou iteráciou.

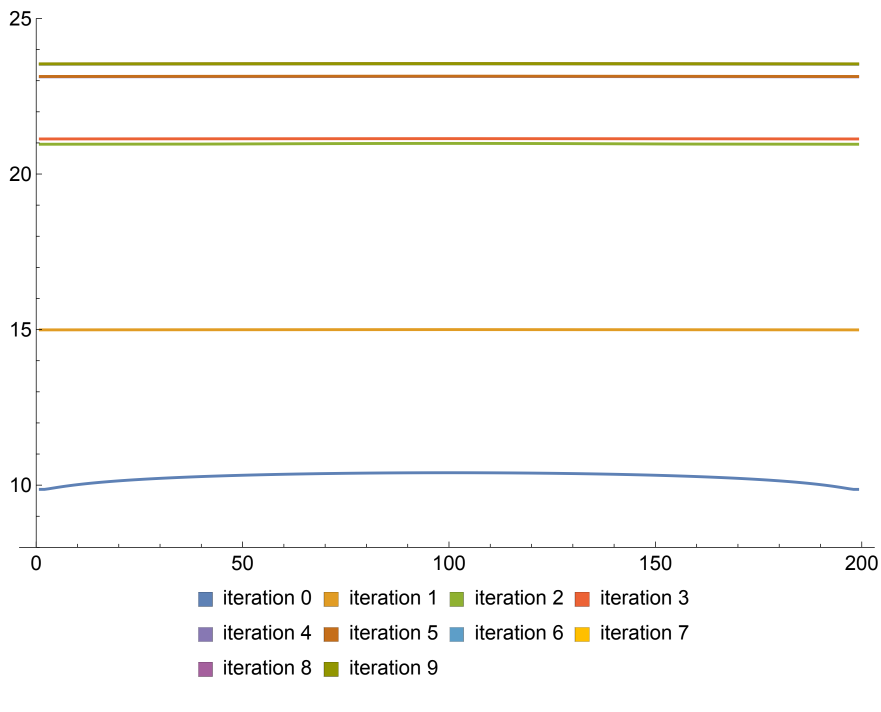
V programe Wolfram Mathematica 10 bol naprogramovaný Howardov iteračný algoritmus pomocou rekurzívnej funkcie Howard[h, dt, μ, σ, δ, ϵ, α, rPrevious, step]. Jeho kód je pre prípadnych záujemcov možné nájsť v dodatku B.

Výstupom funkcie je optimálne riadenie r, počet iterácií, ktoré boli potrebné k nájdeniu optimálneho riadenia a výsledný vektor ${}_r\mathbf{v}$. Stratégiu nakúpiť reprezentuje 1, predať -1 a neobchodovať 0.
Optimálne riadenie $r = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1\}$
Počet iterácií $= 9$.
Graf vektora $\mathbf{v}$ pre optimálne riadenie je zobrazený na nasledujúcom obrázku. Za ním je na obrázku zachytené porovnanie diskontovaného očakávaneho výnosu pre všetky iterácie, kde môžeme vidieť, že každá iterácia nám priniesla vyšší zisk a naše riadenie je naozaj optimálne, pretože odpovedá najvyššiemu zisku.

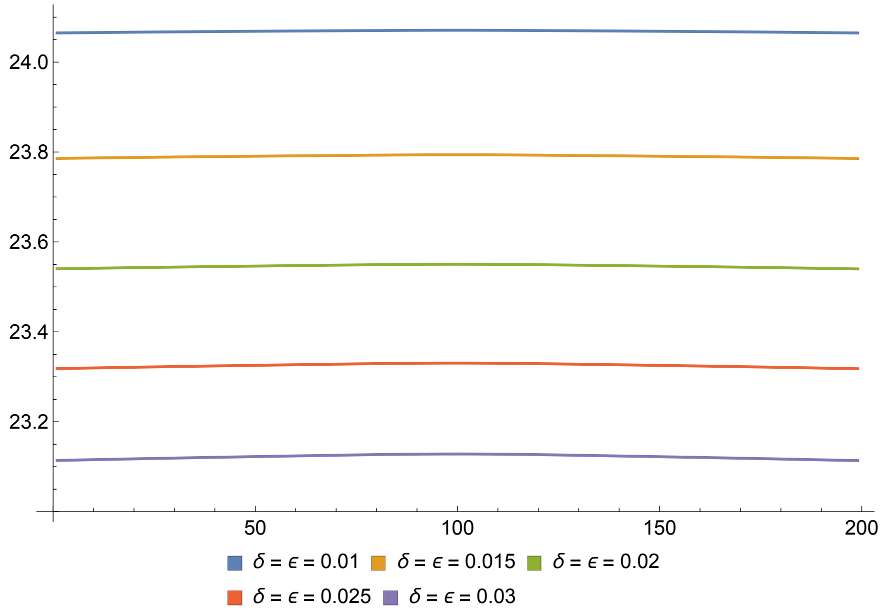
Na obrázku 3.4 je znázornený diskontovaný očakávaný výnos pre meniace sa transakčné náklady. Zo vzorca transakčných nákladov ako aj grafu je zjavné, že čím vyššie sú transakčné náklady, tým máme menší zisk.
Nevýhodou modelu je, že voľba kroku by mala byť čo najmenšia, čím sa ale zvyšuje časová náročnosť výpočtu.
Pokiaľ bude diskontovanie veľké, strata z transakčných nákladov bude potom príliš veľká a bude sa menej obchodovať.



Obr. 3.2: Diskontovaný očakávaný výnos optimálneho riadenia



Obr. 3.3: Porovnanie diskontovaného očakávaného výnosu pre všetky iterácie



Obr. 3.4: Porovnanie diskontovaného očakávaneho výnosu pre meniace sa transakčné náklady

Záver

Diplomová práca sa zaoberala hľadaním optimálneho riadenia v Markovových reťazcoch v diskrétnom, aj v spojitom čase. Cieľ sa podarilo úspešne naplniť, v prvej kapitole bol predstavený modifikovaný Howardov iteračný algoritmus, ktorý nájde optimálne riadenie, ktoré má priniesť maximálny diskontovaný výnos. V druhej kapitole sme postupovali analogicky, nachádza sa tu Howardov algoritmus aj s dôkazom, avšak pre spojitý čas.

V tretej kapitole sme uviedli spojitý model obchodovania s portfóliom akcií, kde nasledovala aproximácia spojitého modelu diskrétnym. Tržná cena akcie bola modelovaná pomocou Brownovho pohybu. Pre lepšiu predstavivosť čitateľa je v závere sformulovaný príklad, ku ktorému bol napísaný Howardov iteračný algoritmus v programe Wolfram Mathematica pomocou rekurzívnej funkcie a následne bolo takto nájdené opimálne riadenie.

Dodatok A

Teória matíc

Lemma A.1. *Nech* $\mathbf{A}$ *je štvorcová matica taká, že* $\mathbf{A}^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{0}$. *Potom matica* $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ *je regulárna a platí*

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k. \tag{A.1}$$

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v [9] na strane 142. □

Veta A.2. *Nech štvorcová matica* $\mathbf{P}$ *je stochastická. Potom číslo* 1 *je jej jednoduchým charakteristickým číslom a vektor* $(c,\dots c), c \neq 0$ *jej vlastným vektorom prislúchajúcim k tomuto číslu. Pre všetky jej charakteristické čísla* λ_k *platí* $|\lambda_k| \leq 1$.

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v [2] na strane 113. □

Veta A.3. *Nech štvorcová matica* $\mathbf{Q}$ *je matica intenzít prechodu. Potom číslo* 0 *je jej charakteristickým číslom a vektor* $(c,\dots,c)^\intercal, c \neq 0$ *je jej vlastným vektorom prislúchajúci k tomu číslu. Pre všetky ostatné charakteristické čísla platí, že ich reálna zložka je menšia ako* 0.

Dôkaz. V publikaci [3] na strane 43. □

Definícia A.4. Hovoríme, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ spolu komutujú, ak platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Veta A.5. *Majme štvorcovú maticu* $\mathbf{A}$. *Potom platí*

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}}{k!}.$$

Veta A.6. *Nech* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú štvorcové matice, ktoré spolu komutujú. Potom platí*

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}. \tag{A.2}$$

Dôkaz.

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^s}{s!} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \mathbf{A}^{r-s} \mathbf{B}^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^s}{s!} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}},$$

kde sme využili binomickú vetu. □

Dodatok B

Kód programovej realizácie

```
B[x_, μ_, σ_] := x * (1 - x) * (μ - x * σ^2);

S[x_, σ_] := σ * x * (1 - x);

pPlus[x_, h_, dt_, μ_, σ_] := (h * B[x, μ, σ] * dt + (S[x, σ])^2 * dt) / (2 * h^2);

pMinus[x_, h_, dt_, μ_, σ_] := (-h * B[x, μ, σ] * dt + (S[x, σ])^2 * dt) / (2 * h^2);

pZero[x_, h_, dt_, μ_, σ_] := 1 - (S[x, σ])^2 * dt / h^2;

vPlus[x_, δ_] := δ / (1 + δ * x);

vMinus[x_, ϵ_] := ϵ / (1 - ϵ * x);
pMatrix[r_, h_, dt_, μ_, σ_] :=
  Table[

   Which[
    r[[i]] == 1,
    {ConstantArray[0, i - 1],
      {pMinus[h * i + h, h, dt, μ, σ], pZero[h * i + h, h, dt, μ, σ],
       pPlus[h * i + h, h, dt, μ, σ]}, ConstantArray[0, Length[r] - i - 2]} // Flatten,
    r[[i]] == -1,
    {ConstantArray[0, i - 3],
      {pMinus[h * i - h, h, dt, μ, σ], pZero[h * i - h, h, dt, μ, σ],
       pPlus[h * i - h, h, dt, μ, σ]}, ConstantArray [0, Length[r] - i]} // Flatten,
    r[[i]] == 0,
    {ConstantArray[0, i - 2], {pMinus[h * i, h, dt, μ, σ], pZero[h * i, h, dt, μ, σ],
       pPlus[h * i, h, dt, μ, σ]}, ConstantArray [0, Length[r] - i - 1]} // Flatten
   ],

   {i, 1, Length[r]}
  ];
```

```
zMatrix[r_, h_, dt_, μ_, σ_, δ_, ϵ_] :=
  Table[
   Which[
    r⟦i⟧ == 0,
    ConstantArray[(μ * i * h - 1/2 σ^2 * i^2 * h^2) * dt, Length[r]],
    r⟦i⟧ == 1,
    ConstantArray[
     (μ * (i + 1) * h - 1/2 σ^2 * (i + 1)^2 * h^2) * dt - h * vPlus[(i + 1) * h, δ], Length[r]],
    r⟦i⟧ == -1,
    ConstantArray[
     (μ * (i - 1) * h - 1/2 σ^2 * (i - 1)^2 * h^2) * dt - h * vMinus[(i - 1) * h, ϵ], Length[r]]
   ],

   {i, 1, Length[r]}
  ];
Howard[h_, dt_, μ_, σ_, δ_, ϵ_, α_, rPrevious_, step_] :=
 Module[{k, β, m, r, P, Z, q, v, rNew, vnutro},
  k = h^2/dt;
  β = Exp[-α * dt];

  m = Round[1/h] - 1;

  If[rPrevious === 0,
   r = ConstantArray[0, m],
   (*tj. na zaciatku algoritmu: u vstupu davame za rPrevious vzdy 0*)
   r = rPrevious] (*kvoli rekurzii*)

  ;

  r⟦1⟧ = 1;
  r⟦m⟧ = -1;


  P = pMatrix[r, h, dt, μ, σ];
  Z = zMatrix[r, h, dt, μ, σ, δ, ϵ];


  (*vynos za jedno obdobie*)
  q = Diagonal[Z.Transpose[P]];


  (*stredny ocakavany vynos*)
  v = Inverse[IdentityMatrix[m] - β * P].Transpose[{q}];


  AppendTo[vVectors, Flatten[v]];


  rNew = ConstantArray[0, m];
  rNew⟦1⟧ = 1;
  rNew⟦m⟧ = -1;


  (*toto dosadi opti hodnotu pre druhu poziciu vektoru r (z 2 moznosti)*)
  rNew⟦2⟧ =
   If[
    ((*0_q_2*)
       Diagonal[zMatrix[Table[If[i == 2, 0, r⟦i⟧], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ, δ, ϵ]
           .Transpose[pMatrix[Table[If[i == 2, 0, r⟦i⟧], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ]]]⟦
         2⟧ +
        (*0_P_2 krat v*){pMatrix[Table[If[i == 2, 0, r⟦i⟧], {i, 1, m}],
            h, dt, μ, σ]⟦2⟧}.v)[[1, 1]]
     <
     ((*1_q_2*)
       Diagonal[zMatrix[Table[If[i == 2, 1, r⟦i⟧], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ, δ, ϵ]
           .Transpose[pMatrix[Table[If[i == 2, 1, r⟦i⟧], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ]]]⟦
         2⟧ +
        (*1_P_2 krat v*){pMatrix[Table[If[i == 2, 1, r⟦i⟧], {i, 1, m}],
            h, dt, μ, σ]⟦2⟧}.v)[[1, 1]]
     ,
     1
     ,
     0
    ];
```

```
(*toto dosadi opti hodnotu pre predposlednu poziciu vektoru r (z 2 moznosti)*)
rNew[[m - 1]] =
  If[
   ((*0_q_m-1*)
      Diagonal[zMatrix[Table[If[i == m - 1, 0, r[[i]]], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ, δ, ϵ]
          .Transpose[pMatrix[Table[If[i == m - 1, 0, r[[i]]], {i, 1, m}],
            h, dt, μ, σ]]][[m - 1]] +
       (*0_P_m-1 krat v*){pMatrix[Table[If[i == m - 1, 0, r[[i]]], {i, 1, m}],
           h, dt, μ, σ][[m - 1]]}.v)[[1, 1]]
     <
    ((*-1_q_m-1*)
      Diagonal[zMatrix[Table[If[i == m - 1, -1, r[[i]]], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ, δ, ϵ]
          .Transpose[pMatrix[Table[If[i == m - 1, -1, r[[i]]], {i, 1, m}],
            h, dt, μ, σ]]][[m - 1]] +
       (*-1_P_m-1 krat v*){pMatrix[Table[If[i == m - 1, -1, r[[i]]], {i, 1, m}],
           h, dt, μ, σ][[m - 1]]}.v)[[1, 1]]
   ,
   -1
   ,
   0
  ];


(*toto spocita opti hodnoty pre vnutorne pozicie vektora r (vzdy 3 moznosti)*)
vnutro =
 Flatten[
   Map[Position[#, Max[#]] &,

    Table[
     {
      ((*1_q_j*)
        Diagonal[zMatrix[Table[If[i == j, 1, r[[i]]], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ, δ, ϵ]
            .Transpose[pMatrix[Table[If[i == j, 1, r[[i]]], {i, 1, m}],
              h, dt, μ, σ]]][[j]] +
         (*1_P_j krat v*){pMatrix[Table[If[i == j, 1, r[[i]]], {i, 1, m}],
             h, dt, μ, σ][[j]]}.v)[[1, 1]]
      ,

      ((*0_q_j*)
        Diagonal[zMatrix[Table[If[i == j, 0, r[[i]]], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ, δ, ϵ]
            .Transpose[pMatrix[Table[If[i == j, 0, r[[i]]], {i, 1, m}],
              h, dt, μ, σ]]][[j]] +
         (*0_P_j krat v*){pMatrix[Table[If[i == j, 0, r[[i]]], {i, 1, m}],
             h, dt, μ, σ][[j]]}.v)[[1, 1]]
      ,

      ((*-1_q_j*)
        Diagonal[zMatrix[Table[If[i == j, -1, r[[i]]], {i, 1, m}], h, dt, μ, σ, δ, ϵ]
            .Transpose[pMatrix[Table[If[i == j, -1, r[[i]]], {i, 1, m}],
              h, dt, μ, σ]]][[j]] +
         (*-1_P_j krat v*){pMatrix[Table[If[i == j, -1, r[[i]]], {i, 1, m}],
             h, dt, μ, σ][[j]]}.v)[[1, 1]]
     }
     , {j, 3, m - 2}]

   ]
  ] /. {1 → 1, 2 → 0, 3 → -1} ; (*nahradime 1,2,
3 poradia za hodnoty 1,0,-1 aby sme mali co chceme*)


(*toto len doplni rNew vektor o spocitane opti vnutorne hodnoty*)
Table[rNew[[j + 2]] = vnutro[[j]], {j, 1, Length[vnutro]}];


(*podmienky na posledne hodnoty - ani by to tam nemuselo byt,
pretoze sme to vyriseili uz o krok predtym*)
If[rNew[[1]] ≠ 1, rNew[[1]] = 1];
If[rNew[[m]] ≠ -1, rNew[[m]] = -1];

If[rNew[[2]] == - 1, rNew[[2]] = r[[2]]];
If[rNew[[m - 1]] == 1, rNew[[m - 1]] = r[[m - 1]]];



(*rekurzia: ak sme tam kde sme boli a nic nezmenili,
tak koniec, inak rekurzivne Howarda s novym r*)
If[rNew === r, {rNew, step, Flatten[v]}, Howard[h, dt, μ, σ, δ, ϵ, α, rNew, step + 1]]
```

```
(*pred-posledny aj posledny prvok davame vzdy 0,
ine hodnoty si bude davat len rekurzia sama!!!*)
(*vystup je optimalne r a pocet iteracii k jeho dosiahnutiu*)
vVectors = {};
vysledok = Howard[h, dt, μ, σ, δ, ϵ, α, 0, 0]
spread[r_] := {Position[r, 1] // Last, Position[r, -1] // First} // Flatten;
{a1, a2} = spread[vysledok⟦1⟧] * h
vVectors;
legenda =
 Map[Style[#, 14] &,

  Table[StringJoin["iteration ", ToString[i]], {i, 0, 9}]
 ]
obrazok1 = ListLinePlot[vVectors, BaseStyle → {FontSize → 14}, PlotRange → All,
  PlotLegends → Placed[legenda // SwatchLegend, Below],
  ImageSize → 600, PlotStyle → Thick]
Export[NotebookDirectory[] <> "obr1.eps", obrazok1]
ListPlot[vVectors⟦1⟧, BaseStyle → {FontSize → 14},
 PlotStyle → Thick, ImageSize → 500]
ListPlot[vysledok⟦3⟧, BaseStyle → {FontSize → 14},
 PlotStyle → Thick, ImageSize → 500]
ListLinePlot[Table[-(vysledok⟦3, i⟧ - vysledok⟦3, i - 1⟧)/h, {i, 2, Round[1 / h] - 1}],
 BaseStyle → {FontSize → 14}, PlotStyle → Thick, ImageSize → 500]
ListLinePlot[Map[Table[-(#⟦i⟧ - #⟦i - 1⟧)/h, {i, 2, Round[1 / h] - 1}] &, vVectors],
 PlotRange → {-0.11, 0.11},
 BaseStyle → {FontSize → 14}, PlotRange → All,
 PlotLegends → Placed[legenda // SwatchLegend, Below],
 ImageSize → 600, PlotStyle → Thick]
deltas = {0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03};
vysledokA = Table[
  vysledok = Howard[0.005, dt, μ, σ, deltas[[i]], deltas[[i]], α, 0, 0][[3]]
  , {i, 1, Length[deltas]}]
legenda2 =
 Map[Style[#, 14] &,

  Table[StringJoin["δ = ϵ = ", ToString[i]], {i, 0.01, 0.03, 0.005}]
 ]
ListLinePlot[vysledokA, BaseStyle → {FontSize → 14}, PlotRange → All,
 PlotLegends → Placed[legenda2 // SwatchLegend, Below],
 ImageSize → 600, PlotStyle → Thick, AxesOrigin → {0, 23}]
```

Literatúra

[1] Chung, Kai Lai: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities.* 2. vydání, New York: Springer, 1967.

[2] Dupač, Václav; Dupačová, Jitka: *Markovovy procesy I.* 1. vydání, Praha: SPN Praha, 1980.

[3] Dupač, Václav; Dupačová, Jitka: *Markovovy procesy II.* 1. vydání, Praha: SPN Praha, 1980.

[4] Dupačová, Jitka; Hurt, Jan; Štěpán Josef: *Stochastic Modelling in Economics and Finance.* 1. vydání, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, ISBN 1-4020-0840-6.

[5] Howard, Ronald A.: *Dynamic Programming and Markov Processes.* 1. vydání, New York: The M.I.T. Press, 1960.

[6] Kalužíková, Martina: *Diskontované riadenie portfólia.* Praha: Bakalářská práce MFF, 2008.

[7] Kováč, Jakub: *Asymptotické riadenie portfólia pre niekoľko akcií.* Praha: Diplomová práce MFF, 2009.

[8] Prášková, Zuzana: *Základy náhodných procesů II.* První vydání, Praha: Karolinum, 2007, ISBN 978-80-246-0971-3.

[9] Prášková, Zuzana; Lachout, Petr: *Základy náhodných procesů.* První vydání, Praha: Karolinum, 2001, ISBN 80-7184-688-0.

[10] Staníková, Dana: *Asymptotické řízení portfólia.* Praha: Bakalářská práce MFF, 2006.