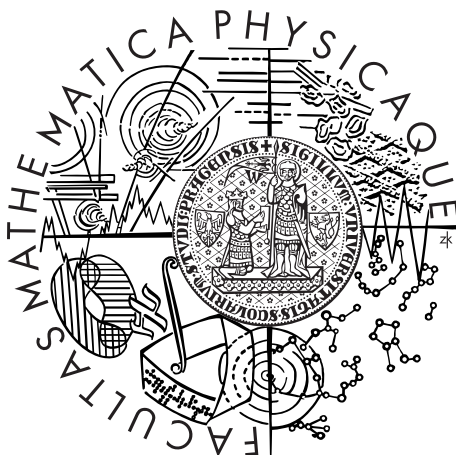


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Martin Töpfer

Průnikové reprezentace grafů

Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Vít Jelínek, Ph.D.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Obecná informatika

Praha 2015

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu RNDr. Vítu Jelínkovi, Ph.D. za mnohé konzultace, spoustu užitečných rad a hlavně za ochotu se se mnou sejit téměř kdykoli.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Průnikové reprezentace grafů

Autor: Martin Töpfer

Katedra: Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Vít Jelínek, Ph.D., Informatický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Průnikový graf je graf, ve kterém mezi dvěma vrcholy vede hrana, právě když jim odpovídající objekty se protínají. Tato práce se zabývá průnikovými grafy L-útvary (tzv. L-grafy) a jejich speciálním případem, kdy konce všech L-útvary jsou na jedné přímce (tzv. vnějškovými L-grafy). Po přehledu, co platí o L-grafech, používáme podobné postupy na vnějškové L-grafy. Ukážeme, že intervalové grafy, tětiové grafy (circular graphs) a vnějškově rovinné grafy jsou vnějškové L-grafy. Poté charakterizujeme vnějškové L-grafy pomocí uspořádání vrcholů bez zakázaných vzorů.

Klíčová slova: Průnikové grafy, Bk-VPG grafy, L-grafy, rovinné grafy

Title: Intersection representations of graphs

Author: Martin Töpfer

Department: Computer Science Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Vít Jelínek, Ph.D., Computer Science Institute of Charles University

Abstract: We investigate intersection graphs of axis-aligned L-shapes (L-graphs) and their subclass, when all L-shapes have one of their endpoints on the same line - let us call this class outer-L-graphs. In the beginning we introduce some known facts about L-graphs. Then we show, that interval, circular and outerplanar graphs are subclasses of outer-L-graphs. We also characterise outer-L-graphs using ordering without forbidden patterns.

Keywords: Intersection graphs, Bk-VPG, L-graphs, L-shape, outer-string

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Základní pojmy	3
2	Vztah rovinných grafů a L-grafů	4
2.1	Rovinné 3-stromy	4
2.2	Line grafy rovinných grafů	5
2.3	Rovinné grafy a B_k -VPG grafy	7
3	Vnějškové L-grafy	10
3.1	Intervalové a tětiové grafy	11
3.2	Vnějškově rovinné grafy	12
3.3	Charakterizace tříd grafů pomocí zakázaných vzorů	15
3.4	Charakterizace vnějškových L-grafů pomocí zakázaných vzorů	17
4	Závěr	20
	Literatura	21

Kapitola 1

Úvod

Průnikový graf je graf, ve kterém můžeme každému vrcholu v přiřadit nějaký objekt O_v , tak, že se objekty O_v a O_u protínají právě tehdy, když v grafu existuje hrana uv . Už v roce 1966 ukázal Sinden [12], že každý rovinný graf lze reprezentovat jako průnikový graf křivek v rovině (tvz. string graf).

Postupem času se pro průnikovou reprezentaci rovinných grafů dařilo různými způsoby omezovat podobu křivek. Už roku 1984 publikoval Scheinerman domněnku, že rovinné grafy lze reprezentovat jako průnikové grafy úseček (tzv. SEG-grafy)[11]. Tuto domněnku se v roce 2009 podařilo dokázat Chalopinovi a Gonçalvesovi [5]. Dalším logickým pokračováním je snaha o omezení počtu směrů, které jsou potřeba. West vyslovil domněnku, že pro reprezentaci rovinných grafů stačí uvažovat úsečky čtyř různých směrů [13]. Tato domněnka ale zatím nebyla dokázána. Znamé jsou jen výsledky pro speciální třídy grafů. Bipartitní rovinné grafy lze reprezentovat s pomocí úseček pouze dvěma směrů (viz Hartman a kol. [10]) a rovinné grafy bez trojúhelníků lze reprezentovat za pomoci úseček tří různých směrů (viz Castro a kol. [4]).

Je jednoduché ukázat, že string grafy jsou ekvivalentní průnikovým grafům cest, které v místě ohybu změny směr z vodorovného na svislý a nebo obráceně (tzv. VPG grafy) [1]. Asinowski a kol. [1] dále zavedli třídu grafů B_k -VPG jako VPG grafy s maximálně k ohyby. V tom článku bylo ukázáno, že rovinné grafy jsou B_3 -VPG grafy. To dále vylepšili Chaplick a Ueckerdt [6], kteří ukázali, že rovinné grafy jsou dokonce B_2 -VPG grafy. Navíc pro rovinné grafy bez trojúhelníků se jim podařilo najít průnikovou reprezentaci jen pomocí L-útvárů¹ a Γ -útvárů². To znamená, že jde o speciální případ B_1 -VPG grafů. Formulovali také domněnku, že všechny rovinné grafy jsou B_1 -VPG grafy nebo dokonce L-grafy.

V této práci se zaměříme na grafy, pro které existuje průniková reprezentace pomocí L-útvárů (tvz. L-grafy). Nejprve předvedeme pro některé podtřídy rovinných grafů, jak je reprezentovat pomocí L-útvárů. Následně budeme zkoumat, jaké grafy lze reprezentovat pomocí L-útvárů, které navíc mají jeden konec na společné vodorovné přímce. Dostaneme tak třídu grafů vnějškových L-grafů, kterou se nám podaří ekvivalentně charakterizovat pomocí existence permutace vrcholů bez zakázaných vzorů.

Sekce 2 obsahuje ukázkou různých známých tvrzení o L-grafech. Některé důkazy

¹L-útvár vznikne sjednocením svislé a vodorovné úsečky pokud mají úsečky společný spodní resp. levý konec.

² Γ -útvarem rozumíme L-útvár zobrazený osovou symetrií podle vodorovné osy

(např. 2.3) jsou sepsány podrobněji a uceleněji než v původních článcích. Původní výsledky práce jsou v Sekci 3 o vnějškových L-grafech (kromě zmínky o tětivových grafech 3.1).

1.1 Základní pojmy

V práci budeme používat standardní značení, které je běžné v základních kurzech z diskrétní matematiky. Množinu vrcholů grafu G budeme značit $V(G)$, množinu hran $E(G)$ a úplný graf na n vrcholech K_n .

Představme si nyní některé pokročilejší pojmy, kterými se budeme v této práci zabývat:

Průnikový graf systému množin M je takový graf, že každé množině $m \in M$ odpovídá jeden vrchol v_m průnikového grafu a mezi vrcholy v_m a v_n vede hrana, právě když mají množiny m a n neprázdný průnik. V této práci se zabýváme jen případy, kdy množiny systému M jsou křivky v rovině.

Dotykový graf systému geometrických objektů M je takový graf, že každému objektu $m \in M$ odpovídá jeden vrchol v_m průnikového grafu. Mezi vrcholy v_m a v_n vede hrana, právě když se objekty m a n dotýkají. Navíc je zakázáno, aby se nějaké dva objekty z M protínaly nebo měly více než jeden společný bod.

String graf je průnikový graf křivek v rovině.

Outer-string graf je průnikový graf křivek v polorovině, které všechny mají jeden konec na přímce určující polorovinu.

B_k -VPG je třída grafů, které lze reprezentovat jako průnikové grafy cest v pravoúhlé mřížce, které obsahují nejvýše k ohybů.

L-útvár vznikne sjednocením horizontální a vertikální úsečky tak, že společný bod těchto úseček je spodním bodem vertikální úsečky a levým bodem horizontální úsečky.

L-graf je průnikový graf L-útvárů. Jde tedy o podtřídu B_1 -VPG.

L-reprezentace grafu G je jeho nakreslení jako průnikový graf L-útvárů v rovině. L-útvár vrcholu v budeme značit $L(v)$.

Kapitola 2

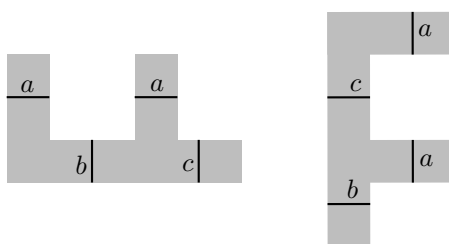
Vztah rovinných grafů a L-grafů

V této sekci postupně uvedeme různé třídy grafů, o kterých se ví, že se jedná o L-grafy.

2.1 Rovinné 3-stromy

Jako první ukážeme, že rovinné 3-stromy jsou L-grafy. Tuto větu dokázali ve svém článku Felsner, Knauer, Mertziós a Ueckerdt [8]. 3-strom je graf, který má stromovou šířku tři a je navíc hranově-maximální. Lepší představu o rovinných 3-stromech nám dává definice, která říká, že každý rovinný 3-strom můžeme dostat z rovinného nakreslení úplného grafu K_4 postupným přidáváním vrcholů do vnitřní stěny, kde přidávaný vrchol bude mít za sousedy právě všechny tři vrcholy, které leží na okraji stěny, do které vrchol přidáváme.

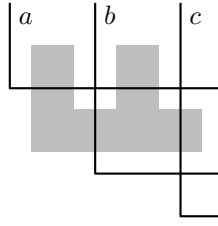
Definice 1 (F-oblast stěny). *Pro trojúhelníkovou stěnu $\{a,b,c\}$ nazveme desetiúhelník ve tvaru otočeného resp. převráceného písmena F F-oblastí stěny, když její protínají pouze L-útvary vrcholů a, b, c a to tak, jak je naznačeno na Obrázku 2.1.*



Obrázek 2.1: Dvě možné podoby F-oblasti stěny $\{a,b,c\}$ a jeho průsečíky s L-útvary vrcholů a, b, c .

Věta 2 (Felsner, Knauer, Mertziós, Ueckerdt [8]). *Každý rovinný 3-strom je L-graf.*

Důkaz. Dokážeme silnější tvrzení: Pro každý rovinný 3-strom s daným nakreslením nebo K_3 existuje jeho L-reprezentace taková, že pro každou vnitřní stěnu můžeme najít její F-oblast, navíc F-oblasti jednotlivých stěn jsou disjunktní.



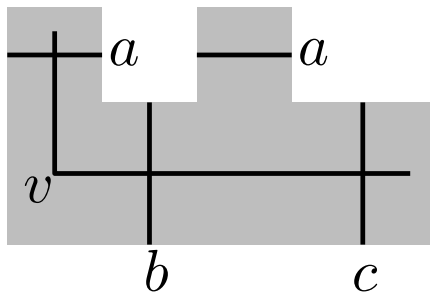
Obrázek 2.2: F-oblast pro jedinou vnitřní stěnu K_3 .

Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle počtu vrcholů grafu G . Jako bázi indukce zvolíme K_3 . Ten má jedinou vnitřní stěnu a jednoduše pro něj najdeme F-oblast - viz Obrázek 2.2.

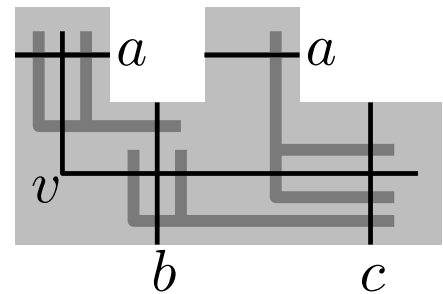
Indukční krok: Předpokládejme, že $|V(G)| > 3$. Protože graf G je 3-strom, existuje v něm vnitřní vrchol v s právě třemi sousedy, které označíme a, b a c . Protože G má jen trojúhelníkové stěny, je vrchol v uvnitř stěny $\{a, b, c\}$ v grafu $G' = G \setminus \{v\}$. Protože G' je 3-strom s menším počtem vrcholů než G , podle indukčního předpokladu pro něj existuje L-reprezentace, ve které existuje pro každou stěnu její F-oblast.

L-reprezentaci s F-oblastmi pro G získáme tak, že do F-oblasti stěny $\{a, b, c\}$ umístíme L-útvary příslušející k vrcholu v jako na Obrázku 2.3. Navíc pro nově vzniklé stěny $\{a, b, v\}$, $\{a, v, c\}$ a $\{v, b, c\}$ najdeme jejich po dvou disjunktní F-oblast tak, jak je znázorněno na Obrázku 2.4.

Všimněme si, že druhý možný tvar F-oblasti získáme z prvního pomocí osové souměrnosti s osou pod úhlem 45° . Díky tomu získáme konstrukci pro druhý tvar pouhým zobrazením konstrukce pro první tvar touto souměrností.



Obrázek 2.3: Umístění L-útvary pro nový vrchol v uvnitř F-oblasti původní stěny $\{a, b, c\}$.



Obrázek 2.4: Disjunktní F-oblasti pro nově vzniklé stěny.

Protože všechny změny jsme udělali pouze uvnitř F-oblasti původní stěny $\{a, b, c\}$, jsou nově zkonstruované F-oblasti disjunktní i se všemi zbylými F-oblastmi. Získali jsme tedy požadovanou reprezentaci grafu G . □

2.2 Line grafy rovinných grafů

V této sekci ukážeme, že line grafy rovinných grafů jsou L-grafy. Důkaz je založen na *kanonickém uspořádání vrcholů*, jehož existenci pro každý maximální

rovinný graf dokázali De Fraysseix, Pach a Pollack [7].

Definice 3 (Line graf). Line graf $\mathcal{L}(G)$ grafu G je takový graf, že každý vrchol $\mathcal{L}(G)$ odpovídá hraně v G a mezi vrcholy v $\mathcal{L}(G)$ vede hrana právě tehdy, když v G měly příslušné hrany společný vrchol.

Definice 4 (Maximální rovinný graf). *Rovinný graf je maximální rovinný, pokud v něm nelze přidat hrana tak, aby byl výsledný graf rovinný.*

Definice 5 (Kanonické uspořádání). *Nechť G je maximální rovinný graf s vrcholy u, v, w na vnější stěně. Pak kanonické uspořádání je uspořádání jeho vrcholů $v_1 = u, v_2 = v, v_3, \dots, v_n = w$ takové, že pro všechna $4 \leq i \leq n$ splňuje následující:*

- Podgraf $G_i \subseteq G$ indukovaný vrcholy v_1, v_2, \dots, v_i je 2-souvislý a hranice jeho vnější stěny obsahuje hranu v_1v_2 .
- Vrchol v_i leží ve vnější stěně G_{i-1} a jeho sousedi v G_{i-1} tvoří interval na cestě C_{i-1} mezi vrcholy u a v , která má délku alespoň dva a jejíž všechny hrany leží na vnější stěně G_{i-1} .

Lemma 6 (De Fraysseix, Pach, Pollack [7]). *Pro každý maximální rovinný graf existuje kanonické uspořádání jeho vrcholů.*

Věta 7 (Felsner, Knauer, Mertzius, Ueckerdt [8]). *Každý line graf rovinného grafu je L-graf.*

Důkaz. Line graf podgrafu G je indukovaný podgraf $\mathcal{L}(G)$. Pokud není G maximální rovinný graf, můžeme jej doplnit na nějaký maximální rovinný graf G' přidáním hran e_1, e_2, \dots, e_k pro $\mathcal{L}(G')$ nalézt jeho L-reprezentaci a následně z L-reprezentace vypustit L-útvary odpovídající přidaným hranám do G - tj. odebrat $L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_k)$. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že G je maximální rovinný graf s nějakým daným rovinným nakreslením. Pak pro něj podle Lemmatu 6 existuje *kanonické uspořádání vrcholů*.

Označme jako *bezedný obdélník* útvar, který je ohraničený zboku dvěma svislými polopřímkami a jednou vodorovnou úsečkou shora.

Dokážeme obecnější tvrzení: Nechť G je maximální rovinný graf a v_1, v_2, \dots, v_n je jeho libovolné kanonické uspořádání vrcholů. Nechť G_i je podgraf G indukovaný vrcholy v_1, v_2, \dots, v_i . Potom $\mathcal{L}(G_i)$ má L-reprezentaci, ve které pro každý vrchol w_j na C_i existuje jeho bezedný obdélník R_j splňující:

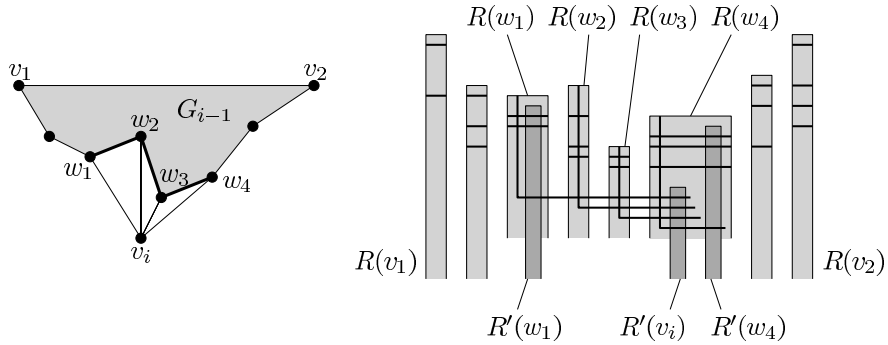
- R_j protíná právě L-útvary, které náleží hranám, které s w_j sousedí v grafu $\mathcal{L}(G_i)$.
- R_j neobsahuje žádné body ohybu ani konce L-útvary.
- Horizontální pořadí obdélníků vnějších vrcholů odpovídá jejich pořadí na cestě C_i a obdélníky jsou disjunktní.

Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle počtu vrcholů. Pro prázdný graf a graf na jednom vrcholu tvrzení triviálně platí. Za bázi indukce zvolme situaci pro $i = 2$, kdy $\mathcal{L}(G_i)$ obsahuje pouze jednu hranu v_1v_2 . Pak $\mathcal{L}(G_2)$ obsahuje jediný L-útvary a bezedné obdélníky R_1 a R_2 protínají vodorovnou část L-útvary.

Pro $i > 2$: Podle indukčního předpokladu existuje hledaná reprezentace pro graf $\mathcal{L}(G_{i-1})$. Ukážeme, že k ní dokážeme přidat L-útvary příslušející hranám,

kteří obsahují v_i , a upravit nekonečné obdélníky tak, abychom neporušili vlastnosti, které podle tvrzení požadujeme. Vrchol v_i má podle definice kanonického uspořádání pouze sousedy na cestě C_{i-1} , kteří na této cestě tvoří interval. Označme tyto jeho sousedy w_1, w_2, \dots, w_k ve stejném pořadí jako jsou na C_{i-1} . Podle indukčního předpokladu existují pro tyto vrcholy jejich bezedné obdélníky $R(w_1), R(w_2), \dots, R(w_k)$.

Pro každou hranu $v_i w_j$ (pro j od 1 do k) zdefinujeme L-útvary $L_{v_i w_j}$ tak, že svislá část je uvnitř nekonečného obdélníku $R(w_j)$ a protíná všechny L-útvary protínající $R(w_j)$ (včetně právě přidaných L-útvary, které reprezentují nějakou hranu z v_i do $w_{j'}$ pro $j' < j$). Vodorovná část $L_{v_i w_j}$ pak vede až do obdélníku $R(w_k)$. Takto získáme L-representaci grafu $\mathcal{L}(G_i)$.



Obrázek 2.5: Znáznornění přidávání vrcholu v_i . Vlevo je znázornění sousedů v_i , kteří tvoří interval díky kanonickému uspořádání. Vpravo změna původních bezedných obdélníků $R(w_i)$ na nové $R'(w_i)$. Převzato z [8].

Zbývá zdefinovat bezedné obdélníky v $\mathcal{L}(G_i)$. Pro všechny vrcholy na vnější stěně G_i kromě w_1, v_i a w_k můžeme nechat jejich původní bezedné obdélníky. Pro w_1 vznikne nový bezedný obdélník $R'(w_1)$ zúžením původního bezedného obdélníku $R(w_1)$ tak, že $R'(w_1)$ bude obsahovat část vodorovného úseku $L_{v_i w_1}$, ale nikoli jeho svislou část. Obdobně $R'(w_k)$ vznikne zúžením původního bezedného obdélníku $R(w_k)$ tak, aby jej protínal z nových L-útvary jen $L_{v_i w_k}$. Bezedný obdélník $R'(v_i)$ zkonstruujeme uvnitř původního $R(w_k)$ tak, aby jej protínaly jen nové L-útvary $L_{v_i w_1}, L_{v_i w_2}, \dots, L_{v_i w_k}$ (viz 2.5). □

2.3 Rovinné grafy a B_k -VPG grafy

VPG grafy jsou průnikové grafy cest v pravoúhlé mřížce a B_k -VPG jsou VPG grafy, v jejich průnikové reprezentaci mají jednotlivé cesty nejvýše k ohybů.

Věta 8 (Asinowski a kol. [1]). *Každý rovinný graf je B_3 -VPG graf.*

Následující důkaz vychází z důkazu v [1, Theorem 7], kde se ale autoři odkazují na další články. My proto provedeme důkaz raději jen s využitím základních znalostí. Budeme vycházet z toho, že pro každý maximální rovinný graf existuje *kanonické uspořádání vrcholů* (viz [7]). Navíc je při této formulaci důkazu zjevný stejný přístup, jaký byl použitý v 2.2.

Pro nalezení kanonického uspořádání je popsáno několik lineárních algoritmů (např. v článku [2]). Náš postup na tvorbu B_3 -VPG s pomocí kanonického uspořádání je také snadno implementovatelný v lineárním čase, a tedy dostáváme lineární algoritmus i pro nalezení B_3 -VPG reprezentace rovinného grafu.

Pro konstrukci B_3 -VPG reprezentace rovinného grafu bude klíčové následující lemma o dotykové T-representaci.

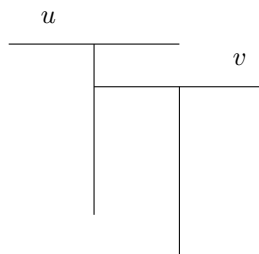
Definice 9 (T-útvary). *T-útvary vznikne sjednocením horizontální a vertikální úsečky takové, že nejvrchnější bod vertikální úsečky je zároveň uvnitř úsečky horizontální.*

Lemma 10 (de Fraysseix, de Mendez, Rosenstiehl [9]). *Pro maximální rovinný graf G existuje jeho dotyková reprezentace pomocí T-útvary.*

Důkaz. Označme T_i T-útvary, který v dotykové reprezentaci odpovídá vrcholu v_i . v dotykové reprezentaci grafu G označíme T-útvary jako *nekonečné*, pokud libovolným prodloužením jeho vertikální úsečky směrem dolů nenarušíme, že jde o dotykovou reprezentaci G .

Dokážeme obecnější tvrzení: Nechť G je maximální rovinný graf a v_1, v_2, \dots, v_n je jeho libovolné kanonické uspořádání vrcholů. Pak pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existuje pro podgraf $G_i \subseteq G$ indukovaný vrcholy v_1, v_2, \dots, v_i jeho dotyková reprezentace pomocí T-útvary, ve které jsou T-útvary příslušející vrcholům na C_i nekonečné. Navíc jsou tyto T-útvary ve stejném pořadí¹ zleva doprava jako na cestě C_i (viz definice kanonického uspořádání).

Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro prázdný graf a graf na jednom vrcholu tvrzení triviálně platí. Za bázi indukce zvolme situaci pro $i = 2$. Pro dva vrcholy je jejich T-representace zobrazena na Obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: T-representace pro dva vrcholy.

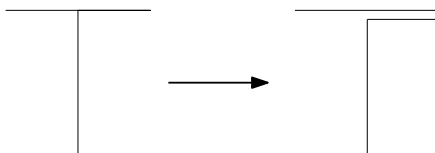
Pro $i > 2$: Podle indukčního předpokladu existuje hledaná T-representace pro graf G_{i-1} . Ukážeme, že k ní dokážeme přidat T-útvary T_i tak, abychom neporušili vlastnosti, které podle tvrzení požadujeme. Vrchol v_i má podle definice kanonického uspořádání pouze sousedy na cestě C_{i-1} , kteří na této cestě tvoří interval. Označme tyto jeho sousedy w_1, w_2, \dots, w_k ve stejném pořadí jako jsou na C_{i-1} . Podle tvrzení jsou všechny T-útvary náležející těmto vrcholům nekonečné.

Přidejme tedy T-útvary T_i tak, že jeho vodorovná úsečka bude pod vodorovnými úsečkami všech již umístěných T-útvary. Navíc vlevo se vodorovná úsečka bude dotýkat svislé úsečky útvaru T_{w_1} a vpravo svislé úsečky útvaru T_{w_k} . Aby se jednalo o dotykovou reprezentaci, omezíme u T-útvary $T_{w_2}, T_{w_3}, \dots, T_{w_{k-1}}$ jejich svislou úsečku tak, aby končila na úrovni vodorovné úsečky T_i .

¹Umístění T-útvary je dáno polohou jeho svislé úsečky.

Takto získáme dotykovou T-reprezentaci grafu G_i , protože T_i se dotýká právě všech T-útvárů, které náleží sousedům v_i v G_i , a ostatní dotyky se nezměnily. Navíc T_i je nekonečný T-útvár a je mezi T_{w_1} a T_{w_k} . Protože w_1 a w_k sousedí s v_i na cestě C_i , dokázali jsme silnější tvrzení. □

Náš postup při konstrukci B_3 -VPG reprezentace bude následující: Nejprve do zadaného rovinného grafu G libovolně přidáme hrany tak, abychom dostali maximální rovinný graf G' , že $G \subseteq G'$. Poté pro G' nalezneme jeho dotykovou reprezentaci pomocí T-útvárů. Její existenci máme zaručenou díky Lemmatu 10. Navíc kanonické uspořádání G' umíme najít v lineárním čase a konstrukce dotykové T-reprezentace je také lineární². v dotykové reprezentaci G' se zbavíme hran, které jsme v prvním kroku přidali. v místě každého dotyku má totiž jeden z dvojice T-útvárů vždy jeden ze svých tří konců. Zkrácením tohoto konce o dostatečně malou vzdálenost zrušíme daný bod dotyku, ale nezměníme dotyky ve zbytku T-reprezentace. Takto dostaneme dotykovou reprezentaci G pomocí T-útvárů. Nakonec stačí T-útvary nahradit křivkami s třemi ohyby, které budou připomínat tvar T a zachovají veškeré dotyky. Tato transformace je znázorněna na Obrázku 2.7.



Obrázek 2.7: Transformace T-útváru na křivku v pravoúhlé mřížce s třemi ohyby.

V roce 2013 dokázali Steven Chaplick a Torsten Ueckerdt v článku [6], ještě silnější tvrzení:

Věta 11 (Chaplick, Ueckerdt [6]). *Každý rovinný graf je B_2 -VPG graf.*

Jiný důkaz této věty publikovali o rok později i Therese Biedl a Martin Derka v [3]. Jejich konstrukce navíc zaručuje, že každé dvě protínající se cesty se protínají právě jednou. Tento důkaz vychází z konstrukce B_2 -VPG reprezentace triangulace grafu G , ke které využívají podobný koncept jako je použit v důkazu Věty 2. Místo F-útvárů ale využívají útvary ve tvaru písmene "h" (resp. otočení nebo převrácení tohoto útvaru), které lze umístit do každé stěny reprezentace. Následně pomocí rozboru různých případů postupně upravují B_2 -VPG reprezentaci tak, aby bylo možné vynechat průsečíky, které reprezentují hrany přidané při triangulaci původního grafu G .

² G' je rovinný graf, a tedy má lineární počet hran vzhledem k počtu vrcholů.

Kapitola 3

Vnějškové L-grafy

Podobně jako pro průnikové grafy obecných křivek (tzv. string grafy) se zkoumá třída vnějškových průnikových grafů křivek (tzv. outer-string grafy), je přirozené se zabývat ekvivalentním problémem pro L-grafy.

Definice 12 (vnějškový L-graf). *Vnějškový L-graf je graf, pro který existuje průniková reprezentace pomocí L-útvárů, jejichž horní konce se nachází na vodorovné přímce, zvané hraniční přímka.*

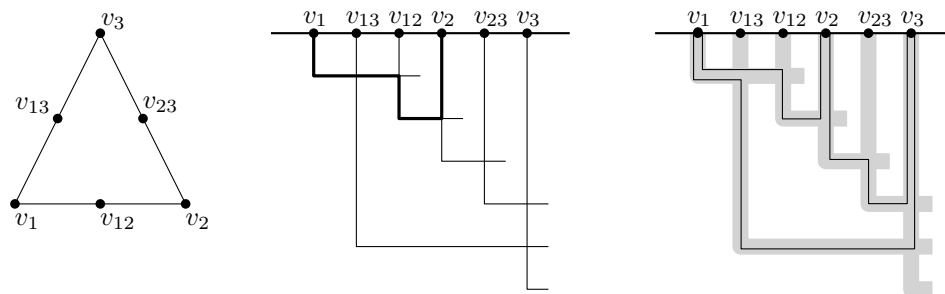
Nejprve ukážeme, že existují třídy grafů, které nejsou vnějškovými L-grafy. Následující věta platí i v obecnější podobě, kdy místo L-útvárů uvažujeme libovolné souvislé křivky.

Definice 13. Podrozdělením hrany uv grafu G vznikne graf G' takový, že $V(G') = V(G) \cup \{v_{uv}\}$ a $E(G') = E(G) \cup \{\{u, v_{uv}\}, \{v_{uv}, v\}\} \setminus \{\{u, v\}\}$.

Definice 14. *Graf je vnějškově rovinný právě tehdy, když existuje jeho rovinné nakreslení, ve kterém jsou všechny vrcholy na hranici jedné (vnější) stěny.*

Věta 15. *Nechť graf G není vnějškově rovinný. Pak když podrozdělíme každou jeho hranu, výsledný graf G' není vnějškový L-graf.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje vnějšková L-representace grafu G' . Ukážeme, že pak bychom z vnějškové L-representace G' získali vnějškově rovinné nakreslení G .



Obrázek 3.1: Podrozdělení hran K_3 , vnějšková L-representace podrozděleného grafu a najití křivky mezi vrcholy v_1 a v_2 , vyřešení problému s překryvem jednotlivých křivek a najití vnějškově rovinné reprezentace K_3 .

Uvažme pozici všech původních vrcholů $v \in V(G)$ v místě, kde jejich L-útvary $L(v)$ sousedí s hraniční přímkou vnějškové reprezentace. Pro každé dva původně sousední vrcholy $u, v \in V(G)$, $\{u, v\} \in E(G)$ najdeme křivku, která oba vrcholy spojuje. Tato křivka vznikne jako sjednocení části $L(u)$ od vrcholu u do průsečíku s $L(v_{uv})$, části $L(v_{uv})$ od průsečíku s $L(u)$ do průsečíku s $L(v)$ a části $L(v)$ od průsečíku s $L(v_{uv})$ do vrcholu v . Příklad konstrukce této křivky je na Obrázku 3.1.

Problém této konstrukce je ten, že se mohou jednotlivé křivky mezi vrcholy překrývat. Proto na začátku uvažíme bez újmy na obecnosti L-representaci, kde každý L-útvary je reprezentovaný křivkou s nějakou šířkou ε . Pak můžeme jednotlivé křivky mezi vrcholy konstruovat dostatečně tenké tak, aby se uvnitř původních L-útvary nekřížily. Dostaneme tak rovinné nakreslení grafu G , která je vnějšková, protože žádná křivka nezasahuje do druhé poloroviny od hraniční přímky vnějškové L-representace a všechny vrcholy jsou na této přímce. Tím dostáváme spor s předpokladem věty, že graf G není vnějškově rovinný. □

3.1 Intervalové a tětiové grafy

Definice 16 (Intervalový graf). Intervalový graf je průnikový graf intervalů na úsečce.

Tvrzení 17. Každý intervalový graf je vnějškovým L-grafem.

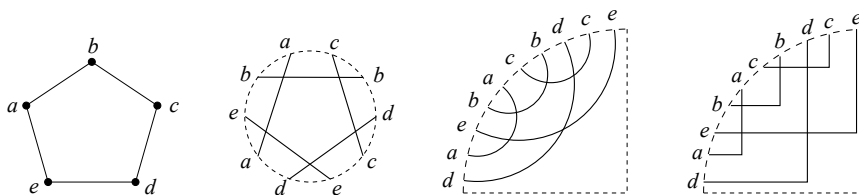
Důkaz. Nechť máme intervalovou reprezentaci grafu G . Budeme postupovat zleva doprava a nahradíme každý interval L-útvarem, jehož svíslá část bude delší než všechny již nakreslené útvary a vodorovná část bude v kolmém průmětu na hraniční přímku přesně odpovídat původnímu intervalu. Pokud se v intervalové reprezentaci dva intervaly neprotínaly, pak se nebudou protínat ani jim odpovídající L-útvary. Pokud se dva intervaly protínaly, pak vodorovná část L-útvary, který odpovídá intervalu s levým koncem více vlevo, bude protínat svíslou část druhého L-útvary. Dostáváme tedy vnějškovou L-representaci grafu G . □

Definice 18 (Tětiový graf). Tětiový graf je průnikový graf tětiv na kružnici.

Věta 19. Každý tětiový graf je vnějškovým L-grafem.

Důkaz. Tento důkaz byl představen v [1, Theorem 3], kde pomocí něho Asinowski a kol. dokázali, že tětiové grafy jsou podmnožinou B_1 -VPG grafů. Z důkazu ale přímo vyplývá, že tětiové grafy jsou dokonce vnějškovými L-grafy. Nechť G je tětiový graf. Uvažme jeho reprezentaci jako průnikový graf tečen v kružnici. Posouváním koncových bodů tětiv po kružnici při zachování jejich pořadí se nezmění jejich průsečíkový graf. Můžeme tedy všechny koncové body přesunout do pravé horní čtvrtiny kružnice. Nyní nahradíme každou tětivu L-útvarem, který má stejné koncové body jako měla tětiva. L-útvary se budou protínat právě, když se protínaly tětivy. Když umístíme hraniční přímku p vodorovně nad kružnici,

můžeme protáhnout svislé úsečky L-útvárů až k ní a získáme tak hledanou vnějškovou L-reprezentaci grafu G . □



Obrázek 3.2: Převod tětívového grafu na vnějškový L-graf (na obr. je situace osově převrácená), převzato z [1].

3.2 Vnějškově rovinné grafy

Tato sekce obsahuje důkaz, že každý vnějškově rovinný graf je vnějškovým L-grafem. Podobně jako v důkazu Věty 2 budeme pracovat s oblastmi, které slouží jako volný prostor pro další rozšiřování L-reprezentace. Navíc budeme využívat toho, že pokud je ve vnějškové L-reprezentaci grafu nějaký L-útvár $L(v)$ nejvíce vpravo¹, je pro potřeby reprezentace využitelný jen jeho svislý úsek. To nám dává možnost L-reprezentaci podgrafu H s nejpravějším L-útvarem $L(v)$ umístit do prázdného ε -okolí horního konce $L(v)$. Tímto postupem můžeme snadno do vnějškové L-reprezentace grafu G přidat vnějškovou L-reprezentaci podgrafu H , jehož vrcholy sousedí s jediným vrcholem v z G .

Definice 20 (F-oblast a W-oblast hrany). *Pro hranu ab nazveme desetiúhelník ve tvaru převráceného písmena F F-oblastí stěny, když jej protínají pouze L-útvary vrcholů a a b a to tak, jak je naznačeno na Obrázku 3.3a.*

Podobně pro hranu ab nazveme desetiúhelník ve tvaru otočeného písmena F W-oblastí stěny, když jej protínají pouze L-útvary vrcholů a a b a to tak, jak je naznačeno na Obrázku 3.3b.

Navíc v F-oblasti i W-oblasti musí být horní hrany útvárů na hraniční přímce L-reprezentace.

Definice 21 (2-souvislost). *Souvislý graf G na alespoň třech vrcholech je 2-souvislý, jestliže po odebrání libovolného vrcholu zůstane souvislý.*

Definice 22 (Duální graf). *Duální graf G^* pro rovinné nakreslení grafu G je graf, jehož vrcholy odpovídají stěnám G a hrany vedou mezi těmi dvojicemi stěn, které sdílejí společnou hranu.*

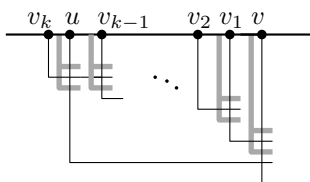
Lemma 23. *Pro libovolný 2-souvislý vnějškově rovinný graf G s daným vnějškově rovinným nakreslením, libovolný jeho vrchol v a libovolnou hranu $e = uv$ obsahující v a ležící na hranici vnější stěny existuje vnějšková L-reprezentace G taková, že každá hrana vnější stěny kromě uv má svoji F-oblast nebo W-oblast a $L(v)$ je L-útvár, který je ze všech L-útvárů nejvíce vpravo. Navíc F a W oblasti hran jsou disjunktní.*

¹Horní konec L-útváru je nejvíce vpravo.



Obrázek 3.3: Znázornění F a W oblasti hrany. Tlustší čára nahoře znázorňuje hraniční přímku.

Důkaz. Důkaz provedeme konstrukcí. Začneme zkonstruováním reprezentace pro nejmenší kružnici v G , která obsahuje vrcholy u a v . Označme vrcholy na této kružnici $u, v, v_1, v_2, \dots, v_k$. Pomocí konstrukce podobné jako při přepisování cesty k hraně ab , která má F-okolí (viz dále), získáme vnějškovou L-reprezentaci, kde má každá hrana kromě uv F-okolí (viz Obrázek 3.4).



Obrázek 3.4: Vnějšková L-reprezentace s F-oblastmi pro všechny hrany kromě uv .

Protože G je vnějškově rovinný graf, jeho redukovaný duální graf G^* , ve kterém vynecháme vrchol příslušející vnější stěně, je les. Protože G je 2-souvislý, G^* je strom. Nakreslená stěna obsahující hranu uv odpovídá nějakému vrcholu v G^* . Můžeme postupně projít celý strom G^* tak, že vždy nově navštívený vrchol bude sousedit s právě jedním již navštíveným vrcholem (např. procházení do šířky). Při navštívení vrcholu v G^* přidáme do nakreslení grafu G příslušnou stěnu S . Přidání stěny znamená přidání cesty vedoucí ve vnější stěně mezi dvěma již nakreslenými vrcholy a, b . Pro spor předpokládejme, že by a a b nebyly sousední vrcholy. Pak by existoval vrchol c na cestě mezi a a b , který by byl na hranici nové stěny S . Tím ale dostáváme spor, protože c by nemohl být na vnější hranici nakreslení grafu G . Vrcholy a a b jsou tedy sousední. Zároveň také nemůže být hrana ab hranou uv , protože pak by hrana uv nemohla být vnější (sousedila by se dvěma stěnami). Vnějškově rovinné nakreslení grafu G tedy můžeme získat postupným přikreslováním cest mezi dva sousední již nakreslené vrcholy.

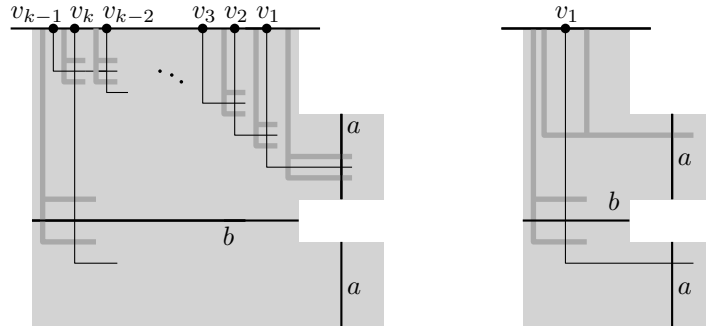
Nyní ukážeme, že při přidání cesty délky k mezi dva sousední vrcholy dokážeme upravit L-reprezentaci tak, že stále bude vyhovovat požadavkům lemmatu. Označme vrcholy na přidávané cestě v_1, v_2, \dots, v_k . Popis konstrukce cesty mezi a a b rozdělíme podle typu oblasti, která přísluší hraně ab :

- Hrana ab má F-oblast v nakreslení G' : Pokud $k > 1$: L-útvary vrcholu v_1 bude protínat bližší² výskyt $L(a)$ v F-oblasti. Každý z vrcholů $v_j \in \{2, 3, \dots, k - 1\}$ bude mít horní bod L-útvary více vlevo na hraniční přímce než vrchol

²bližší k hraniční přímce

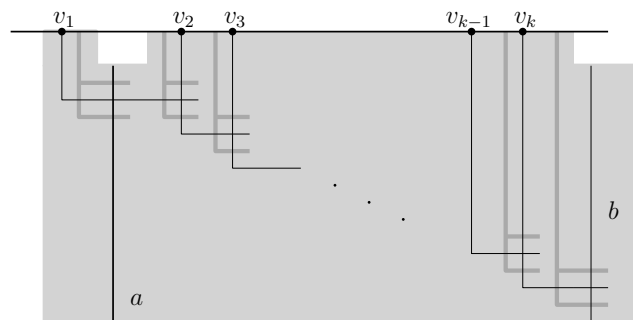
v_{j-1} , jeho svislá část L-útvary bude nižší než u $L(v_{j-1})$ a jeho vodorovná část L-útvary bude protínat jen $L(v_{j-1})$. L-útvary vrcholu v_k bude mít svůj horní bod mezi $L(v_{k-1})$ a $L(v_{k-2})$ ³ a jeho svislá část bude protínat $L(b)$. Umístění disjunktích F-oblastí pro každou hranu je znázorněno na Obrázku 3.5.

Pokud $k = 1$: $L(v_1)$ bude protínat $L(b)$ a vzdálenější část $L(a)$. F a W okolí takto vzniklých hran popisuje Obrázek 3.5.



Obrázek 3.5: Znázornění přidávání obecné cesty (vlevo) a přidávání jednoho vrcholu (vpravo) k hraně ab , která má F-oblast. Světle šedě je znázorněna původní F-oblast, tmavě šedě nově vzniklé F a W oblasti pro nové hrany a černě L-útvary vrcholů.

- Hrana ab má W-oblast v nakreslení G' : L-útvary vrcholu v_1 bude mít horní konec v levém úseku, kterým W-oblast sousedí s hraniční přímkou, a bude protínat $L(a)$. Každý z vrcholů $v_j \in \{2, 3, \dots, k-1\}$ bude mít horní konec v pravém úseku, kterým W-oblast sousedí s hraniční přímkou, bude mít svislou část L-útvary delší než předchozí vrchol v_{j-1} a svislá část $L(v_j)$ bude protínat vodorovnou část $L(v_{j-1})$. Pro L-útvary v_k budou platit stejná pravidla jako pro předchozí vrcholy, ale navíc jeho vodorovná část bude protínat $L(b)$. Umístění disjunktích F-oblastí pro nově vzniklé hrany znázorňuje Obrázek 3.6.



Obrázek 3.6: Znázornění přidávání cesty k hraně ab , která má F-oblast. Světle šedě je znázorněna původní F-oblast, tmavě šedě nově vzniklé F oblasti pro nové hrany a černě L-útvary vrcholů.

³Pokud by dokreslovaná cesta měla jen dva vrcholy, v_k bude mít svůj horní bod vpravo od $L(v_{k-1})$.

Přidáním nových F-oblastí (resp. W-oblasti) zanikne F-oblast (resp. W-oblast) hrany ab . Již před přidáním cesty sousedila hrana ab s jednou stěnou, která nebyla vnější, a přidáním nové cesty začala sousedit s dvěma takovými stěnami. To ovšem znamená, že ab není v novém grafu na vnější hraně G' , a tedy nemusí existovat její F ani W okolí. □

Věta 24. *Každý vnějškově rovinný graf G je vnějškovým L-grafem.*

Důkaz. Dokážeme silnější tvrzení: Pro každý vnějškově rovinný graf G a každý jeho vrchol v existuje jeho vnějšková L-representace, kde $L(v)$ je L-útvár nejvíce vpravo.

Důkaz provedeme indukcí podle počtu vrcholů. Jako bázi indukce zvolme graf s jedním vrcholem. Pro něj věta triviálně platí.

Indukční krok pro $E(G) > 1$: Je-li G 2-souvislý graf, existuje hledaná vnějšková L-representace díky Lemmatu 23. Je-li G nesouvislý, jde rozdělit na nesouvislé komponenty G_1 obsahující vrchol v a G_2 . Protože tyto komponenty mají méně vrcholů než má graf G , podle indukčního předpokladu pro ně existuje vnějšková L-representace. Navíc bude existovat reprezentace G_1 , kde L-útvár $L(v)$ bude nejvíce vpravo. Umístěním reprezentace G_1 vpravo od reprezentace G_2 získáme hledanou vnějškovou L-representaci grafu G s $L(v)$ nejvíce vpravo.

Pokud má G stupeň souvislosti jedna, obsahuje nějakou artikulaci. Označme takový vrchol x . Odstraněním vrcholu x se graf G rozpadne na dvě komponenty: G_1 obsahující v a G_2 . Podle indukčního předpokladu existuje vnějšková L-representace grafu indukovaném vrcholy G_1 a vrcholem x , která má $L(v)$ nejvíce vpravo. Rovněž existuje vnějšková L-representace grafu indukovaného vrcholy G_2 a vrcholem x , která má $L(x)$ nejvíce vpravo. v reprezentaci grafu indukovaném vrcholy G_1 a vrcholem x najdeme ε -okolí horního konce $L(x)$, kam nezasahuje žádný jiný L-útvár. Do tohoto ε -okolí umístíme reprezentaci grafu indukovaného vrcholy G_2 a vrcholem x , která má $L(x)$ nejvíce vpravo. Tak dostaneme reprezentaci grafu G s $L(v)$ nejvíce vpravo. □

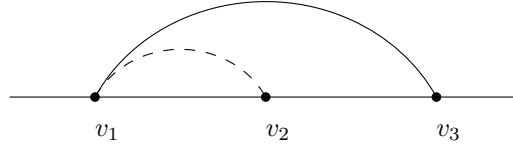
3.3 Charakterizace tříd grafů pomocí zakázaných vzorů

Definice 25 (Zakázaný vzor). Zakázaný vzor na k vrcholech u_1, u_2, \dots, u_k je popis, který pro každou hranu mezi dvěma vrcholy u_i a u_j určuje, zda mezi vrcholy vede hrana, nevede hrana nebo hrana vést může ale nemusí.

Formálně můžeme zavést zakázaný vzor jako uspořádanou trojici (V, H, N) , kde V je uspořádaná k -tice vrcholů, které jsou v zakázaném vzoru, množina H obsahuje všechny dvojice indexů i, j ($i < j$) takové, že mezi vrcholy u_i a u_j musí vést hrana a množina N obsahuje všechny dvojice indexů i, j ($i < j$) takové, že mezi vrcholy u_i a u_j nesmí vést hrana.

Mnohem přehlednější znázornění zakázaného vzoru je ovšem pomocí obarvení hran úplného grafu K_k . My budeme nutné hrany (množina H) znázorňovat plnou

čarou a zakázané hrany (množina N) přerušovanou čarou. na Obrázku 3.7 je znázorněný graf pro zakázaný vzor, kde mezi prvním a druhým vrcholem nesmí být hrana, mezi prvním a třetím vrcholem hrana být musí a mezi druhým a třetím vrcholem hrana být může, ale nemusí.



Obrázek 3.7: Znázornění zakázaného vzoru $H = \{\{1,3\}\}$, $N = \{\{1,2\}\}$ v podobě obarveného grafu.

O nějakém uspořádání vrcholů v_1, v_2, \dots, v_n grafu G řekneme, že *obsahuje zakázaný vzor* na vrcholech u_1, u_2, \dots, u_k , jestliže existuje podposloupnost vrcholů v'_1, v'_2, \dots, v'_k posloupnosti v_1, v_2, \dots, v_n taková, že pro každou dvojici $\{i, j\} \in H$ vede v grafu G hrana mezi vrcholy v'_i a v'_j a pro každou dvojici $\{i, j\} \in N$ není v grafu G hrana mezi vrcholy v'_i a v'_j .

Například uspořádání vrcholů v_1, v_2, v_3, v_4 kružnice na čtyřech vrcholech označené po směru hodinových ručiček obsahuje zakázaný vzor z Obrázku 3.7, protože vrcholy v_1, v_3, v_4 odpovídají popisu zakázaného vzoru.

Uveďme si charakterizaci pomocí zakázaných vzorů pro některé z běžných tříd grafů. Tato charakterizace je představena v článku Davida R. Wooda [14].

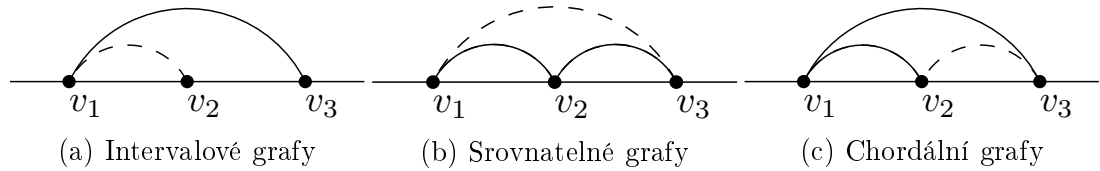
Tvrzení 26 (Charakterizace intervalových grafů, Wood [14]). *Graf G je intervalový právě tehdy, když pro něj existuje permutace vrcholů, která neobsahuje následující zakázaný vzor: $H = \{\{1,3\}\}$, $N = \{\{1,2\}\}$ (viz Obrázek 3.8a).*

Důkaz. Necht v_1, v_2, \dots, v_n je uspořádání vrcholů bez výše popsaného zakázaného vzoru. Definujme $r(v_i)$ jako pořadí souseda vrcholu v_i , který je v uspořádání nejvíce vpravo. Pak každý vrchol v_i budeme reprezentovat jako uzavřený interval $[i, r(v_i)]$. Zjevně se interval každého vrcholu protíná s intervaly všech jeho sousedů. Pokud by se protínaly dva intervaly, které odpovídají nesousedním vrcholům, vynutilo by to existenci zakázaného vzoru v uvažované permutaci, což je spor s existencí vhodné permutace.

Naopak pokud existuje intervalová reprezentace grafu G , vrcholy seřadíme podle pořadí levých konců intervalů, které jim přísluší. Pokud vrchol v_i sousedí s vrcholem v_k pro $i < k$, musí interval vrcholu v_i zasahovat až na úroveň levého konce vrcholu v_k , a tedy v_i bude sousedit i se všemi vrcholy, které jsou v posloupnosti mezi vrcholy v_i a v_k (tedy s vrcholy v_j pro $i < j < k$). To znamená, že permutace vrcholů neobsahuje zakázaný vzor. □

Definice 27 (Srovnatelný graf). *Pro částečně uspořádanou množinu (P, \preceq) je srovnatelný graf (comparability graph) takový graf, který má za vrcholy prvky P a mezi dvěma prvky vede hrana, právě tehdy když jsou tyto prvky porovnatelné v \preceq .*

Tvrzení 28 (Charakterizace srovnatelných grafů, Wood [14]). *Graf G je srovnatelný graf právě tehdy, když pro něj existuje permutace vrcholů, která neobsahuje následující zakázaný vzor: $H = \{\{1,3\}, \{2,3\}\}$, $N = \{\{1,3\}\}$ (viz Obrázek 3.8b).*



Obrázek 3.8: Znázornění zakázaných vzorů pro některé třídy grafů.

Důkaz. Necht v_1, v_2, \dots, v_n je uspořádání vrcholů bez výše popsaného zakázaného vzoru. Definujme $v_i \preceq v_j$, právě tehdy když $v_i v_j \in E(G)$ a zároveň $i < j$ nebo pokud $i = j$. Ověřením axiomů dokážeme, že \preceq je částečné uspořádání:

- *reflexivita* - z definice \preceq
- *tranzitivita* - plyne z neexistence zakázaného vzoru
- *slabá antisymetrie* - podle definice \preceq jde o podmnožinu lineárního uspořádání

To znamená, že $(V(G), \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a G srovnatelný graf.

Necht G je srovnatelný graf částečně uspořádané množiny $(V(G), \preceq)$. Pak rozšířením částečného uspořádání \preceq na lineární uspořádání dostaneme uspořádání vrcholů, které nebude obsahovat zakázaný vzor. □

Definice 29 (Chordální graf). *Graf G nazveme chordálním pokud neobsahuje kružnici na čtyřech nebo více vrcholech jako indukovaný podgraf.*

Definice 30 (PES). *Perfektní eliminační schéma (PES) grafu G je posloupnost vrcholů v_1, v_2, \dots, v_n taková, že každý vrchol v_i tvoří kliku se svými sousedy v grafu indukovaném $\{v_i, v_i + 1, \dots, v_n\}$.*

Známe tvrzení říká, že graf je chordální, právě když pro něj existuje PES. Toto tvrzení lze snadno přeformulovat do řeči zakázaných vzorů:

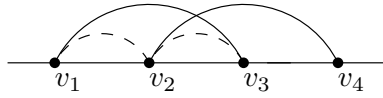
Tvrzení 31 (Charakterizace chordálních grafů). *Graf G je chordální právě tehdy, když pro něj existuje permutace vrcholů, která neobsahuje následující zakázaný vzor: $H = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$, $N = \{\{2,3\}\}$ (viz Obrázek 3.8c).*

3.4 Charakterizace vnějškových L-grafů pomocí zakázaných vzorů

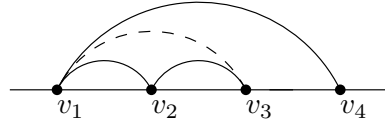
Věta 32 (Charakterizace vnějškových L-grafů). *Graf G je vnějškový L-graf právě tehdy, když pro něj existuje permutace vrcholů, která neobsahuje žádný z následujících dvou zakázaných vzorů:*

- *Zakázaný vzor A: $H = \{\{1,3\}, \{2,4\}\}$, $N = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$*
- *Zakázaný vzor B: $H = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}$, $N = \{\{1,3\}\}$*

Důkaz. O permutaci vrcholů řekneme, že je *dobrá*, jestliže neobsahuje žádný ze zakázaných vzorů. v opačném případě řekneme, že je *špatná*.



Obrázek 3.9: Zakázaný vzor A

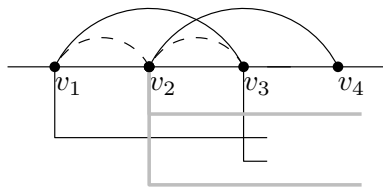


Obrázek 3.10: Zakázaný vzor B

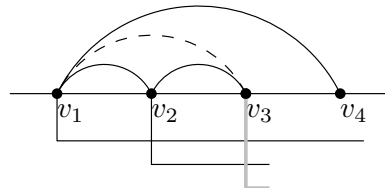
Nechť graf G má vnějškovou L-reprezentaci. Očíslujeme vrcholy podle pořadí horního konce jejich L-útvary na hraniční přímce. Ukážeme, že takto získaná permutace vrcholů je dobrá.

Pro spor předpokládejme, že jsou v permutaci vrcholy u_1, u_2, u_3, u_4 , které odpovídají zakázanému vzoru A. Pak $L(u_1)$ musí zasahovat až na úroveň vrcholu u_3 a $L(u_3)$ musí protínat $L(u_1)$. Tím se ale vrchol u_2 dostane do obdélníku ohraničeného hraniční přímkou a útvary $L(u_1)$ a $L(u_3)$. Protože vrchol u_2 musí sousedit s u_4 , musí $L(u_2)$ zasahovat až na úroveň vrcholu u_4 . To ale není možné bez protnutí jednoho z útvarů $L(u_1)$ nebo $L(u_3)$, čímž dostáváme spor, jelikož u_2 nesmí sousedit ani s jedním z vrcholů u_1 a u_3 .

Nyní pro spor předpokládejme, že jsou v permutaci vrcholy u_1, u_2, u_3, u_4 , které odpovídají zakázanému vzoru B. Pak $L(u_1)$ musí zasahovat až na úroveň vrcholu u_4 kvůli hraně u_1u_4 . Protože u_2 sousedí s u_1 , musí $L(u_2)$ protínat $L(u_1)$, a tedy je horizontální část $L(u_2)$ pod horizontální částí $L(u_1)$. Vrchol u_3 musí sousedit s u_2 , a tedy $L(u_3)$ musí zasahovat pod úroveň horizontální části $L(u_2)$. Tím ale nutně protne i $L(u_1)$, což je spor, protože mezi u_3 a u_1 je hrana zakázaná.



(a) Zakázaný vzor A



(b) Zakázaný vzor B

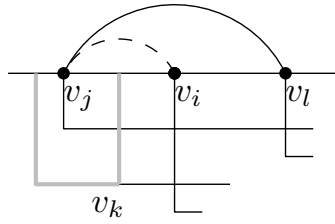
Obrázek 3.11: Vynucené pozice L-útvary při vnějškové L-reprezentaci zakázaných vzorů. Šedě znázorněná hrana, která již nejde přidat. v případě vzoru A jsou ukázány obě možnosti $L(v_2)$

Důkaz opačné implikace provedeme konstrukcí. Nechť v_1, v_2, \dots, v_n je dobrá permutace vrcholů grafu G . Pak budeme postupně zleva doprava kreslit L-útvary jednotlivých vrcholů v_1, v_2, \dots, v_n . Pro každý vrchol v_i nakreslíme jeho L-útvary tak, že vertikální část L-útvary protne všechny L-útvary již nakreslených vrcholů a horizontální část povede na úroveň posledního souseda v dané permutaci. Touto konstrukcí je zaručené, že všem hranám v G bude odpovídat nějaké křížení L-útvary v L-reprezentaci.

Nyní pro spor předpokládejme, že vznikne průsečík $L(v_j)$ a $L(v_i)$, i když v G není hrana v_jv_i . Aby tento průsečík vznikl, musí být pod horizontální částí $L(v_j)$ nějaký $L(v_k)$, že v_kv_i je hrana v G , a vrchol v_j musí sousedit s nějakým v_l , $l > i$, aby horizontální část $L(v_j)$ zasahovala přes v_i .

Nyní rozebereme dva případy podle pořadí vrcholů v_j a v_k v permutaci:

- Pořadí $k < j < i < l$: Protože $L(v_j)$ musí být nad $L(v_k)$, v_kv_j není hrana v G . Tím dostáváme zakázaný vzor A na těchto čtyřech vrcholech.



Obrázek 3.12: Možné pořadí vrcholů v_i, v_j, v_k a v_l . Dvě možnosti pro vrchol v_k jsou naznačeny šedě.

- Pořadí $j < k < i < l$: Protože $L(v_j)$ musí být nad $L(v_k)$, $v_k v_j$ je hrana v G . Tím dostáváme zakázaný vzor B na těchto čtyřech vrcholech.

V obou případech jsme v permutaci vrcholů našli zakázaný vzor a tím dostali spor s předpokladem dobré permutace. To znamená, že popsanou konstrukcí pro dobrou permutaci nevznikne žádný průsečík, který by neodpovídal hraně v G , a tedy pro dobrou permutaci vrcholů G dokážeme vždy najít vnějškovou L-reprezentaci G .



Kapitola 4

Závěr

Největším přínosem této práce je zavedení a částečné prozkoumání třídy vnějškových L-grafů. Nelezi jsme několik tříd grafů (intervalové, tětiové a vnějškově rovinné), které jsou podtřídou vnějškových L-grafů. Přesto zůstává řada dalších tříd, jejichž vztah k vnějškovým L-grafům by šlo dále zkoumat (např. průnikové grafy kružnicových oblouků - tzv. circular-arc grafy).

Vnějškové L-grafy jsou outer-string grafy s omezením tvaru křivek. Proto je přirozená otázka, zda se tyto dvě třídy rovnají nebo zda jsou vnějškové L-grafy vlastní podmnožinou outer-string grafů. Přestože jsme ve Větě 15 představili nekonečnou třídu rovinných grafů, které nejsou vnějškovými L-grafy, zůstává tato otázka otevřená. Zkoumání této otázky naráží na to, že neznáme jednoduché kritérium, kterým by se o grafu dalo zjistit, že není vnějškový L-graf. Charakteristika pomocí zakázaných vzorů je zajímavá a může sloužit k dalšímu pochopení struktury vnějškových L-grafů, ale nedává nám v praxi použitelný nástroj na rozhodování, zda pro daný graf existuje vnějšková L-reprezentace. Proto se zdá být nejzajímavějším směrem pro další výzkum právě nalezení polynomiálního algoritmu pro rozpoznávání vnějškových L-grafů.

Literatura

- [1] A. Asinowski, E. Cohen, M. C. Golumbic, Limouzy V., Lipshteyn M., and Stern M. Vertex intersection graphs of paths on a grid. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 16(2):129–150, 2012.
- [2] M. Badent, U. Brandes, and S. Cornelsen. More canonical ordering. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 15(1):97–126, 2011.
- [3] Therese C. Biedl and Martin Derka. 1-String B_2 -VPG Representation of Planar Graphs. *CoRR*, abs/1411.7277, 2014.
- [4] N. Castro, F. J. Cobos, J. C. Dana, and A. Márquez. Triangle-free planar graphs as segment intersection graphs. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 6(1):7–26, 2002.
- [5] J. Chalopin and D. Gonçalves. Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane: extended abstract. *STOC '09 Proceedings of the forty-first annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 631–638, 2009.
- [6] S. Chaplick and T. Ueckerdt. Planar graphs as VPG-graphs. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 17(4):475–494, 2013.
- [7] H. De Fraysseix, J. Pach, and R. Pollack. How to draw a planar graph on a grid. *Combinatorica*, 10(1):44–51, 1990.
- [8] S. Felsner, K. Knauer, G. B. Mertzios, and T. Ueckerdt. Intersection Graphs of L-Shapes and Segments in the Plane. *ArXiv e-prints*, May 2014.
- [9] Hubert De Fraysseix, Patrice Ossona de Mendez, and Pierre Rosenstiehl. On triangle contact graphs. *Combinatorics, Geometry and Probability: A Tribute to Paul Erdős*, pages 165–178, 1997. 10.1017/S0963548300001139.
- [10] I. B.-A. Hartman, I. Newman, and R. Ziv. On grid intersection graphs. *Discrete Math*, 87(1):41–52, 1991.
- [11] E.R. Scheinerman. *Intersection Classes and Multiple Intersection Parameters of Graphs*. PhD thesis, Princeton University, 1984.
- [12] F. Sinden. Topology of thin film RC circuits. *Bell System Tech. J.*, 45:1639–1662, 1966.
- [13] D. B. West. Open problems. *SIAM Activity Group Newsletter in Discrete Mathematics*, 2(3):2–3, 1991.

- [14] David R. Wood. Characterisations of intersection graphs by vertex orderings.
Australas. J. Combin., 34:0404031, 2004.