MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Daniel Dvořák

Principy alokace kapitálu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Principy alokace kapitálu

Autor: Daniel Dvořák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Pojišťovny i jiné finanční instituce jsou při svých aktivitách vystaveny finančním rizikům, na jejichž pokrytí se stanovuje rizikový kapitál. Cílem úlohy alokace kapitálu je přerozdělení tohoto kapitálu mezi dílčí části této instituce co nejlépe s ohledem na jejich rizikovost. Tato práce se zabývá mírami rizika a alokačními metodami. Důraz je kladen na pojmy koherentních měr rizika a koherentních alokačních metod. Podmínky koherence jsou ověřovány na konkrétních alokačních metodách. Práce se také zabývá praktickým výpočtem alokací dílčím rizikům užitím alokačních metod.

Klíčová slova: alokace kapitálu, míry rizika, alokační metoda, podmínky koherence

Title: Capital allocation principles

Author: Daniel Dvořák

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Insurance companies or other financial institutions face financial risks during their various activites. Risk capital is allocated in order to cover these risks. The goal of capital allocation is to redistribute this capital to various constituents of the firm with respect to their riskiness. The thesis deals with risk measures and allocation methods. Special emphasis is put on the notions of coherent risk measures and coherent allocation methods. Conditions of coherence are checked for certain allocation methods. The thesis also deals with practical calculation of allocations to individual risks using allocation methods.

Keywords: capital allocation, risk measures, allocation method, conditions of coherence

Rád bych poděkoval své vedoucí RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D., za cenné připomínky a veškerý věnovaný čas.

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá problémem alokace kapitálu. Jedná se o problém, kdy firma přerozděluje částku vyhrazenou na pokrytí finančních rizik mezi své dílčí části. Dle [1] je k tomuto několik důvodů. Zaprvé, alokace nákladů mezi jednotlivé dílčí části je potřebná kvůli finančnímu reportingu. Zadruhé, alokace kapitálu je užitečným nástrojem pro porovnání výkonnosti jednotlivých dílčích částí při uvážení návratnosti alokovaného kapitálu. Dále znalost výkonnosti jednotlivých částí je užitečná například při strategickém rozhodování při dalším rozvoji firmy. První kapitola této práce se zabývá pojmy míra rizika a alokační metoda. Tyto pojmy jsou hlavní náplní celé práce. V této kapitole jsou uvedeny vlastnosti, které je rozumné od měr rizika a alokačních metod vyžadovat. Pokud tyto vlastnosti splňují, nazývají se v obou případech koherentními. Jsou zde také uvedeny příklady některých měr rizika a alokačních metod. Druhá kapitola předvádí problém alokace kapitálu jako optimalizační úlohu. Význam tohoto přístupu spočívá v tom, že tato optimalizační úloha poskytuje sjednocující rámec pro řadu zdánlivě nesouvisejících alokačních metod. Jsou zde shrnuty některé poznatky o komonotonii, které jsou dále použity při odvození kvantilového alokačního pravidla. Je zde navrhnuta modifikace kvantilového pravidla. Třetí kapitola pojednává o problému splnění podmínky plné alokace u alokačních pravidel. Jsou zde porovnány dva jednoduché přístupy k tomuto problému: proporcionální alokační pravidlo a v této práci navržené alokační pravidlo založené na projekci do nadroviny. Tyto dva přístupy jsou porovnány z hlediska splnění podmínek koherence. Čtvrtá kapitola této práce pomocí vygenerovaných dat ilustruje metody, o kterých se pojednává v kapitolách předešlých.

Kapitola 1

Kvantifikace rizika

Tématem této práce je alokace kapitálu. Vysvětleme zde nejprve, o jaký problém se jedná a jak ho lze kvantifikovat. Finanční instituce při svých aktivitách podstupují finanční rizika spojená se ztrátou, například že výnos určité investice bude nižší, než se očekávalo. Pro pokrytí případných ztrát spojených s podstoupením finančního rizika je nutné mít připraven rizikový kapitál. K určení výše tohoto kapitálu lze použít tzv. míru rizika. Při použití míry rizika se předpokládá, že riziko je reprezentováno náhodnou veličinou, která má nějaký přesně definovaný význam, například současná hodnota ztrát za následující pololetí. V závislosti na způsobu fungování dané finanční instituce lze celkové riziko reprezentovat jako součet několika dílčích rizik. Problém alokace kapitálu pak spočívá v rozdělení celkového rizikového kapitálu mezi jednotlivá dílčí rizika takovým způsobem, aby alokované částky co nejlépe odpovídaly těmto rizikům. K získání vhodné alokace rizikového kapitálu mezi jednotlivá dílčí rizika se užívají tzv. alokační metody.

1.1 Míra rizika

Mírou rizika rozumíme zobrazení přiřazující reálné náhodné veličině reprezentující riziko reálné číslo. Míru rizika budeme ve většině tohoto textu označovat $\rho(\cdot)$, případně upozorníme na jiné značení. Při zkoumání měr rizika je vhodné zabývat se takovými mírami, které splňují určité požadované vlastnosti. Popišme podle [4] tzv. *koherentní míry rizika.* Jsou to takové míry rizika, které splňují vlastnosti uvedené v následujícím odstavci:

1.1.1 Koherentní míra rizika

Subaditivita

Míra rizika $\rho(\cdot)$ splňuje podmínku subaditivity, pokud pro libovolné reálné náhodné veličiny X, Y platí

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Tato podmínka popisuje požadavek, aby kapitál potřebný pro pokrytí kombinace dvou rizik nebyl větší než kapitál potřebný pro pokrytí těchto rizik, jsou-li uvažována samostatně.

Monotonie

Pokud pro reálné náhodné veličiny X, Y platí $X \leq Y$ skoro jistě, pak požadujeme, aby také platilo, že $\rho(X) \leq \rho(Y)$. Tato podmínka představuje požadavek, aby pro riziko představující větší ztráty byl také potřebný větší kapitál připravený pro jejich pokrytí.

Pozitivní homogenita

Říkáme, že míra rizika $\rho(\cdot)$ splňuje podmínku pozitivní homogenity, pokud pro každé kladné číslo λ platí $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$. To odpovídá požadavku, že množství kapitálu potřebného pro pokrytí daného rizika nemá záviset na měně, která se uvažuje.

Translační invariance

Řekneme, že míra rizika $\rho(\cdot)$ splňuje podmínku translační invariance, pokud pro každé číslo λ platí $\rho(X+\lambda) = \lambda+\rho(X)$. Toto odpovídá požadavku, aby na pokrytí ztráty, jejíž hodnota je s jistotou předem známa, nebylo nutné kromě její známé hodnoty vyhrazovat žádné další prostředky.

1.1.2 Příklady měr rizika

Uveďme zde několik známých měr rizika uvedených například v [3]. X zde je náhodná veličina reprezentující riziko.

Značení 1. *Nechť X je reálná náhodná veličina. Kvantilovou funkci X značíme $F_X^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}$, $p \in (0{,}1)$. Nechť $\alpha \in [0{,}1]$. Dále označme:*
$F_X^{-1+}(p) := \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq p\}$, $p \in (0{,}1)$,
$F_X^{-1(\alpha)}(p) := \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha)F_X^{-1+}(p)$, $p \in (0{,}1)$.

Hodnota v riziku (VaR)

Pro $p \in (0{,}1)$ je hodnota v riziku definována jako

$$VaR_p(X) = F_X^{-1}(p).$$

Jedná se tedy pouze o kvantil. VaR není koherentní mírou rizika. Nesplňuje podmínku subaditivity, protipříklad lze nalézt například v [7].

Zbytková hodnota v riziku (TailVaR)

Pro $p \in (0{,}1)$ je zbytková hodnota v riziku definována jako

$$TVaR_p(X) = \mathsf{E}\left[X|X > F_X^{-1}(p)\right].$$

Jedná se o střední hodnotu X za podmínky, že X přesáhne kvantil $F_X^{-1}(p)$.

Očekávaný deficit pojistníka (EPD)

Pro $p \in (0,1)$ je očekávaná ztráta pojistníka definována jako

$$EPD_p(X) = \mathsf{E}\left[\left(X - F_X^{-1}(p)\right)_+\right],$$

kde $(\cdot)_+$ je kladná část. EPD je zkratka anglického Expected Policyholder Deficit. V [3] je uveden následující vztah mezi EPD a TailVaR, který platí v případě spojité F_X.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[X|X > F_X^{-1}(p)\right] &= F_X^{-1}(p) + \mathsf{E}\left[X - F_X^{-1}(p)|X > F_X^{-1}(p)\right] \\ &= F_X^{-1}(p) + \frac{1}{1-p}\mathsf{E}\left[\left(X - F_X^{-1}(p)\right)_+\right].\end{aligned}$$

1.2 Alokační metoda

Poté, co je zvolena výše rizikového kapitálu pro celkové riziko, zabýváme se otázkou, jak rozdělit tuto částku mezi jednotlivá dílčí rizika co nejvhodněji. K tomu použijeme některou z alokačních metod. Rizikový kapitál příslušející celkovému riziku $S = \sum_{i=1}^n X_i$ budeme označovat K. Náhodné veličiny reprezentující dílčí rizika budeme označovat $X_1,\dots,X_n$ a částky zvolenou metodou alokované těmto rizikům budeme označovat $K_1,\dots,K_n$. Podobně jako od míry rizika požadujeme některé rozumné vlastnosti, které z ní pak dělají *koherentní míru rizika*, zformulujme zde čtyři vlastnosti kladené na alokační metody zavedené v [6]. Alokační metodě, která tyto vlastnosti splňuje, se pak říká *koherentní alokační metoda*.

1.2.1 Koherentní alokační metoda

Při formulaci vlastností koherentní alokační metody předpokládejme, že míra rizika zvolená k určení celkového rizikového kapitálu je ρ, tedy že $K = \rho(S)$. Zaveďme následující značení:

Značení 2. *Alokační metoda přiřazuje dílčím rizikům $X_1,\dots,X_n$ a částce $K = \rho(S)$ vyhrazené k pokrytí rizika $S = \sum_{i=1}^n X_i$ alokace $K_1,\dots,K_n$, kde K_i je částka danou metodou určená riziku X_i, $i = 1,\dots,n$. Nechť $M = \{i_1,\dots,i_m\} \subseteq \{1,\dots,n\}$. Označme $K^M := \rho(\sum_{i\in M} X_i)$ částku vyhrazenou k pokrytí rizika $\sum_{i\in M} X_i$. Dále pro $i \in M$ označme K_i^M alokaci metodou určenou riziku X_i. Speciálně pak pro $N = \{1,\dots,n\}$ platí $K^N = K$ a $K_i^N = K_i$, $i = 1,\dots,n$.*

Po zavedení nezbytného značení následuje výčet vlastností.

Plná alokace

Alokační metoda splňuje podmínku plné alokace, pokud platí $K_1 + \dots + K_n = K$. Tedy celý kapitál dostupný pro pokrytí rizik je použit.

No Undercut

Alokační metoda splňuje podmínku „no undercut“, pokud pro každou $M = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ platí

$$K_{i_1} + \cdots + K_{i_m} \leq K^M.$$

To znamená, že pro libovolnou skupinu dílčích rizik nebude výhodnější odtrhnout se od celku.

Symetrie

Nejprve uveďme slovní formulaci z [6]. Pokud rizika i a j po přidání k libovolné skupině rizik $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ přispějí stejně k riziku této skupiny, potom $K_i = K_j$.

V [5] nalezneme i matematický zápis této podmínky. Dvojice rizik i a j, $i \neq j$, je vzhledem k dané metodě symetrická, pokud z toho, že pro každou $M = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ splňující $\{i, j\} \subseteq M$ platí $K_i^M = K_j^M$, plyne $K_i = K_j$. Alokační metoda pak splňuje podmínku symetrie, pokud je každá dvojice rizik vzhledem k této metodě symetrická.

Bezriziková alokace

Platí-li pro nějakou náhodnou veličinu X rovnost $\mathsf{P}(X = C) = 1$ pro $C \in \mathbb{R}$, pak alokovaná částka je C.

1.2.2 Modifikace alokačního pravidla

Mějme alokační pravidlo, které splňuje první dvě podmínky, ale ne čtvrtou. Navrhněme zde možný postup, jakým lze pravidlo modifikovat tak, aby splňovalo čtvrtou podmínku. U modifikovaného pravidla bude nutné ověřit, jestli stále platí první dvě podmínky. V [5] lze nalézt ukázku ověření podmínky „no undercut“. Stejně jako v [5] i zde uvažujme, že k výpočtu rizikového kapitálu vyhrazeného skupině rizik $M = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je užitá míra rizika, kterou zde označme ρ, tedy stejná míra, která byla použita k určení částky vyhrazené k pokrytí celkového rizika S. Toto jsme již zavedli ve značení 2. Dále předpokládejme, že ρ splňuje podmínku translační invariance. Předpokládejme, že bezrizikový požadavek je $X_n \equiv \alpha$. Máme-li rozdělit mezi jednotlivá rizika částku K, vyhradíme nejprve stranou částku α odpovídající bezrizikovému požadavku. Poté pomocí daného alokačního pravidla rozdělíme mezi zbylá rizika částku

$$K - \alpha = \rho(X_1 + \cdots + X_n) - \alpha = \rho(X_1 + \cdots + X_{n-1} + \alpha) - \alpha = \rho(X_1 + \cdots + X_{n-1}).$$

Podmínky bezrizikové a plné alokace toto modifikované pravidlo zřejmě splňuje. Mějme $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Pak v podmínce „no undercut“ vyžadujeme, aby platila nerovnost

$$K_{i_1} + \cdots + K_{i_m} \leq \rho(X_{i_1} + \cdots + X_{i_m}).$$

Pokud $n \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$, pak nerovnost platí, protože původní metoda podmínku splňuje. Pokud $n \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, pak

$$
\begin{aligned}
K_{i_1} + \cdots + K_{i_m} &= \alpha + \sum_{i \in \{i_1,\ldots,i_m\} \setminus \{n\}} K_i \le \alpha + \rho\left(\sum_{i \in \{i_1,\ldots,i_m\} \setminus \{n\}} X_i\right) \\
&= \rho\left(\alpha + \sum_{i \in \{i_1,\ldots,i_m\} \setminus \{n\}} X_i\right) = \rho(X_{i_1} + \cdots + X_{i_m}),
\end{aligned}
$$

protože původní metoda podmínku splňuje a od míry rizika vyžadujeme podmínku translační invariance. Pokud tedy máme alokační metodu splňující první dvě podmínky, touto modifikací získáme alokační metodu, která splňuje první dvě podmínky a čtvrtou podmínku, tedy podmínky plné alokace, „no undercut“ a bezrizikové alokace. Pokud modifikovaná metoda splňuje i podmínku symetrie, jedná se pak o koherentní metodu. Tuto modifikaci využijeme ve třetí kapitole této práce.

1.2.3 Příklady alokačních pravidel

Uveďme zde přehled některých známých alokačních pravidel, která lze nalézt například v [1].

Haircut alokace

Budeme-li chtít pro předepsané $p \in (0,1)$ použít VaR alokaci pro každé z rizik $X_1, \ldots, X_n$, nebudeme moci alokovat i-tému riziku kapitál $E_i = F_{X_i}^{-1}(p)$, protože by nemuselo platit $E_1 + \cdots + E_n = K$. Vynásobením těchto E_i, $i = 1, \ldots, n$, konstantou $\gamma \in \mathbb{R}$ zvolenou s ohledem na požadavek úplné alokace získáme haircut alokaci, která má pak tvar

$$
K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^{n} F_{X_j}^{-1}(p)} F_{X_i}^{-1}(p), \qquad i = 1, \ldots, n.
$$

Podobnou alokační metodou je následující *kvantilová alokace*, která místo vynásobení E_i, $i = 1, \ldots, n$, konstantou dosahuje úplné alokace vynásobením parametru p vhodnou konstantou β v kombinaci s užitím smíšené kvantilové funkce.

Kvantilová alokace

Pro předepsané $p \in (0,1)$ získáme kvantilovou alokaci podle vzorce

$$
K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(\beta p), \qquad i = 1, \ldots, n,
$$

kde α a β jsou zvoleny tak, aby platila rovnost

$$
\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(\beta p) = K,
$$

tedy aby platila podmínka plné alokace.

Kovarianční alokace

Toto alokační pravidlo bere v potaz závislost mezi dílčí ztrátou a celkovou ztrátou použitím kovariancí. Jednotlivé alokace se spočítají jako

$$K_i = \gamma \operatorname{cov}(X_i, S), \quad i = 1, \dots, n,$$

kde γ je zvoleno s ohledem na plnou alokaci, tedy tak, aby platilo $\gamma \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i,S) = K$. Odtud získáme

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_j,S)} \operatorname{cov}(X_i, S), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

CTE alokace

Conditional Tail Expectation (CTE) alokace vychází z rozkladu $TVaR_p(S)$. Označíme-li $E_i = \mathsf{E}\left[X_i|S > F_S^{-1}(p)\right]$, představují E_i, $i = 1, \dots, n$, dílčí příspěvky k očekávané hodnotě celkové ztráty za podmínky, že tato ztráta překročí kvantil $F_S^{-1}(p)$, neboť

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left[X_i|S > F_S^{-1}(p)\right] = \mathsf{E}\left[S|S > F_S^{-1}(p)\right] = TVaR_p(S).$$

Aby byl splněn požadavek plné alokace, vynásobíme E_i, $i = 1, \dots, n$, vhodnou konstantou. Tak získáme alokace

$$K_i = \frac{K}{\mathsf{E}\left[S|S > F_S^{-1}(p)\right]} \mathsf{E}\left[X_i|S > F_S^{-1}(p)\right], \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Proporcionální alokační pravidla

Proporcionální alokační pravidla jsou pravidla tvaru

$$K_i = \gamma \rho(X_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

kde ρ je míra rizika a volí se $\gamma = \frac{K}{\sum_{j=1}^{n} \rho(X_j)}$. Zde K představuje částku alokovanou pro riziko $S = X_1 + \cdots + X_n$. Pravidlo je pak tvaru

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^{n} \rho(X_j)} \rho(X_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Některá z uvedených pravidel spadají do této kategorie. Pokud zvolíme $\rho(X_i) = \operatorname{cov}(X_i, S)$, jedná se o kovarianční alokaci. Při volbě $\rho(X_i) = F_{X_i}^{-1}(p)$, $p \in (0,1)$, se pak jedná o haircut alokaci. Zvolíme-li $\rho(X_i) = \mathsf{E}\left[X_i|S > F_S^{-1}(p)\right]$, $p \in (0,1)$, jedná se o CTE alokaci.

Kapitola 2

Alokace kapitálu jako optimalizační úloha

Problém alokace kapitálu lze chápat jako optimalizační úlohu. Uvedeme zde její formulaci podle [1]. Problém alokace kapitálu lze chápat jako problém určení alokací jednotlivým dílčím rizikům takovým způsobem, aby skutečné hodnoty dílčích ztrát byly blízko alokacím vyhrazeným k pokrytí těchto ztrát. Označíme-li K kapitál vyhrazený k pokrytí celkového rizika $S = X_1 + \cdots + X_n$ a dále K_i, $i = 1,\ldots,n$, alokace vyhrazené dílčím rizikům X_i, $i = 1,\ldots,n$, pak rozdíl mezi skutečnou ztrátou a kapitálem určeným k jejímu pokrytí je $S - K$. Protože dílčí ztráty jsou částí celku, může být nepříznivý výsledek $X_i > K_i$ vykompenzován příznivým výsledkem $X_j < K_j$ pro nějaká $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Požadavek blízkosti alokací a ztrát je v [1] popsán následující optimalizační úlohou.

$$\min_{K_1,\ldots,K_n} \sum_{j=1}^{n} v_j \,\mathsf{E}\left[\xi_j D\left(\frac{X_j - K_j}{v_j}\right)\right] \quad \text{za podmínky} \sum_{j=1}^{n} K_j = K. \tag{2.1}$$

Protože požadujeme, aby byl veškerý kapitál K použít, je v podmínce rovnost. Nezáporná funkce D slouží k popisu blízkosti dílčích ztrát a alokací. v_i, $i = 1,\ldots,n$, jsou nezáporné konstanty se součtem 1 a ξ_i, $i = 1,\ldots,n$, jsou náhodné veličiny. Slouží zde jako váhové faktory. Pro bližší představu porovnejme dva případy, v obou z nich uvažujme $D(x) = x^2$. V prvním případě nechť je $\xi_i \equiv 1$, $i = 1,\ldots,n$. V druhém případě zvolme $\xi_i = S^2$, kde $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Potom při realizacích s velkými celkovými ztrátami je hodnota realizace náhodné veličiny $\xi_i D\left(\frac{X_i - K_i}{v_i}\right)$ v druhém případě větší než v prvním. V dalším textu se budeme zabývat některými konkrétními volbami funkce D, váhových faktorů ξ_i i vah v_i, $i = 1,\ldots,n$.

2.1 Kvadratické optimalizační kritérium

Zvolme $D(x) = x^2$. Pak minimalizační úloha přechází do tvaru

$$\min_{K_1,\dots,K_n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left[\xi_j \frac{(X_j - K_j)^2}{v_j}\right] \quad \text{za podmínky} \sum_{j=1}^{n} K_j = K. \tag{2.2}$$

Uveďme zde řešení této optimalizační úlohy podle [1]:

Věta 1. *Řešením úlohy (2.2) jsou alokace*

$$K_i = \mathsf{E}[\xi_i X_i] + v_i \left(K - \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\xi_j X_j]\right), \quad i = 1,\dots,n. \tag{2.3}$$

Důkaz. Všimněme si, že platí

$$\mathsf{E}[\xi_i (X_i - K_i)^2] = (\mathsf{E}[\xi_i X_i] - K_i)^2 + \mathsf{E}[\xi_i X_i^2] - (\mathsf{E}[\xi_i X_i])^2, \quad i = 1,\dots,n.$$

Druhý a třetí sčítanec pravé strany tohoto vztahu nezávisí na K_i, proto je úloha (2.2) ekvivalentní s úlohou

$$\min_{K_1,\dots,K_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mathsf{E}[\xi_j X_j] - K_j)^2}{v_j} \quad \text{za podmínky} \sum_{j=1}^{n} K_j = K. \tag{2.4}$$

Označíme-li $x_i := \frac{K_i - \mathsf{E}[\xi_i X_i]}{\sqrt{v_i}}$, $i = 1,\dots,n$, přejde (2.4) do tvaru

$$\min_{K_1,\dots,K_n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \quad \text{za podmínky} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{v_j} x_j = K - \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\xi_j X_j]. \tag{2.5}$$

Podmínka v (2.5) při geometrickém pohledu znamená, že vektor $(x_1,\dots,x_n)^T$ leží v nadrovině určené vektorem $(\sqrt{v_1},\dots,\sqrt{v_n})^T$ a číslem $K - \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\xi_j X_j]$. Hledáme tedy vektor $(x_1,\dots,x_n)^T$ v této nadrovině, který má nejmenší normu. Tedy $x_i = M\sqrt{v_i}$ pro $M \in \mathbb{R}$ zvolené tak, aby vektor $(M\sqrt{v_1},\dots,M\sqrt{v_n})^T$ ležel v dané nadrovině. Proto musí platit

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{v_j} x_j = \sum_{j=1}^{n} M v_j = K - \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\xi_j X_j],$$

odtud s přihlédnutím k $\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$ získáme

$$M = K - \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\xi_j X_j].$$

Získali jsme tak řešení úlohy (2.5) ve tvaru

$$x_i = \sqrt{v_i} \left(K - \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[\xi_j X_j]\right), \quad i = 1,\dots,n.$$

S ohledem na použitou substituci získáme řešení úlohy (2.4) a tedy i původní úlohy (2.2) ve tvaru (2.3).

❑

Zvolíme-li v řešení (2.3)

$$v_i = \frac{\mathsf{E}\,[\xi_i X_i]}{\sum_{j=1}^n \mathsf{E}\,[\xi_j X_j]},$$

získáme dosazením

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \mathsf{E}\,[\xi_j X_j]}\,\mathsf{E}\,[\xi_i X_i].$$

Toto pravidlo je speciálním případem *proporcionálního alokačního pravidla*, zvolíme-li v (1.3) $\rho(X_i) = \mathsf{E}\,[\xi_i X_i]$, $i = 1,\dots,n$.

2.1.1 Možné volby váhového faktoru

Nyní si ukažme několik možných voleb náhodných veličin ξ_i, $i = 1,\dots,n$, uvedených v [1]. Připomeňme, že ξ_i slouží jako váhový faktor v (2.1). První možnou volbou je $\xi_i = h_i(X_i)$, kde h_i je nezáporná neklesající funkce splňující $\mathsf{E}\,[h_i(X_i)] = 1\ \forall i = 1,\dots,n$. Tato volba odpovídá situaci, kdy chceme největší váhu klást na stavy, kdy si jednotka i vede nejhůře. Možnou volbou funkcí h_i pro $i = 1,\dots,n$, je

$$h_i(X_i) = \frac{I\{X_i > F_{X_i}^{-1}(p)\}}{1 - F_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(p))}, \tag{2.6}$$

tato volba splňuje

$$\mathsf{E}\left[\frac{I\{X_i > F_{X_i}^{-1}(p)\}}{1 - F_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(p))}\right] = \frac{\mathsf{P}(X_i > F_{X_i}^{-1}(p))}{1 - F_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(p))} = 1.$$

Při volbě (2.6) dostáváme

$$\mathsf{E}\,[\xi_i X_i] = \mathsf{E}\,[X_i | X_i > F_{X_i}^{-1}(p)].$$

Druhou možnou volbou je $\xi_i = h(S)$, kde h je nezáporná neklesající funkce splňující $\mathsf{E}\,[h(S)] = 1$. Tato volba odpovídá situaci, kdy chceme největší váhu klást na stavy, kdy si celek vede nejhůře. Možnou volbou funkce h je

$$h(S) = \frac{I\{S > F_S^{-1}(p)\}}{1 - F_S(F_S^{-1}(p))}, \tag{2.7}$$

tato volba splňuje

$$\mathsf{E}\left[\frac{I\{S > F_S^{-1}(p)\}}{1 - F_S(F_S^{-1}(p))}\right] = \frac{\mathsf{P}(S > F_S^{-1}(p))}{1 - F_S(F_S^{-1}(p))} = 1.$$

Při volbě (2.7) pak dostáváme

$$\mathsf{E}\,[\xi_i X_i] = \mathsf{E}\,[X_i | S > F_S^{-1}(p)].$$

Zvolíme-li navíc váhy

$$v_i = \frac{\mathsf{E}\left[X_i | S > F_S^{-1}(p)\right]}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left[X_j | S > F_S^{-1}(p)\right]}, \tag{2.8}$$

získáme pravidlo Conditional Tail Expectation (1.2).

Zvolíme-li $h(S) = S - \mathsf{E}[S]$, je

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[X_i h(S)] &= \mathsf{E}[X_i(S - \mathsf{E}[S])] = \mathsf{E}[X_i(S - \mathsf{E}[S])] - \mathsf{E}[S - \mathsf{E}[S]]\,\mathsf{E}[X_i] \\ &= \mathsf{E}[(X_i - \mathsf{E}[X_i])(S - \mathsf{E}[S])] = \operatorname{cov}(X_i, S). \end{aligned}$$

Zvolíme-li dále váhy

$$v_i = \frac{\mathsf{E}[X_i h(S)]}{\sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}[X_j h(S)]},$$

získáme kovarianční alokační pravidlo (1.1).

2.2 Pomocná tvrzení o komonotonii

Při odvození kvantilového alokačního pravidla použijeme pojem komonotónního vektoru. V této části uvedeme definice a tvrzení potřebná k následnému užití pojmu komonotonie. Teorie zde uvedená pochází z [1] a [2]. Hlavním nástrojem je *věta 6* v [2], jejíž důkaz zde pro přehlednost uvedeme rozdělený do několika vět. Uveďme nyní charakterizaci komonotonie a poté dvě vlastnosti komonotónních vektorů v souvislosti se stop-loss transformací. Následující věta pochází z [2], bod (c) je však lehce upraven.

Definice 1. *O množině $M \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že je komotónní, pokud $\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in M$ platí buď $\boldsymbol{x_1} \leq \boldsymbol{x_2}$ nebo $\boldsymbol{x_1} \geq \boldsymbol{x_2}$ (po složkách). Dále o náhodném vektoru $\boldsymbol{X}$ řekneme, že je komonotónní, pokud $Im(\boldsymbol{X})$ je komonotónní množina.*

Definice 2. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ je náhodný vektor pro $n \in \mathbb{N}$. Jeho komonotónní verzí nazveme náhodný vektor $\boldsymbol{X^c} = (X_1^c, \ldots, X_n^c)^T$, který je komonotónní a má stejná jednorozměrná marginální rozdělení jako $\boldsymbol{X}$.*

Věta 2. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ je reálný náhodný vektor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) $Im(\boldsymbol{X})$ je komonotónní.

(b) Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}$.

(c) $\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha)}(U)\right)^T, \quad U \sim R(0,1), \quad \alpha \in [0,1]$.

(d) Existuje reálná náhodná veličina Z a neklesající funkce $f_1, \ldots, f_n$ takové, že

$$\boldsymbol{X} \overset{d}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z))^T.$$

Důkaz. $(a) \implies (b)$: Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, definujme množiny $A_i = \{y \in Im(\boldsymbol{X}) : y_i \leq x_i\}$, $i = 1,\ldots,n$. Označme y_{max} maximální prvek $\cup_{i=1}^n A_i$ vzhledem k uspořádání $\leq$. Nechť $y_{max} \in A_k$. Pak $A_k = \cap_{i=1}^n A_i$, protože pro každé y z $\cup_{i=1}^n A_i$ platí $y \leq y_{max}$, tedy $y \in A_k$. Potom

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \cap_{i=1}^n A_i) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in A_k) = \mathsf{P}(X_k \leq x_k) = F_{X_k}(x_k)$$

a zároveň

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \cap_{i=1}^n A_i) \leq \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in A_j) = F_{X_j}(x_j), \quad j = 1,\ldots,n,$$

tedy $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)\}$.
$(b) \implies (c)$: Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(F_{X_1}(U) \leq x_1,\ldots,F_{X_n}(U) \leq x_n\right) &= \mathsf{P}\left(U \leq F_{X_1}(x_1),\ldots,U \leq F_{X_n}(x_n)\right) \\ &= \mathsf{P}(U \leq \min\{F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)\}) \\ &= \min\{F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)\} = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že $\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \left(F_{X_1}(U),\ldots,F_{X_n}(U)\right)^T, \quad U \sim R(0,1)$. Zvolme $\alpha \in [0,1]$. Zbývá dokázat, že

$$\left(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(U),\ldots,F_{X_n}^{-1(\alpha)}(U)\right)^T \overset{d}{=} \left(F_{X_1}(U),\ldots,F_{X_n}(U)\right)^T.$$

Dokažme, že tyto dva vektory jsou si rovny s pravděpodobností 1.

$$\begin{aligned}&P\left(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(U) = F_{X_1}^{-1}(U),\ldots,F_{X_n}^{-1(\alpha)}(U) = F_{X_n}^{-1(\alpha)}(U)\right) \\ &= P\left(\cap_{i=1}^n \left[F_{X_i}^{-1(\alpha)}(U) = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(U)\right]\right) = 1,\end{aligned}$$

protože graf distribuční funkce nemůže mít více než spočetně mnoho horizontálních úseků, a tedy pravděpodobnost každé množiny z průniku výše je 1.

Implikace $(c) \implies (d)$ je zřejmá.
$(d) \implies (a)$: Vzhledem k tomu, že funkce $f_1,\ldots,f_n$ jsou dle předpokladu neklesající, množina $Im(\boldsymbol{X}) = \{(f_1(z),\ldots,f_n(z))^T : z \in Im(Z)\}$ je komonotónní. ❑

Věta 3. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)^T$ je náhodný vektor a $\boldsymbol{X^c} = (X_1^c,\ldots,X_n^c)^T$ je jeho komonotónní verze. Pak pro každé reálné d platí*

$$\mathsf{E}[(X_i - d)_+] = \mathsf{E}[(X_i^c - d)_+], \quad i = 1,\ldots,n.$$

Věta 4. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)^T$, $n \in \mathbb{N}$, je komonotónní reálný náhodný vektor. Dále nechť $\boldsymbol{d} = (d_1,\ldots,d_n)^T \in Im(\boldsymbol{X})$. Pak platí, že*

$$\mathsf{E}[((X_1 + \cdots + X_n) - (d_1 + \cdots + d_n))_+] = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}[(X_i - d_i)_+].$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ je realizace $\boldsymbol{X}$. Protože $Im(\boldsymbol{X})$ je komonotónní množina, platí buď $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}$ nebo $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{d}$. Dokažme nejprve rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - d_i)_+ = ((x_1 + \cdots + x_n) - (d_1 + \cdots + d_n))_+ . \tag{2.9}$$

Pokud $x_1 \leq d_1$, pak z komonotonie dostáváme, že $(x_i - d_i)_+ = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$ a obě strany dokazované rovnosti se pak rovnají nule. Pokud $x_1 \geq d_1$, pak z komonotonie dostáváme, že $(x_i - d_i)_+ = x_i - d_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a

$$((x_1 + \cdots + x_n) - (d_1 + \cdots + d_n))_+ = (x_1 + \cdots + x_n) - (d_1 + \cdots + d_n)$$

a dokazovaná rovnost opět platí. Z platnosti (2.9) pro každou realizaci vektoru $\boldsymbol{X}$ a přechodem ke střední hodnotě dostáváme tvrzení věty.

❑

Věta 5. *Nechť X je reálná náhodná veličina a g je neklesající zleva spojitá funkce. Pak pro $p \in (0, 1)$*

$$F^{-1}_{g(X)}(p) = g\left(F^{-1}_X(p)\right).$$

Dále nechť h je neklesající zprava spojitá funkce. Pak pro $p \in (0, 1)$

$$F^{-1+}_{h(X)}(p) = h\left(F^{-1+}_X(p)\right).$$

Důkaz. První rovnost lze rozepsat jako

$$\begin{aligned}
F^{-1}_{g(X)}(p) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F_{g(X)}(x) \geq p\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathsf{P}(g(X) \leq x) \geq p\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathsf{P}(X \leq \sup\{y : g(y) \leq x\}) \geq p\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(\sup\{y : g(y) \leq x\}) \geq p\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : F^{-1}_X(p) \leq \sup\{y : g(y) \leq x\}\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : g(F^{-1}_X(p)) \leq x\} \\
&= g(F^{-1}_X(p)).
\end{aligned}$$

Druhou nerovnost s funkcí h lze rozepsat jako

$$\begin{aligned}
F^{-1+}_{h(X)}(p) &= \sup\{x \in \mathbb{R} : F_{h(X)}(x) \leq p\} \\
&= \sup\{x \in \mathbb{R} : \mathsf{P}(h(X) \leq x) \leq p\} \\
&= \sup\{x \in \mathbb{R} : \mathsf{P}(X < \inf\{y : h(y) \geq x\}) \leq p\} \\
&= \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(\inf\{y : h(y) \geq x\}) \leq p\} \\
&= \sup\{x \in \mathbb{R} : F^{-1+}_X(p) \geq \inf\{y : h(y) \geq x\}\} \\
&= \sup\{x \in \mathbb{R} : h(F^{-1+}_X(p)) \geq x\} \\
&= h(F^{-1+}_X(p)).
\end{aligned}$$

❑

Kvantil sumy složek komonotónního vektoru lze vyjádřit pomocí kvantilů jednotlivých složek, jak ukazuje následující věta:

Věta 6. *Nechť $\boldsymbol{X}$ je komonotónní reálný náhodný vektor a $\alpha \in [0{,}1]$. Pak pro náhodnou veličinu $S = \sum_{i=1}^n X_i$ platí $F_S^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p)$, $p \in (0,1)$.*

Důkaz. Pro $\boldsymbol{X}$ dle věty 2 platí

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(U), \dots, F_{X_n}^{-1(\alpha)}(U)\right)^T, \quad U \sim R(0{,}1).$$

Zvolme nejprve $\alpha = 1$, pak $S \stackrel{d}{=} g(U)$, kde $g(x) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(x)$ je neklesající zleva spojitá funkce. Proto s využitím věty 5 získáváme

$$F_S^{-1}(p) = F_{g(U)}^{-1}(p) = g\left(F_U^{-1}(p)\right) = g(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p), \quad p \in (0{,}1).$$

Obdobně při volbě $\alpha = 0$ platí $S \stackrel{d}{=} h(U)$, kde $h(x) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(x)$ je neklesající zprava spojitá funkce. Proto s využitím věty 5 získáváme

$$F_S^{-1+}(p) = F_{h(U)}^{-1+}(p) = h\left(F_U^{-1+}(p)\right) = h(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(p), \quad p \in (0{,}1).$$

Kombinací těchto výsledků pro $\alpha \in [0{,}1]$ získáme

$$\begin{aligned} F_S^{-1(\alpha)}(p) &= \alpha F_S^{-1}(p) + (1-\alpha) F_S^{-1+}(p) = \alpha \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p), \quad p \in (0{,}1). \end{aligned}$$

❑

Věta 7. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ je náhodný vektor a $\boldsymbol{X^c} = (X_1^c, \dots, X_n^c)^T$ je jeho komonotónní verze. Označme $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$. Pro $d \in \left(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\right)$ pak platí*

$$\mathsf{E}\left[(S^c - d)_+\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\left[(X_i - d_i^\star)_+\right],$$

kde $d_i^\star = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(d))$ a α je určeno vztahem $F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(d)) = d$. Navíc platí $\sum_{i=1}^n d_i^* = d$.

Důkaz. Z věty 4 získáme rovnost

$$\mathsf{E}\left[(S^c - d)_+\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\left[(X_i^c - d_i)_+\right],$$

která platí, pokud $(d_1, \dots, d_n)^T$ je realizací $\boldsymbol{X^c}$ a pokud platí $\sum_{i=1}^n d_i = d$. Dle věty (2)

$$\boldsymbol{X^c} \stackrel{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(U), \dots, F_{X_n}^{-1(\alpha)}(U)\right), \quad U \sim R(0{,}1), \quad \alpha \in [0{,}1].$$

Zvolme α splňující vztah $F_{S^c}^{-1(\alpha)}\left(F_{S^c}(d)\right) = d$. Dále zvolme

$$d_i^* = F_{X_i}^{-1(\alpha)}\left(F_{S^c}(d)\right), \quad i = 1,\dots,n.$$

Pak $(d_1^*,\dots,d_n^*)^T \in Im(\boldsymbol{X^c})$ a dle věty 6 platí $\sum_{i=1}^n d_i^* = d$. Tak dostaneme

$$\mathsf{E}\left[(S^c - d)_+\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\left[(X_i^c - d_i^\star)_+\right].$$

Sumu v posledním výrazu můžeme nakonec přepsat podle věty 3 a získáme

$$\mathsf{E}\left[(S^c - d)_+\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\left[(X_i - d_i^\star)_+\right].$$

❑

Lemma 8. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)^T$ je reálný náhodný vektor a $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Nechť $K_1,\dots,K_n,K \in \mathbb{R}$ splňují $\sum_{i=1}^n K_i = K$. Pak*

$$\mathsf{E}\left[(S - K)_+\right] \leq \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\left[(X_i - K_i)_+\right].$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$ je realizací $\boldsymbol{X}$, $s = \sum_{i=1}^n x_i$. Pro libovolná reálná $d_1,\dots,d_n$ splňující $\sum_{i=1}^n d_i = d$ platí

$$\begin{aligned}(s-d)_+ = ((x_1 - d_1) + \dots + (x_n - d_n))_+ &\leq ((x_1 - d_1)_+ + \dots + (x_n - d_n)_+)_+ \\ &= (x_1 - d_1)_+ + \dots + (x_n - d_n)_+.\end{aligned}$$

Přejdeme-li k náhodným veličinám a středním hodnotám, získáme

$$\mathsf{E}\left[(S-d)_+\right] = \mathsf{E}\left[((X_1-d_1)+\dots+(X_n-d_n))_+\right] \leq \mathsf{E}\left[(X_1-d_1)_+ + \dots + (X_n-d_n)_+\right].$$

❑

2.3 Kritérium založené na absolutní odchylce

Zabývejme se nyní opět úlohou (2.1). Nyní však navíc předpokládejme, že náhodné veličiny ξ_i v ní vystupující splňují $\mathsf{E}[\xi_i] = 1$, $i = 1,\dots,n$. Zabývejme se případem, kdy v (2.1) zvolíme $D(x) = |x|$. (2.1) pak přejde do tvaru

$$\min_{K_1,\dots,K_n} \sum_{j=1}^n \mathsf{E}\left[\xi_j \left|X_j - K_j\right|\right] \quad \text{za podmínky} \sum_{j=1}^n K_j = K. \tag{2.10}$$

Protože platí $|x| = 2(x)_+ - x$, je řešení (2.10) totožné s řešením úlohy

$$\min_{K_1,\dots,K_n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\,[\xi_j(X_j - K_j)_+] \quad \text{za podmínky} \sum_{j=1}^{n} K_j = K. \tag{2.11}$$

Zabývejme se řešením (2.11) v případě, že $\xi_j \equiv 1$, $j = 1,\dots,n$. Důkaz následujícího tvrzení v [1] se odvolává na [2], nicméně je velmi stručný. Uveďme zde podrobnější důkaz, kdy se odvoláme na výsledky uvedené v podkapitole 2.2.

Věta 9. *Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)^T$ je reálný náhodný vektor a $\boldsymbol{X^c} = (X_1^c,\dots,X_n^c)^T$ je jeho komonotónní verze. Označme $S = \sum_{i=1}^n X_i$ a $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$. Nechť $K \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$. Pak řešením úlohy*

$$\min_{K_1,\dots,K_n} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_j - K_j)_+] \quad \textit{za podmínky} \sum_{j=1}^{n} K_j = K \tag{2.12}$$

jsou čísla

$$K_i^\star = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K)),$$

kde α je určeno rovnicí $F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K)) = K$.

Důkaz. Zvolme libovolná $K_1,\dots,K_n$ taková, že $\sum_{i=1}^n K_i = K$. Z věty 3 získáme

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i - K_i)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i^c - K_i)_+].$$

Z lemmatu 8 pak získáme

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i^c - K_i)_+] \geq \mathsf{E}\,[(S^c - K)_+].$$

S použitím věty 7 nakonec získáme

$$\mathsf{E}\,[(S^c - K)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i - K_i^\star)_+].$$

Dohromady pak máme

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i - K_i)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i^c - K_i)_+] \geq \mathsf{E}\,[(S^c - K)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i - K_i^\star)_+].$$

❑

Alokačnímu pravidlu předepsanému jako

$$K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(\beta p), \quad i = 1,\dots,n,$$

kde α a β se volí s ohledem na $\sum_{i=1}^n K_i = K$, se říká kvantilové alokační pravidlo. Pokud zvolíme $\beta p = F_{S^c}(K)$, získáme $K_i = K_i^\star$ a z předchozí věty víme, že podmínka úplné alokace je splněna. Alokační pravidlo z předchozí věty je tedy jinak zapsané kvantilové alokační pravidlo.

2.4 Modifikace kvantilového pravidla

V optimálním řešení úlohy z věty 9 jsou ve vyjádření $K_i^\star$ použity kvantilové funkce $F_{X_i}^{-1(\alpha)}$, kde α je zvoleno tak, aby vyhovovalo rovnici $F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K)) = K$. Není však nutné volit stejné α pro každé i, navrhněme zde jednoduché zobecnění. Mějme nějaké $p \in (0{,}1)$. Pokud pro každé $i = 1,\dots,n$ platí $F_{X_i}^{-1}(p) = F_{X_i}^{-1+}(p)$, pak podle věty 6 platí také $F_{S^c}^{-1}(p) = F_{S^c}^{-1+}(p)$. Označme nyní $p = F_{S^c}(K)$ pro nějaké $K > 0$. Pokud rovnici $F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(K)) = K$ řeší nějaké $\alpha \in (0{,}1)$, pak $F_{S^c}^{-1}(p) \neq F_{S^c}^{-1+}(p)$, tedy existují indexy, které bez újmy na obecnosti označme $i = 1,\dots,m \leq n$, pro které $F_{X_i}^{-1}(p) \neq F_{X_i}^{-1+}(p)$. Označme $d_i = F_{X_i}^{-1+}(p) - F_{X_i}^{-1}(p)$, $i = 1,\dots,m$. S užitím tohoto značení lze psát

$$F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p) = F_{X_i}^{-1}(p) + (1-\alpha)d_i, \quad i = 1,\dots,m.$$

Pak také platí

$$K = F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) + \sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)d_i.$$

Pokud zvolíme $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in [0{,}1]$ tak, aby $\sum_{i=1}^m \alpha_i d_i = \alpha \sum_{i=1}^m d_i$, pak při volbě

$$\begin{aligned} K_i &= F_{X_i}^{-1(\alpha_i)}(p), & i &= 1,\dots,m, \\ K_i &= F_{X_i}^{-1}(p), & i &= m+1,\dots,n, \end{aligned}$$

dostaneme, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} K_i &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) + \sum_{i=1}^{m}(1-\alpha_i)d_i = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{m} d_i \\ &= F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = K. \end{aligned}$$

Takto zvolená K_i jsou tedy přípustným řešením úlohy (2.12). Dále ověřme, že tato volba je také optimální. Pokud vyjádříme

$$F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p) = F_{X_i}^{-1+}(p) - \alpha d_i, \quad i = 1,\dots,m,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p))_+\right] &= \int_{F_{X_i}^{-1+}(p)}^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx + \int_{F_{X_i}^{-1+}(p)-\alpha_i d_i}^{F_{X_i}^{-1+}(p)} \big(1 - F_X(F_{X_i}^{-1+}(p))\big)\,dx \\ &= \int_{F_{X_i}^{-1+}(p)}^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx + (1-p)\alpha d_i, \quad i = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

Dále máme

$$\mathsf{E}\left[(X_i - F_{X_i}^{-1}(p))_+\right] = \int_{F_{X_i}^{-1+}(p)}^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx, \quad i = m+1,\dots,n.$$

Ověřme, že se hodnota účelové funkce úlohy (2.12) nezvýší, použijeme-li místo alokací $K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p)$, $i = 1,\dots,n$, hodnoty

$$
\begin{aligned}
K_i &= F_{X_i}^{-1(\alpha_i)}(p), & i &= 1,\dots,m,\\
K_i &= F_{X_i}^{-1}(p) = F_{X_i}^{-1+}(p), & i &= m+1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

Dosazením do účelové funkce zjistíme, že při obou volbách je hodnota stejná:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha_i)}(p))_+] &= \sum_{i=1}^{n} \int_{F_{X_i}^{-1+}(p)}^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx + (1-p)\sum_{i=1}^{m} \alpha_i d_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{F_{X_i}^{-1+}(p)}^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx + (1-p)\alpha \sum_{i=1}^{m} d_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p))_+].
\end{aligned}
$$

2.4.1 Možná volba parametrů

Zabývejme se nyní možnou konkrétní volbou parametrů α_i, $i = 1,\dots,n$. Alokace $K_i^\star$ získáme tak, že k hodnotám $F_{X_i}^{-1}(p)$ přidáme ještě hodnoty $a_i = (1-\alpha)d_i$. Výsledné alokace pak mají tvar

$$
\begin{aligned}
K_i^\star &= F_{X_i}^{-1}(p) + a_i, & i &= 1,\dots,m,\\
K_i^\star &= F_{X_i}^{-1}(p), & i &= m+1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

Při použití stejného α pro všechna $i = 1,\dots,n$ je ze součtu $(1-\alpha)\sum_{i=1}^{m} d_i$ přiřazena největší část tomu i, pro které je příslušné d_i největší. Pro ilustraci zde navrhněme jiný způsob volby a_i, kdy mezi a_i, $i = 1,\dots,m$, rozdělíme $C := (1-\alpha)\sum_{i=1}^{m} d_i$ rovnoměrně a ne v závislosti na velikosti hodnot $d_1,\dots,d_m$. Jsme však omezeni podmínkami $a_i \le d_i$, $i = 1,\dots,m$. Zdůrazněme zde, že se jedná pouze o jeden z mnoha možných předpisů $a_1,\dots,a_n$, jak alternativní volba může vypadat. Popišme tedy postup rozdělení. Definujme posloupnosti čísel $\{C^{(1)},\dots,C^{(m)}\}$, $\{n^{(1)},\dots,n^{(m)}\}$ a pro $i = 1,\dots,m$, posloupnosti čísel $\{a_i^{(1)},\dots,a_i^{(m)}\}$, $\{d_i^{(1)},\dots,d_i^{(m)}\}$ následovně:

$$
\begin{aligned}
n^{(1)} &= m,\\
d_i^{(1)} &= d_i,\\
C^{(1)} &= C,\\
a_i^{(1)} &= \min\left(d_i^{(1)}, \frac{C^{(1)}}{n^{(1)}}\right),\\
n^{(2)} &= \left|\left\{i:\ d_i^{(1)} - a_i^{(1)} > 0\right\}\right|,\\
d_i^{(2)} &= d_i^{(1)} - a_i^{(1)},\\
C^{(2)} &= C^{(1)} - \sum_{i=1}^{n^{(1)}} a_i^{(1)},\\
a_i^{(2)} &= \min\left(d_i^{(2)}, \frac{C^{(2)}}{n^{(2)}}\right),\\
&\ \vdots\\
n^{(m)} &= \left|\left\{i:\ d_i^{(m-1)} - a_i^{(m-1)} > 0\right\}\right|,\\
d_i^{(m)} &= d_i^{(m-1)} - a_i^{(m-1)},\\
C^{(m)} &= C^{(m-1)} - \sum_{i=1}^{n^{(m-1)}} a_i^{(m-1)},\\
a_i^{(m)} &= \min\left(d_i^{(m)}, \frac{C^{(m)}}{n^{(m)}}\right).
\end{aligned}
$$

Tyto hodnoty se spočítají postupně v pořadí, ve kterém jsou výše uvedeny. Poté spočteme $a_i = \sum_{j=1}^{m} a_i^{(j)}$, $i = 1,\ldots,m$, a výsledné alokace spočteme jako

$$
\begin{aligned}
K_i &= F_{X_i}^{-1}(p) + a_i, \quad && i = 1,\ldots,m,\\
K_i &= F_{X_i}^{-1}(p), && i = m+1,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

V tomto vyjádření nejsou použita $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, která figurují v původním značení. Pro $i = 1,\ldots,m$ je $\alpha_i = 1 - \frac{a_i}{d_i}$. Pro $i = m+1,\ldots,n$ je $d_i = 0$, tedy $\alpha_i \in [0,1]$ můžeme zvolit libovolně, například $\alpha_i = 1$. Pak ekvivalentně

$$
K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_i)}(p), \quad i = 1,\ldots,n.
$$

V případě, kdy se v grafech funkcí $F_{X_1},\ldots,F_{X_n}$ nevyskytují horizontální úseky, bude platit $d_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$. Jako důsledek nebude záležet na tom, kterou z voleb $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ použijeme. Stejně tak v případě, kdy budou hodnoty $d_1,\ldots,d_n$ velmi malé. Situace, kdy jsou některé z hodnot $d_1,\ldots,d_n$ nenulové nastane například, pokud jako $F_{X_1},\ldots,F_{X_n}$ použijeme empirické distribuční funkce.

Kapitola 3

Alokace kapitálu založená na projekci do nadroviny

Připomeňme nejprve, jaký tvar mají proporcionální alokační pravidla. Jsou to pravidla tvaru

$$K_i = \gamma\xi(X_i), \quad i = 1,\ldots,n,$$

kde ξ je míra rizika a volí se $\gamma = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \xi(X_j)}$. K zde představuje částku alokovanou pro riziko $S = X_1 + \cdots + X_n$. Pravidlo je pak tvaru

$$K_i = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \xi(X_j)}\xi(X_i), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3.1}$$

Tato třída pravidel řeší podmínku úplné alokace tak, že se pro alokace místo vektoru $(\xi(X_1),\ldots,\xi(X_n))^T$ použije vektor $(\gamma\xi(X_1),\ldots,\gamma\xi(X_n))^T$, kde γ se vypočte tak, aby podmínka byla splněna. Vektor $\boldsymbol{v_1} = (\xi(X_1),\ldots,\xi(X_n))^T$ může vypovídat o vhodných alokacích jednotlivým rizikům a místo něj použijeme jiný vektor $\boldsymbol{v_2}$, v případě proporcionálního pravidla $\boldsymbol{v_2} = (\gamma\xi(X_1),\ldots,\gamma\xi(X_n))^T$, pouze kvůli podmínce plné alokace. Navrhněme v této kapitole jiný možný způsob, jak v této situaci splnit podmínku plné alokace. Mohli bychom vyžadovat, aby nový vektor $\boldsymbol{v_2}$, který navíc splňuje podmínku plné alokace, byl co nejbližší původnímu vektoru $\boldsymbol{v_1}$. V takovém případě zvolíme jako nový vektor $\boldsymbol{v_2}$ místo násobku $\boldsymbol{v_1}$ projekci $\boldsymbol{v_1}$ do nadroviny

$$\{(x_1,\ldots,x_n)^T : x_1 + \cdots + x_n = K\}.$$

Nový vektor pak najdeme řešením optimalizační úlohy

$$\min_{K_1,\ldots,K_n} \sum_{i=1}^n (\xi(X_i) - K_i)^2 \quad \text{za podmínky} \sum_{j=1}^n K_j = K. \tag{3.2}$$

Vyřešme tuto úlohu. Hledáme nejbližší bod $\boldsymbol{v_2}$ nadroviny

$$\{(x_1,\ldots,x_n)^T : x_1 + \cdots + x_n = K\}$$

k vektoru $\boldsymbol{v_1}$. Normálovým vektorem této nadroviny je $\boldsymbol{1_n}$, tedy $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} + M\boldsymbol{1_n}$ pro vhodné $M \in \mathbb{R}$. $\boldsymbol{v_2}$ leží v nadrovině, proto

$$K = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{v_2^i} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{v_1^i} + nM = \sum_{i=1}^n \xi(X_i) + nM,$$

odkud

$$M = \frac{1}{n}\left(K - \sum_{i=1}^{n} \xi(X_i)\right).$$

Řešením (3.2) jsou tedy čísla

$$K_i = \xi(X_i) + \frac{1}{n}\left(K - \sum_{j=1}^{n} \xi(X_j)\right), \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.3}$$

Nyní alokační pravidla (3.1) a (3.3) porovnejme. Tím si lépe ukážeme, jak jednotlivé podmínky koherence u alokačních pravidel fungují. Proporcionální alokační pravidlo řeší podmínku plné alokace pomocí násobení nějakou konstantou, zatímco alokační pravidlo založené na projekci řeší podmínku plné alokace pomocí přičtení nějaké konstanty. Mohli bychom se ptát, jestli jsou tyto metody koherentní. Obě metody jsou závislé na tom, kterou míru rizika jsme zvolili. Vlastnosti zvolené míry mají vliv na vlastnosti výsledného pravidla. Proto při porovnání musíme vyjít ze stejných předpokladů kladených na zvolenou míru rizika. V této kapitole předpokládejme, že ξ splňuje podmínky subaditivity a translační invariance.

3.1 Podmínky koherence u proporcionálního pravidla

V této části ověříme podmínky koherence v případě proporcionálního alokačního pravidla. V takové situaci, kdy od užité míry rizika ξ vyžadujeme, aby splňovala podmínky subaditivity a translační invariance. Podmínku plné alokace ověřovat nebudeme, protože je jasně splněna už z předpisu pro jednotlivé alokace. Toto alokační pravidlo za uvedených podmínek nesplňuje podmínku „no undercut“ a podmínku bezrizikové alokace.

3.1.1 Podmínka „no undercut“

Ověřme podmínku „no undercut“. V [5] lze nalézt ověření této podmínky v případě jiného alokačního pravidla. Stejně jako tam i zde uvažujme, že míra rizika užitá k výpočtu rizikového kapitálu je ξ. Tento předpoklad užijeme i v další sekci. Poté si ukážeme také obecnější situaci. Nechť $K_1,\dots,K_n$ jsou alokace pravidlem určené rizikům $X_1,\dots,X_n$ a $\{i_1,\dots,i_m\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ je množina indexů. Ověřme, zda platí

$$\sum_{j=1}^{m} K_{i_j} \leq \xi\left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j}\right).$$

To lze dále rozepsat jako

$$\sum_{j=1}^{m} K_{i_j} = \gamma \sum_{j=1}^{m} \xi(X_{i_j}) \leq \xi\left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j}\right),$$

což je při uvážení, že $\gamma = \frac{\xi(S)}{\sum_{j=1}^{n} \xi(X_j)}$, ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{\xi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} \xi(X_i)} \leq \frac{\xi\left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j}\right)}{\sum_{j=1}^{m} \xi(X_{i_j})}. \tag{3.4}$$

Zde rovnou poznamenejme, že pokud je ξ aditivní, podmínka je zjevně splněna.

Lemma 10. *Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $b,c > 0$. Potom $a < b$ právě tehdy, když*

$$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}.$$

Ukažme nyní s pomocí protipříkladu, že proporcionální alokační pravidlo obecně nesplňuje podmínku „no undercut“. Uvažujme $X_n \equiv \alpha > 0$ a míru rizika ξ, která je subaditivní a translačně invariantní. Předpokládejme, že nastal případ, kdy pro $a = \xi\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)$, $b = \sum_{i=1}^{n-1} \xi(X_i)$ a $c = \alpha$ jsou splněny podmínky lemmatu 10. Pak získáme

$$\frac{\xi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} \xi(X_i)} = \frac{\xi\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \alpha\right)}{\sum_{i=1}^{n-1} \xi(X_i) + \alpha} = \frac{\xi\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + \alpha}{\sum_{i=1}^{n-1} \xi(X_i) + \alpha} > \frac{\xi\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)}{\sum_{i=1}^{n-1} \xi(X_i)},$$

tedy v případě volby $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ jako $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $\ldots, i_m = n-1$, platí

$$\frac{\xi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} \xi(X_i)} > \frac{\xi\left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j}\right)}{\sum_{j=1}^{m} \xi(X_{i_j})},$$

podmínka (3.4) je tedy porušena. Je důležité zmínit, že podmínka subaditivity míry ξ zaručuje pouze to, že $a = \xi\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \xi(X_i) = b$. Pokud nastane případ $a < b$, což podmínka subaditivity ξ nezakazuje, podmínka „no undercut“ bude porušena. Aby porušena nebyla, museli bychom vyžadovat aditivitu míry ξ.

Další zdůvodnění, proč proporcionální alokační metoda nesplňuje podmínku „no undercut“, lze nalézt v [8]. Tam se ovšem užívá kvantilové funkce, o které je známo, že není subaditivní.

3.1.2 Podmínka symetrie

Ověřme podmínku symetrie. Užijeme zde symboly zavedené ve značení 2. Zvolme rizika i, j, $i \neq j$. Dále zvolme nějakou $M = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ splňující $i, j \in M$. Potom

$$K_i^M = \frac{K^M}{\sum_{\ell \in M} \xi(X_\ell)} \xi(X_i),$$
$$K_j^M = \frac{K^M}{\sum_{\ell \in M} \xi(X_\ell)} \xi(X_j).$$

Podmínka $K_i^M = K_j^M$ implikuje $\xi(X_i) = \xi(X_j)$. Odtud vzhledem k (3.1) už přímo plyne, že $K_i = K_j$. Podmínka symetrie je tedy splněna.

3.1.3 Podmínka bezrizikové alokace

Pro účely posouzení podmínky bezrizikové alokace uvažujme, že riziko $X_n \equiv \alpha \in \mathbb{R}$. Pak alokaci určenou tomuto riziku spočteme jako

$$K_n = \gamma\xi(X_n) \neq \alpha,$$

protože γ nezávisí pouze na X_n, ale také na $X_1, \ldots, X_{n-1}$, takže rovnost obecně neplatí. Později zjistíme, že podmínka bezrizikové alokace není splněna ani u pravidla založeného na projekci. Tam tento nedostatek bude možné napravit pomocí modifikace popsané v části 1.2.2 této práce. Zmíněná modifikace by zde však nenapravila nesplnění podmínky „no undercut“.

3.2 Podmínky koherence u pravidla založeného na projekci

Nyní ověřme podmínky koherence v případě alokačního pravidla založeného na projekci do nadroviny. V takové situaci, kdy od užité míry rizika ξ vyžadujeme, aby splňovala podmínky subaditivity a translační invariance. Podmínku plné alokace ověřovat nebudeme, protože je jasně splněna už z předpisu pro jednotlivé alokace. Uvidíme, že pravidlo splňuje všechny podmínky kromě podmínky bezrizikové alokace. To lze napravit pomocí modifikace uvedené v části 1.2.2 této práce. U modifikovaného pravidla poté ověříme, zda splňuje podmínku symetrie.

3.2.1 Podmínka „no undercut“

Dále ověřme podmínku „no undercut“ v případě alokací pomocí projekce (3.3). Nechť $K_1, \ldots, K_n$ jsou alokace pravidlem určené rizikům $X_1, \ldots, X_n$ a $(i_1, \ldots, i_n)$ je nějaká permutace $(1, \ldots, n)$. Dále nechť $1 \leq m \leq n$. Ověřme, zda platí

$$\sum_{j=1}^{m} K_{i_j} \leq \xi\left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j}\right). \tag{3.5}$$

Levou stranu lze rozepsat jako

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} K_{i_j} &= \sum_{j=1}^{m}\left(\xi(X_{i_j}) + \frac{1}{n}\left(\xi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\xi(X_i)\right)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\xi(X_{i_j}) + \frac{m}{n}\left(\xi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\xi(X_i)\right).\end{aligned}$$

Dosazením posledního vyjádření za levou stranu nerovnosti (3.5) a drobnou úpravou získáme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{1}{n}\left(\xi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\xi(X_i)\right) \leq \frac{1}{m}\left(\xi\left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j}\right) - \sum_{j=1}^{m}\xi(X_{i_j})\right). \tag{3.6}$$

Označme

$$V_k^{i_1,\dots,i_n} = \xi\left(\sum_{j=1}^{k} X_{i_j}\right) - \sum_{j=1}^{k} \xi(X_{i_j}), \quad k \in \{1,\dots,n\}.$$

Potom

$$\begin{aligned} V_{k+1}^{i_1,\dots,i_n} &= \xi\left(\sum_{j=1}^{k} X_{i_j} + X_{i_{k+1}}\right) - \sum_{j=1}^{k+1} \xi(X_{i_j}) \\ &\le \xi\left(\sum_{j=1}^{k} X_{i_j}\right) + \xi(X_{i_{k+1}}) - \sum_{j=1}^{k} \xi(X_{i_j}) - \xi(X_{i_{k+1}}) = V_k^{i_1,\dots,i_n}, \end{aligned}$$

tedy $V_{k+1}^{i_1,\dots,i_n} \le V_k^{i_1,\dots,i_n}$ pro všechna $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Tedy také $V_n^{i_1,\dots,i_n} \le V_k^{i_1,\dots,i_n}$ pro všechna $k \in \{1,\dots,n\}$. Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left(\xi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \xi(X_i)\right) &= \frac{1}{n} V_n^{i_1,\dots,i_n} \le \frac{1}{m} V_m^{i_1,\dots,i_n} \\ &= \frac{1}{m}\left(\xi\left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j}\right) - \sum_{j=1}^{m} \xi(X_{i_j})\right), \end{aligned}$$

tedy nerovnost (3.6) platí, a proto platí i (3.5).

3.2.2 Podmínka symetrie

Ověřme podmínku symetrie. Užijeme zde symboly zavedené ve značení 2. Zvolme rizika i, j, $i \neq j$. Dále zvolme nějakou $M = \{i_1,\dots,i_m\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ splňující $i, j \in M$. Potom

$$\begin{aligned} K_i^M &= \xi(X_i) + \frac{1}{m}\left(K^M - \sum_{\ell \in M} \xi(X_\ell)\right), \\ K_j^M &= \xi(X_j) + \frac{1}{m}\left(K^M - \sum_{\ell \in M} \xi(X_\ell)\right). \end{aligned}$$

Podmínka $K_i^M = K_j^M$ implikuje $\xi(X_i) = \xi(X_j)$. Odtud vzhledem k (3.3) už přímo plyne, že $K_i = K_j$. Podmínka symetrie je tedy splněna.

3.2.3 Podmínka bezrizikové alokace

Opět uvažujme, že $X_n \equiv \alpha \in \mathbb{R}$. Podmínka bezrizikové alokace splněna není, protože obecně

$$K_n = \xi(X_n) + \frac{1}{n}\left(K - \sum_{i=1}^{n} \xi(X_i)\right) \neq \alpha,$$

druhý sčítanec totiž závisí kromě X_n také na $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Aby pravidlo splňovalo podmínku bezrizikové alokace, můžeme ho modifikovat postupem popsaným v části 1.2.2 této práce. U modifikovaného pravidla není obecně splněna podmínka symetrie.

3.2.4 Podmínka symetrie po modifikaci

Předpokládejme, že $X_n \equiv \alpha \in \mathbb{R}$, což byl důvod k modifikaci pravidla. Ostatní rizika konstantní nejsou. Nyní zvolme $\{i,j\} \subset \{1,\ldots,n\}$ libovolně a nechť $i \neq n$. Předpokládejme, že $K_i^M = K_j^M$ pro každou $M \subseteq \{1,\ldots,n\}$, $\{i,j\} \subseteq M$. Nyní rozlišme dva případy. Zaprvé případ, kdy $j \neq n$. Pak je tato dvojice symetrická, tedy $K_i = K_j$, protože původní pravidlo podmínku symetrie splňuje. Zadruhé případ, kdy $j = n$. Ukažme, že v tomto případě dojdeme ke sporu. Zvolme například $M_1 = \{i,n\}$. Potom

$$\alpha = K_n^{M_1} = K_i^{M_1} = K^{M_1} - \alpha = \xi(X_i + X_n) - \alpha = \xi(X_i) + \alpha - \alpha = \xi(X_i),$$

tedy $\xi(X_i) = \alpha$. Zvolíme-li nějakou $M_2 \subseteq \{1,\ldots,n\}$, $\{i,n\} \subseteq M_2$, potom

$$\alpha = K_i^{M_2} = \xi(X_i) + \frac{1}{|M_2| - 1}\left(K^{M_2} - \alpha - \sum_{\ell \in M_2 \setminus \{n\}} \xi(X_\ell)\right),$$

tedy

$$\frac{1}{|M_2| - 1}\left(K^{M_2} - \alpha - \sum_{\ell \in M_2 \setminus \{n\}} \xi(X_\ell)\right) = 0$$

bez ohledu na volbu M_2, což obecně neplatí. Tím jsme ověřili, že pro všechny $\{i,j\} \subset \{1,\ldots,n\}$, které splňují $K_i^M = K_j^M$ pro každou $M \subseteq \{1,\ldots,n\}$, platí $K_i = K_j$. Podmínka symetrie je tedy splněna.

3.3 Případ s dvěma mírami rizika

Zabývejme se nyní případem, kdy míra rizika užitá k určení rizikového kapitálu ρ je jiná než míra rizika použitá v alokačním pravidle, kterou jsme dosud označovali jako ξ. Platí tedy

$$K^M = \rho\left(\sum_{\ell \in M} X_\ell\right), \quad \emptyset \neq M \subseteq \{1,\ldots,n\},$$
$$K_i^M = \xi(X_i) + \frac{1}{|M|}\left(K^M - \sum_{j \in M} \xi(X_j)\right), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Předpokládejme navíc, že ρ je subaditivní a translačně invariantní. Zabývejme se nyní opět jednotlivými podmínkami koherence a tím, jak se změní jejich platnost. Předem poznamenejme, že uvažování dvou různých měr rizika, jak je tomu v této sekci, nemá vliv na platnost podmínky plné alokace. Ukážeme, že pokud u modifikovaného alokačního pravidla založeného na projekci do nadroviny zvolíme ρ tak, aby $\rho \leq \xi$, budou podmínky koherence splněny.

3.3.1 Podmínka „no undercut“

Nechť $(i_1, \dots, i_n)$ je nějaká permutace $(1, \dots, n)$ a nechť $1 \leq m \leq n$. Podmínka „no undercut“ má tvar

$$\sum_{j=1}^{m} K_{i_j} \leq \rho \left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j} \right), \tag{3.7}$$

kde opět

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} K_{i_j} &= \sum_{j=1}^{m} \left(\xi(X_{i_j}) + \frac{1}{n} \left(\rho \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \xi(X_i) \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \xi(X_{i_j}) + \frac{m}{n} \left(\rho \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \xi(X_i) \right). \end{aligned}$$

Dosazením posledního vyjádření za levou stranu (3.7) a drobnou úpravou dostáváme ekvivalentní podmínku

$$\frac{1}{n} \left(\rho \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \xi(X_i) \right) \leq \frac{1}{m} \left(\rho \left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j} \right) - \sum_{j=1}^{m} \xi(X_{i_j}) \right). \tag{3.8}$$

Označme

$$V_k^{i_1,\dots,i_n} = \rho \left(\sum_{j=1}^{k} X_{i_j} \right) - \sum_{j=1}^{k} \xi(X_{i_j}).$$

Potom

$$\begin{aligned} V_{k+1}^{i_1,\dots,i_n} &= \rho \left(\sum_{j=1}^{k} X_{i_j} + X_{i_{k+1}} \right) - \sum_{j=1}^{k+1} \xi(X_{i_j}) \\ &\leq \rho \left(\sum_{j=1}^{k} X_{i_j} \right) + \rho(X_{i_{k+1}}) - \sum_{j=1}^{k} \xi(X_{i_j}) - \xi(X_{i_{k+1}}) \\ &= V_k^{i_1,\dots,i_n} + \rho(X_{i_{k+1}}) - \xi(X_{i_{k+1}}), \quad k \in \{1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Postačující podmínkou pro platnost (3.8) je podmínka $\xi \geq \rho$, protože potom dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\rho \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \xi(X_i) \right) &= \frac{1}{n} V_n^{i_1,\dots,i_n} \leq \frac{1}{m} \left(V_m^{i_1,\dots,i_n} + \sum_{j=m+1}^{n} \big(\rho(X_{i_j}) - \xi(X_{i_j}) \big) \right) \\ &\leq \frac{1}{m} V_m^{i_1,\dots,i_n} = \frac{1}{m} \left(\rho \left(\sum_{j=1}^{m} X_{i_j} \right) - \sum_{j=1}^{m} \xi(X_{i_j}) \right). \end{aligned}$$

3.3.2 Podmínka symetrie

Nejprve ověříme, že je splněna podmínka symetrie v případě, kdy jsou použity dvě míry rizika, protože to využijeme dále. Při pohledu na důkaz v části 3.2.2 je ale zřejmé, že toto platí. Dále ověřme, zda podmínka symetrie platí i pro modifikované pravidlo při použití dvou měr rizika. Předpokládejme opět, že $X_n \equiv \alpha \in \mathbb{R}$, což byl důvod k modifikaci pravidla. Ostatní rizika konstantní nejsou. Nyní zvolme $\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}$ libovolně a nechť $i \neq n$. Předpokládejme, že $K_i^M = K_j^M$ pro každou $M \subseteq \{1,\dots,n\}$, $\{i,j\} \subseteq M$. Nyní rozlišme dva případy. Zaprvé případ, kdy $j \neq n$. Pak je tato dvojice symetrická, tedy $K_i = K_j$, protože původní pravidlo podmínku symetrie splňuje. Zadruhé případ, kdy $j = n$. Ukažme, že v tomto případě dojdeme ke sporu. Zvolme například $M_1 = \{i,n\}$. Potom

$$\alpha = K_n^{M_1} = K_i^{M_1} = K^{M_1} - \alpha = \rho(X_i + X_n) - \alpha = \rho(X_i) + \alpha - \alpha = \rho(X_i),$$

tedy $\rho(X_i) = \alpha$. Zvolíme-li nějakou $M_2 \subseteq \{1,\dots,n\}$, $\{i,n\} \subseteq M_2$, potom

$$\begin{aligned} \alpha = K_i^{M_2} &= \xi(X_i) + \frac{1}{|M_2|-1}\left(K^{M_2} - \alpha - \sum_{\ell \in M_2 \setminus \{n\}} \xi(X_\ell)\right) \\ &= \xi(X_i) + \frac{1}{|M_2|-1}\left(\rho\left(\sum_{\ell \in M_2 \setminus \{n\}} X_\ell\right) - \sum_{\ell \in M_2 \setminus \{n\}} \xi(X_\ell)\right), \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{1}{|M_2|-1}\left(\rho\left(\sum_{\ell \in M_2 \setminus \{n\}} X_\ell\right) - \sum_{\ell \in M_2 \setminus \{n\}} \xi(X_\ell)\right)$$

musí být konstantní bez ohledu na volbu M_2, což obecně neplatí. Tím jsme ověřili, že pro všechny $\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}$, které splňují $K_i^M = K_j^M$ pro každou $M \subseteq \{1,\dots,n\}$, platí $K_i = K_j$. Podmínka symetrie je tedy splněna.

3.4 Volba míry rizika

Nyní porovnejme proporcionální alokační pravidlo a alokační pravidlo založené na projekci do nadroviny z jiného pohledu. Odlišné způsoby řešení problému splnění podmínky plné alokace u těchto pravidel mají různé následky při určitých volbách míry rizika ξ použité v těchto pravidlech. Protože první z těchto pravidel plní podmínku plné alokace pomocí násobení vhodnou konstantou a druhé pomocí přičtení vhodné konstanty, může být při alokaci velké částky K nevhodné použít míru rizika, při níž jednotlivé hodnoty $\xi(X_1),\dots,\xi(X_n)$ příliš neliší. Pro ilustraci zvolme $\xi(\cdot) = \operatorname{corr}(\cdot, S)$. Označme alokace

$$K_i = \operatorname{corr}(X_i, S) + \frac{1}{n}\left(K - \sum_{j=1}^{n} \operatorname{corr}(X_j, S)\right), \quad i = 1,\dots,n.$$

Odtud ihned vidíme, že

$$K_i \in \left[\frac{1}{n}\left(K - \sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{corr}(X_\ell,S)\right) - 1, \frac{1}{n}\left(K - \sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{corr}(X_\ell,S)\right) + 1\right], \quad i = 1,\dots,n.$$

Tento interval závisí na hodnotách $X_1, \ldots, X_n$. Dále platí

$$K_i \in \left[\frac{K}{n} - 2, \frac{K}{n} + 2\right], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Vidíme tedy, že pro velká K budou rozdíly mezi jednotlivými alokacemi zanedbatelné. Následuje odvození posledního vztahu.

Tvrzení 11. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou reálné náhodné veličiny, $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Označme*

$$K_i = corr(X_i, S) + \frac{1}{n}\left(K - \sum_{j=1}^n corr(X_j, S)\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Potom

$$K_i \in \left[\frac{K}{n} - 2, \frac{K}{n} + 2\right].$$

Důkaz. Pro K_i platí

$$K_i = \mathrm{corr}(X_i, S) + C, \quad i = 1, \ldots, n,$$

kde $C = \frac{1}{n}\left(K - \sum_{j=1}^n \mathrm{corr}(X_j, S)\right)$. Dále $\sum_{i=1}^n \mathrm{corr}(X_i, S) \in [-n, n]$, tedy $C \in [\frac{K}{n} - 1, \frac{K}{n} + 1]$. Navíc $\mathrm{corr}(X_i, S) \in [-1, 1]$, $i = 1, \ldots, n$, tudíž $K_i = \mathrm{corr}(X_i, S) + C \in \left[\frac{K}{n} - 2, \frac{K}{n} + 2\right]$, $i = 1, \ldots, n$.

❑

3.5 Proporcionální pravidlo a projekce jako speciální případy

Projekce do nadroviny $\{(x_1, \ldots, x_n)^T : x_1 + \cdots + x_n = K\}$ je posunutí ve směru vektoru $\mathbf{1_n}$. Zvolíme-li obecně jako směr vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ splňující $\sum_{i=1}^n u_j \neq 0$ a jako výsledné alokace nejbližší bod uvedené nadroviny ve směru $\boldsymbol{u}$, mají alokace tvar

$$K_i = \xi(X_i) + u_i \frac{K - \sum_{j=1}^n \xi(X_j)}{\sum_{j=1}^n u_j}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Při volbě $\boldsymbol{v} = \left(\frac{u_1}{\sum_{j=1}^n u_j}, \ldots, \frac{u_n}{\sum_{j=1}^n u_j}\right)^T$ získáme jednodušší tvar

$$K_i = \xi(X_i) + v_i \left(K - \sum_{j=1}^n \xi(X_j)\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pravidlo tohoto typu není obecně koherentní, protože při volbě $v_i = \frac{\xi(X_i)}{\sum_{j=1}^n \xi(X_j)}$ se z něj stává proporcionální alokační pravidlo, o jehož koherenci jsme už pojednávali. Jak proporcionální pravidlo, tak pravidlo získané pomocí projekce, získáváme tedy speciálními volbami vektoru $\boldsymbol{v}$.

Kapitola 4

Ilustrace

Alokační pravidla uvedená v této práci lze prakticky otestovat a použít s pomocí balíčku *allocation* vytvořeného k této práci. Informace potřebné k jeho použití jsou uvedeny na konci této kapitoly. V této kapitole použijeme zmíněný balíček k ilustraci některých alokačních pravidel, kterými se tato práce zabývá. Protože data o konkrétních ztrátách jednotlivých částí nějaké firmy by se sháněla velmi těžko, jsou zde použita data vygenerovaná počítačem. Kód použitý pro veškeré výpočty v této části práce je k práci přiložený a také ho lze najít na stránce balíčku, která je uvedena na konci kapitoly. Nejprve se zaměříme na kvantilové alokační pravidlo, poté spočteme alokace v případě několika dalších pravidel.

Popišme nyní data, která budou použita v této kapitole k výpočtu alokací. Uvažujme zde, že určitá firma sestává ze tří částí, pro každou z nichž je naším cílem alokovat kapitál určený k pokrytí rizik spojených s činnostmi těchto částí. K dispozici máme data s konkrétními hodnotami těchto ztrát z dosavadní činnosti firmy. V praxi bychom nejspíš zvolili nějaké parametrické rozdělení, kterým bychom se rozhodli tyto ztráty modelovat a z dat bychom odhadli parametry tohoto rozdělení. Poté už bychom mohli přejít k výpočtu jednotlivých alokací použitím některé z alokačních metod. Další možností, v případě, že bychom měli dostatek dat, by mohlo být odhadnout z dat hodnoty potřebné k výpočtu daných alokací, například odhadnout příslušné kvantily v případě haircut alokací. V této kapitole u několika alokačních metod vyzkoušíme oba tyto přístupy. Pro jednoduchost budeme však při prvním postupu znát skutečné hodnoty parametrů rozdělení, ze kterého data pocházejí.

4.1 Modifikace kvantilového pravidla

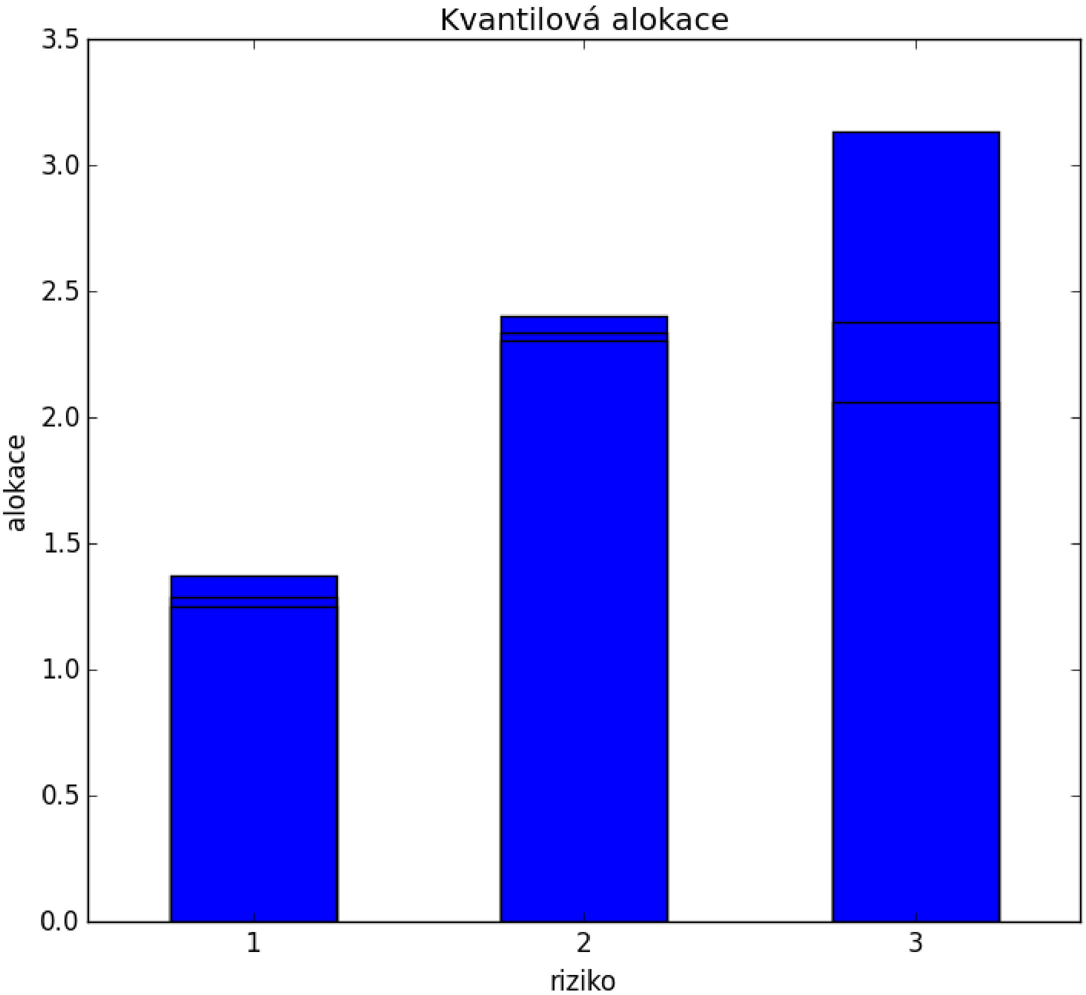
Uvažujme celkové riziko skládající se z tří dílčích rizik. Mějme údaje o konkrétních hodnotách těchto dílčích rizik za posledních 20 období (například 20 měsíčních pozorování). Pro potřeby následujících výpočtů bylo pro každé z těchto rizik vygenerováno 20 hodnot z lognormálního rozdělení, jehož parametry jsou postupně $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$ a $\sigma_3^2 = 4$. Kapitál na pokrytí celkového rizika zvolíme $K = 6$. Pro jednoduchost jsou tato tři rizika nezávislá.

Porovnejme mezi sebou návrh použít $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ místo jediného čísla α uvedený v části 2.4 této práce a klasickou volbu s jediným číslem α. Nechť hodnota alokovaná pro celkové riziko je 6, jednotlivé alokace jsou dány jako

$$K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(6)), \quad i \in \{1,2,3\},$$

kde α je určeno rovnicí $F_{S^c}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(6)) = 6$, dle věty 9.

V následujícím grafu jsou v každém sloupci dvě horizontální čáry. Výška sloupce je $F_{X_i}^{-1+}(F_{S^c}(6))$ postupně pro každé z rizik X_1, X_2, X_3. Nižší horizontální čára je vždy $F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(6))$ a vyšší horizontální čára je hodnota alokace K_i. V tomto konkrétním případě vyšlo $\alpha = 0{,}71$.



Obrázek 4.1: Kvantilová alokace

	$F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(6))$:	K_i:	d_i:	$F_{X_i}^{-1+}(F_{S^c}(6)) - K_i$:
0	1,25	1.29	0,12	0,04
1	2,31	2.34	0,09	0,03
2	2,06	2.38	1,07	0,31

Tabulka 4.1: Kvantilová alokace

Ve sloupcích tabulky 4.1 jsou uvedeny postupně hodnoty $F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(6))$, $F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(6))$, $F_{X_i}^{-1+}(F_{S^c}(6)) - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(6))$ a $F_{X_i}^{-1(\alpha)}(F_{S^c}(6)) - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(6))$ pro jednotlivá rizika. Z obrázku 4.1 je vidět, že pro každé i je K_i kvantil $F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(6))$ navýšený o $(1-\alpha)d_i$, kde navýšení je největší u třetího sloupce.

Dále spočítejme alokace s použitím $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ místo α, konkrétně pomocí postupu navrženého v části 2.4.1 tohoto textu. Alokace jsou pak dány jako

$$K_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_i)}(F_{S^c}(6)), \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Stejně jako pro předchozí metodu následuje graf i tabulka, graf je podobný, ale u prvních dvou rizik (první a druhý sloupec) je vidět pouze jedna horizontální čára. Jedná se o spodní čáru, horní čára splývá s vrcholem sloupce. Je to proto, že d_1 a d_2 byly dostatečně malé, a tedy

$$F_{X_i}^{-1(\alpha_i)}(F_{S^c}(6)) = F_{X_i}^{-1+}(F_{S^c}(6)), \quad i \in \{1,2\}.$$

	$F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(6))$:	K_i:	d_i:	$F_{X_i}^{-1+}(F_{S^c}(6)) - K_i$:
0	1,25	1,37	0,12	0,12
1	2,31	2,4	0,09	0,09
2	2,06	2,23	1,07	0,16

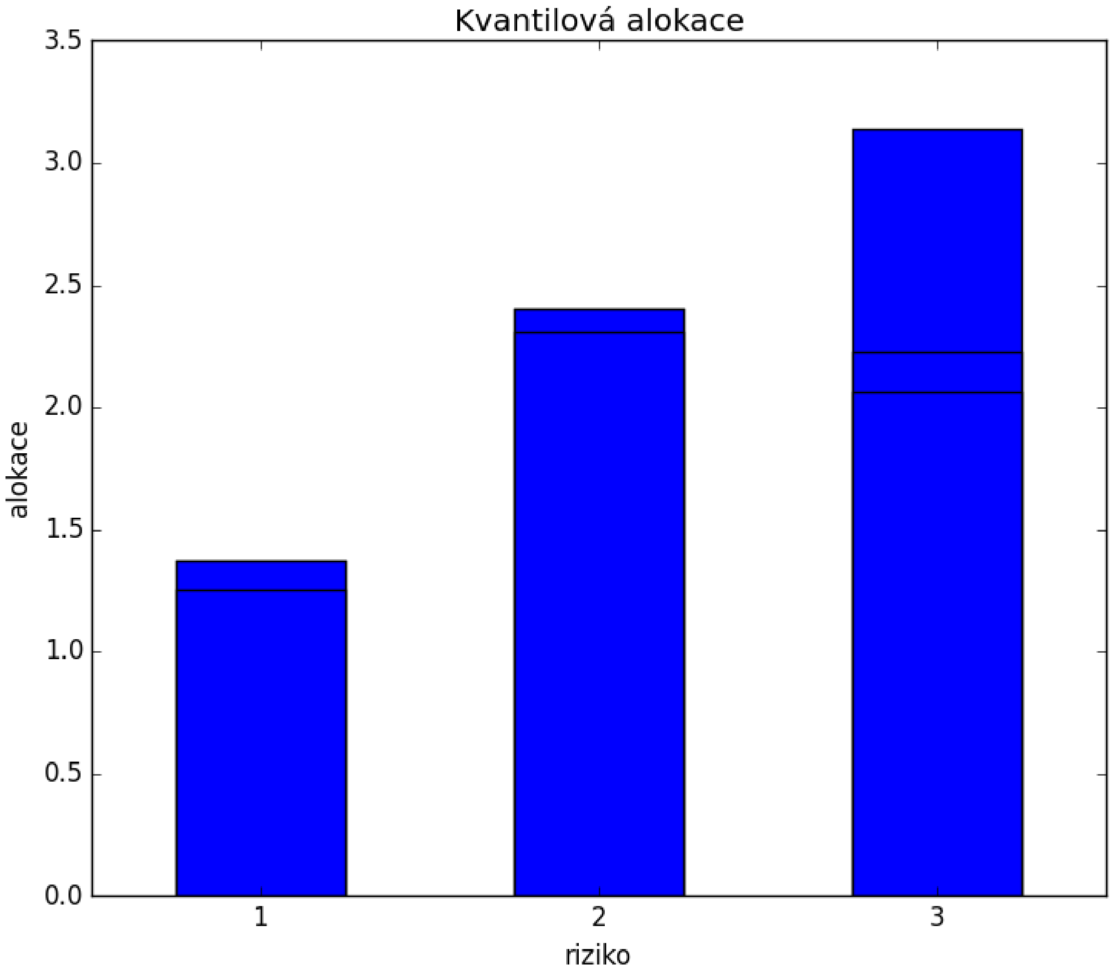
Tabulka 4.2: Kvantilová alokace s více alfami

4.2 Ilustrace alokačních pravidel

Vraťme se nyní ke kvadratickému alokačnímu pravidlu. Zvolíme-li v něm jako váhový faktor veličinu (2.7) a navíc váhy (2.8), získáme alokační pravidlo Conditional Tail Expectation (1.2). Pokud navíc platí $K = \mathsf{E}[S|S > F_S^{-1}(p)]$, získáme tvar

$$K_i = \mathsf{E}[X_i|S > F_S^{-1}(p)], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

U tohoto pravidla jsou pro některá rozdělení dílčích rizik známy vzorce pro výpočet alokací. V [3] jsou uvedeny vzorce pro výpočet alokací v případě, kdy rizika $X_1, \ldots, X_n$ mají mnohorozměrné normální rozdělení. V [9] jsou výsledky [3] rozšířeny na případ, kdy mají rizika $X_1, \ldots, X_n$ mnohorozměrné eliptické



Obrázek 4.2: Kvantilová alokace s různými hodnotami α_i

rozdělení. Obecně však není možné získat vzorec v uzavřeném tvaru pro libovolné rozdělení, v [10] jsou uvedeny aproximace pro dílčí alokace v případě mnohorozměrného lognormálního rozdělení rizik. Tyto aproximace jsou odvozeny na základě komonotonie. V [11] jsou uvedeny vzorce pro hodnoty alokací v případě, kdy mají rizika mnohorozměrné Paretovo rozdělení. Uveďme zde dle [10] vzorce v případě mnohorozměrného normálního rozdělení rizik. Nechť $(X_1, \ldots, X_n)^T \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ a dále $S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$, $\sigma_S > 0$. Pak

$$\mathsf{E}\left[X_i | S > F_S^{-1}(p)\right] = \mu_k + \frac{\sigma_{k,S}}{\sigma_S} \frac{\Phi'(\Phi^{-1}(p))}{1-p}, \quad p \in (0,1), \tag{4.2}$$

kde $\sigma_{k,S} = \sum_{j=1}^n \sigma_{kj}$.

Mějme opět firmu skládající se ze tří částí, pro něž chceme spočítat alokace. Předpokládejme, že tato dílčí rizika X_1, X_2, X_3 splňují

$$(X_1, X_2, X_3)^T \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde $\boldsymbol{\mu} = (1{,}2{,}3)^T$. Dále $var(X_i) = 1$, $i = 1{,}2{,}3$, $\sigma_{12} = 0{,}2$, $\sigma_{13} = 0{,}5$ a $\sigma_{23} = 0{,}1$.

Nyní pomocí tří různých alokačních pravidel spočteme alokace těmto dílčím rizikům. Na základě znalosti rozdělení rizik spočteme přesné hodnoty alokací. Dále spočteme přibližné hodnoty alokací na základě dat, která máme k dispozici, což je v našem případě počítačem vygenerovaný náhodný výběr z uvedeného rozdělení o 1000 pozorováních. Tyto alokace vždy navzájem porovnáme pomocí podílu. Na základě těchto podílů si můžeme udělat představu o tom, jak moc se liší aproximace od přesných hodnot. Nejvíce se odhadnuté alokace liší o 7,8 % v případě kovariančního pravidla.

4.2.1 Conditional Tail Expectation alokace

Při odhadu alokací jsme uvažovali pouze ta pozorování, u kterých součet dílčích hodnot $S = X_1+X_2+X_3$ přesáhl odhad 95% kvantilu S. Z této podmnožiny datového souboru jsme následně odhadli dílčí alokace (1.2) pomocí průměrů. Pro výpočet přesných alokací vycházíme ze vztahu (4.2).

	riziko 1	riziko 2	riziko 3
přesné alokace	2,408	2.971	4.149
odhadnuté alokace	2,342	3,092	4,093
odhadnuté/přesné	0,973	1,041	0,987

Tabulka 4.3: Alokace kapitálu užitím CTE pravidla

4.2.2 Haircut alokace

Částku K určenou k pokrytí celkového rizika S jsme určili jako 95% kvantil náhodné veličiny S, jejíž rozdělení známe. Při odhadu alokací jsme z dat spočetli výběrové 95% kvantily. Při výpočtu přesných alokací jsme spočetli kvantily dílčích rizik, jejichž rozdělení známe.

	riziko 1	riziko 2	riziko 3
přesné alokace	2,305	3,176	4,047
odhadnuté alokace	2,240	3,256	4,032
odhadnuté/přesné	0,972	1,025	0,996

Tabulka 4.4: Alokace kapitálu užitím haircut pravidla

4.2.3 Alokace pomocí kovariančního pravidla

Částku K určenou k pokrytí celkového rizika S jsme určili jako 95% kvantil náhodné veličiny S, jejíž rozdělení známe. Při odhadu alokací jsme z dat odhadli potřebné kovariance. Při výpočtu přesných alokací jsme při výpočtu kovariancí využili znalosti kovarianční matice rozdělení ztrát.

	riziko 1	riziko 2	riziko 3
přesné alokace	3,521	2,693	3,314
odhadnuté alokace	3,433	2,902	3,193
odhadnuté/přesné	0,975	1,078	0,964

Tabulka 4.5: Alokace kapitálu užitím kovariančního pravidla

4.2.4 Výběr vhodného pravidla

Porovnáme-li navzájem alokace získané jednotlivými třemi alokačními pravidly, zjistíme, že se liší. Tabulka ukazuje podíly vypočtených hodnot pro jednotlivá rizika. Chceme-li se rozhodnout, které pravidlo použít, vybereme pravidlo, které se nám zdá nejvhodnější z pohledu jeho teoretických vlastností.

	riziko 1	riziko 2	riziko 3
haircut/CTE	0,875	0,977	0,892
kovariancni/CTE	1,336	0,828	0,730
kovariancni/haircut	1,528	0,848	0,819

Tabulka 4.6: Porovnání jednotlivých alokačních pravidel

Kovarianční pravidlo se od ostatních dvou více odlišuje. Narozdíl od CTE pravidla a haircut pravidla bere v potaz korelační strukturu rizik.

4.3 Instalace balíčku

Uveďme zde nakonec, jak lze nainstalovat a používat balíček *allocation*, který obsahuje implementace některých alokačních pravidel. K jeho použití je potřeba mít nainstalovaný Python v některé z verzí 3.X. Vzhledem k možným problémům při instalaci některých knihoven pro Python lze doporučit například distribuci *Anaconda*. Tato distribuce obsahuje správce balíčků *pip* a příkazovou řádku, pomocí které lze program k alokaci kapitálu (balíček s názvem *allocation*) nainstalovat příkazem

```
pip install git+git://github.com/d-an/allocation
```

Mimo terminál lze program nainstalovat také po spuštění iPythonu příkazem

```
! pip install git+git://github.com/d-an/allocation
```

Program je závislý na balíčcích *numpy, scipy, matplotlib* a *pandas*, které jsou v distribuci *Anaconda* přítomny.

Po instalaci lze balíček importovat a použít jeho třídy k výpočtům. Balíček obsahuje třídy odpovídající alokačním pravidlům, například QuantileRule, HaircutRule odpovídají kvantilovému a haircut pravidlu. Použití spočívá ve dvou krocích. V prvním kroku pomocí třídy Losses vytvoříme objekt reprezentující jednotlivá rizika. V druhém kroku tento objekt předložíme zvolenému pravidlu a spočteme alokace. Konkrétní postup použití i s příklady lze nalézt na stránce

`https://github.com/d-an/allocation`

Závěr

První kapitola této práce se zabývala uvedením měr rizika a alokačních metod v kontextu problému alokace kapitálu. Pojmy uvedené v této kapitole tvoří základ nutný pro zbytek práce. Druhá kapitola uvedla problém alokace kapitálu jako optimalizační úlohu. Byla zde shrnuta některá tvrzení o komonotonii, která byla užita při odvození kvantilové alokační metody. Bylo zde navrhnuto jednoduché zobecnění tohoto pravidla, které bylo ilustrováno ve čtvrté kapitole. Třetí kapitola se zabývala odvozením v této práci navrženého alokačního pravidla založeného na projekci do nadroviny, což je jednoduché alokační pravidlo podobné proporcionálnímu alokačnímu pravidlu. Tato dvě pravidla byla porovnána z pohledu vlastností koherence. Za uvažovaných podmínek bylo ukázáno, že navržené pravidlo tyto podmínky splňuje, zatímco proporcionální pravidlo nikoliv. Tato kapitola posloužila především jako detailní rozbor jednotlivých podmínek koherence alokačních pravidel. Poslední kapitola za pomoci generovaných dat ilustrovala některé metody popisované ve zbytku práce.

Literatura

[1] DHAENE, J. - TSANAKAS, A. - VALDEZ, E. A. - VANDUFFEL, S., Optimal Capital Allocation Principles, *The Journal of Risk and Insurance*, 2012, vol. 79, no. 1, s. 1-28. ISSN 1539-6975.

[2] DHAENE, J. - DENUIT, M. - GOOVAERTS, M. J. - KAAS, R. - VYNCKE, D., The Concept of Comonotonocity in Actuarial Science and Finance: Theory, *Insurance: Mathematics & Economics*, 2002, vol. 31, s. 3-33. ISSN 0167-6687.

[3] PANJER, H. H., Measurement of Risk, Solvency Requirements and Allocation of Capital within Financial Conglomerates, *Research Report 01-15, University of Waterloo*, 2002.

[4] ARTZNER, P. - DELBAEN, F. - EBER, J.M. - HEATH, D., Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, vol. 9, 1999, issue 3, s. 203-228. ISSN 1467-9965.

[5] KIM, J. H. T. - HARDY, M. R., A capital allocation based on a solvency exchange option, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 44, 2009, issue 3, s. 357–366. ISSN 0167-6687.

[6] DENAULT, M., Coherent Allocation of Risk Capital, *Journal of Risk*, 2001, vol. 4, s. 1–34. ISSN 1465-1211.

[7] TASCHE, D., Expected Shortfall and Beyond, *Journal of Banking and Finance*, 2002, vol. 26, s. 1519-1533. ISSN 0378-4266.

[8] VALDEZ, E.A. - CHERNIH, A., Wang's Capital Allocation Formula for Elliptically Contoured Distribution, *Insurance: Mathematics & Economics*, 2003, vol. 33, s. 517-532. ISSN 0167-6687.

[9] LANDSMAN Z. - VALDEZ, E.A., Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions, *North American Actuarial Journal*, 2003, s. 55-71. ISSN 1092-0277.

[10] DHAENE, J. - HENRARD, L., - LANDSMAN, Z. - VANDENDORPE, A. - VANDUFFEL, S., Some Results on the CTE-based Capital Allocation Rule, *Insurance: Mathematics & Economics*, 2008, vol. 42, s. 855-863. ISSN 0167-6687.

[11] CHIRAGIEV, A., - LANDSMAN, Z., Multivariate Pareto Portfolios: TCE-based Capital Allocation and Divided Differences, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2007, vol. 4, s. 261-280. ISSN 0346-1238.

Seznam obrázků

Seznam tabulek