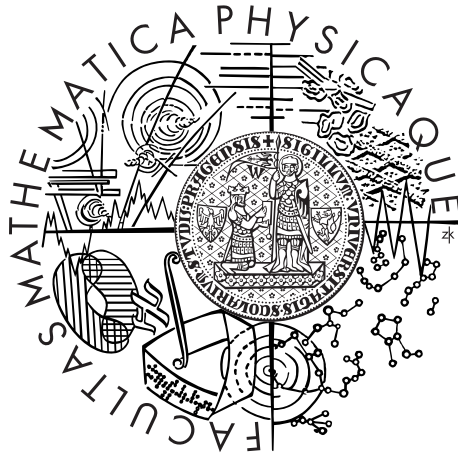


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lukáš Zavřel

## Metody Importance Sampling při řešení optimalizačních úloh

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Václav Kozmík, PhD.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2015

Rád bych poděkoval svému vedoucímu RNDr. Václavu Kozmíkovi, PhD. za odborné vedení práce, cenné rady a obrovskou vstřícnost a ochotu při konzultacích a vypracování bakalářské práce. Taktéž bych rád poděkoval své mamince za její maximální podporu nejen během mého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Metody Importance Sampling při řešení optimalizačních úloh

Autor: Lukáš Zavřel

Katedra: pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Václav Kozmík, PhD., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Předložená práce se zabývá výběrem optimálního portfolia pomocí „mean-risk“ modelů, kde zkoumané míry rizika zahrnují rozptyl, VaR a CVaR. Hlavním cílem je aproximace řešení optimalizačních úloh pomocí simulačních technik, jakými jsou Monte Carlo a Importance Sampling. Pro obě simulační techniky je zhotovena numerická studie jejich rozptylu a výkonnosti ve smyslu porovnání s optimálním řešením. Pro normální rozdělení s konkrétní střední hodnotou a rozptylem jsou empiricky odvozeny hodnoty parametrů pro generování pomocí metody Importance Sampling a následně jsou využity při řešení praktického problému volby optimálního portfolia z deseti akcií, kde jsou k dispozici jejich historické ceny po týdnech. Všechny optimalizační úlohy jsou řešeny v programu Wolfram Mathematica.

Klíčová slova: mean-risk modely, CVaR, Importance Sampling

Title: Importance Sampling methods in solving optimization problems

Author: Lukáš Zavřel

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Václav Kozmík, PhD., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Present work deals with the portfolio selection problem using mean-risk models where analysed risk measures include variance, VaR and CVaR. The main goal is to approximate solution of optimization problems using simulation techniques like Monte Carlo and Importance Sampling. For both simulation techniques we present a numerical study of their variance and efficiency with respect to optimal solution. For normal distribution with particular expected value and variance the values of parameters for sampling using Importance Sampling method are empirically deduced and they are consequently used for solving a practical problem of choice of optimal portfolio from ten stocks, when their weekly historical prices are available. All optimization problems are solved in Wolfram Mathematica program.

Keywords: mean-risk models, CVaR, Importance Sampling

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Mean-risk modely</b>	<b>3</b>
2.1	Klasický Markowitzův model . . . . .	3
2.2	Míry rizika . . . . .	4
2.3	Value at Risk . . . . .	5
2.4	Koherentní míry rizika . . . . .	5
2.5	Vlastnosti Value at Risk . . . . .	5
2.6	Conditional Value at Risk . . . . .	6
2.7	Vlastnosti Conditional Value at Risk . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Optimalizace portfolia</b>	<b>8</b>
3.1	Optimalizace užtkové funkce . . . . .	8
3.2	Metoda Monte Carlo . . . . .	8
3.3	Rychlost konvergence . . . . .	9
3.4	Importance Sampling . . . . .	9
3.4.1	Importance sampling s normalizací vah . . . . .	10
3.5	Optimalizační úlohy . . . . .	10
3.5.1	Monte Carlo optimalizace . . . . .	11
3.5.2	Importance Sampling optimalizace . . . . .	11
3.5.3	Importance Sampling s normalizací vah . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Praktická implementace</b>	<b>12</b>
4.1	Algoritmy řešení optimalizačních úloh . . . . .	13
4.1.1	Monte Carlo vs Importance sampling . . . . .	13
4.1.2	Importance sampling s normalizací vah . . . . .	14
4.1.3	Iterovaný Importance sampling s normalizací vah . . . . .	16
4.2	Portfolio deseti akcií . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>22</b>
	<b>Literatura</b>	<b>23</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>24</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>25</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Podstata obchodování na finančních a kapitálových trzích je stejná jako v případě každého jiného podnikání - je potřeba přijmout jistou míru rizika, bez níž nemůže být dosažen zisk. Rizika je ovšem nutné řídit tak, aby nebyla ohrožena existence samotné firmy. Toto je obzvláště důležité u bank a pojišťoven, jejichž kolaps by mohl ohrozit velké množství lidí i firem a destabilizovat tak platební systém i celou ekonomiku.

Mezi známá rizika, se kterými je potřeba počítat, můžeme řadit například riziko kreditní (vyplývá z neschopnosti či neochoty splácet závazky), riziko operační (ztráty v důsledku provozních nedostatků a chyb), či riziko likvidity (schopnost firmy dostát v každém okamžiku svým splatným závazkům). Přes nesporný význam výše uvedených rizik se pro potřeby naší práce budeme zabývat pouze rizikem tržním, které vyplývá ze změn tržních cen a jejich dopadu na zisk firmy.

Jednou ze základních metod, jak snížit tržní riziko z náhodného vývoje ceny jednotlivých akcií, je diverzifikace portfolia. Tu nám umožňuje využití takzvaných „Mean-Risk modelů“, které nám zajišťují v určitém smyslu optimální volbu portfolia z hlediska zisku a rizika. Další často využívaná metoda je stochastická dominance, kterou se zde ovšem zabývat nebudeme.

Od doby, kdy Harry Markowitz (1952) položil základy teorie volby portfolia, bylo představeno mnoho možností volby míry rizika. V naší práci si ukážeme často používanou míru VaR a po diskusi jejích výhod a nevýhod přejdeme k míře CVaR, která má lepší matematické vlastnosti. Taktéž budeme pracovat s technikou generování scénářů s různou pravděpodobností jejich realizace. Tyto scénáře poté můžeme uvažovat jako diskrétní rozdělení a můžeme určit hodnotu míry rizika, očekávané výnosy a ztráty a taktéž řešit úlohu optimalizace portfolia.

Následující kapitola 2 zavádí Mean-Risk modely a různé míry rizika včetně jejich vlastností, kapitola 3 se zabývá definováním naší hlavní optimalizační úlohy a seznamuje s numerickými metodami jejího řešení, kterými jsou Monte Carlo a její vylepšená verze Importance Sampling. V kapitole 4 se již zabýváme konkrétními výsledky, které získáme nejdříve z dvourozměrného normálního rozdělení a které následně využijeme pro složitější úlohu optimalizace portfolia deseti akcií, u nichž předpokládáme log-normální rozdělení. V poslední kapitole 5 je práce shrnuta.

# Kapitola 2

## Mean-risk modely

Hlavní myšlenkou Mean-risk modelů je charakterizace neznámého výnosu  $R$  (z anglického Reward) pomocí dvou veličin: střední hodnoty zisku  $\mathbb{E}[R]$  a rizika (míry rozptylu)  $\mathbb{D}[R]$ , které měří nejistotu výnosu. To, jaké vlastnosti by měla mít vhodná míra rizika budeme zkoumat v kapitolách 2.2 a 2.4. Tyto vlastnosti poté budeme ověřovat pro několik různých kandidátů, kterými jsou rozptyl, VaR či CVaR.

### 2.1 Klasický Markowitzův model

Uvažujme portfolio  $M$  akcií, jehož složení je charakterizováno vektorem vah  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_M)^\top$ , kde  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1$ . Dále mějme pro každou akcii náhodnou veličinu udávající její výnos, tedy vektor  $R = (R_1, \dots, R_M)^\top$ . Zisk z celého portfolia poté spočteme jako:

$$R(\omega) = \sum_{i=1}^M \omega_i R_i = \omega^\top R.$$

Pro naše potřeby budeme dále uvažovat trh, ve kterém není možný takzvaný short sale neboli prodej akcií, které nevlastníme, tj.  $\forall i \in \{1, \dots, M\} : \omega_i \geq 0$ . Dále pro zjednodušení označme následující funkcionály:  $u_\omega := \mathbb{E}[R(\omega)]$ ,  $r_\omega = \mathbb{D}[R(\omega)]$ . Označme navíc  $u_e$  jako minimální očekávaný zisk investora a  $r_e$  jako maximální riziko. Nyní si již můžeme zadefinovat eficientní portfolio.

**Definice 1.** *Portfolio daných  $M$  akcií s vahami  $\omega$  je (mean-risk) eficientní, pokud neexistují jiné váhy  $\omega^*$  splňující  $\sum_{i=1}^M \omega_i^* = 1$  zároveň s  $u_\omega \leq u_{\omega^*}$  a  $r_\omega \geq r_{\omega^*}$ , kde by alespoň jedna z nerovností byla ostrá.*

Eficientní portfolio je tedy řešením například následující optimalizační úlohy:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & r_\omega \\ \text{za podmínek} \quad & u_\omega \geq u_e, \\ & \sum_{i=1}^M \omega_i = 1, \\ & \omega_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Výše uvedená optimalizační úloha se snaží minimalizovat riziko za předpokladu minimálního očekávaného zisku  $u_e$ . To ovšem není jediný možný přístup. Podobně se můžeme snažit maximalizovat očekávaný zisk za předpokladu maximálního rizika  $r_e$ . Kombinací těchto dvou přístupů se můžeme snažit maximalizovat výraz  $\lambda u_\omega - (1 - \lambda)r_\omega$ , kde  $\lambda \in [0,1]$  a zároveň můžeme mít omezení na minimální očekávaný zisk a maximální riziko tj.  $u_\omega \geq u_e$  a  $r_\omega \leq r_e$ .

Úlohy s minimálním očekávaným ziskem či maximálním očekávaným rizikem nemusí mít ovšem žádné přípustné řešení, a proto v naší práci budeme uvažovat kombinovaný přístup, ovšem bez omezení minimálního zisku či maximálního rizika. Tato omezení navíc částečně může nahradit vhodná volba konstanty  $\lambda$ . Získáme tak z množiny všech přípustných řešení to, které je eficientní. Protože se snažíme najít vhodné rozložení naší investice, jsou pro nás všechna eficientní portfolia stejně dobrá a nalezení jednoho řešení nám tedy postačí. Tento přístup má mnohé výhody mezi něž patří například možnost formulace problému jako problém parametrické optimalizace a taktéž napomáhá analýze vztahu mezi středním ziskem a rizikem.

## 2.2 Míry rizika

Zaměříme se na možnosti volby míry rizika. Výnos jsme definovali jako  $R$ , a proto můžeme nyní zavést ztrátu z držení portfolia jako  $L = -R$  (z anglického Loss). Základní mírou rizika, kterou použil již Markowitz (1952) ve svém průlomovém článku o optimalizaci portfolia, je bezesporu rozptyl. Na otázku jak ale definovat obecně vhodnou míru rizika nám přinesli odpověď Artzner a kol. ve svém článku (Artzner a kol., 1999), kde zadefinovali tři důležité vlastnosti, bez kterých míra rizika nedává dost dobrý smysl.

**Definice 2.** *Uvažujme množinu  $V$  reálných náhodných veličin představujících ztrátu. Funkci  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme mírou rizika, pokud splňuje:*

- *Normalita  $\rho(0) = 0$ . (Riziko prázdné množiny akcií je nulové.)*
- *Monotonie:  $X, Y \in V, Y(\omega) \leq X(\omega), \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$ , (pokud má portfolio  $X$  ve všech scénářích větší ztrátu než  $Y$ , poté by risk portfolia  $X$  měl být větší než risk portfolia  $Y$ .)*
- *Translační ekvivariance:  $X \in V$ , dále nechť  $A$  je deterministické portfolio s garantovaným ziskem  $a \Rightarrow \rho(X + A) = \rho(X) - a$ . (Portfolio  $A$  nám pouze přidává volné finanční prostředky do našeho portfolia.)*

Rozptyl ovšem splňuje pouze normalitu. Jistě nesplňuje translační ekvivarianci neboť:  $\text{var}(R + A) = \text{var}(R) \neq \text{var}(R) - a$ , pokud  $a \neq 0$ . Navíc nesplňuje ani monotonii, neboť dominance jedné náhodné veličiny nad druhou neimplikuje nic o vztahu rozptylu těchto dvou náhodných veličin. Proto se v devadesátých letech dvacátého století začal postupně ujímat Value at Risk (dále jen VaR) neboli hodnota v riziku.



## 2.3 Value at Risk

**Definice 3.** Mějme  $\alpha \in (0,1)$  zvolenou míru spolehlivosti a náhodnou veličinu  $L$  reprezentující ztrátu uvažovaného portfolia. Poté definujeme  $\text{VaR}_\alpha(L)$  následovně:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\}.$$

Můžeme tedy říct, že  $\text{VaR}_\alpha(L)$  je maximální možná ztráta portfolia za dané období při zvolené míře spolehlivosti. VaR můžeme také interpretovat tak, že náhodná ztráta větší než  $\text{VaR}_\alpha(L)$  nastane jen s malou pravděpodobností  $1 - \alpha$  a ztráty menší než  $\text{VaR}_\alpha(L)$  nastanou s pravděpodobností  $\alpha$  blízké 1. Dále budeme vždy uvažovat 95% kvantily, tedy  $\alpha = 0,95$ .

VaR je sice již mírou rizika, ale pro použití v praxi se koncept míry rizika neukázal jako dostatečně silný, a proto opět v článku Artzner a kol. (1999) můžeme nalézt definici koherentní míry rizika.

## 2.4 Koherentní míry rizika

**Definice 4.** Uvažujme množinu  $V$  reálných náhodných veličin představujících ztrátu. Funkci  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme koherentní mírou rizika, pokud je mírou rizika a zároveň splňuje následující podmínky:

- *Positivní homogenita:*  $X \in V, c \geq 0 \Rightarrow \rho(cX) = c\rho(X)$ .
- *Sub-aditivita:*  $X, Y, X + Y \in V \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(Y) + \rho(X)$ .

Podmínka Sub-aditivity je velice důležitá a přesně vystihuje princip diverzifikace: Riziko ze dvou portfolií dohromady nemůže být větší, než součet rizik každého portfolia zvlášť. Navíc spolu s podmínkou pozitivní homogenity nám zaručuje konvexitu, neboť platí:

$$\rho(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \rho(\lambda x) + \rho((1 - \lambda)y) = \lambda\rho(x) + (1 - \lambda)\rho(y).$$

## 2.5 Vlastnosti Value at Risk

Výhody:

- VaR je univerzální míra (lze ji aplikovat na všechny druhy rizika, můžeme sčítat různá rizika do jednoho čísla).
- VaR je globálně používaná míra.
- VaR je vyjádřena v jednotce „ztráta peněz.“
- VaR je intuitivní s jasnou interpretací: Kolik můžeme ztratit s určitou mírou spolehlivosti.

Nevýhody:

- VaR nepostihuje to, jak velká ztráta může nastat při překročení VaR.
- VaR dobře nerozlišuje mezi tvary rozdělení.

- VaR není koherentní míra rizika a tedy ani není konvexní, nesplňuje předpoklady sub-aditivity.

První a druhý bod zmíněný v nevýhodách VaR úzce souvisí s rozděleními s těžkými a lehkými chvosty. Jejich rozdílnost nejlépe charakterizuje existence takového  $\alpha$ -kvantilu, že rozdělení s těžkým chvosty bude mít oproti lehkým chvostům posunutý  $\beta$ -kvantily více doprava (pro  $\beta > \alpha$ ) a tím pádem pravděpodobnost extrémních ztrát bude výrazně vyšší. Jestliže budou mít obě rozdělení stejný  $\alpha$ -kvantil, tak poté rozdělení s těžkým chvosty bude mít pro  $\beta > \alpha$  oproti lehkým chvostům posunutý  $\beta$ -kvantily více doprava (tedy jsou vyšší) a tím pádem i pravděpodobnost extrémních ztrát bude výrazně vyšší.

Konvexita by nám zajistila, že lokální minima jsou zároveň globálními minimy. V článku Sergey a kol. (2008) bylo ale ukázáno, že  $\text{VaR}_\alpha(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega^\top R_j)$  jako funkce jednotlivých vah  $\omega_j$  vůbec nemusí být konvexní a může mít mnoho lokálních extrémů, což nám značně znesnadňuje optimalizaci.

Sub-aditivita VaR se dá snadno vyvrátit následujícím příkladem: Uvažujme dluhopisy v hodnotě 1 000 Kč, které nám zaručují výnos 3% p.a. Pravděpodobnost, že emitent daný rok zbankrotuje a nebude tak schopný dostát svým závazkům a dluhopis tak bude bezcenný je 0,001. Těchto dluhopisů jsme nakoupili 100 ks, přičemž uvažujeme, že ztráty jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny. Poté hodnota  $\text{VaR}_\alpha$  pro ztrátu z jednotlivých kusů dluhopisů bude rovna  $-30$  Kč. Záporná ztráta je zisk a dluhopisy tak vypadají jako bezrizikové, celkový součet tedy bude  $-3000$ . Ovšem pro dluhopisy jako celek je pravděpodobnost, že žádný emitent nezbankrotuje rovna:  $0,999^{100} \doteq 0,905$  a tedy  $\text{VaR} \geq -30 \cdot 99 + 1\,000 = -1\,970$ . Předpoklad subaditivity tedy není splněn.

VaR je sice na rozdíl od rozptylu mírou rizika, má ale zároveň hned několik negativ, které ho mohou činit suboptimálním nástrojem pro určení rizika. Proto byl koncept VaR značně vylepšen a čím dál tím více se začíná používat Conditional Value at Risk neboli CVaR, v anglicky psané literatuře značen též jako Average Value at Risk (AVaR), expected tail loss (ETL) nebo expected shortfall (ES).

## 2.6 Conditional Value at Risk

**Definice 5.** *Mějme  $\alpha \in (0,1)$  zvolenou míru spolehlivosti a náhodnou veličinu  $L$  reprezentující ztrátu uvažovaného portfolia s distribuční funkcí  $G(x)$ . Definujme  $\text{CVaR}_\alpha(L)$  jako:*

$$\text{CVaR}_\alpha(L) := \mathbb{E}\{L | L \geq \text{VaR}_\alpha(L)\}.$$

Jinými slovy je  $\text{CVaR}_\alpha(L)$  definované jako střední hodnota  $\alpha$ -chvostu rozdělení  $L$ . V tomto případě toto rozdělení definujeme jako

$$G_\alpha(x, \text{VaR}_\alpha(L)) := \begin{cases} \frac{G(x) - \alpha}{1 - \alpha}, & x \geq \text{VaR}_\alpha(L), \\ 0, & x < \text{VaR}_\alpha(L). \end{cases}$$

Předpokládejme nyní, že  $\mathbb{E}|X| < \infty$  a definujme funkci

$$F_\alpha(L, u) := u + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[L - u]^+,$$

která je konvexní a spojitá vzhledem k proměnné  $u$ . Rockafellar a Uryasev (2002) ukázali, že platí:

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \min_{u \in \mathbb{R}} F_\alpha(L, u) = \min_{u \in \mathbb{R}} \left\{ u + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[L - u]^+ \right\}.$$

## 2.7 Vlastnosti Conditional Value at Risk

Výhody:

- CVaR je stále ještě intuitivně pochopitelné: Uvažujme ztrátu  $L$ , poté průměr  $(1 - \alpha)\%$  největších ztrát nepřekročí hodnotu  $\text{CVaR}_\alpha(L)$ .
- CVaR je koherentní mírou rizika.
- $\text{CVaR}_\alpha$  je spojitá vzhledem k  $\alpha$ .
- Optimalizace CVaR může být zredukována na úlohu konvexní optimalizace, v některých případech dokonce na úlohu lineární optimalizace, například pro diskrétní rozdělení.

Nevýhody:

- Přesnost CVaR odhadu je silně ovlivněná přesností modelování chvostu, při absenci dobrého modelu pravděpodobnostního rozdělení pro chvost je proto lepší zvolit jinou míru rizika.

Protože je CVaR střední hodnotou  $\alpha$ -chvostu rozdělení  $L$ , bude naší snahou mít dostatek scénářů z chvostu, abychom mohli CVaR dobře odhadnout.

# Kapitola 3

## Optimalizace portfolia

Po krátkém úvodu k Mean-risk modelům a volbě vhodné míry rizika se nyní pokusíme vyřešit první optimalizační úlohy.

### 3.1 Optimalizace užitékové funkce

**Definice 6.** *Mějme  $\alpha \in (0,1)$  zvolenou míru spolehlivosti a náhodnou veličinu  $L$  reprezentující ztrátu uvažovaného portfolia. Dále uvažujme  $(1 - \lambda) \in [0,1]$  jako investovnou averzi vůči riziku. Poté můžeme definovat investovnou užitékovou funkci, kterou se snaží maximalizovat jako:*

$$U^*(L) = -\lambda\mathbb{E}[L] - (1 - \lambda) \text{CVaR}_\alpha[L].$$

Pro naše potřeby můžeme přeznačit  $U(L) = -U^*(L)$  a naší úlohou tak bude minimalizovat následující funkci:

$$U(L) = \lambda\mathbb{E}[L] + (1 - \lambda) \text{CVaR}_\alpha[L].$$

Velice často ovšem neumíme analyticky zjistit některé vlastnosti náhodné veličiny  $L$ , a proto se nabízí tuto úlohu řešit numericky. Předpokládejme, že máme nezávislé náhodně rozdělené realizace náhodné veličiny  $L$ . V našem případě budeme mít k dispozici historická data, o kterých toto budeme předpokládat. Analýzou těchto dat zjistíme vlastnosti jejich rozdělení a za předpokladu, že budoucí realizace mají stejné rozdělení jako realizace minulé, se je pokusíme odhadnout. Tento předpoklad je samozřejmě velice silný a v praxi jen těžko můžeme odhadovat budoucí vývoj pouze na základě vývoje minulého. My se ovšem pro potřeby naší bakalářské práce tohoto zjednodušení dopustíme. Této metodě, kdy pomocí náhodných realizací jistého rozdělení určujeme vlastnosti tohoto rozdělení, říkáme metoda Monte Carlo.

### 3.2 Metoda Monte Carlo

**Definice 7.** *Nechť  $\{L_1, L_2, \dots, L_N\}$  jsou nezávislými náhodnými realizacemi náhodné veličiny  $L$ . Jejich uspořádaný výběr označme  $\{L_{(1)}, L_{(2)}, \dots, L_{(N)}\}$ . Poté pomocí metody Monte Carlo dostaneme následující:*

$$U(L) \approx U(L_{(1)}, \dots, L_{(N)}) = \lambda\mathbb{E}[L_{(1)}, \dots, L_{(N)}] + (1 - \lambda) \text{CVaR}_\alpha[L_{(1)}, \dots, L_{(N)}] =$$

$$= \lambda \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_{(i)} + (1 - \lambda) \frac{1}{(1 - \alpha)N} \sum_{i=\alpha N}^N L_{(i)}.$$

Poslední uvedená rovnost platí ovšem pouze za předpokladu, že  $(1 - \alpha)N$  a  $\alpha N$  jsou celá čísla. V opačném případě bychom byli nuceni dělit atomy pravděpodobnosti, ale vzhledem k relativně velkému statistickému vzorku a pevnému  $\alpha$  nám tato verze postačí.

### 3.3 Rychlost konvergence

Otázkou nyní ovšem je, jestli by nebylo lepší místo metody Monte Carlo uvažovat aproximaci Riemannovou sumou. Uvažujme například interval  $[0,1]$  a funkci  $\psi$ , jejíž střední hodnotu se na tomto intervalu snažíme zjistit. Metoda Monte Carlo nám vygeneruje nezávislé stejně rozdělené realizace  $X_1, \dots, X_N$  rovnoměrného rozdělení na intervalu  $[0,1]$  a střední hodnotu  $\mu$  tak můžeme aproximovat následovně:

$$\mu := \int_0^1 \psi(x) dx \approx \mu_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(X_j).$$

V případě Riemannovy sumy s volbou rovnoměrného rozdělení intervalů, tj.  $x_j \in [(j-1)/N, j/N], j = 1, \dots, N$  a volbou středů intervalů  $[(j-1)/N, j/N], j = 1, \dots, N$ , tj.  $x_j = (2j-1)/(2N)$  dostáváme následující:

$$\int_0^1 \psi(x) dx \approx \mu_{RS} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(x_j).$$

Pokud je funkce  $\psi$  Lipschitzovská na intervalu  $[0,1]$ , poté na základě knihy Shapiro a kol. (2009) je chyba Riemannovy sumy řádu  $O(N^{-1})$ , zatímco chyba metody Monte Carlo je řádu  $O(N^{-1/2})$ . Zdůvodnění je relativně zřejmé, realizace pomocí Monte Carlo mají tendenci se shlukovat v některých místech a tím pádem ponechávají ostatní místa nedostatečně pokrytá. Proto nemá cenu využívat metodu Monte Carlo pro jednorozměrná data. Tato situace se ale rychle změní v případě, že budeme zvyšovat dimenzi  $d$ . Uvažujme tedy jednotkovou  $d$ -rozměrnou krychli  $I^d = [0,1]^d$  a naším cílem bude spočítat integrál  $\int_{I^d} \psi(x)$ , kde  $\psi : I^d \rightarrow \mathbb{R}$  je měřitelnou funkcí. Poté každou dimenzi můžeme rozdělit do  $M$  stejně dlouhých intervalů a tedy rozdělíme  $I^d$  na  $N = M^d$  subintervalů a použijeme stejnou aproximaci střední hodnoty  $\mu_{RS}$ . Chyba této aproximace je řádu  $O(M^{-1}) = O(N^{-1/d})$ . Pro  $d = 2$  je tedy tato metoda srovnatelná s metodou Monte Carlo, ale pro větší  $d$  tato aproximace začne rychle být nepoužitelná.

### 3.4 Importance Sampling

Metoda Monte Carlo má ovšem své nevýhody. Předpokládejme, že  $N = 1\,000$ . Poté pro hladinu spolehlivosti  $\alpha = 0,95$  budeme CVaR odhadovat právě z padesáti pozorování, zatímco střední hodnotu z tisíce. Proto by bylo vhodné upravit poměr hodnot větších než VaR tak, abychom jich měli několikanásobně více. Tím pádem bychom mohli za cenu malé ztráty přesnosti ve výpočtu střední hodnoty získat několikanásobně přesnější odhad CVaR.

**Definice 8.** Mějme náhodnou veličinu  $X$  se známou hustotou rozdělení  $f$  a necht'  $Q(X)$  je funkcí  $X$  s neznámou konečnou střední hodnotou  $\mu = \mathbb{E}_f[Q(X)]$ . Poté nutně platí

$$\mu = \int Q(x)f(x)dx = \int \frac{Q(x)f(x)}{g(x)}g(x)dx,$$

kde  $f(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$ . Toto poté vede k obvyklému odhadu pomocí metody Importance Sampling

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{Q(X_i)f(X_i)}{g(X_i)},$$

kde  $X_i \sim g$  pro  $i = 1, \dots, N$ .

Uvažujme tedy, že před každým generováním jedné náhodné veličiny  $X$  si hodíme vychýlenou mincí s pravděpodobnostmi 0,7 a 0,3. V prvním případě vygenerujeme hodnotu menší než  $\text{VaR}_\alpha(X)$ , ve druhém naopak hodnotu větší. (Například generujeme tak dlouho z původního rozdělení dokud nepřekročíme hranici  $\text{VaR}_\alpha(X)$ .) Původní funkcionál nyní ovšem musíme přizpůsobit naší pozměněné distribuční funkci, na základě které generujeme. Pokud tedy původní hustota byla  $f$  a nová  $g$ , musíme v původním funkcionálu zohlednit tuto váhu jako  $\frac{f}{g}$ . V případě námi zvolené hladiny spolehlivosti  $\alpha = 0,05$  proto budeme mít v našem příkladu váhu  $\frac{1}{20} \cdot \frac{20}{6} = \frac{1}{6}$  u hodnot vyšších než  $\text{VaR}_\alpha(X)$  a váhu  $\frac{19}{20} \cdot \frac{20}{14} = \frac{19}{14}$  u hodnot menších.

### 3.4.1 Importance sampling s normalizací vah

Problém tohoto přístupu jsou bezesporu váhy kterými upravujeme důležitost jednotlivých pozorování. Zaveďme si váhovou funkci  $W(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ . Poté pro průměr empirických vah  $\bar{W}$  platí  $\bar{W} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W(X_i)$ . Tento průměr má střední hodnotu rovnou 1, ale nikoli nulový rozptyl. Toto souvisí i s rozptylem uvažovaného funkcionálu, do kterého tyto váhy vstupují. Velice snadno si můžeme pomoci normalizací a to tak, že místo váhy  $W(x)$  uvažujeme normalizovanou váhu  $W(x)/\bar{W}$ . Na základě článku Hesterberg (1995) se nám poté sníží i rozptyl odhadu pomocí Importance Samplingu.

## 3.5 Optimalizační úlohy

Již na začátku kapitoly jsme si zadefinovali optimalizační úlohu, kterou se budeme snažit řešit. V další části budeme uvažovat investorovu averzi vůči riziku rovnou  $(1-\lambda) = \frac{1}{2}$ . Podívejme se nyní blíže na náhodnou veličinu  $L_\omega$  reprezentující ztrátu portfolia. Mějme  $M$  akcií, ze kterých se naše portfolio skládá, a ztrátu z jejich držení označme  $L = (L^1, \dots, L^M)$ . Dále uvažujme váhy  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_M)$  splňující  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1$ . Ztrátu z držení našeho portfolia poté můžeme spočítat jako

$$L_\omega = \sum_{i=1}^M \omega_i L^i = \omega^\top L.$$

Na základě článku (Rockafellar a Uryasev, 2002) můžeme navíc psát

$$\text{CVaR}_\alpha(L_\omega) = \text{CVaR}_\alpha(\omega^\top L) = \min_{u \in \mathbb{R}} \left\{ u + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[\omega^\top L - u]^+ \right\}.$$

### 3.5.1 Monte Carlo optimalizace

Předpokládejme nyní, že máme k dispozici  $N$  náhodných realizací vývoje těchto akcií, tj.  $N$   $M$ -tic  $\{(L_1^1, \dots, L_1^M), \dots, (L_N^1, \dots, L_N^M)\}$ . Definujme navíc  $L_j = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot L_j^i$ . Poté již můžeme původní úlohu ze sekce 3.2 přepsat jako úlohu lineárního programování v následujícím tvaru:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ \omega_i \in \mathbb{R}_0^+, i=1, \dots, M}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_j + \left( u + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{j=1}^N [L_j - u]^+ \right) \right\},$$

za podmínek  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1$ .

Výše uvedená úloha lineárního programování využívá klasické Monte Carlo generování.

### 3.5.2 Importance Sampling optimalizace

**Definice 9.** Předpokládejme nyní, že místo původní hustoty rozdělení  $f$  náhodné veličiny  $L_\omega$  definujeme novou hustotu  $g$  následujícím způsobem:

$$g(l) := \begin{cases} \frac{f(l) \cdot p}{\alpha}, & l < \text{VaR}_\alpha(L_\omega), \\ \frac{f(l) \cdot (1-p)}{(1-\alpha)}, & l \geq \text{VaR}_\alpha(L_\omega), \end{cases}$$

kde  $p \in (0,1)$ .

Nový tvar úlohy má poté následující tvar:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ \omega_i \in \mathbb{R}_0^+, i=1, \dots, M}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{f(L_j)}{g(L_j)} L_j + \left( u + \frac{1}{(1-\alpha)N} \sum_{j=1}^N \frac{f(L_j)}{g(L_j)} [L_j - u]^+ \right) \right\},$$

za podmínek  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1$ .

### 3.5.3 Importance Sampling s normalizací vah

Poslední co nám zbývá je implementace normalizace vah, která byla zavedena v sekci 3.4.1. Pro snížení rozptylu se tedy pokusíme nahradit  $N^{-1}$  výrazem  $(\bar{W}N)^{-1}$ . Optimalizační úloha má poté tvar:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ \omega_i \in \mathbb{R}_0^+, i=1, \dots, M}} \left\{ (\bar{W}N)^{-1} \sum_{j=1}^N \frac{f(L_j)}{g(L_j)} L_j + \left( u + \frac{(\bar{W}N)^{-1}}{(1-\alpha)} \sum_{j=1}^N \frac{f(L_j)}{g(L_j)} [L_j - u]^+ \right) \right\},$$

za podmínek  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1$ .

Problémem posledních dvou optimalizačních úloh je ovšem již samotné generování nové distribuce  $g$ . V naprosté většině neznáme  $\text{VaR}_\alpha(L_\omega)$ , optimální váhy ani volbu vhodné pravděpodobnosti  $p$  s jakou chceme generovat hodnoty menší než  $\text{VaR}_\alpha(L_\omega)$ .

# Kapitola 4

## Praktická implementace

V praktické implementaci stojíme hned před několika problémy, které se pokusíme vyřešit. V první řadě nevíme, s jak velkou pravděpodobností  $(1 - p)$  chceme generovat krajní hodnoty větší než  $\text{VaR}_\alpha(L_\omega)$ , a proto se pokusíme tuto pravděpodobnost empiricky určit. Budeme postupně generovat sady scénářů s různými pravděpodobnostmi a na základě směrodatné odchylky od analytického řešení vybereme nejvhodnější pravděpodobnost.

Druhý problém spočívá v tom, že v reálných aplikacích nemáme žádné analytické řešení a tak neznáme ani například hodnotu  $\text{VaR}_\alpha(L_\omega)$ , kterou při generování pomocí Importance Samplingu používáme. Proto musíme tento čistě praktický problém vyřešit iterativně. První menší část našich scénářů generovaná metodou Monte Carlo proto bude určena k přibližnému určení hodnoty  $\text{VaR}_\alpha(L_\omega)$ , na základě které bude druhá část již generována metodou Importance Samplingu. Naším cílem je ovšem opět určit tento poměr, kde se na jedné straně chceme vyvarovat malému množství scénářů v první části, aby nám nepřesný odhad  $\text{VaR}_\alpha(L_\omega)$  nevychýlil celé generování v druhé části, ale zároveň se chceme vyhnout příliš velkému množství, jehož přesnost by se poté již příliš blížila obyčejnému Monte Carlu. Ve třetí části se zaměříme na normalizaci vah a porovnáme rozptyly normálních a znormovaných funkcionalů.

Všechny tyto výpočty provádíme pro dvourozměrné normální rozdělení s vektorem středních hodnot  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  a varianční maticí  $\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 4 \end{pmatrix}$ .

Poslední část se již bude věnovat řešení praktického problému volby ideálního portfolia akcií. Jako data nám poslouží 10 Akcií a jejich historický vývoj na Pražské burze v týdenních intervalech z let 2007-2012. Těmito akciemi jsou: AAA (AAA Auto), CETV (Mediální mezinárodní korporace vlastníci například TV Nova nebo Markíza), ČEZ, ERSTE (Bankovní skupina, majitel např. České spořitelny), KOMB (Komerční banka), ORCO (developerská společnost), PE-GAS (netkané textilie), PHILL (Philip Morris - výrobce cigaret), TELE (Telefónica), UNI (Unipetrol). Na základě knihy Hald (1952) může být být lognormální rozdělení pro malé hodnoty poměru směrodatné odchylky a střední hodnoty (v našem případě se tyto hodnoty pohybují mezi 0,03 a 0,1) uvažováno jako blízké normálnímu a proto využijeme předem napočítané koeficienty pro normální rozdělení a aplikujeme je na náš praktický problém pro nalezení optimálního portfolia.



## 4.1 Algoritmy řešení optimalizačních úloh

V následujících algoritmech budeme používat toto značení:

$p$	Pravděpodobnost generování hodnot menších než $\text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ .
$\omega_{opt}$	Optimální váhy minimalizující funkci $U$ definovanou v definici 6.
$N$	Počet generovaných scénářů.
$B$	Počet běhů generování.
$L_{\omega_{opt}}$	Ztráta v případě volby ideálních vah.
$\gamma$	Poměr generování mezi Monte Carlo a Importance Samplingem u iterované metody.

### 4.1.1 Monte Carlo vs Importance sampling

Naší první úlohou je porovnat rozptyl funkcionalů, které jsme získali jednak klasickou metodou generování Monte Carlo a jednak její vylepšenou verzí za použití Importance Samplingu. Protože ovšem neznáme pravděpodobnost  $p$ , zvolíme postupně hodnoty  $\{\frac{20}{40}, \frac{21}{40}, \dots, \frac{39}{40}\}$  a pro každou poté určíme hodnotu rozptylu jednotlivých řešení. Pravděpodobnosti menší než  $1/2$  zde uvedeny nejsou, neboť u nich s rostoucím počtem hodnot větších než  $\text{VaR}_\alpha(L_\omega)$  již výrazně klesala přesnost odhadu střední hodnoty a rozptyly tak již byly výrazně vyšší než u námi uvažovaných pravděpodobností.

**Algoritmus 1.** Pro nalezení vhodné pravděpodobnosti  $p$  použijeme následující algoritmus:

1. Analyticky spočítej hodnotu optimálních vah  $\omega_{opt}$  a hodnotu  $\text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ .
2. Postupně počítej pro uvažované hodnoty  $p$   $N$ -krát následující:
  - (a) Vygeneruj náhodné číslo  $r$  z intervalu  $[0,1]$ . Pokud platí  $r > p$ , generuj z chvostu, jinak ze zbytku rozdělení.
  - (b) Pokud generujeme z chvostu, generuj tak dlouho z našeho rozdělení  $f$  definovaného v Definici 9 náhodné realizace  $L^{\{j\}}$ , dokud nebude platit  $\omega_{opt}^\top L^{\{j\}} > \text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ , ulož  $\frac{f(L^{\{j\}})}{g(L^{\{j\}})} := \frac{1-\alpha}{1-p}$ . Pokud generujeme ze zbytku, generuj dokud neplatí  $\omega_{opt}^\top L^{\{j\}} \leq \text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ , ulož  $\frac{f(L^{\{j\}})}{g(L^{\{j\}})} := \frac{\alpha}{p}$ .  
(Výše uvedené body (a) a (b) nahrazují generování z rozdělení  $g$ .)
3. Vyřeš Importance Sampling optimalizační úlohu uvedenou v sekci 3.5.2.
4. Celý výše uvedený postup zopakuj  $B$ -krát, spočti průměr kvadratických odchylek  $B$  hodnot funkce  $U(L^{\{1\}}, L^{\{2\}}, \dots, L^{\{N\}})$  od  $L_{\omega_{opt}}$  pro všechny uvažované hodnoty  $p$ . Urči takové  $p$ , pro které je tato hodnota nejmenší.

Monte Carlo optimalizační úlohu v sekci 3.5.1 pro porovnání výsledků nemusíme speciálně implementovat, protože je speciálním případem námi zvolené Importance Sampling optimalizační úlohy pro  $p = \alpha$ , v našem případě tedy pro  $p = 0,95$ .

V tabulce 4.1 vidíme, že nejmenších hodnot kvadratické odchylky dosahujeme pro hodnotu  $p = 0,75$ , která nám vychází o cca 45% menší než hodnota pro Monte Carlo generování neboli pro  $p = 0.95$ . V dalších výpočtech tedy zafixujeme tuto hodnotu a budeme řešit volbu dalších konstant.

V tabulce jsou výsledky pro následující hodnoty konstant:

$N$	Počet generovaných scénářů	500,
$B$	Počet běhů generování.	1200,
$p$	Pravděpodobnosti generování	$\{\frac{20}{40}, \frac{21}{40}, \dots, \frac{39}{40}\}$ .

Pravděpodobnost $p$	Kvadratická odchylka
0,5	0,00295795
0,525	0,00264168
0,55	0,00263197
0,575	0,00261869
0,6	0,00254945
0,625	0,00244706
0,65	0,00229571
0,675	0,00208542
0,7	0,00211544
0,725	0,00199569
<b>0,75</b>	0,00186395
0,775	0,00200686
0,8	0,00189807
0,825	0,00213351
0,85	0,00214330
0,875	0,00229708
0,9	0,00247693
0,925	0,00281714
0,95	0,00341571
0,975	0,00555653

Tabulka 4.1: Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na pravděpodobnosti  $p$ .

#### 4.1.2 Importance sampling s normalizací vah

Pro námi empiricky získanou pravděpodobnost  $p = 0,75$  řešíme paralelně optimalizační úlohy v sekcích 3.5.2 a 3.5.3 na stejných datech. První dva kroky jsou stejné jako v Algoritmu 1, zbylé se jen drobně liší v tom, že tentokrát počítáme pouze s jednou hodnotou  $p$  a neporovnáváme kvadratické odchylky pro jednotlivá  $p$ , nýbrž pro dvě různé optimalizační úlohy.

**Algoritmus 2.** Cílem je porovnání kvadratických odchylek pro dvě různé optimalizační úlohy představené v sekcích 3.5.2 (označme uživatkovou funkci, kterou se zde snažíme minimalizovat  $U_{IS}$ ) a 3.5.3 (zde ji označme  $U_{ISN}$ ). Použijeme tedy následující algoritmus.

1. Analyticky spočítej hodnotu optimálních vah  $\omega_{opt}$  a hodnotu  $\text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ .
2. Postupně počítej pro  $p = 0,75$   $N$ -krát následující:
  - (a) Vygeneruj náhodné číslo  $r$  z intervalu  $[0,1]$ . Pokud platí  $r > p$ , generuj z chvostu, jinak ze zbytku rozdělení.
  - (b) Pokud generujeme z chvostu, generuj tak dlouho z našeho rozdělení  $f$  definovaného v Definici 9 náhodné realizace  $L^{\{j\}}$ , dokud nebude platit  $\omega_{opt}^\top L^{\{j\}} > \text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ , ulož  $\frac{f(L^{\{j\}})}{g(L^{\{j\}})} := \frac{1-\alpha}{1-p}$ . Pokud generujeme ze zbytku, generuj dokud neplatí  $\omega_{opt}^\top L^{\{j\}} \leq \text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ , ulož  $\frac{f(L^{\{j\}})}{g(L^{\{j\}})} := \frac{\alpha}{p}$ .  
(Výše uvedené body (a) a (b) nahrazují generování z rozdělení  $g$ .)
3. Vyřeš Importance Sampling optimalizační úlohu uvedenou v sekci 3.5.2 a Importance Sampling optimalizační úlohu s normalizací dat uvedenou v sekci 3.5.3.
4. Celý výše uvedený postup zopakuj  $B$ -krát, spočti průměr kvadratických odchylek  $B$  hodnot funkcí  $U_{IS}(L^{\{1\}}, L^{\{2\}}, \dots, L^{\{N\}})$  a  $U_{ISN}(L^{\{1\}}, L^{\{2\}}, \dots, L^{\{N\}})$  od  $L_{\omega_{opt}}$  pro všechny uvažované hodnoty  $N$ . Pro každé  $N$  urči tu úlohu, pro kterou je tato hodnota nejmenší.

V tabulce jsou výsledky pro následující hodnoty konstant:

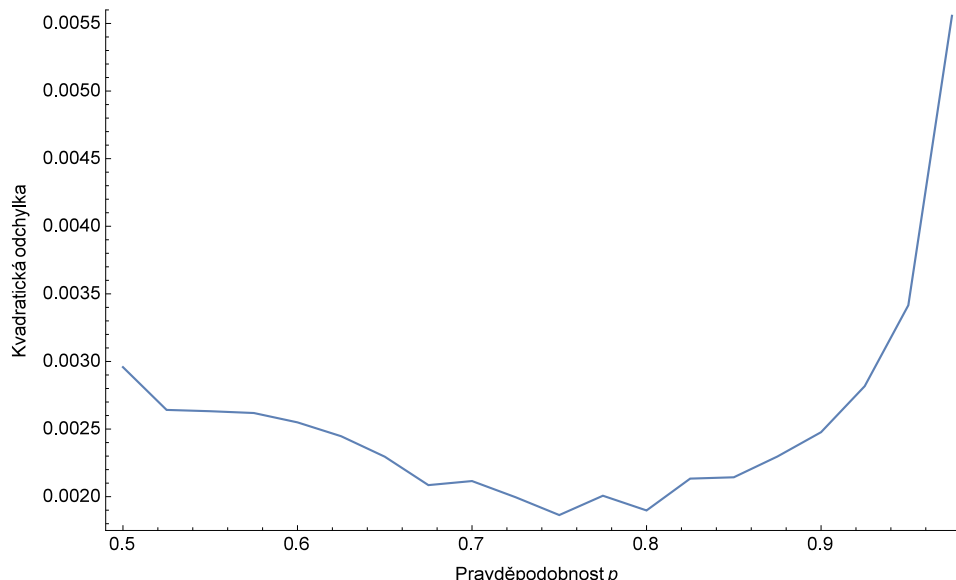
$N$	Počet generovaných scénářů	$\{500, 1\,000, 2\,000\}$ ,
$B$	Počet běhů generování.	1200,
$p$	Pravděpodobnosti generování	$\frac{3}{4}$ .

Typ úlohy	Počet scénářů $N$	Kvadratická odchylka
IS	500	0,00188386
ISN		0,00131301
IS	1 000	0,00107230
ISN		0,00074539
IS	2 000	0,00043215
ISN		0,00029488

*Pozn:* IS: Klasický Importance Sampling, ISN: Importance Sampling s normalizací vah.

Tabulka 4.2: Porovnání kvadratických odchylek od optimálního funkcionálu pro Importance Sampling a Importance Sampling s normalizací vah.

V Tabulce 4.2 vidíme, že pro všechny tři hodnoty počtu generovaných scénářů  $N$  se kvadratická odchylka sníží cca o 30%, což můžeme považovat za opravdu velký rozdíl vzhledem k tomu, že jsme nikterak nezvýšili čas potřebný k vyřešení optimalizační úlohy. Výsledné úspory jsme dosáhli pouze mírnou úpravou optimalizační úlohy.



Obrázek 4.1: Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na pravděpodobnosti  $p$ .

### 4.1.3 Iterovaný Importance sampling s normalizací vah

Oba dosud zmíněné algoritmy mají vždy stejný první krok, kterým je analytické určení optimálních vah a hodnoty optimálního funkcionálu. Toto můžeme provést, pokud se pouze snažíme ověřit vhodnost Importance Sampling generování namísto klasického Monte Carlo. Pro praktické použití je to ovšem naprosto nevhodné, neboť bychom předpokládali, že již známe řešení úlohy, kterou se snažíme vyřešit. Proto se budeme snažit implementovat metodu iterovaného Importance Samplingu.

**Algoritmus 3.** *Náš poslední algoritmus se liší od předchozích pouze způsobem určení optimálních vah a funkcionálu. Na základě těchto změn se poté samozřejmě změní finální optimalizační úloha kterou se budeme snažit vyřešit. Algoritmus následuje:*

1. *Postupně počítej pro uvažované hodnoty  $\gamma$  následující:*
2. *Prvních  $\gamma N$  scénářů generuj pomocí metody Monte Carlo a vyřeš optimalizační úlohu ze sekce 3.5.1. Výsledné váhy označ  $\omega_{opt}$  a výslednou hodnotu VaR označ  $\text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ .*
3. *Pro zbylých  $(1 - \gamma)N$  scénářů počítej následující:*
  - (a) *Vygeneruj náhodné číslo  $r$  z intervalu  $[0,1]$ . Pokud platí  $r > p$ , generuj z chvostu, jinak ze zbytku rozdělení.*

(b) Pokud generujeme z chvostu, generuj tak dlouho z našeho rozdělení  $f$  definovaného v Definici 9 náhodné realizace  $L^{\{j\}}$ , dokud nebude platit  $\omega_{opt}^\top L^{\{j\}} > \text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ , ulož  $\frac{f(L^{\{j\}})}{g(L^{\{j\}})} := \frac{1-\alpha}{1-p}$ . Pokud generujeme ze zbytku, generuj dokud neplatí  $\omega_{opt}^\top L^{\{j\}} \leq \text{VaR}_\alpha(L_{\omega_{opt}})$ , ulož  $\frac{f(L^{\{j\}})}{g(L^{\{j\}})} := \frac{\alpha}{p}$ .

4. Vyřeš Iterovanou Importance Sampling optimalizační úlohu:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R} \\ \omega_i \in \mathbb{R}_0^+, i=1, \dots, M}} (\gamma N)^{-1} \sum_{j=1}^{\gamma N} L_j + (\bar{W} N (1 - \gamma))^{-1} \sum_{j=\gamma N+1}^N \frac{f(L_j)}{g(L_j)} L_j + u$$

$$+ \frac{1}{(1 - \alpha) \gamma N} \sum_{j=1}^{\gamma N} [L_j - u]^+$$

$$+ \frac{(\bar{W} N (1 - \gamma))^{-1}}{(1 - \alpha)} \sum_{j=\gamma N+1}^N \frac{f(L_j)}{g(L_j)} [L_j - u]^+$$

za podmíněk  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1,$

5. Celý výše uvedený postup zopakuj  $B$ -krát, spočti a porovnej kvadratické odchylky  $B$  hodnot funkce  $U$  od  $L_{\omega_{opt}}$  pro všechny uvažované hodnoty  $\gamma$ . Urči takové  $\gamma$ , pro které je tato hodnota nejmenší.

V tabulce jsou výsledky pro následující hodnoty konstant:

$N$	Počet generovaných scénářů	5 000,
$B$	Počet běhů generování.	200,
$\gamma$	Poměr generování MC vs IS	$\{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}\}$ .

$\gamma$	Kvadratická odchylka
0,1	0,00233218
0,2	0,00132770
0,3	0,00100958
0,4	0,00078418
0,5	0,00069756
0,6	0,00066033
0,7	0,00051771
0,8	0,00036371
<b>0,9</b>	<b>0,00037584</b>

Tabulka 4.3: Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru  $\gamma$ .

V tabulce 4.3 si můžeme všimnout jistého paradoxu: Čím více scénářů nageneme klasickou metodou Monte Carlo, tím menší kvadratické odchylky dosáhneme. To samé platí bohužel nejen pro 5 000 generovaných scénářů, ale i pro 20 000 a 100 000. Vidíme tedy, že docházíme k jistému sporu s předchozími výsledky, kdy nám vycházelo generování pomocí Importance Samplingu výrazně lépe. Znamená to tedy, že suboptimální hodnoty vah a funkcionálu získané v první části algoritmu nejsou dostatečně přesné a každý scénář vygenerovaný metodou Monte Carlo napomůže více k menší kvadratické odchylce než scénář vygenerovaný pomocí Importance Samplingu. Toto souvisí úzce s nevýhodou Importance Samplingu - nemáme dostatečně přesný pravděpodobnostní model chvostu a proto nám metoda selhává.

Naštěstí nás při investování nezajímá jen stabilita řešení ale i výkonnost řešení. V případě kvadratické odchylky funkce  $U(L_{(1)}, \dots, L_{(N)})$  od  $L_{\omega_{opt}}$  používáme nagenované scénáře k určení hodnoty funkce  $U$ , místo toho se ale můžeme podívat na skutečnou výkonnost optimálních vah. Na základě diplomové práce (Kozmík, 2010) víme, že pro normální rozdělení ztrát jednotlivých akcií se střední hodnotou  $\mu$  a varianční maticí  $V$  můžeme užitečnou funkci  $U$  z definice 6 přepsat následovně:

$$U(L) = \lambda \omega^\top \mu + (1 - \lambda) \left[ \omega^\top \mu + \frac{\exp\left\{\frac{-q_\omega^2}{2}\right\}}{(1 - \alpha)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\omega^\top V \omega} \right].$$

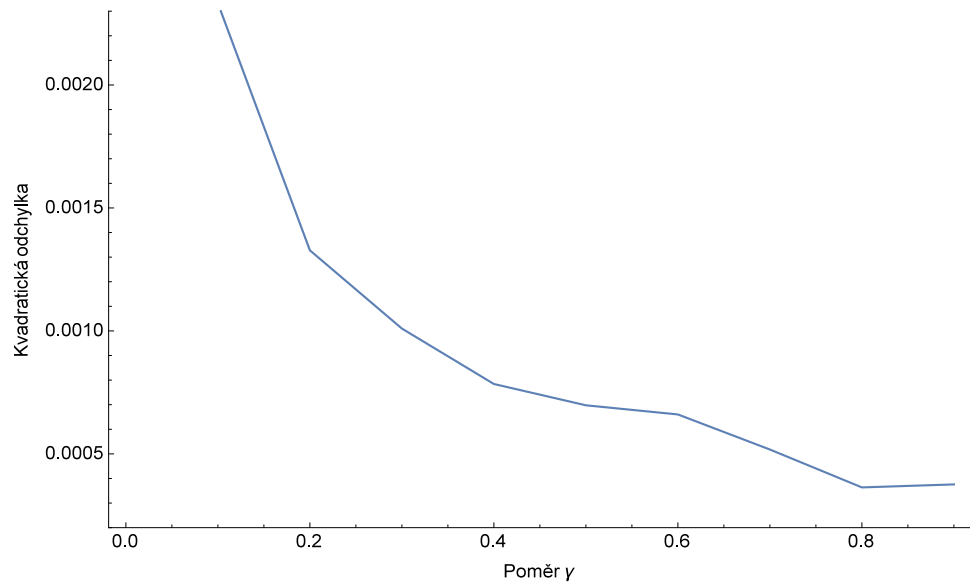
Pokusme se tedy spočítat kvadratickou odchylku funkce  $L$ , jejíž hodnotu získáme na základě předchozí rovnice:

V následující tabulce jsou výsledky pro následující hodnoty konstant:

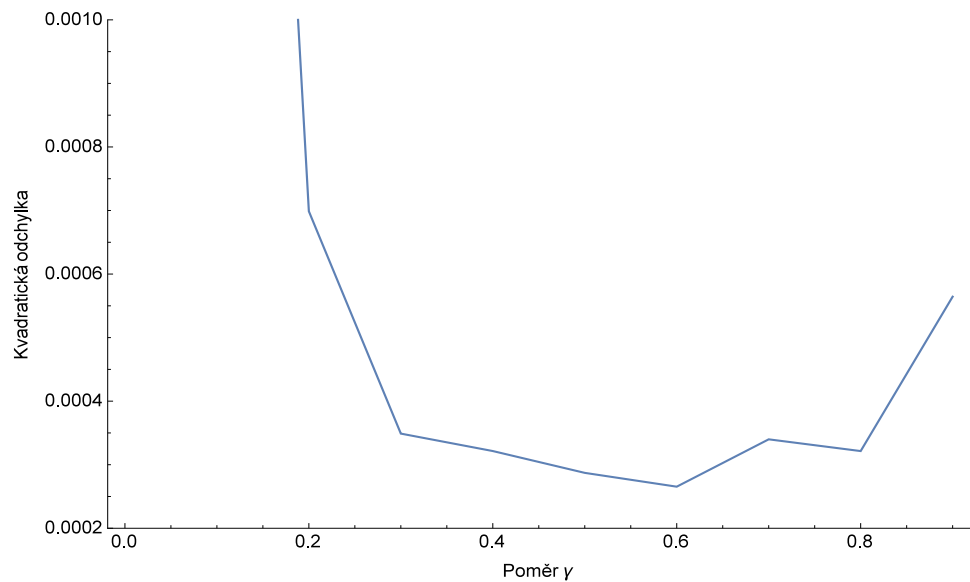
$N$	Počet generovaných scénářů	5 000,
$B$	Počet běhů generování.	100,
$\gamma$	Poměr generování MC vs IS	$\left\{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}\right\}$ .

$\gamma$	Kvadratická odchylka
0.1	0,003262910
0.2	0,000698757
0.3	0,000348945
0.4	0,000321501
0.5	0,000287170
<b>0.6</b>	0,000265431
0.7	0,000339936
0.8	0,000321461
0.9	0,000564392

Tabulka 4.4: Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru  $\gamma$ .



Obrázek 4.2: Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru  $\gamma$ .



Obrázek 4.3: Závislost kvadratické odchylky skutečné výkonnosti od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru  $\gamma$ .

V tabulce 4.4 se nám naskýtá již výrazně lepší pohled. Vidíme, že nejlepší výkonnosti dosahujeme pro volbu  $\gamma = 0,6$ . Tímto jsme uzavřeli velkou část čtvrté kapitoly a zbývá nám už pouze naše výsledky aplikovat na námi uvažované portfolio deseti akcií.

## 4.2 Portfolio deseti akcií

Závěrečnou úlohou naší práce je aplikovat získané poznatky o Importance Samplingu na úlohu s reálnými daty. Naše data která máme k dispozici jsou týdenní vývoje akcií. Údaj 1,0591 tedy například znamená, že akcie měla na konci týdne 105,91% hodnoty z konce minulého týdne. Předpokládáme, že tyto změny mají lognormální rozdělení, odhadnutá střední hodnota  $\mu$  a korelační matice  $\text{corr}(L)$  mají následující hodnoty:

$$\mu = (1,0043 \ 1,0123 \ 1,0015 \ 1,0049 \ 0,9997 \ 1,0148 \ 1,0013 \ 0,9972 \ 0,9999 \ 1,0027)^\top,$$

$$\text{corr}(L) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,505 & 0,416 & 0,478 & 0,41 & 0,442 & 0,348 & 0,304 & 0,294 & 0,394 \\ 0,505 & 1 & 0,664 & 0,624 & 0,558 & 0,616 & 0,414 & 0,226 & 0,387 & 0,624 \\ 0,416 & 0,664 & 1 & 0,547 & 0,545 & 0,478 & 0,444 & 0,261 & 0,501 & 0,626 \\ 0,478 & 0,624 & 0,547 & 1 & 0,661 & 0,476 & 0,389 & 0,35 & 0,404 & 0,542 \\ 0,41 & 0,558 & 0,545 & 0,661 & 1 & 0,358 & 0,405 & 0,338 & 0,453 & 0,494 \\ 0,442 & 0,616 & 0,478 & 0,476 & 0,358 & 1 & 0,48 & 0,265 & 0,42 & 0,493 \\ 0,348 & 0,414 & 0,444 & 0,389 & 0,405 & 0,48 & 1 & 0,413 & 0,5 & 0,497 \\ 0,304 & 0,226 & 0,261 & 0,35 & 0,338 & 0,265 & 0,413 & 1 & 0,371 & 0,251 \\ 0,294 & 0,387 & 0,501 & 0,404 & 0,453 & 0,42 & 0,5 & 0,371 & 1 & 0,473 \\ 0,394 & 0,624 & 0,626 & 0,542 & 0,494 & 0,493 & 0,497 & 0,251 & 0,473 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k výpočetní náročnosti úlohy již hodnoty pravděpodobností  $p$  a váhy  $\gamma$  empiricky neověřujeme, ale volíme optimální hodnoty z minulých úloh. Namísto analytického řešení, které v případě lognormálního rozdělení neznáme, budeme za optimální řešení uvažovat řešení Monte Carlo optimalizační úlohy se 100 000 scénáři.

Samotnou výkonnost budeme testovat na vzorku 500 000 Monte Carlo scénářů, jejichž počet je již dostatečně velký, abychom získali potřebnou přesnost. Protože je naším cílem minimalizovat, nižší výkonnost je tudíž lepší.

Z tabulek 4.5 a 4.6 tedy vidíme, že Importance Sampling dosahuje i u více-rozměrného rozdělení přibližně o 25% lepších výsledků jak v případě kvadratické odchylky, tak v případě samotné výkonnosti. V poslední tabulce 4.7 si můžeme všimnout, že dokonce pro každou váhu dostáváme pro Importance sampling lepší výsledek než pro Monte Carlo.

Na závěr naší praktické implementace si nemůžeme odpustit vyhodnocení našeho investičního snažení a vzhledem k tomu, že máme k dispozici data k 27.7.2015, můžeme spočítat náš případný zisk či ztrátu za předpokladu, že bychom investovali podle našeho modelu dne 30.3.2012. Akcie ČEZ ztratili za tuto dobu 26,2%, akcie PHIL ztratili 7,5% a akcie TELE, na které jsme nejvíce spoléhali ztratili 64%. Celkově bychom tedy ztratili 43,9% naší investice. Sami jsme si tak ověřili, že se jedná hlavně o matematický model a předpoklad na stejné rozdělení budoucích a minulých výnosů je v praxi nepoužitelný.



V tabulce jsou výsledky pro následující hodnoty konstant:

$N$	Počet generovaných scénářů	2 000,
$B$	Počet běhů generování.	50.

Typ úlohy	Výkonnost
MC 2 000	1,025007
ISN 2 000	1,024981
MC 100 000	1,024920

*Pozn:* MC: Monte Carlo, ISN: Importance Sampling s normalizací vah.

Tabulka 4.5: Skutečná výkonnost jednotlivých metod.

Typ úlohy	Kvadratická odchylka
MC 2 000	$11,31300 \cdot 10^{-9}$
ISN 2 000	$8,11567 \cdot 10^{-9}$

*Pozn:* MC: Monte Carlo, ISN: Importance Sampling s normalizací vah.

Tabulka 4.6: Kvadratické odchylky skutečné výkonnosti od optimálního funkcionálu.

Akcie	MC 2 000	ISN 2 000	MC 100 000
AAA	0,000352	0	0
CETV	0	0	0
ČEZ	0,045437	0,046195	0,057673
ERSTE	0	0	0
KOMB	0,000389	0	0
ORCO	0	0	0
PEGAS	0,008499	0,002621	0
PHILL	0,306982	0,322125	0,317751
TELE	0,638047	0,629015	0,624575
UNI	0,000293	0,000043	0

*Pozn:* MC: Monte Carlo, ISN: Importance Sampling s normalizací vah.

Tabulka 4.7: Výsledné váhy pro jednotlivé metody.

# Kapitola 5

## Závěr

Tato práce se zabývala hledáním optimálního portfolia, které by maximalizovalo spotřebitelovu užítkovou funkci, která je konvexní kombinací středního výnosu a hodnoty CVaR. Zavedli jsme si koherentní míry rizika a postupně přes rozptyl a VaR jsme se propracovali až k finální volbě míry rizika jako CVaR, které se osvědčilo svými dobrými vlastnostmi. Ne vždy je ovšem nejlepším způsobem řešení úlohy hledání optimálního portfolia analytické řešení. Buď ho vůbec nemusíme znát nebo je pro nás příliš výpočetně náročné. Proto jsme se tuto úlohu pokusili vyřešit numericky pomocí metody Monte Carlo. Tento přístup se ale ukázal jako nepostačující, neboť negeneruje dostatečné množství scénářů, které bychom mohli použít k odhadnutí hodnoty CVaR. Implementovali jsme proto metodu Importance Samplingu a empiricky zvolili nejvhodnější pravděpodobnost generování scénářů z chvostu. Následně jsme určili i poměr generování Monte Carlo scénářů potřebných k určení suboptimálních vah a hodnoty  $\alpha$ -kvantilu. Tyto poté využíváme při generování pomocí metody Importance Sampling. Celá práce je zakončena praktickou aplikací na reálných datech deseti akcií, u kterých jsme si ověřili, že nám Importance Sampling za cenu mírných zvýšení časových nároků dává o více jak 25% lepší výsledky ve smyslu stability řešení ale i jejich výkonnosti než Monte Carlo.

Naše práce by se dala v mnoha ohledech rozšířit. Již například v samotné volbě portfolia můžeme uvažovat bezrizikové cenné papíry nebo případně záporné váhy. Co se dále týče volby investorovy averze vůči riziku, velice zajímavá je již jen otázka jak velkou ji zvolit, neboť v případě portfolií se střední hodnotou ztráty kolem nuly může být očekávaná hodnota ztráty výrazně menší než hodnota CVaR. My jsme ale uvažovali jen jednu pevnou volbu investorovy averze vůči riziku a bylo by jistě zajímavé navíc i sledovat závislost volby pravděpodobnosti generování scénářů z chvostu na investorově averzi vůči riziku. Další možností pro rozšíření je diskuse nad dobou výpočtu řešení jednotlivých optimalizačních úloh. Stěžejním místem naší práce byla řešení optimalizačních úloh ale tuto úlohu jsme kompletně přenechali výpočetnímu softwaru. Proto bychom se mohli výrazně více zabírat otázkou volby algoritmů pro řešení optimalizačních úloh a rychlostmi konvergence pro různé typy rozdělení.

# Literatura

- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. a HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**(3), 203–228.
- HALD, A. (1952). *Statistical Theory with Engineering Applications*. 1St Edition. John Wiley & Sons Inc., New York. ISBN 978-0471340560.
- HESTERBERG, T. (1995). Weighted average importance sampling and defensive mixture distributions. *Technometrics*, **37**(2), 185–194.
- KOZMÍK, V. (2010). *Eficiency portfolioí při spojitém rozdělení výnosů*. Praha, Univerzita Karlova v Praze.
- MARKOWITZ, H. M. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.
- ROCKAFELLAR, R. T. a URYASEV, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, **26**(7), 1443–1471.
- SERGEY, S., SERRAINO, G. a URYASEV, S. (2008). Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization. *Tutorials in Operations Research, INFORMS*.
- SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D. a RUSZCZYŃSKI, A. (2009). *Lectures on stochastic programming - modelling and theory*. MOS-SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society, Philadelphia. ISBN 978-0-89871-687-0.

# Seznam obrázků

4.1	Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na pravděpodobnosti $p$ . . . . .	16
4.2	Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru $\gamma$ . . . . .	19
4.3	Závislost kvadratické odchylky skutečné výkonnosti od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru $\gamma$ . . . . .	19

# Seznam tabulek

4.1	Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na pravděpodobnosti $p$ . . . . .	14
4.2	Porovnání kvadratických odchylek od optimálního funkcionálu pro Importance Sampling a Importance Sampling s normalizací vah. . . . .	15
4.3	Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru $\gamma$ . . . . .	17
4.4	Závislost kvadratické odchylky od optimálního funkcionálu na volbě iterovaného poměru $\gamma$ . . . . .	18
4.5	Skutečná výkonnost jednotlivých metod. . . . .	21
4.6	Kvadratické odchylky skutečné výkonnosti od optimálního funkcionálu. . . . .	21
4.7	Výsledné váhy pro jednotlivé metody. . . . .	21