Posudek na disertační práci

Hana Krulišová

Quantitative properties of Banach spaces

Předložená disertační práce se zabývá několika kvantitativními vlastnostmi Banachových prostorů. Jedná se zejména o kvantitativní verze Pelczynského vlastnosti (V), Grothendieckovy vlastnosti a Banach-Saksovy vlastnosti. Kvantitativní analýza struktury Banachových prostorů je v současnosti aktuální téma, kterému se věnuje mnoho předních odborníků. Její výsledky přinášejí hlubší pochopení některých základních principů funkcionální analýzy. "Kvantifikování" přitom vyžaduje erudici a fantazii.

Disertace se skládá ze čtyř částí, z nichž každá je samostatný výzkumný článek. První část se zabývá kvantitavní Grothendieckovou vlastností. Ta je formulována jako nerovnost mezi mírou slabé* cauchyovskosti a slabé cauchyovskosti omezených posloupností v duálním prostoru. Je dokázaná souvislost mezi kvantitavní Grothendieckovou vlastností a geometrií (I)-obálky ((I)-envelope) jednotkové koule. Na základě tohoto výsledku je kvantifikikován klasický Grothendieckův výsledek říkající že ℓ^∞ má Grothendieckovu vlastnost. Dále je ukázáno, že existuje mnoho Grothendieckových prostorů, které nemají kvantitaivní Grothendieckovu vlastnost.

Druhá část je rozsáhlou studií Banach-Saksových vlastností Banachových prostorů. Jsou zde kvantifikovány implikace typu "relativní kompaktnost implikuje Banach-Saksovu vlastnost". Je ukázána zajímavá dichotomie pro kvantitativní míru slabé Banach-Saksovy vlastnosti jednotkové koule, která je rovna nule pro prostory se slabou Banach-Saksovou vlastností a rovna dvěma ve všech ostatních případech.

Třetí část se věnuje kvantifikaci Pelczynskeho vlastnosti (V). Zajímavým způsobem je zde kvantifikována charakterizace vlastnosti (V) pomocí kritéria slabé kompaktnosti omezených množin v duálním prostoru. Tato věta hraje důležitou roli při studiu C*-algeber v poslední části. Kvantifikována je také související věta charakterizující nepodmíněně konvergentní operátor (unconditionally converging operator) pomocí fixace kopií prostoru c_0. Dále je odvozena řada nerovností pro kvantifikaci některých kategorií operátorů (completely continuous, Right completely continuous, atd.).

Stěžejním výsledkem čtvrté části je věta říkající, že každá C^*-algebra splňuje kvantitativní verzi vlastnosti (V). H.Pfitzner dokázal v roce 1994, že slabá kompaktnost v duálu C*-algebry je komutativně určena. Důsledkem jeho argumentů bylo, že C*-algebry mají vlastnost (V). Výsledek disertantky zesiluje tento důležitý poznatek. V důkazu přitom používá jen část argumentů z Pfitzberovy práce, což může být považováno za zkrácení původního důkazu. Důsledkem Pfitznerovy věty byla Grothendieckova vlastnost von Neumanových algeber. Pomocí originální nerovnosti pro míru slabé*-cauchyovskosti posloupností ve druhém duálu obecného Banachova prostoru a dříve dokázané kvantitavní verze vlastnosti (V) je pak odvozeno, že každá von Neumannova algebra má kvantitativní Grothendieckovu vlastnost.

Obsah práce vyšel ve dvou samostatných článcích autorky (J. Math. Anal. Appl., Czechoslovak Math. J.) a jednom článku se spoluatory O.Kalendou a J.Spurným (J. Funct. Anal.). Další článek autorky byl zaslán k publikaci. Vysoká kvalita časopisů, kde se výsledky uplatnily, potvrzují můj názor, že se jedná o velmi zdařilý projekt.

Uvádím následující seznam některých překlepů, drobné komentáře a otázky. Překlepy nijak nesnižují kvalitu práce, otázky a komentáře jsou zčásti spekulativní a týkají se perspektiv dalšího výzkumu.

1. p. 43, l.- 7: $K = \gamma(T^*(B_{Y^*})) \to K = T^*(B_{Y^*})$.
2. p. 60, l. 2 : In the formula for $\delta(x_n)$: $x'_k, x'_l \to x_k, x_l$.
3. p. 60, Definition.: $\sum |a_r| = 1 \to \sum |a_p| = 1$.
4. p. 66, l.-7: $z'_{n_k} \to y'_{n_k}$. V tomto důkazu bych také ocenil komentář o existenci w*-limity definující element x'.

Otázky a komentáře:

1. Ve Větě 4.1, strana 62, je dokázáno, že pro *každou* C*-algebra a každou omezenou množinu K v jejím duálu platí, že

$$wck_{A'}(K) \leq c\,\eta(K)\,,$$

kde $c = \pi$. To je více než jen kvantitivní vlastnost neboť konstatnta π je univerzální pro všechny C^*-algebry. Je něco známo o nejlepší takové konstantě c pro třídu C*-algeber?

2. V závěru důkazu Věty 4.1. na straně 64 se odvozuje následující: Je-li (x_k) posloupnost ortogonálních samoadjungovaných elementů v jednotkové kouli C*-algebry A, pak $\sum_k x_k$ je wuC řada a $\sup_{x' \in B_{A'}} \sum_k |x'(x_k)| \leq 1$. Argumenty využívají Gelfandovu reprezentaci a Rieszovu větu, což neni úplně nutné. Zvláště Rieszovu větu je možno obejít užitím elementárních faktů o C*-algebrách. Jeden z možných postupů: Pro ortogonální samoadjungované elementy $x_1, \ldots, x_n$ v jednotkové kouli C*-algebry platí, že

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| = \sup_i \|x_i\| \leq 1\,.$$

To je například rychle vidět z ortogonality range projekcí elementů x_i. Z C*-identity pak máme

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| = \sup_i \|x_i\| \leq 1\,,$$

pro jakoukoliv volbu komplexních jednotek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pro každý funkcionál $x' \in B_{A'}$ pak vhodnou volbou komplexních jednotek α_i máme

$$\sum_{i=1}^{n} |x'(x_i)| = x'\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq 1\,,$$

což dá $\sup_{x' \in B_{A'}} \sum_k |x'(x_k)| \leq 1$.

3. Pfitznerův výsledek o vlastnosti (V) pro C*-algebry byl posléze zobecněn pro JB*-triplety. Je disertantce něco známo o možném analogickém zobecnění kvantitavních verzí (Theorem 4.1, p.62, Theorem 4.2 p. 64) pro JB-algebry, JB*-algebry, JB*-triplety, atd?

4. V poslední kapitole se definuje kvantitativní c-Grothendieckova vlastnost pomocí nerovnosti $\delta(x_n') \leq c\delta_{w^*}(x_n')$ kde $c > 0$. V Kapitole 1 se přitom klade omezení $c \geq 1$. Proposition 3.1 na straně 11 implikuje, že pro každé $c \geq 1$ existuje Grothendieckův prostor, který neni c-Grothendieckův. Platí toto i pro libovolné $c > 0$?

Závěr: Předložená disertační práce je velice kvalitní. Obsahuje zajímavé, originální, a netriviální výsledky. Materiál je dobře prezentován a byl publikován v mezinárodních časopisech s náročným recenzním řízením. Uchazečka prokázala matematickou erudici a schopnost samostatné tvůrčí a vědecké práce. Na základě těchto skutečností konstatuji, že práce splňuje požadavky na disertační práci. Doporučuji práci k úspěšné obhajobě, na základě které by měla být Haně Krulišové přiznány kvalifikace a titul Ph.D. ve studijním programu Matematika a oboru Matematická analýza na MFF UK v Praze.

Jan Hamhalter

V Praze, 12.8.2016,

Jan Hamhalter

Prof. RNDr. Jan Hamhalter, CSc.
Katedra matematiky FEL ČVUT
Technická 2, 166 27
Praha 6
hamhalte@math.feld.cvut.cz