

Posudek vedoucího doktorandské disertační práce

Hana Krulišová: „Quantitative properties of Banach spaces“

Předložená disertační práce je tvořena čtyřmi odbornými články, z nichž dva již byly publikovány, jeden byl přijat k publikaci a jeden byl zaslán k publikaci. Jednotlivým tématem jsou kvantitativní vlastnosti Banachových prostorů, přitom první článek se týká Grothendieckovy vlastnosti, druhý Banach-Saksovy vlastnosti a poslední dva Pełczyńského vlastnosti (V). Práce je doplněna úvodem, v němž je nejprve představen kvantitativní přístup a pak stručně vyložena základní obsah práce.

První kapitolu tvoří článek publikovaný v *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, který se věnuje kvantitativní Grothendieckové vlastnosti. (Připomeňme, že Banachův prostor má Grothendieckovu vlastnost, pokud v jeho duálu splývá slabá a slabá* konvergence posloupností.) Je zavedeno kvantitativní zesílení Grothendieckovy vlastnosti a tato vlastnost je charakterizována pomocí (I)-obálky jednotkové koule. Z toho se s využitím dřívějších výsledků školitele odvodí, že prostor ℓ^∞ má nejsilnější možnou verzi Grothendieckovy vlastnosti (1-Grothendieckovu vlastnost). Dále je dokázáno, že kvantitativní Grothendieckova vlastnost se zachovává na kvocienty, což upřesňuje známý kvalitativní výsledek a umožňuje dokázat 1-Grothendieckovu vlastnost pro některé další prostory. Rovněž je zkonstruován prostor, který má Grothendieckovu vlastnost, ale nemá její kvantitativní verzi. Za zmínku stojí i to, že na tento článek navázal jiný student, J. Lechner, ve svém článku 1-Grothendieck $C(K)$ spaces.

Druhou kapitolu tvoří článek napsaný se dvěma spoluautory (školitelem a J. Spurným) publikovaný v *Journal of Functional Analysis*. Jeho tématem je kvantifikace Banach-Saksovy a slabé Banach-Saksovy vlastnosti. Připomeňme, že omezená podmnožina A v Banachově prostoru je Banach-Saksova, pokud každá posloupnost v A má cesářovsky konvergentní podposloupnost. Dále, A je slabě Banach-Saksova, pokud lze cesářovsky konvergentní podposloupnost vybrat z každé slabě konvergentní posloupnosti v A . Jsou zavedeny přirozené kvantitativní měřící, jak daleko má množina k (slabě) Banach-Saksové vlastnosti. Jsou dokázány kvantitativní zesílení známých implikací

A relativně kompaktní $\Rightarrow A$ Banach-Saksova $\Rightarrow A$ slabě Banach-Saksova a relativně slabě kompaktní a skutečnost, že obrácení druhé z implikací, které rovněž platí, kvantitativně zesílit nelze. Dále je dokázána kvantitativní verze charakterizace slabě Banach-Saksových množin pomocí „ ℓ^1 -spreading modelů“ a stejnoměrné slabé konvergence. Nakonec je dokázána analogie Jamesovy věty o distorzi pro „ ℓ^1 -spreading modely“ a z toho dichotomie pro jednotkovou kouli – buď je slabě Banach-Saksova, nebo kvantitativně měřící, jak daleko má k slabě Banach-Saksové vlastnosti, nabývá maximální možné hodnoty (tj. 2).

Třetí kapitola obsahuje článek zasláný k publikaci, který se věnuje Pełczyńského vlastnosti (V). Banachův prostor X má Pełczyńského vlastnost (V), pokud každý „bezpodmínečně konvergentní“ operátor $T : X \rightarrow Y$ je slabě kompaktní. Jsou zavedeny tři verze kvantitativního zesílení této vlastnosti a je dokázáno, že prostor $C_0(\Omega)$ (kde Ω je lokálně kompaktní prostor) má dvě z nich, přitom třetí má v případě, že Ω je řídko rozložený, obecně však nikoli. Dále je dokázána kvantitativní verze Pełczyńského charakterizace „bezpodmínečně konvergentních“ operátorů, jako těch, které nejsou izomorfismem na žádné kopii c_0 . Na závěr je Pełczyńského vlastnost (V) a její kvantifikace dána do kontextu souvisejících vlastností, jako jsou reciproká Dunford-Pettisova vlastnost, Dieudonného vlastnost a další, a jejich kvantitativních verzí.

Poslední kapitola je tvořena článkem přijatým v *Czechoslovak Mathematical Journal*, který navazuje na třetí kapitolu. Jeho hlavní výsledek říká, že C^* -algebry mají jednu z kvantitativních verzí Pełczyńského vlastnosti (V). To rozšiřuje výsledky třetí kapitoly, protože C^* -algebry lze vnímat jako nekomutativní zobecnění prostorů $C_0(\Omega)$. Zároveň to zesiluje kvalitativní výsledek H. Pfiznera (1994). Dalším přínosem článku je nalezení jistého kvantitativního vztahu mezi Pełczyńského vlastností (V) a Grothendieckovou vlastností. Z tohoto vztahu plyne, že von Neumannovy algebry mají jistou formu kvantitativní Grothendieckovy vlastností. Tato verze je definovaná jiným způsobem než verze z první kapitoly a není zatím zřejmé, zda mezi těmito dvěma verzemi je nějaký vztah. Otázka, zda von Neumannovy algebry mají kvantitativní Grothendieckovu vlastnost ve smyslu první kapitoly, zůstává otevřená.

Všechny uvedené články obsahují netriviální nové výsledky. S výjimkou druhého článku, který je se dvěma spoluautory, jde o samostatné články uchazečky. Články spolu tematicky souvisí, čtvrtý přímo navazuje na třetí a dotýká se tématu prvního. Problémy řešené v práci jsou součástí živého tématu, na němž pracuje řada matematiků na naší fakultě i v zahraničí (např. ve Španělsku, ve Francii, v Polsku aj.), jak dokazuje uvedená literatura. Domnívám se, že předložená práce bez nejmenších pochyb prokazuje, že uchazečka je schopna samostatné tvořivé práce.

Předloženou práci jednoznačně doporučuji uznat jako doktorandskou disertační práci.

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
Katedra matematické analýzy MFF UK

V Praze dne 9. 8. 2016