

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lenka Janišová

Středoškolské kapitoly z pravoúhlé axonometrie

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Vlasta Moravcová

Studijní program: matematika

Studijní obor: deskriptivní geometrie
se zaměřením na vzdělávání

Praha 2015

Mé poděkování patří RNDr. Vlastě Moravcové za obětavou pomoc, trpělivost a podnětné připomínky, které mi během práce poskytovala. Také děkuji všem, kteří mě při psaní práce podporovali.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 31. 7. 2015

Podpis autora

Název práce: Středoškolské kapitoly z pravoúhlé axonometrie

Autor: Lenka Janišová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí seminární práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce popisuje postup zobrazení situace v pravoúhlé axonometrii od získání zkraslených jednotek na osách přes konstrukce základních objektů až po teoretické řešení řezů těles a zobrazení složitějších těles. Součástí jsou úlohy k procvičení, z nichž některé jsou krokované v prezentacích upravených k promítání dataprojektorem. K prvním úlohám, řešícím problém se zkraslenými jednotkami na osách soustavy souřadnic, jsou zhotoveny pomocné modely umožňující názornou vizualizaci této problematiky. Práce je určena žákům středních škol jako materiál k samostudiu, prezentace a modely lze využít i při výuce ve škole.

Klíčová slova: pravoúhlá axonometrie, pravoúhlé promítání, zobrazení, zářezová metoda, konstrukční úlohy

Title: Secondary school chapters from an orthogonal axonometry

Author: Lenka Janišová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Vlasta Moravcová, Department of Mathematics Education

Abstract: The work describes the process displaying the situation in orthogonal axonometry from getting distorted the units on the axes through the constructions of elementary objects up to the theoretical solution of objects sections and displaying more complex objects. It includes tasks for practicing. Some of these tasks are available in presentations, which are adapted for projection by a projector and contain step by step solutions of exercise. Auxiliary models are attached to the tasks at the beginning, which consist of the distorted axes problem, so the tasks can be illustratively visualized. The work is intended for secondary school pupils as a material for self-study, presentations and models can also be used for teaching in the school.

Keywords: orthogonal axonometry, orthogonal projection, projection, intersection method, construction tasks

Obsah

Seznam použitých značek a symbolů	3
Úvod	4
1 Princip zobrazení	5
1.1 Zavedení pravouhlé axonometrie	5
1.2 Určení jednotek	7
1.2.1 Sklopení promítací roviny osy	8
1.2.2 Otočení pomocné průmětny	9
1.2.3 Průmět bodu	9
2 Přímka a rovina	11
2.1 Stopník přímky	11
2.2 Stopa roviny	12
3 Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin	15
3.1 Bod a přímka	15
3.2 Bod a rovina	15
3.3 Dvě přímky	16
3.4 Přímka a rovina	17
3.4.1 Axonometrický stopník přímky	18
3.5 Dvě roviny	18
3.5.1 Axonometrická stopa roviny	20
4 Rovinné útvary	21
4.1 Mnohoúhelníky	21
4.1.1 Vynesení vrcholů z otočené průmětny	21
4.1.2 Mnohoúhelník v rovině rovnoběžné s půdorysnou	21
4.2 Kružnice	23
4.2.1 Určení sdružených průměrů z otočené průmětny	24
4.2.2 Využití afinity	24
4.2.3 Užití Thalétovy věty	26
4.2.4 Vysunutí sklopené pomocné průmětny	27
4.2.5 Kružnice v ostatních rovinách	27
5 Tělesa	29
5.1 Hranol	29
5.2 Jehlan	31
5.2.1 Komolý jehlan	31
5.3 Řez hranolu	32
5.4 Řez jehlanu	34
5.5 Průnik přímky s mnohostěnem	34
5.6 Rotační válec	37
5.7 Rotační kužel	37
5.8 Koule	38
5.9 Řez rotačního válce	39

5.10	Řez rotačního kužele	40
5.11	Řez koule	41
5.12	Průnik přímky s rotačním tělesem	42
6	Průsečná (zářezová) metoda	45
7	Úlohy	47
7.1	Princip zobrazení	47
7.2	Přímka a rovina	47
7.3	Vzájemná poloha bodů, přímk a rovin	47
7.4	Rovinné útvary	48
7.5	Tělesa	49
7.6	Průsečná (zářezová) metoda	50
	Závěr	54
	Literatura	55
	Přílohy	56

Seznam použitých značek a symbolů

Objekt	Označení	Příklad
bod	velké písmeno latinské abecedy	A
přímka	malé písmeno latinské abecedy	a
úsečka	dva různé body přímky	AB
vektor	dva krajní body úsečky dva krajní body vektoru se šipkou	\overline{AB} \overrightarrow{AB}
rovina	malé písmeno řecké abecedy	α
splývající, totožné	dvě různé přímky roviny =	$\leftrightarrow ab$ $k_1 = p_1$ (přímky k_1, p_1 jsou totožné)
rovnoběžnost	\parallel	$a \parallel b$ (přímky a, b jsou rovnoběžné)
různoběžnost	\nparallel	$a \nparallel b$ (přímky a, b jsou různoběžné)
kolmost	\perp	$a \perp b$ (přímka a je kolmá k přímce b)
incidence bodu	\in	$K \in p$ (bod K leží na přímce p)
incidence přímky	\subset	$p \subset \rho$ (přímka p leží v rovině ρ)
průsečík	\cap	$p^\beta \cap p^\alpha$
logická spojka „a zároveň“	\wedge	$p = k \wedge p_1 = k_1$ ($p = k$ a zároveň $p_1 = k_1$)
implikace	\Rightarrow	$a \subset \rho \Rightarrow a \parallel \rho$ (a leží v ρ , z toho plyne: a je rovnoběžná s ρ)
trojúhelník	\triangle	$\triangle ABC$ (trojúhelník s vrcholy A, B, C)
vzdálenost bodů	dva body v absolutní hodnotě	$ AB $ (vzdálenost bodů A, B)

Úvod

Práce je určena studentům i učitelům deskriptivní geometrie na středních školách. Jejím cílem bylo vytvořit učební pomůcku pro žáky k samostudiu i pro pedagogy k výuce. Žáci si mohou nastudovat a procvičit zameškanou látku a slepit názorný model, vyučující mohou žákům promítat krokované konstrukce úloh.

Práce je rozdělena na tři části – textovou část, úlohy a přílohy.

V textové části je podán výklad základních principů pravoúhlé axonometrie. Úlohy jsou rozděleny do podkapitol podle znalostí teorie potřebných k jejich vyřešení (podkapitoly se jmenují stejně jako kapitoly popisující teorii). Lze tak snadno nalézt úlohu související s látkou, kterou čtenář zrovna studuje, nebo naopak informace v teorii potřebné k úspěšnému vyřešení úlohy, jež čtenář řeší.

K vybraným úlohám jsou přiloženy prezentace obsahující krokované konstrukce. Prezentace jsou ve formátu *.pdf, jsou přiloženy na CD (seznam těchto prezentací a ukázka viz Příloha 1).

Druhou přílohou jsou modely poskytující názornou ukázkou principu otočení pomocné průmětny a sklopení promítací roviny osy. Předtištěné modely (viz Příloha 2) lze vytisknout na čtvrtky a složit. Část každého modelu tvoří průhledná fólie (může být vystřižena např. ze spisových desek) reprezentující axonometrickou průmětnu.

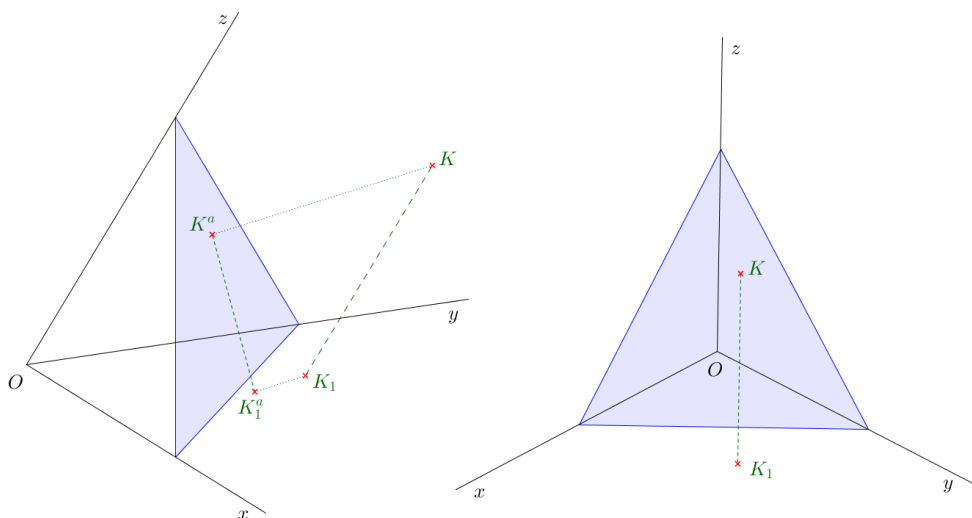
Obsah práce je koncipován tak, aby splňoval doporučený vzdělávací obsah pravoúhlé axonometrie podle portálu www.rvp.cz.

Textová část práce byla vysázena systémem \LaTeX v prostředí Texmaker. Ilustrace byly vytvořeny v programu GeoGebra a vloženy do textové části jako exportované obrázky s příponou *.png. Speciálně obrázek 7.2 byl vytvořen v programu Rhinoceros 5 a vložení do textové části exportovaný do formátu *.jpg. Krokované konstrukce úloh byly rovněž vytvořeny v programu GeoGebra, z něhož byly postupně exportovány jako obrázky s příponou *.png a vkládány do prezentace psané v jazyce \LaTeX .

1 Princip zobrazení

1.1 Zavedení pravoúhlé axonometrie

Rovina, do které promítáme (rovina papíru, rovina školní tabule) se nazývá **axonometrická průmětna** (značíme α). Tato rovina není rovnoběžná se žádnou souřadnicovou osou ($\alpha \not\parallel x$, $\alpha \not\parallel y$, $\alpha \not\parallel z$). Objekty (např. bod K) promítáme kolmo do axonometrické průmětny. Tomuto průmětu K^a říkáme **axonometrický průmět bodu K** .



Obrázek 1.1: Průměty bodu v axonometrii

S pouhými axonometrickými průměty si ale nevystačíme. Aby bylo zobrazení jednoznačné, použijeme ještě **axonometrické půdorysy** zobrazovaných objektů (viz bod K_1^a na obr. 1.1). Axonometrickým půdorysem je axonometrický průmět prvního průmětu (pravoúhlého průmětu do půdorysny). Pro zjednodušení budeme axonometrické průměty bodů popisovat bez indexu, tedy axonometrický průmět K^a bodu K označíme jednoduše písmenem K (obr. 1.1 vpravo).

Nyní můžeme říci, že pravoúhlá axonometrie je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů prostoru na uspořádané dvojice průmětů (viz [1], str. 299).

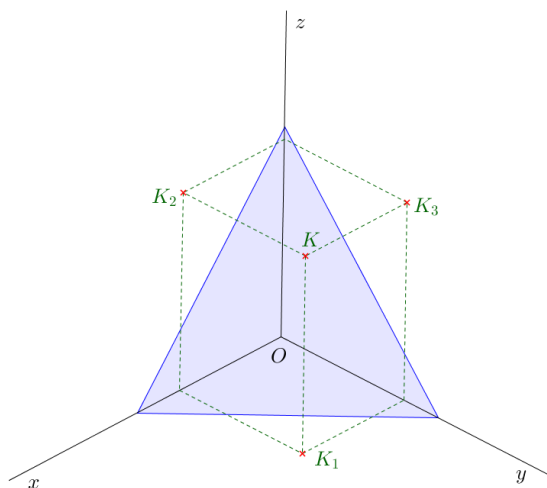
Podobně jako axonometrické půdorysy můžeme zobrazit i **axonometrické nárysy** a **axonometrické bokorysy**, viz body K_2 , K_3 na obr. 1.2.

Axonometrická rovina je dána **axonometrickým trojúhelníkem** ($\triangle XYZ$), tj. axonometrickými průměty stop této roviny.¹ Axonometrický trojúhelník je ostroúhlý (důkaz viz [2], str. 265).

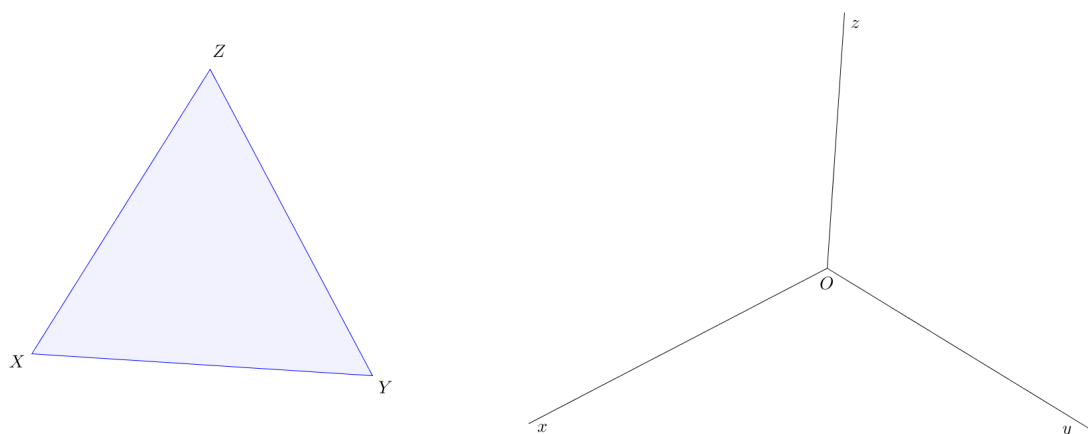
Pravoúhlou axonometrii můžeme zadat axonometrickou rovinou nebo **axonometrickým osovým křížem**, tedy axonometrickými průměty os x , y , z (obr. 1.3).

Axonometrický osový kříž tvoří výšky axonometrického trojúhelníku. K zadanému axonometrickému trojúhelníku jsme tedy schopni sestavit axonometrický osový kříž. Stejně tak, máme-li axonometrický osový kříž, můžeme pomocí

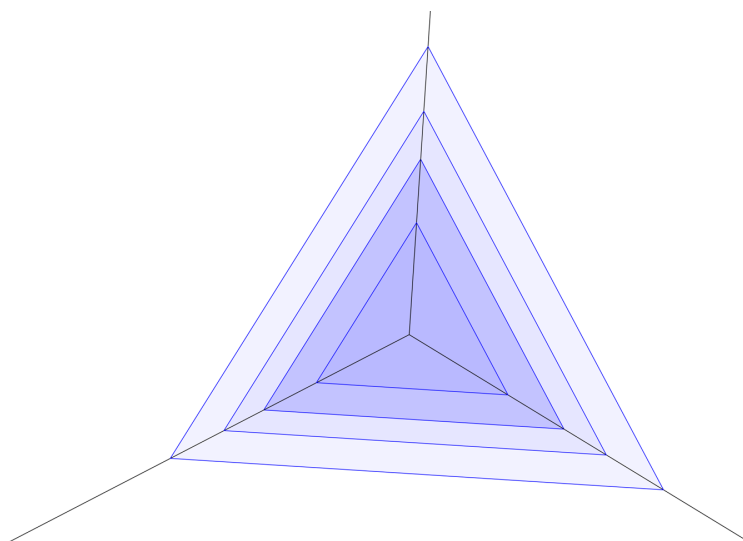
¹Stopy roviny viz [1], str. 83.



Obrázek 1.2: Pomocné průměty bodu

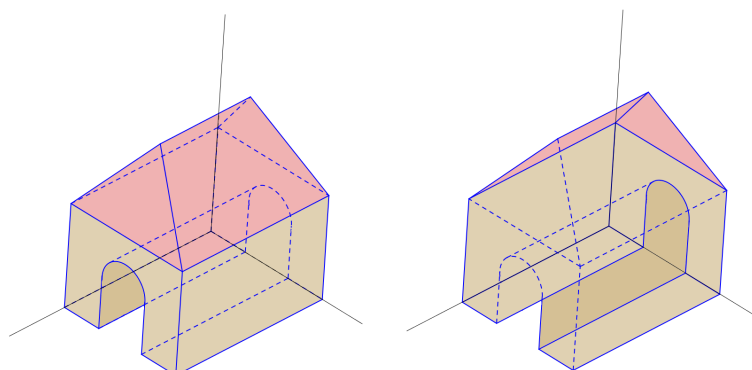


Obrázek 1.3: Axonometrický trojúhelník, axonometrický osový kříž



Obrázek 1.4: Axonometrické trojúhelníky pro jeden axonometrický osový kříž

kolmic k průmětům os sestrojít libovolný axonometrický trojúhelník. Na jeho velikosti nezáleží – všechny tyto trojúhelníky jsou podobné a reprezentují navzájem rovnoběžné axonometrické roviny (obr. 1.4).

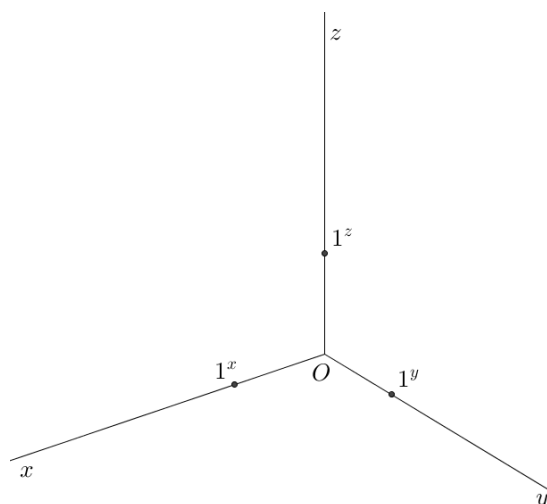


Obrázek 1.5: Axonometrický náhled, axonometrický pohled

V axonometrii rozlišujeme **axonometrický náhled** nebo **axonometrický pohled** (obr. 1.5). Axonometrický pohled volíme, chceme-li zobrazit situaci zespodu. V tomto případě leží počátek soustavy souřadnic před axonometrickým trojúhelníkem a kladné poloosy se rozbíhají dozadu. Ve většině případů se ale používá axonometrický náhled, kde počátek leží za axonometrickým trojúhelníkem.

V našich konstrukcích se omezíme pouze na axonometrický náhled. V zadání úloh tedy nebudeme uvádět, že jde o náhled, budeme to ale předpokládat.

1.2 Určení jednotek

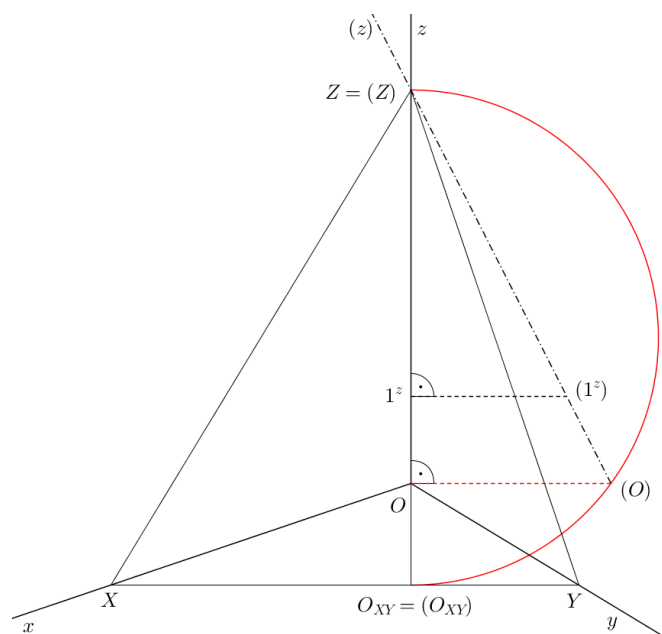


Obrázek 1.6: Axonometrické jednotky

Abychom mohli v pravoúhlé axonometrii vynášet průměty jednotlivých bodů zadaných souřadnicemi, musíme znát **axonometrické jednotky**, tj. zkreslené

jednotky délky na axonometrických průmětech os (obr. 1.6).² Ty můžeme získat dvojnásobkem. Sklopením promítacích rovin jednotlivých os do axonometrické průmětny nebo otočením pomocné průmětny do axonometrické průmětny.

1.2.1 Sklopení promítací roviny osy



Obrázek 1.7: Sklopení promítací roviny osy z

Pro vysvětlení této metody si do axonometrické průmětny sklopíme promítací rovinu osy z (obr. 1.7). Označme O_{XY} průsečík průmětu osy z se stranou XY axonometrického trojúhelníku (průsečík je zdánlivý, ve skutečnosti je osa z se stranou XY mimoběžná).³ Nyní si uvědomme, že přímka OO_{XY} leží v půdorysně, tudíž je kolmá na osu z . Trojúhelník $OO_{XY}Z$ je tedy pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu O . Body Z , O_{XY} leží v axonometrické průmětně, odpovídají tedy přímo sklopeným bodům (Z) , (O_{XY}) . Počátek O soustavy souřadnic sklopíme na kolmici k ose sklápění ZO_{XY} . Zároveň bude bod (O) ležet na Thalétově kružnici nad průměrem ZO_{XY} . Přímka $(O)(Z) = (O)Z$ je sklopená osa z . Na této přímce můžeme od bodu (O) nanést jednotku délky ve skutečné velikosti (1^z). Axonometrický průmět této jednotky získáme přenesením kolmo na axonometrický průmět osy z .

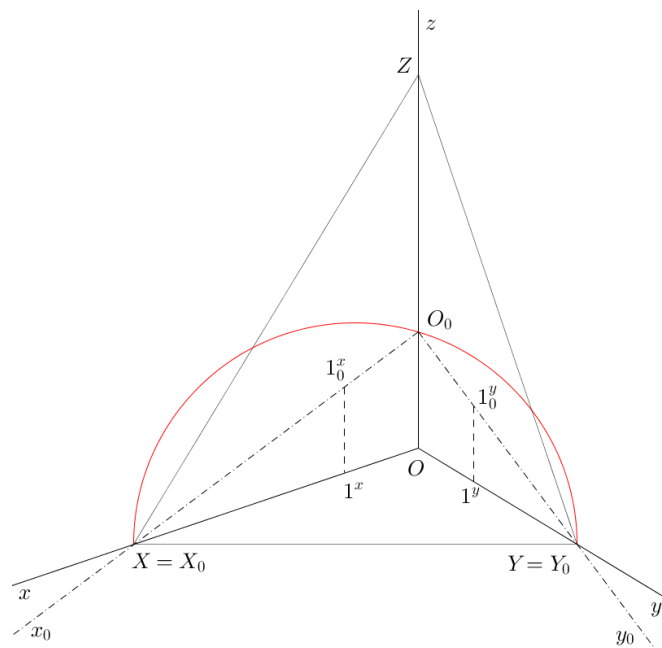
Další jednotky můžeme nanášet jako násobky jednotky 1^z nebo je přeneseme kolmo ze sklopených jednotek nanesených ve skutečné velikosti na sklopenou osu z .

²Jednotky jsou vždy zkrácené na všech osách, protože axonometrická průmětna je vždy různoběžná s těmito osami. Jednotky se nezkrácejí pouze v rovinách (nebo na přímkách) rovnoběžných s průmětnou (viz [1], str. 28).

³Použijeme vždy bod na přímce XY , který leží v otáčené promítací rovině. Bod ležící na ose z by nám nepomohl.

Stejně jako jsme sklopili promítací rovinu osy z , můžeme sklopit i promítací roviny os x , y .

1.2.2 Otočení pomocné průmětny



Obrázek 1.8: Otočení pomocné průmětny

Do axonometrické průmětny otočíme např. půdorysnu π (obr. 1.8). Stranu XY axonometrického trojúhelníku vidíme ve skutečné velikosti ($X = X_0$, $Y = Y_0$). Okolo této strany otočíme rovinu $\leftrightarrow xy$. Protože body X_0 , Y_0 už známe, stačí otočit počátek O soustavy souřadnic. Otočený počátek O_0 bude ležet v promítací rovině osy z . Zobrazí se tedy na průmět osy z . Zároveň víme, že osy x , y svírají ve skutečnosti pravý úhel. Otočený počátek tedy musí ležet na Thalétově kružnici nad průměrem XY . Otočené osy x_0 , y_0 jsou určeny body O_0X_0 (resp. O_0Y_0). Určíme-li nyní na otočených osách x , y jednotky ve skutečné velikosti, jejich axonometrické průměty získáme přenesením na axonometrické osy ve směru kolmém k přímkě XY .

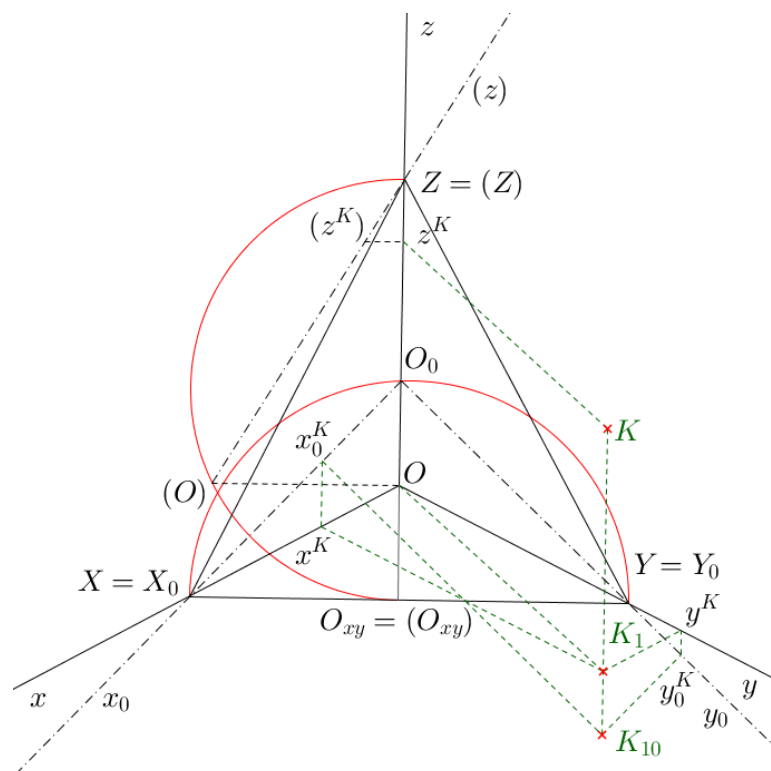
Mezi axonometrickým průmětem půdorysny a jejím otočením platí afinita, jejíž osou je přímka XY , směrem průmět axonometrické osy z a afinně sdruženými body jsou body O , O_0 .⁴

Stejným způsobem můžeme do axonometrické průmětny otočit i nárysnu ν a bokorysnu μ .

1.2.3 Průmět bodu

K zobrazení bodu v pravoúhlé axonometrii je vhodné kombinovat sklopení promítací roviny osy a otočení pomocné průmětny. Na obr. 1.9 si můžeme všimnout otočení půdorysny π a sklopení promítací roviny osy z . V otočené půdorysně

⁴Více o afinitě viz [3], str. 71.



Obrázek 1.9: Průmět bodu K

zobrazíme otočený půdorys K_{10} bodu K a přeneseme jej na axonometrický půdorys K_1 .⁵ Na sklopenou osu z nanese z -ovou souřadnici (z^K) bodu K , na axonometrické ose z určíme axonometrickou z -ovou souřadnici z^K . Axonometrický průmět K získáme posunutím axonometrického půdorysu K_1 o vektor $\overrightarrow{Oz^K}$.

Spojnice axonometrického průmětu bodu s jeho axonometrickým půdorysem (na obr. 1.9 je to přímka KK_1) se nazývá **ordinála**.⁶

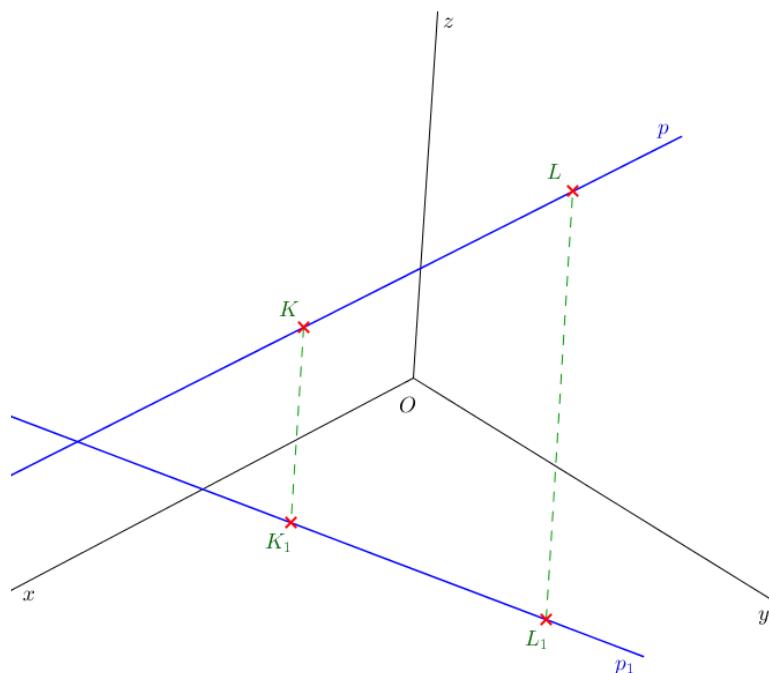
Chceme-li zobrazit více bodů, je vhodné použít již zmíněnou afinitu mezi otočenou půdorysnou a axonometrickou půdorysnou (porovnání viz obr. 4.2 a 4.3).

Volba této kombinace (otočení půdorysny a sklopení promítací roviny osy z) je velmi výhodná vzhledem ke skutečnosti, že během konstrukce axonometrického bodu získáme i jeho axonometrický půdorys.

⁵Nejprve přeneseme souřadnice bodu K na axonometrické osy. Z těchto souřadnic vedeme rovnoběžky s axonometrickými osami, na nichž najdeme průměty bodu.

⁶Ordinála je vždy kolmá k průmětně, v našem případě k půdorysně. Je tedy rovnoběžná s osou z .

2 Přímka a rovina



Obrázek 2.1: Zobrazení přímky

Chceme-li sestavit průmět přímky, zobrazíme dva její body, které spojíme přímkou. Pro přímku $p = KL$ zobrazíme body K, K_1, L, L_1 . Přímka KL je axonometrickým průmětem přímky p , přímka K_1L_1 axonometrickým půdorysem p_1 přímky p (obr. 2.1).

Je-li přímka kolmá k axonometrické rovině, jejím axonometrickým průmětem bude bod ležící na axonometrickém půdorysu. Axonometrickým půdorysem bude přímka rovnoběžná s axonometrickou osou z .¹

Zobrazení roviny si vysvětlíme v odstavci 2.2, který pojednává o stopě roviny.

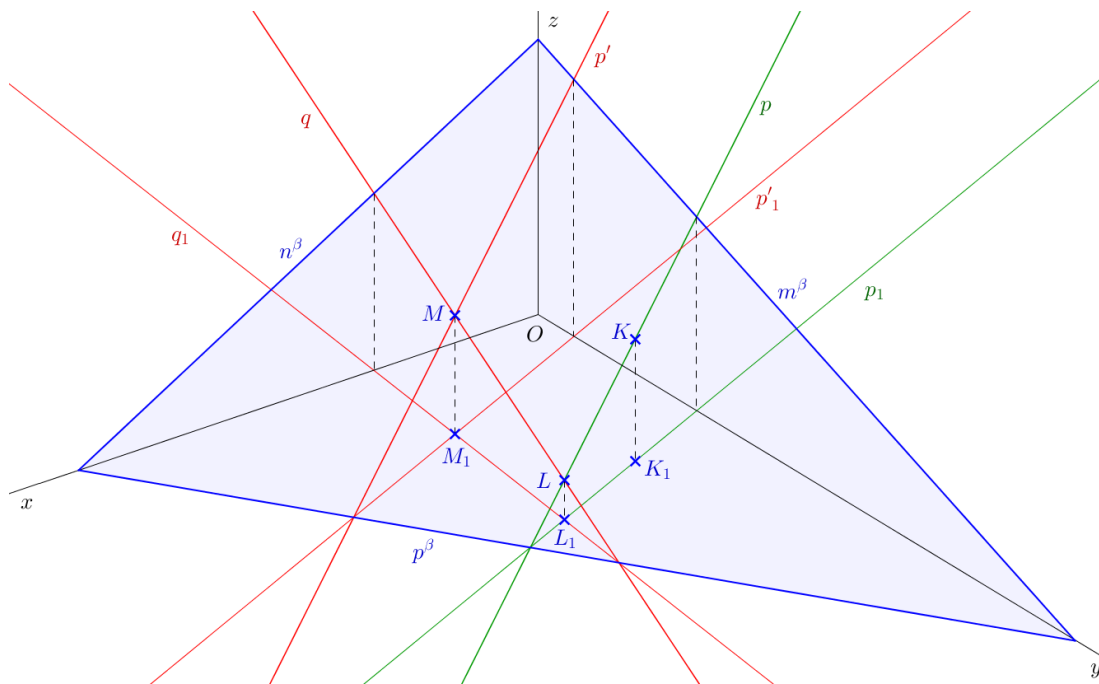
2.1 Stopník přímky

Stopník přímky p je průsečík přímky p s průmětnou. Přímky mohou mít čtyři stopníky. Jsou jimi **axonometrický stopník A** , **půdorysný stopník P** , **nárysný stopník N** a **bokorysný stopník M** (obr. 2.2). Tyto stopníky jsou průsečíky přímky s axonometrickou rovinou α , půdorysnou π , nárysnou ν a bokorysnou μ .

Půdorysný stopník je v pravoúhlé axonometrii vidět ihned. Jedná se o průsečík axonometrického průmětu a axonometrického půdorysu dané přímky.

Axonometrickým půdorysem nárysného stopníku N je průsečík N_1 axonometrického půdorysu p_1 přímky p a osy x . Jeho axonometrický průmět najdeme

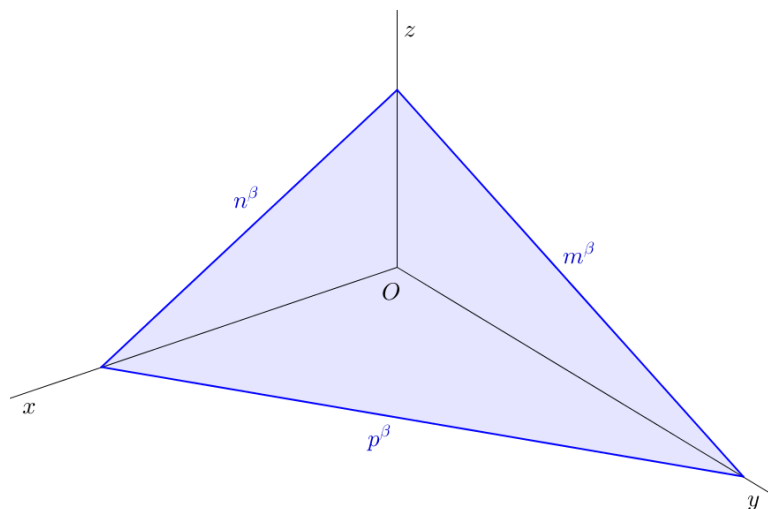
¹Půdorys přímky bude kolmý na půdorysnou stopu axonometrického trojúhelníka, tedy na přímku, kterou obvykle značíme XY . V axonometrii bude axonometrický půdorys přímky rovněž kolmý na přímku XY (viz podkapitola 1.2.2, v afinitě mezi otočenou a axonometrickou půdorysnou se přímka kolmá na osu afinity XY zobrazí sama na sebe).



Obrázek 2.3: Stopy roviny

párů zadaných bodů, popř. spojnice dvou bodů p a její rovnoběžka p' nebo rovnoběžka třetím bodem).

Axonometrickou stopu si ukážeme v kapitole 3.5.1.

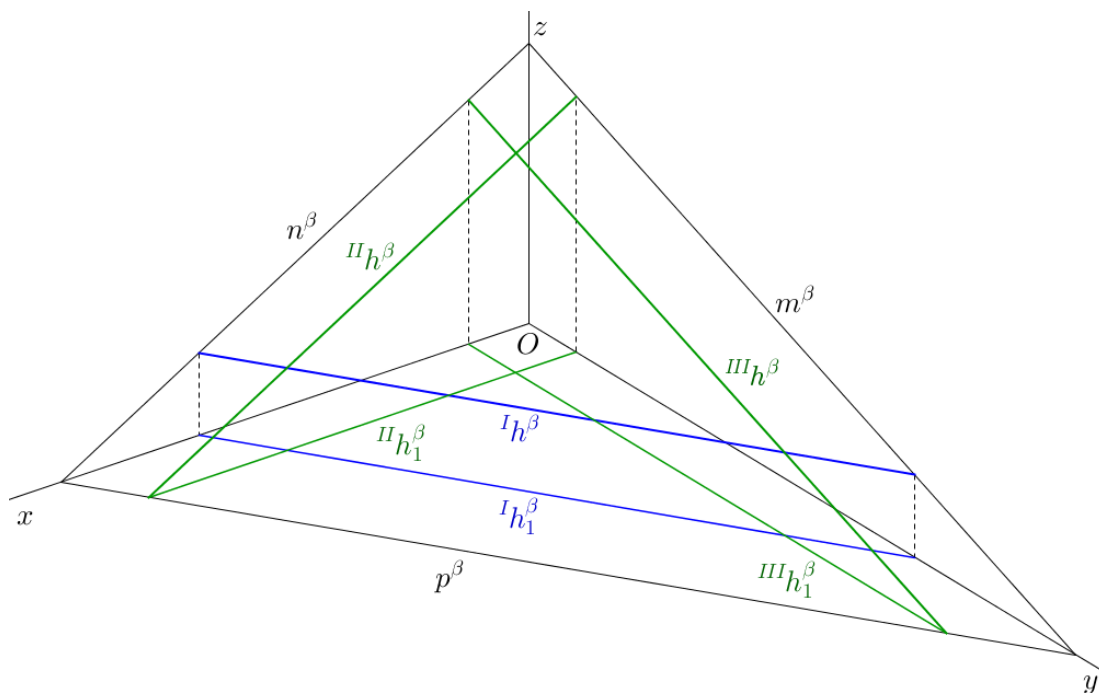


Obrázek 2.4: Zobrazení roviny

Rovinu zobrazíme pomocí jejích stop. Rovina β bude tedy reprezentována půdorysnou stopou p^β , nárysnou stopou n^β a bokorysnou stopou m^β (obr. 2.4).²

V každé rovině leží nekonečně mnoho přímek. Nyní si ukážeme skupinu speciálních přímek, které se nazývají **hlavní přímky**. Jde o přímky, které leží v dané rovině a jsou rovnoběžné s její stopou. Rozlišujeme **hlavní přímky 1. osnovy**,

²K jednoznačnému určení roviny stačí dvě stopy, protože rovina je dána dvěma různoběžnými přímkami (viz [1]).



Obrázek 2.5: Hlavní přímky roviny

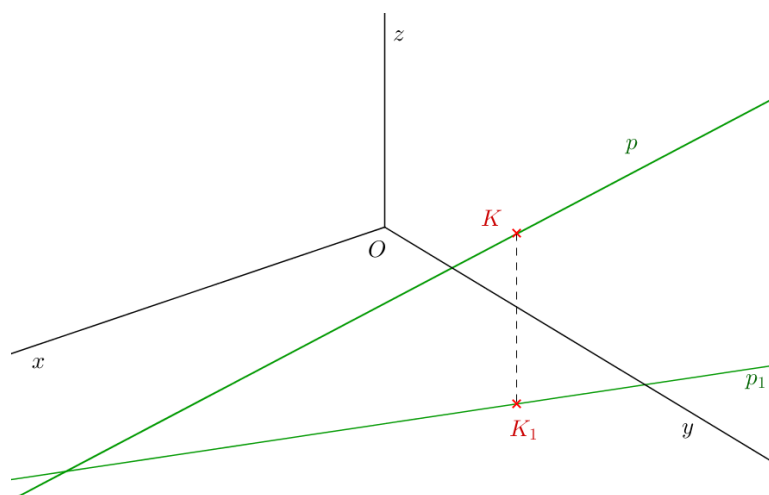
hlavní přímky 2. osnovy a hlavní přímky 3. osnovy. Hlavní přímka 1. osnovy (zvané také horizontální hlavní přímky) jsou rovnoběžné s půdorysnou π , hlavní přímky 2. osnovy (frontální hlavní přímky) jsou rovnoběžné s nárysnou nu , hlavní přímky 3. osnovy jsou rovnoběžné s bokorysnou μ . Hlavní přímky 3. osnovy nemají speciální název.

Ukažme si, jak vypadají hlavní přímky v pravoúhlé axonometrii (obr. 2.5): hlavní přímka 1. osnovy Ih^β roviny β je ve skutečnosti rovnoběžná s půdorysnou stopou.³ Proto jsou oba její průměty (axonometrický Ih^β i půdorysný Ih_1^β) rovnoběžné s axonometrickým průmětem stopy p^β roviny β (obr. 2.5). Hlavní přímka 2. osnovy IIh^β je rovnoběžná s nárysnou stopou. Její axonometrický průmět je rovnoběžný s axonometrickým průmětem stopy n^β roviny β , axonometrický půdorys IIh_1^β je rovnoběžný s osou x . Podobně potom hlavní přímka 3. osnovy $IIIh^\beta$ má axonometrický průmět rovnoběžný s axonometrickým průmětem stopy m^β roviny β , axonometrický půdorys $IIIh_1^\beta$ je rovnoběžný s osou y .

³Přímka rovnoběžná s půdorysnou ležící v rovině β musí být rovnoběžná se stopou p^β , protože přímka rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami je rovnoběžná s jejich průsečnicí).

3 Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin

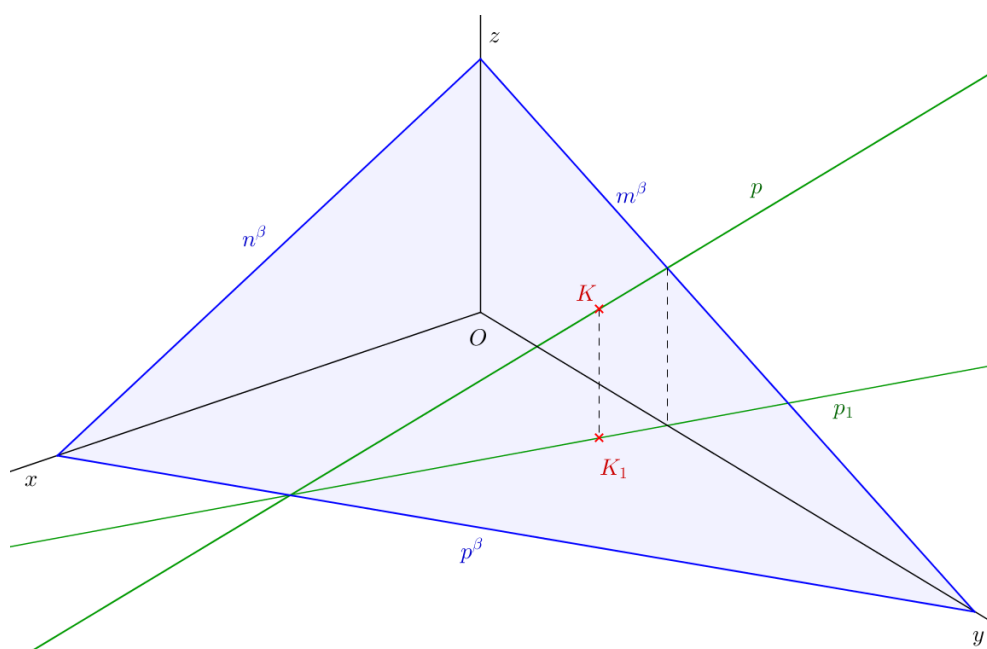
3.1 Bod a přímka



Obrázek 3.1: Bod na přímce

Bod K leží na přímce p právě tehdy, když $K \in p \wedge K_1 \in p_1$ (obr. 3.1). V opačném případě bod K **neleží** na přímce p .

3.2 Bod a rovina



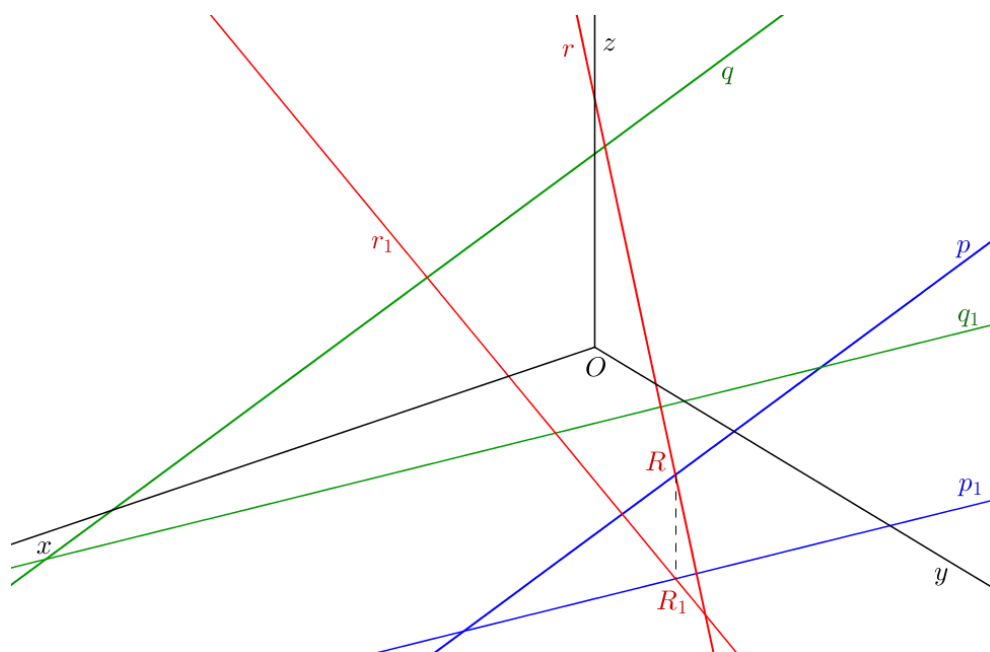
Obrázek 3.2: Bod v rovině

Abychom zjistili, zda **bod K leží v rovině β** , proložíme jím libovolnou přímkou p . Sestrojíme půdorys p_1 této přímky tak, aby přímka p ležela v rovině β (stopníky přímky p musí ležet na stopách roviny β). Leží-li bod K_1 na přímce p_1 , potom leží i v rovině β (obr. 3.2. Pokud bod K_1 neleží na přímce p_1 , znamená to, že **bod K neleží v rovině β** . Podobně můžeme bodem K_1 vést axonometrický půdorys p_1 přímky p , určit jeho axonometrický průmět p a zjistit, zda bod K leží na přímce p).

K určení vzájemné polohy bodu K a roviny β lze použít libovolnou přímku p .

Výhodným případem přímky p , kterou lze k určení vzájemné polohy bodu K a roviny β použít, je hlavní přímka roviny β .

3.3 Dvě přímky



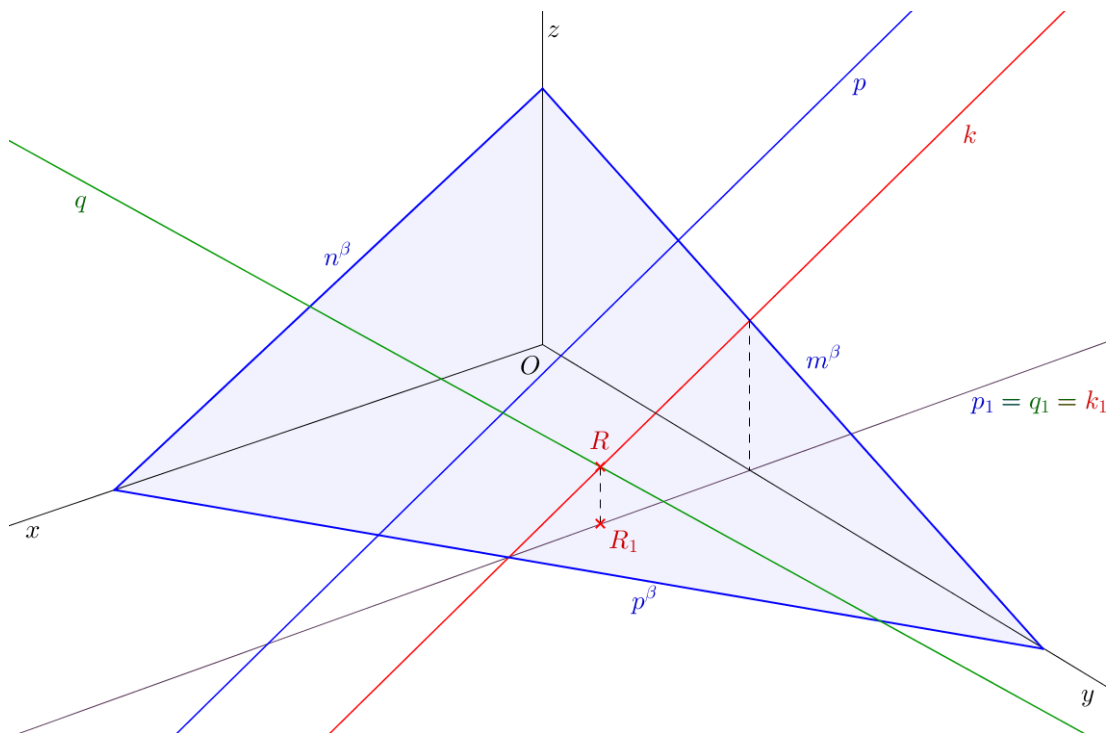
Obrázek 3.3: Vzájemná poloha přímek

Dvě přímky p , q (obr. 3.3) jsou navzájem **rovnoběžné**, jsou-li rovnoběžné jejich axonometrické půdorysy i axonometrické průměty.

Nejsou-li přímky navzájem rovnoběžné, mohou být **různoběžné** nebo **mimoběžné**. Abychom zjistili, zda jsou dvě přímky p , r (obr. 3.3) různoběžné, musíme najít průsečík jejich axonometrických průmětů R a průsečík jejich axonometrických půdorysů R_1 . Leží-li body R , R_1 na ordinále, přímky jsou různoběžné a nalezené body jsou axonometrickým průmětem a axonometrickým půdorysem průsečíku těchto přímek. Pokud body R , R_1 na ordinále neleží, znamená to, že přímky nemají žádný společný bod, tedy jsou mimoběžné (na obr. 3.3 jsou mimoběžné přímky q , r).

3.4 Přímka a rovina

Vzájemnou polohu přímky p a roviny β zjistíme pomocí tzv. krycí přímky k , která leží v rovině β .¹ Určení vzájemné polohy přímky a roviny si ukážeme na obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Vzájemná poloha přímky a roviny

Axonometrický půdorys k_1 krycí přímky k vedeme totožný s axonometrickým půdorysem p_1 přímky p . Určíme axonometrický průmět krycí přímky k (krycí přímka k leží v rovině β , vyneseme tedy po ordinálách její stopníky). Zbývá již pouze porovnat axonometrické průměty krycí přímky k a přímky p . Jsou-li rovnoběžné, je **přímka p rovnoběžná s rovinou β** . Mají-li axonometrické průměty přímky q a k ní takto sestrojené krycí přímky k společný průsečík R , **přímka q je různoběžná s rovinou β** a protíná ji právě v bodě R .

Na obr. 3.4 si můžeme všimnout roviny β , přímky p rovnoběžné s rovinou β a přímky q , která je různoběžná s rovinou β . Bod R je průsečík přímky q s rovinou β .

Podobně můžeme zvolit krycí přímku k , jejíž axonometrický průmět je totožný s axonometrickým průmětem přímky p . Pomocí stopníků určíme její axonometrický půdorys k_1 a porovnáme jej s axonometrickým půdorysem p_1 přímky p . Jsou-li průměty p_1, k_1 rovnoběžné, je i přímka p rovnoběžná s rovinou β . Pokud jsou průměty p_1, k_1 různoběžné, je přímka p různoběžná s rovinou β . Průsečík R_1 přímek p_1, k_1 je axonometrický půdorys průsečíku přímky p s rovinou β .

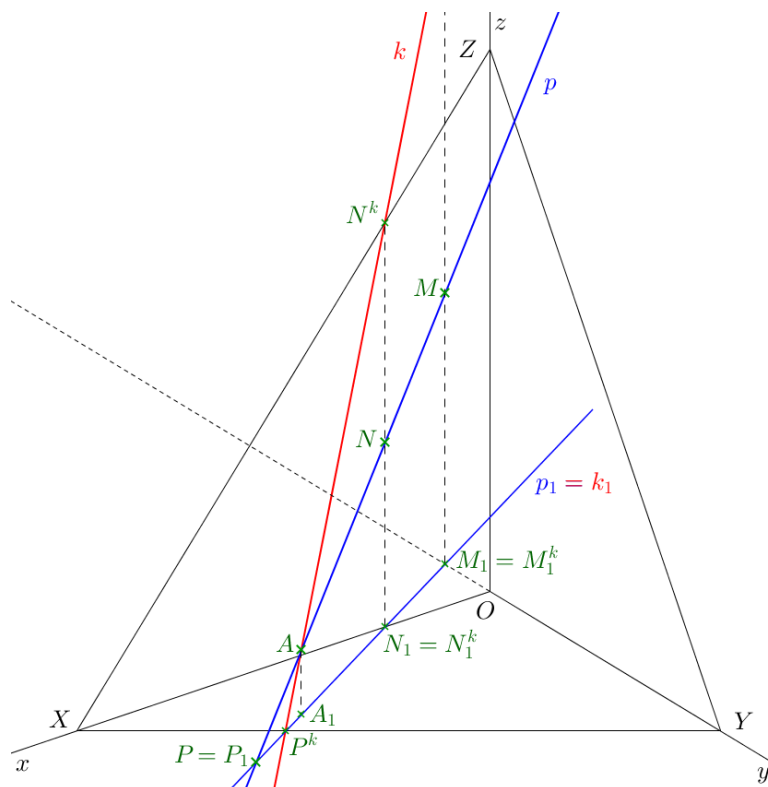
Může se stát, že axonometrické průměty přímek p, k i jejich axonometrické půdorysy budou navzájem totožné ($p = k \wedge p_1 = k_1$). Potom **přímka p přímo**

¹Krycí přímka je přímka, jejíž jeden průmět se v daném promítání (v našem případě v pravouhlé axonometrii) splývá s průmětem jiné přímky. Určením dalšího průmětu krycí přímky jsme schopni určit její vzájemnou polohu s danou přímkou.

leží v rovině β .

Pokud bude přímka p kolmá k průmětně (např. $p \perp \pi$), bude s rovinou β rovnoběžná, bude-li i rovina β kolmá ke stejné průmětně ($\beta \perp \pi \Rightarrow n_\beta \parallel m_\beta \parallel z$).

3.4.1 Axonometrický stopník přímky



Obrázek 3.5: Axonometrický stopník přímky

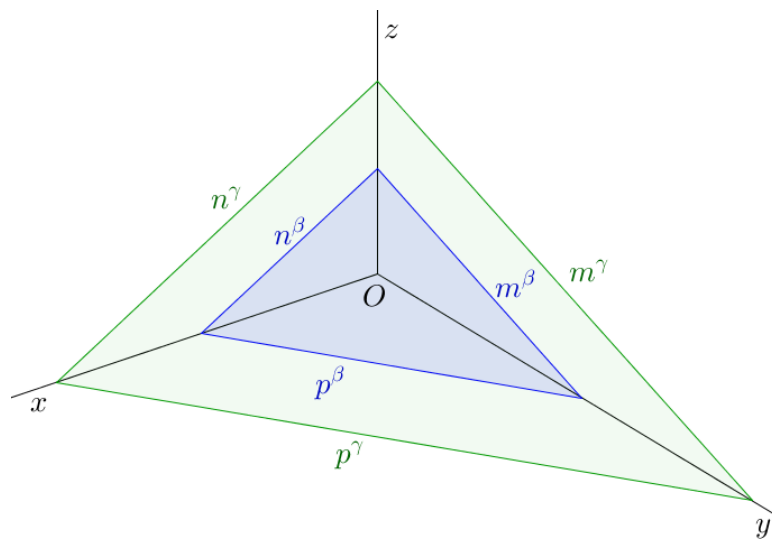
K nalezení axonometrického stopníku přímky p (obr. 3.5) využijeme krycí přímky k , která leží v axonometrické průmětně α a jejíž půdorys splývá s půdorysem přímky p ($k_1 = p_1$). Axonometrické půdorysy stopníků N_1^k , M_1^k splynou s půdorysy stopníků N_1 , M_1 , axonometrické průměty N^k , M^k najdeme na ordinálách v průsečících ordinál se stopami XZ , YZ axonometrického trojúhelníku.² Se-strojíme axonometrický průmět přímky k , tedy přímku $N^k M^k$. Axonometrickým stopníkem přímky p je průsečík A přímek p , k .

3.5 Dvě roviny

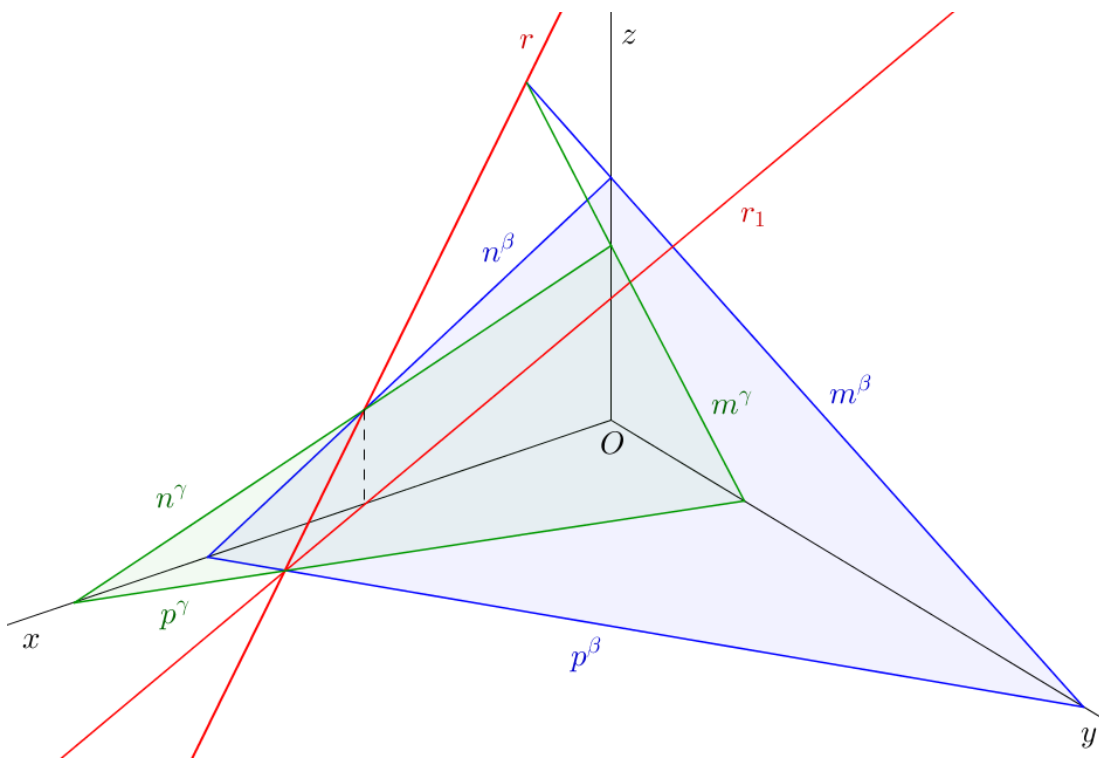
Dvě roviny β , γ jsou navzájem **rovnoběžné**, jsou-li rovnoběžné jejich jednotlivé stopy ($p^\beta \parallel p^\gamma \wedge n^\beta \parallel n^\gamma \wedge m^\beta \parallel m^\gamma$ – obr. 3.6).

Nejsou-li roviny β , γ rovnoběžné, potom jsou **různoběžné** (obr. 3.7) a mají společnou přímku, tzv. průsečnici r . Průsečnice r prochází průsečíky stop ro-

²Stopníky přímky ležící v rovině leží na odpovídajících stopách této roviny (viz předchozí odstavec).



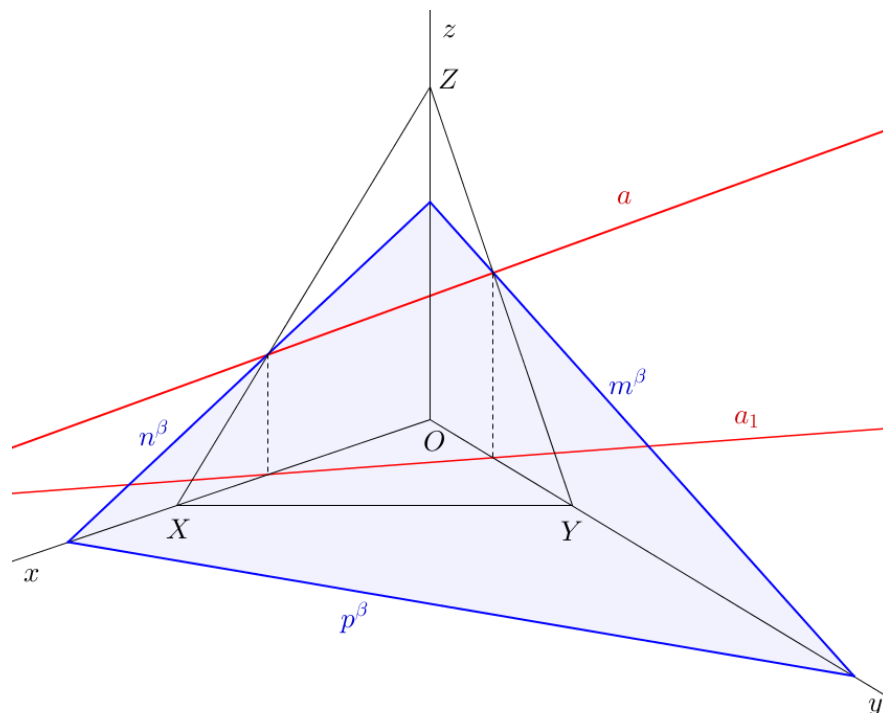
Obrázek 3.6: Rovnoběžné roviny



Obrázek 3.7: Různoběžné roviny a jejich průsečnice

vin β , γ (tzn. průsečíkem půdorysných stop, průsečíkem nárysných stop a průsečíkem bokorysných stop).³

3.5.1 Axonometrická stopa roviny



Obrázek 3.8: Axonometrická stopa roviny

Axonometrická stopa a roviny β je průsečnicí roviny β s axonometrickou průmětnou. Najdeme ji jako spojnicí axonometrických stopníků jednotlivých přímek, nebo také jako spojnicí průsečíků jednotlivých stop roviny β se stopami axonometrické roviny α , tedy spojnicí průsečíků $p^\beta \cap p^\alpha$, $n^\beta \cap n^\alpha$ a $m^\beta \cap m^\alpha$.

³Jedna dvojice stop rovin β , γ (půdorysné, nárysné, nebo bokorysné stopy) může být rovnoběžná. V tom případě bude průsečnice r rovin β , γ rovnoběžná s těmito dvěma stopami.

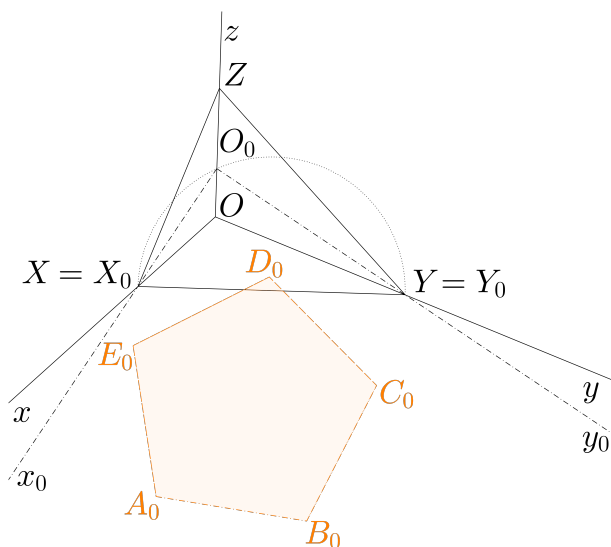
4 Rovinné útvary

V této kapitole se budeme zabývat konstrukcí mnohoúhelníků a kružnic v průmětnách a v rovinách, které jsou s průmětnami rovnoběžné.¹

4.1 Mnohoúhelníky

Nejprve si ukážeme konstrukci mnohoúhelníku v půdorysně (resp. v nárysně nebo bokorysně), poté se naučíme posunout mnohoúhelník z půdorysny (náryсны, bokorysny) do roviny, která je s průmětnou rovnoběžná.

4.1.1 Vynesení vrcholů z otočené průmětny



Obrázek 4.1: Pětiúhelník v otočené půdorysně

Abychom mohli zobrazit mnohoúhelník ležící v půdorysně, musíme nejprve otočit půdorysnu do axonometrické průmětny. Do otočené půdorysny zobrazíme mnohoúhelník ve skutečné velikosti $A_0B_0C_0D_0E_0$ (obr. 4.1).

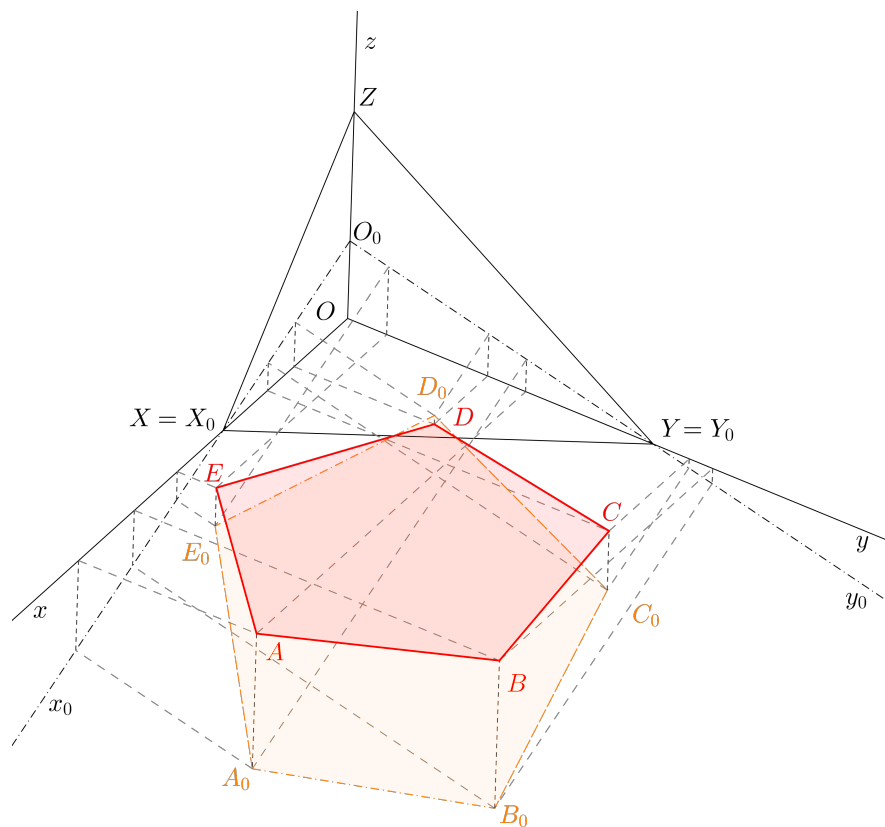
Otočený mnohoúhelník převedeme zpět do půdorysny tak, že zobrazíme jednotlivé body² mnohoúhelníku, které následně spojíme úsečkami (obr. 4.2). Velmi praktické je užít při zobrazení axonometrického průmětu mnohoúhelníku afinitu (viz obr. 4.3).

4.1.2 Mnohoúhelník v rovině rovnoběžné s půdorysnou

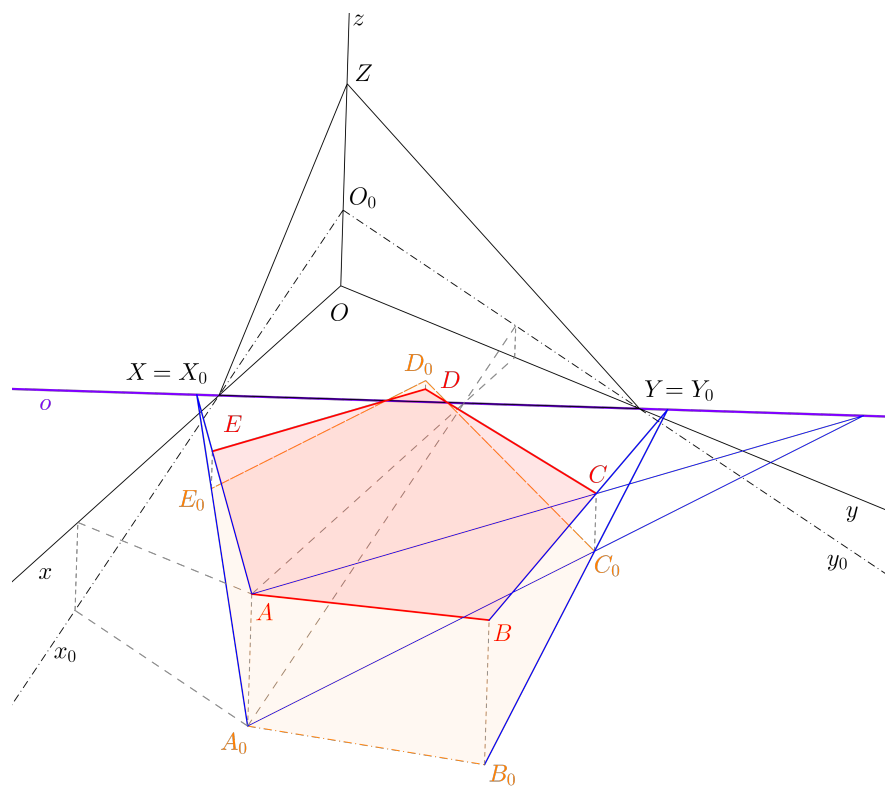
Pro zobrazení mnohoúhelníku $ABCDE$, který leží v rovině γ rovnoběžné s půdorysnou, zobrazíme nejprve jeho půdorys $A_1B_1C_1D_1E_1$, který posuneme

¹Rovinný útvar ležící v rovině rovnoběžné s axonometrickou průmětnou se nezkreslí, nebudeme se jím tedy zabývat. Konstrukce rovinných útvarů v ostatních rovinách vyžadují vysokoškolskou znalost pravoúhlé axonometrie (viz [2]); těmi se rovněž zabývat nebudeme.

²Zobrazení bodu viz podkapitola 1.2.3.

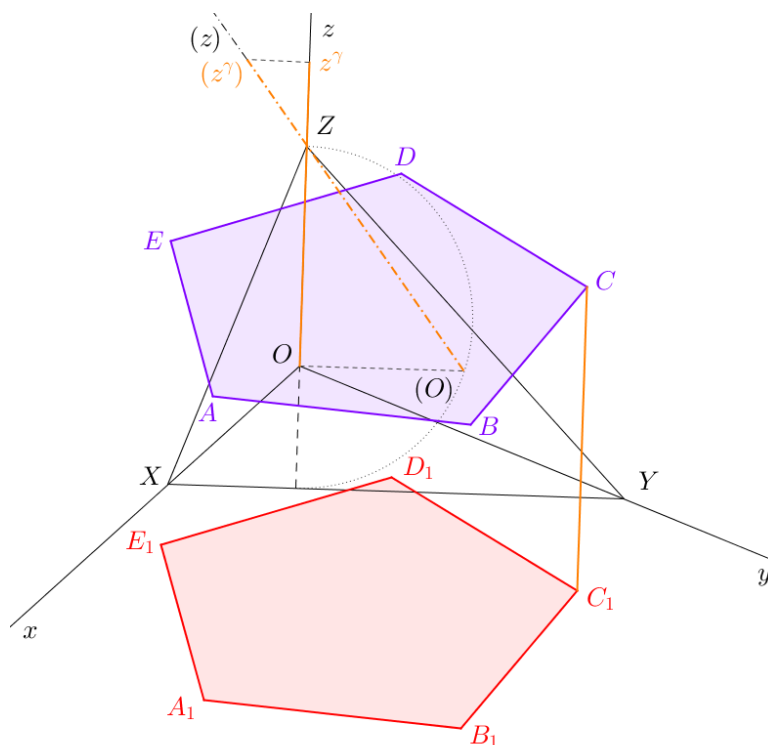


Obrázek 4.2: Bodové vynesení axonometrického průmětu mnohoúhelníku



Obrázek 4.3: Vynesení axonometrického průmětu mnohoúhelníku pomocí afinity

ve směru osy z o z -ovou souřadnici z^γ roviny γ (viz obr. 4.4), ve které mnohoúhelník leží.



Obrázek 4.4: Mnohoúhelník v rovině rovnoběžné s půdorysnou

Konstrukce axonometrického půdorysu $A_1B_1C_1D_1E_1$ je stejná jako konstrukce mnohoúhelníku ležícího v půdorysně (viz podkapitola 4.1.1). Pro posunutí mnohoúhelníku do roviny rovnoběžné s půdorysnou potřebujeme vynést z -ovou souřadnici roviny. K tomu stačí sklopit promítací rovinu osy z (viz podkapitola 1.2.1). Na sklopenou osu nanese se příslušnou z -ovou souřadnici roviny, ve které mnohoúhelník leží. Souřadnici přeneseme na zkrácenou osu z a mnohoúhelník posuneme o vektor $\overrightarrow{Oz^\gamma}$.

Je-li cílem sestavit mnohoúhelník ležící v rovině rovnoběžné s nárysou (nebo bokorysnou), postup je stejný jako při konstrukci mnohoúhelníku ležícího v rovině rovnoběžné s půdorysnou. Nejprve vyneseme jeho axonometrický nárys (bokorys), který následně posuneme ve směru osy y (x).

4.2 Kružnice

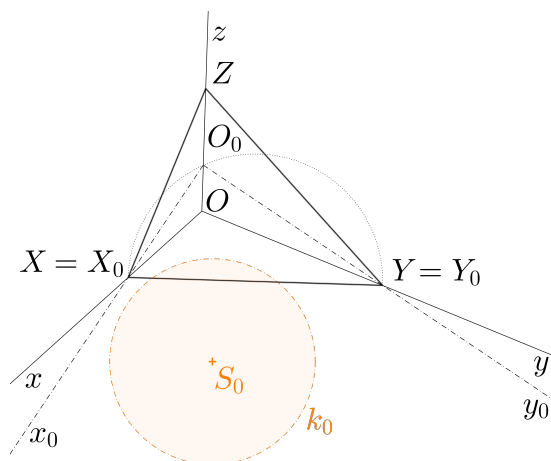
Obrazem kružnice v pravoúhlé axonometrii je většinou elipsa. V případě, že kružnice leží v rovině rovnoběžné s axonometrickou průmětnou (resp. v axonometrické průmětně), jejím obrazem je kružnice. Pokud kružnice leží v rovině kolmé k axonometrické průmětně, jejím obrazem je úsečka.³

³Tyto vlastnosti platí ve všech rovnoběžných promítáních. Leží-li kružnice v rovině rovnoběžné s průmětnou, zobrazí se jako kružnice; pokud leží v promítací rovině, zobrazí se jako úsečka; v ostatních případech se promítne na elipsu.

Ukážeme si různé způsoby, jejichž pomocí zobrazíme kružnici ležící v půdorysně do axonometrické půdorysny. Poté si vysvětlíme, jak zobrazit kružnici ležící v nárysně/bokorysně či v rovině rovnoběžné s průmětnou.

Postupů, jejichž pomocí lze zobrazit kružnici, není málo. Při konstrukcích můžeme přemýšlet nejen nad tím, jak si zjednodušit práci, ale i nad přesností a přehledností jednotlivých postupů řešení dané úlohy.

4.2.1 Určení sdružených průměrů z otočené průmětny



Obrázek 4.5: Kružnice v otočené půdorysně

Stejně jako u zobrazení mnohoúhelníku (viz podkapitola 4.1) zobrazíme kružnici nejprve v otočené půdorysně (viz kružnice k_0 na obr. 4.5), následně ji otočíme zpět do axonometrické půdorysny.

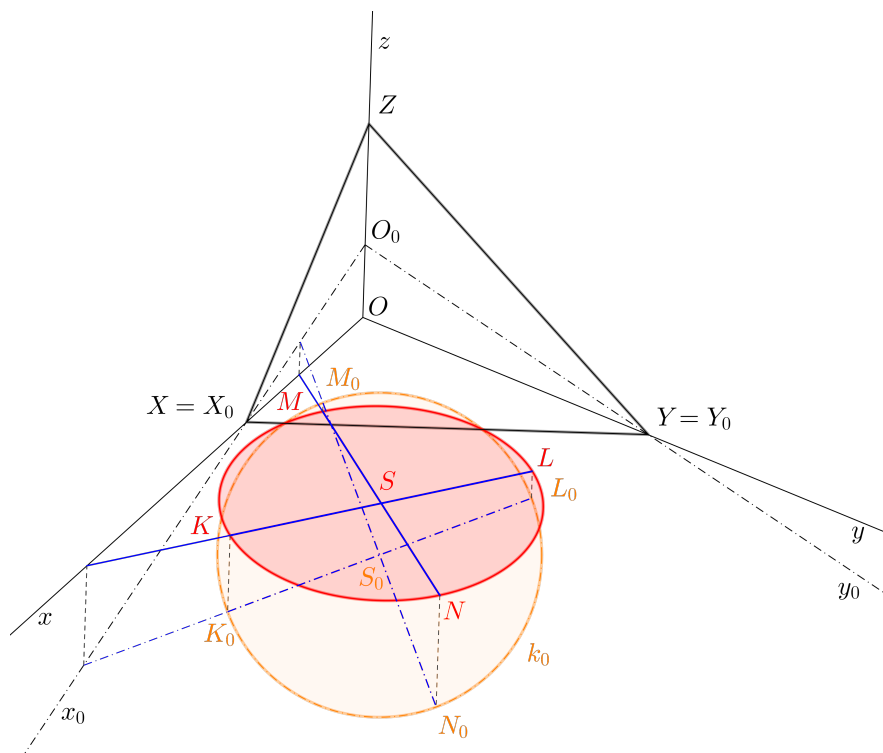
Nejprve si připomeňme, že mezi axonometrickým a otočeným půdorysem existuje afinita, jejíž osou je přímka XY a směrem axonometrický průmět osy z . O afinním obrazu kružnice víme, že kolmé průměry vzoru (tedy kružnice, kterou chceme zobrazit v afinitě) se zobrazí na sdružené průměry obrazu (tzn. elipsy, která v dané afinitě odpovídá původní kružnici).⁴ Zvolíme-li tedy libovolné dva navzájem kolmé průměry K_0L_0 , M_0N_0 kružnice k_0 v otočené půdorysně (obr. 4.6), jejich otočením do axonometrické půdorysny (resp. jejich afinním obrazem) budou sdružené průměry KL , MN axonometrického průmětu kružnice. Poté pomocí Rytzovy konstrukce⁵ najdeme hlavní a vedlejší osu elipsy. Axonometrický průmět bodů kružnice k dorýsujeme pomocí libovolné konstrukce.

4.2.2 Využití afinity

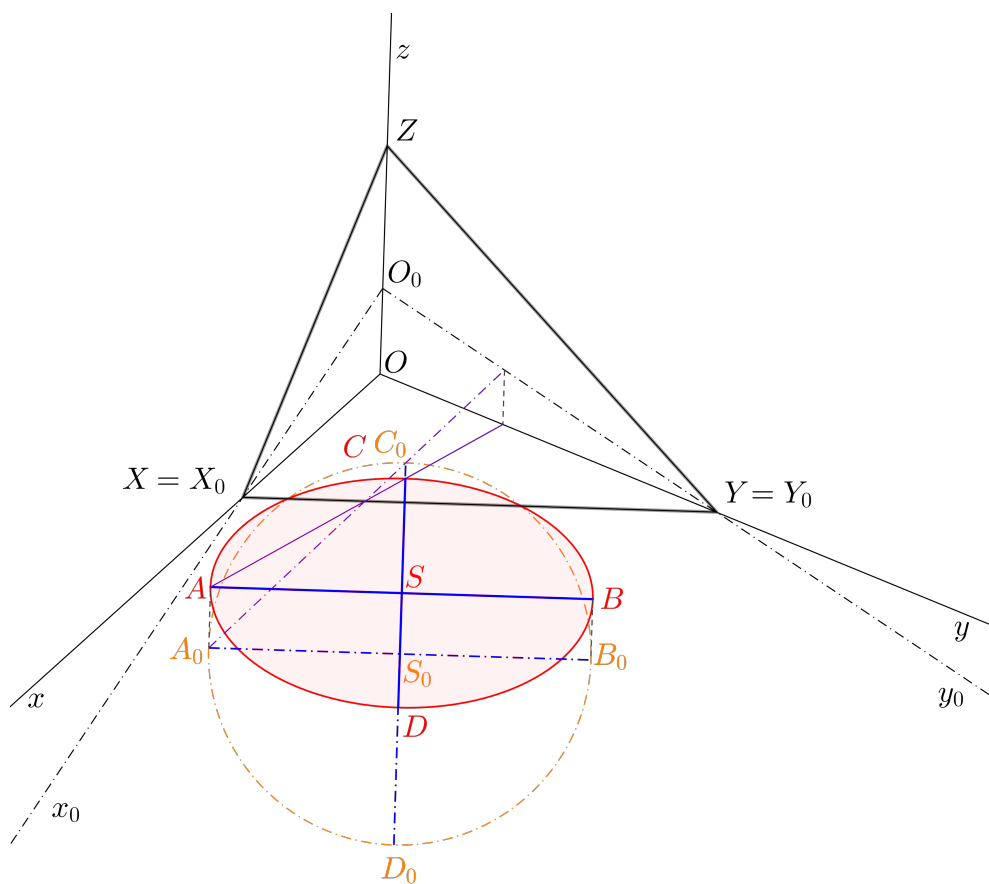
Afinita mezi otočenou půdorysnou a axonometrickou půdorysnou nám ale může usnadnit práce ještě více. Víme totiž, že přímky rovnoběžné s osou afinity se zobrazí opět na rovnoběžky s touto osou. Pokud tedy kolmé průměry A_0B_0 , C_0D_0 zvolíme tak, aby průměr A_0B_0 byl rovnoběžný s osou afinity (viz obr. 4.7, v našem případě je osou afinity přímka XY), obrazem těchto průměrů budou

⁴Viz [1], str. 50.

⁵Rytzova konstrukce os elipsy ze sdružených průměrů viz [1], str. 52.



Obrázek 4.6: Nalezení sdružených průměrů elipsy z otočené půdorysny

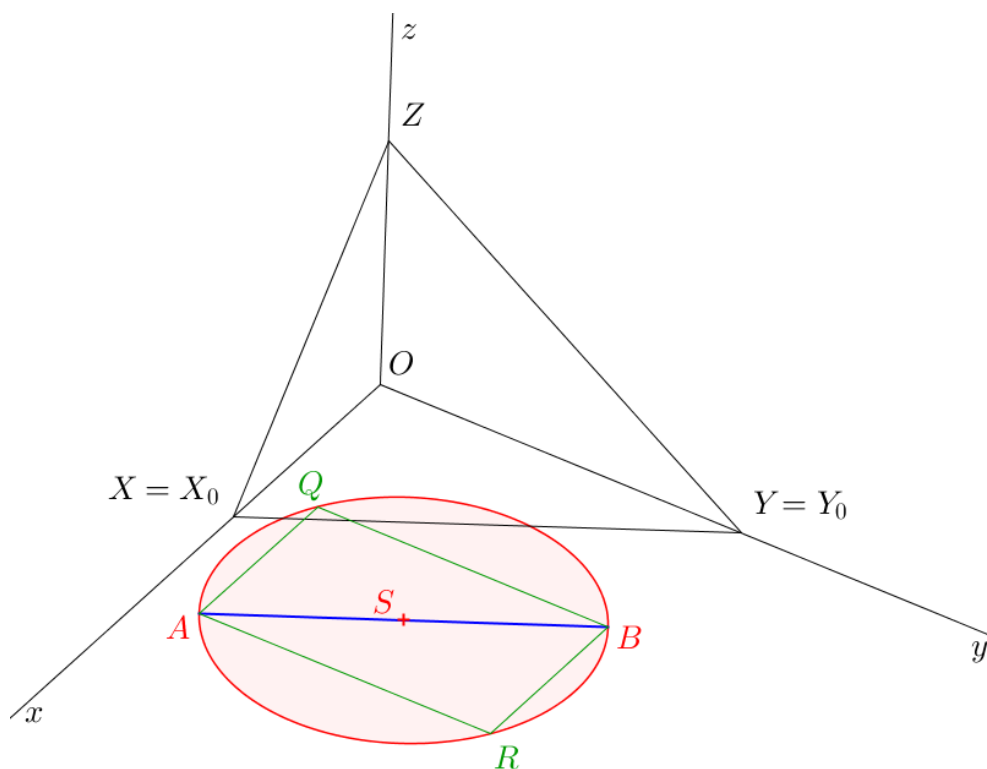


Obrázek 4.7: Průmět kružnice pomocí afinity

přímo hlavní osa AB a vedlejší osa CD axonometrického průmětu kružnice (tedy osy elipsy, kterou chceme zobrazit).

Podívejme se nyní pozorně na obr. 4.7. Axonometrické průměty bodů A, C můžeme získat snadno zobrazením axonometrického průmětu přímky AC (otočením fialové přímky A_0C_0 do axonometrické půdorysny získáme přímku AC , body A, C poté ve směru afinity z bodů A_0, C_0). Víme, že hlavní osa AB je rovnoběžná s přímkou XY , vedlejší osa CD musí být kolmá na hlavní osu AB (v našem případě musí ležet na přímce C_0D_0 ⁶). V průsečíku os AB, CD najdeme střed S . Vrcholy B, D jsou středově souměrné s body A, C podle středu S .

4.2.3 Užití Thalétovy věty



Obrázek 4.8: Průmět kružnice pomocí Thalétovy věty

Nyní si ukážeme konstrukci, k níž nepotřebujeme konstruovat kružnici v otočené půdorysně. Stačí nám najít její střed S (resp. bod A nebo B) a zobrazit průměr AB .

Na obr 4.7 si můžeme všimnout, že kružnice k_0 je tzv. Thalétova kružnice⁷ nad průměrem A_0B_0 (množiny pat kolmic spuštěných z bodů A_0, B_0). V půdorysně známe dvě ve skutečnosti navzájem kolmé přímky: osy x, y . V průsečících rovnoběžek k osám x, y z bodů A, B tedy najdeme další body elipsy Q, R

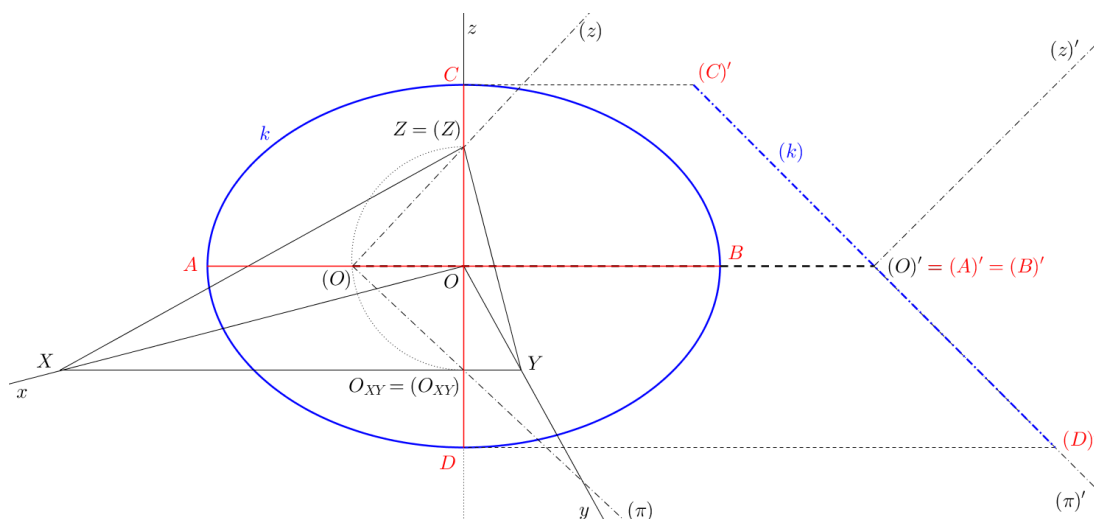
⁶Střed S obrazu kružnice musí ležet na ordinále bodu S_0 , tedy na kolmici k přímce XY ; protože je přímka C_0D_0 kolmá k průměru A_0B_0 , je kolmá i k přímce XY , tudíž splývá s afinně sruženou přímkou CD .

⁷Thalétova kružnice nad průměrem AB je množina vrcholů pravouhlých trojúhelníků s přeponou AB .

(obr 4.8, stačí nám jeden z nich). Vedlejší body elipsy získáme pomocí proužkové konstrukce.⁸

4.2.4 Vysunutí sklopené pomocné průmětny

Podívejme se na metodu, jejíž pomocí si můžeme zjednodušit konstrukci rotačních těles. Ukážeme si, jak zobrazit kružnici v půdorysně se středem v počátku soustavy souřadnic vysunutím sklopené pomocné průmětny – promítací roviny osy z (obr. 4.9).



Obrázek 4.9: Průmět kružnice ve vysunutí sklopené promítací rovině osy z

Sklopíme-li promítací rovinu osy z , půdorysna π se v tomto sklopení jeví jako přímka. Sklopenou osu z i sklopenou půdorysnu (přímky (z) , (π)) nyní posuneme libovolně daleko ve směru kolmém k ose z (viz přímky $(z)'$, $(\pi)'$). V takto vysunutí rovině $(\pi)'$ zobrazíme kružnici. Jelikož kružnice leží v rovině π , zobrazí se na úsečku. Středem úsečky bude střed kružnice (tedy vysunutý počátek $(O)'$), délkou úsečky průměr kružnice. Krajiní body úsečky označme $(C)'$, $(D)'$. Z bodů $(C)'$, $(D)'$ spustíme kolmice k průmětu osy z . Průsečíky těchto kolmic s osou z budou krajiní body C , D vedlejší osy elipsy, na níž se kružnice v axonometrii zobrazí. Krajiní body A , B hlavní osy elipsy budou ležet na přímce kolmé k průmětu osy z procházející počátkem O . Protože úsečka AB leží v rovině rovnoběžné s axonometrickou průmětnou, zobrazí se průměr AB ve skutečné velikosti, tzn. délky úseček AO , OB jsou rovny poloměru kružnice.

4.2.5 Kružnice v ostatních rovinách

Pro zobrazení kružnice ležící v nárysň/bokorysně použijeme stejný postup jako pro zobrazení kružnice ležící v půdorysně. Rozdílem bude rovina, kterou otočíme do axonometrické průmětny⁹, osy, se kterými budou rovnoběžné přímky

⁸Viz [1], str. 49.

⁹Namísto půdorysny otočíme nárysnu/bokorysnu. Osou afinity mezi otočenou průmětnou a jejím průmětem bude přímka XZ/YZ namísto přímky XY .

AQ , BQ (nebo AR , BR) při využití Thalétovy věty¹⁰, nebo volba pomocné průmětny, kterou sklopíme a vysuneme¹¹.

Pro zobrazení kružnice v rovině rovnoběžné s půdorysnou/nárysnou/bokorysnou zobrazíme nejprve kružnici v půdorysně/nárysně/bokorysně. Takto zobrazenou kružnici následně posuneme do správné roviny (stejně, jako je tomu u mnohoúhelníků, viz obr. 4.4). Pokud jsme sklopili promítací rovinu, máme již sklopenou i osu $z/y/x$ a nemusíme ji znovu sklápět.

¹⁰Přímky budou rovnoběžné s osami $x,z/y,z$.

¹¹Namísto promítací roviny osy z zvolíme promítací rovinu osy y/x . (Aby průmětem kružnice v promítací rovině byla úsečka, musí být promítací rovina kolmá k rovině, v níž kružnice leží.)

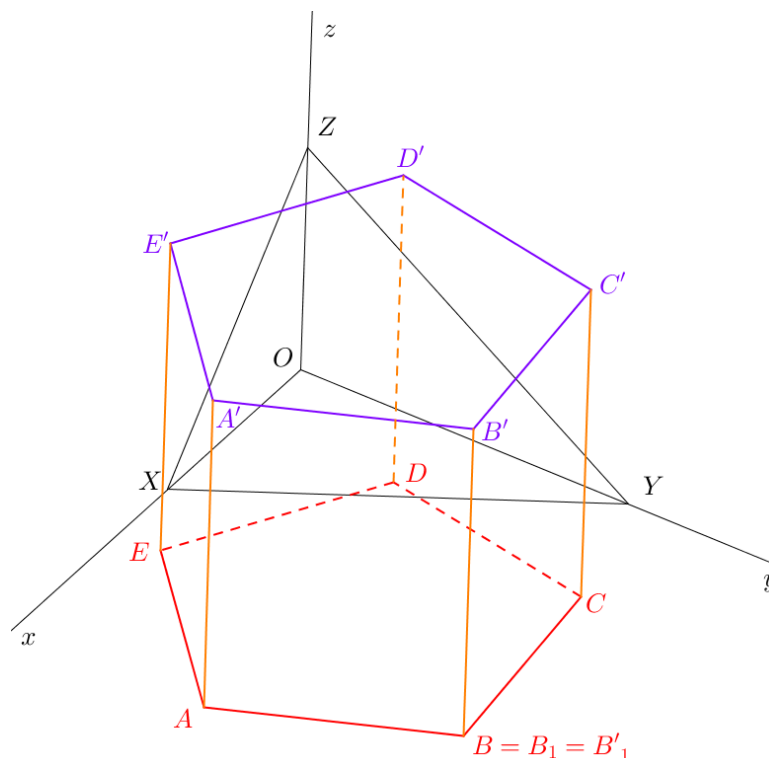
5 Tělesa

V této kapitole si vysvětlíme, jak zobrazit tělesa i jejich řezy a průniky s přímkami. Začneme hranatými tělesy, poté přidáme tělesa rotační.

Podstavy těles budeme umisťovat do půdorysny. Tělesa s podstavou v nárýsně (resp. v bokorysně) se zobrazí obdobně.¹ Tělesa s podstavou v ostatních rovinách se zabývat nebudeme.²

5.1 Hranol

K zobrazení hranolu je třeba zobrazit jeho podstavy a úsečkami správně spojit jednotlivé vrcholy těchto podstav. Musíme tedy umět zobrazit mnohoúhelník (podstavu) v půdorysně a v rovině rovnoběžné s půdorysnou (viz kapitola 4.1). Na obr. 5.1 vidíme pětiúhelníky $ABCDE$ a $A'B'C'D'E'$ jako podstavy hranolu. Kolmý hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ vytvoříme přidáním úseček AA' , BB' , CC' , DD' , EE' .



Obrázek 5.1: Kolmý hranol

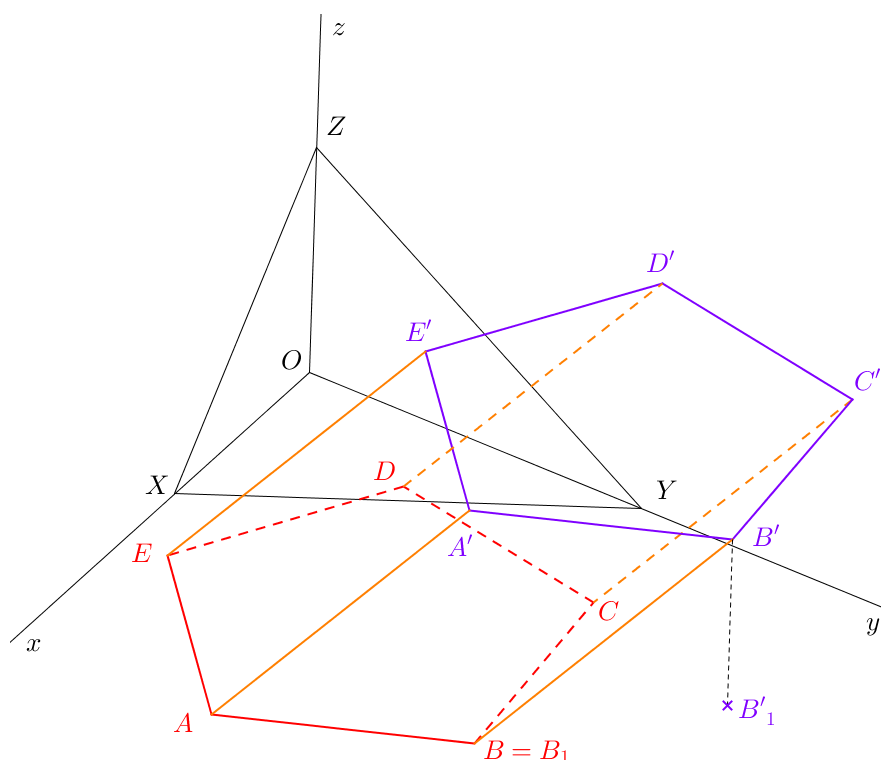
¹Je třeba zobrazit podstavu tělesa v dané rovině, u hranolů a válců i v rovině rovnoběžné (viz kapitola 4).

²Pokud bychom měli podstavu tělesa v axonometrické průmětně, podstava by se nezkreslila. Takto vypadají tělesa s podstavou v půdorysně v kótovaném promítání, případně v jejich půdorysu v Mongeově promítání (viz [1], str. 195–293). V případě kolmých hranolů a válců by průmětem tělesa byl dokonce průmět podstavy. Ztrácíme zde na názornosti, kterou nám pravouhlá axonometrie poskytuje v ostatních případech. Tělesa s podstavami v jiných rovinách se nezobrazují snadno (jde o učivo vysoké školy), proto se jimi nebudeme zabývat.

V obrázku 5.1 jsou popsány axonometrické půdorysy bodů B , B' . Pro lepší přehlednost nepopisujeme axonometrické půdorysy všech bodů.

Je třeba vyřešit ještě viditelnost hran. Můžeme začít konvexní obálkou všech vrcholů tělesa, která je vždy vidět. Úsečky AB , BC , CC' , $C'D'$, $D'E'$, $E'E$, EA tedy budou vidět (spojíme plnými čarami). Také víme, že horní podstava bude vidět.³ Hrany $E'A'$, $A'B'$, $B'C'$ proto rovněž spojíme plnými čarami. Jelikož je hrana AA' ohraničená dvěma viditelnými vrcholy, bude i tato hrana viditelná. Stejně tak hrana BB' bude vidět. Zbylé hrany CD , DE , DD' již vidět nebudou, spojíme je tedy čárkovanými čarami.

Obdobný postup řešení viditelnosti hran lze použít na další tělesa.⁴ Při zobrazování dalších těles se již viditelností zabývat nebudeme. Nesmíme na ni ale zapomínat.



Obrázek 5.2: Kosý hranol

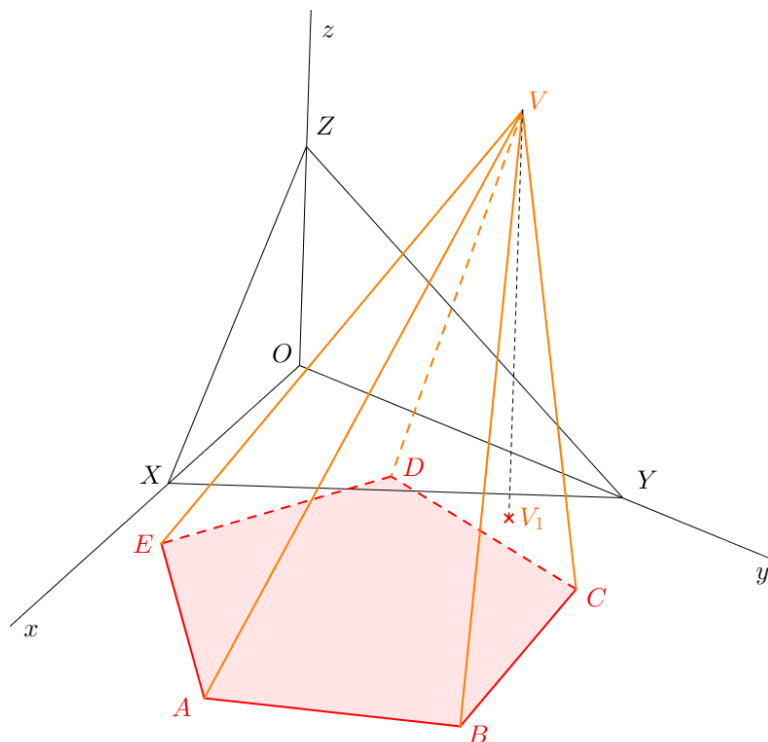
Kosý hranol zobrazíme stejným způsobem jako kolmý (viz obr. 5.2). Nejprve sestrojíme obě podstavy, které pospojujeme vhodnými úsečkami. Nakonec vyřešíme viditelnost.

³Dolní podstava leží v půdorysně, horní podstava v rovině rovnoběžné s půdorysnou. Protože jsme zvolili axonometrický náhled (viz obr. 1.5), vidíme všechny tyto roviny shora. Horní podstava tedy bude vidět.

⁴Jehlany, které nejsou komolé, nemají horní podstavu. Při určování jejich viditelnosti spojíme plnými čarami nejprve konvexní obálku a poté hrany, které spojují hlavní vrchol jehlanu s vrcholy podstavy, které leží v konvexní obálce průmětu jehlanu. Zbylé hrany budou neviditelné.

5.2 Jehlan

Pro jehlan zobrazíme nejprve jeho podstavu a hlavní vrchol, který spojíme úsečkami (hranami jehlanu) se všemi vrcholy podstavy. Nakonec vyřešíme viditelnost (viz obr. 5.3).



Obrázek 5.3: Jehlan

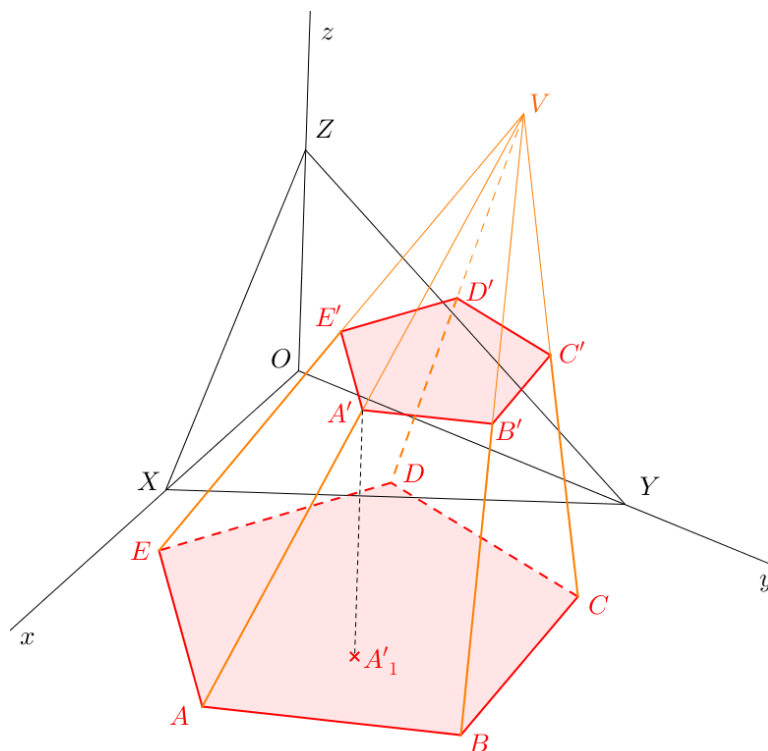
5.2.1 Komolý jehlan

Komolý jehlan (obr. 5.4) zobrazíme stejným způsobem jako hranol: začneme podstavami tělesa, které spojíme příslušnými hranami, a poté vyřešíme viditelnost. Na první pohled může být náročnější zobrazení horní podstavy. Zatímco u hranolu vznikne horní podstava posunutím dolní podstavy, u komolých jehlanů to funguje jinak.

Máme-li zadanou dolní podstavu, horní podstava může být určena např. jedním z vrcholů podstavy a délkou hrany podstavy, která z tohoto vrcholu vychází (např. bod A' a velikost hrany $A'B'$ na obr. 5.4). V tomto případě sestrojíme bod B' a přímky AA' , BB' .⁵Poté získáme vrchol jehlanu V jako průsečík AA' , BB' . Víme, že body C' , D' , E' leží po řadě na přímkách CV , DV , EV a hrany $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'A'$ jsou rovnoběžné s hranami BC , CD , DE , EA .

I v případě jiného zadání komolého jehlanu vycházíme při konstrukci podstav vždy z uvedených vlastností:

⁵Zkreslenou velikost úsečky $A'B'$ můžeme najít na hraně AB (vyneseme z otočení) a posunout o vektor $\overrightarrow{AA'}$ (na rovnoběžných přímkách se zachovává poměr délky zkreslené úsečky ku délce skutečné úsečky).



Obrázek 5.4: Komolý jehlan

- všechny přímky AA' , BB' , ... se protínají v jednom bodě,
- přímky AB , BC , ... jsou rovnoběžné s přímkami $A'B'$, $B'C'$,

5.3 Řez hranolu

Pro sestrojení rovinného řezu hranolu je nejjednodušší využít afinity mezi půdorysnou a rovinou řezu.⁶

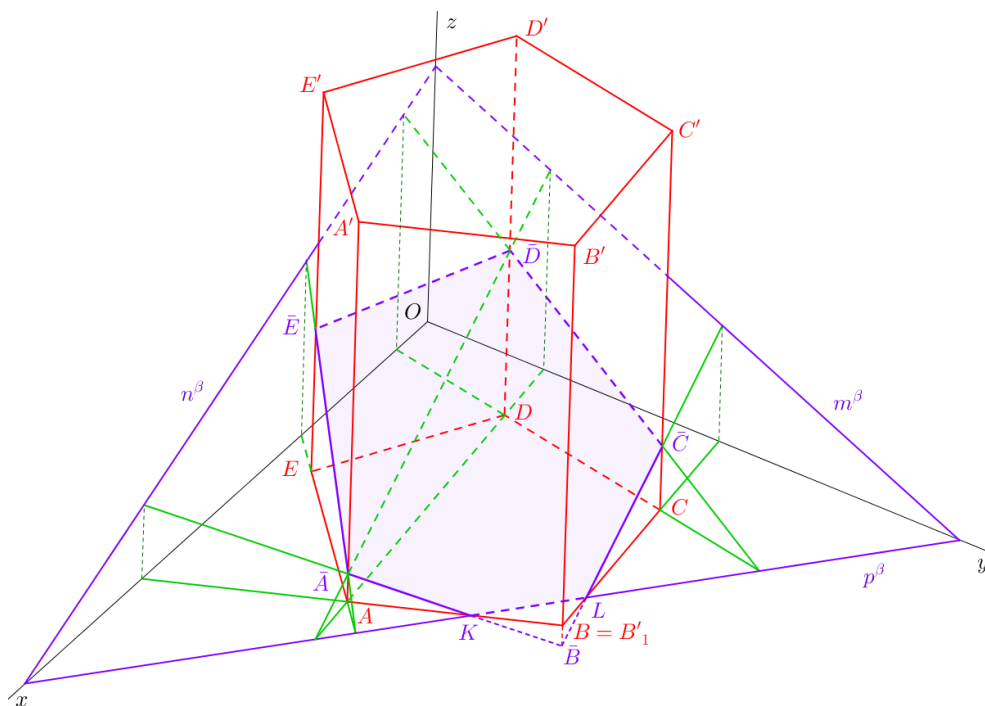
Na obr. 5.5 vidíme kolmý hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ a rovinu β . Úkolem je sestrojit řez hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou β , která je zadána svými stopami.

Jde-li o kolmý hranol, směrem hranolu (a tedy i směrem afinity) je směr osy z . Afinně sdruženými přímkami k přímkám ležícím v rovině β jsou jejich půdorysy (zelené přímky). K určení řezu zvolíme některé z přímek AB , BC , CD , DE , AE , ke kterým pomocí stopníků⁷ najdeme přímky afinně sdružené. Části sdružených přímek ležící ve stěnách hranolu tvoří řez. Protíná-li půdorysná stopa roviny řezu podstavu hranolu, tvoří řez rovněž část této stopy ohraničená podstavou (tedy úsečka KL). Výsledným řezem na obr. 5.5 je šestiúhelník $\bar{A}KL\bar{C}\bar{D}\bar{E}$.

Stejně jako řešíme viditelnost tělesa, musíme na závěr vyřešit viditelnost řezu. Ohraničuje-li stranu řezu alespoň jedna neviditelná hrana hranolu, je strana řezu

⁶U rovinných řezů hranolu platí vždy afinita mezi rovinou podstavy hranolu (dolní nebo horní) a rovinou řezu. Vzhledem k rozhodnutí zobrazovat výhradně tělesa s podstavami v půdorysně, které jsme si vysvětlili v úvodu této kapitoly, lze pro řešení řezu vždy užít afinity mezi půdorysnou a rovinou řezu.

⁷Např. přímka $\bar{B}\bar{C}$ je afinně sdružená s přímkou BC . Přímka $\bar{B}\bar{C}$ leží v rovině β , její půdorys splývá s přímkou BC .



Obrázek 5.5: Řez kolmého hranolu

neviditelná (na obr. 5.5 se jedná o úsečky $\bar{C}\bar{D}$ a $\bar{D}\bar{E}$). Pro určení viditelnosti ostatních stran řezu si musíme uvědomit, zda strana leží ve stěně hranolu, která je vidět (strany $E\bar{A}$, $\bar{A}K$, $L\bar{C}$), nebo ve stěně, která vidět není (strana KL).⁸

Stejným způsobem vyřešíme i viditelnost řezů ostatních hranatých těles, proto se jí již dále nebudeme zabývat.

Pamatujme, že rovina může protínat i horní podstavu. Průsečnici roviny řezu s horní podstavou bychom získali spojením průsečíků lomených čar $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ a $A'B'C'D'E'$.

Je-li hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ kosý (obr. 5.6), směrem afinity není směr osy z , ale směr bočních hran hranolu. Sdruženými přímkami k přímkám ležícím v rovině řezu tedy nebudou jejich půdorysy. Než začneme určovat řez hranolem, musíme nejprve najít jeden bod řezu (vyjma samodružných bodů) na libovolné hraně. K tomu použijeme krycí přímkou.⁹

Na obr. 5.6 je nalezen bod \bar{A} jako průsečík hrany AA' s krycí přímkou k nebo s krycí přímkou l .¹⁰ Nyní již máme určenou afinitu¹¹, s jejíž pomocí řez dourčíme.

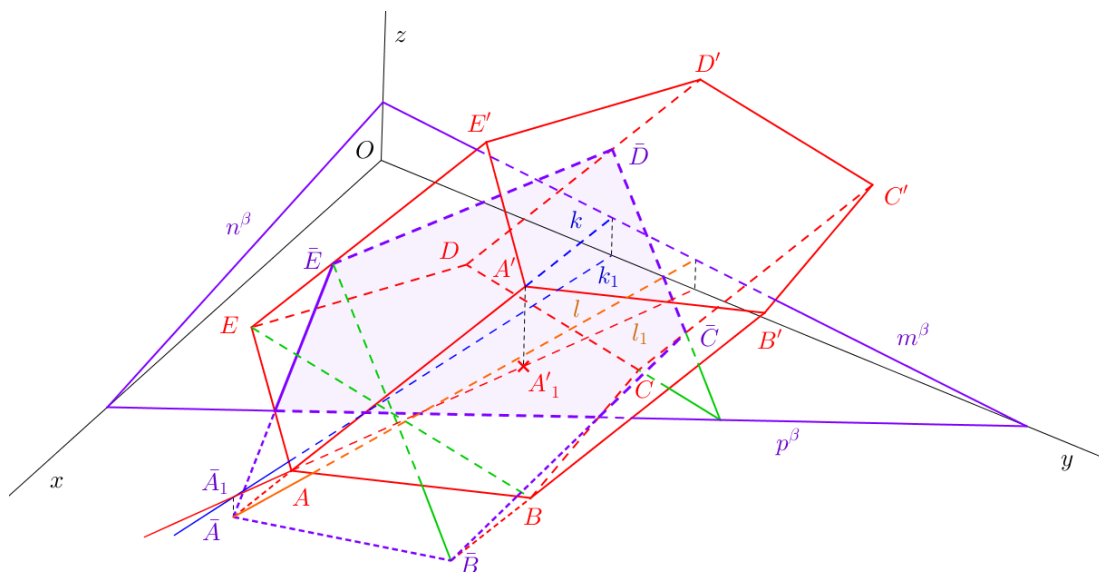
Nakonec vyřešíme viditelnost řezu.

⁸Stejně tak i strany $\bar{C}\bar{D}$ a $\bar{D}\bar{E}$ nejsou vidět protože leží ve stěnách, které vidět nejsou.

⁹Krycí přímkou viz podkapitola 3.4.

¹⁰Přímka k leží v rovině β , axonometrický průmět přímky k splývá s axonometrickým průmětem hrany AA' . Přímka l leží v rovině β , půdorys l_1 přímky l splývá s půdorysem AA'_1 hrany AA' . (K nalezení bodu \bar{A} stačí jedna krycí přímkou.)

¹¹Osou afinity je půdorysná stopa p^β roviny β , směrem směr bočních hran hranolu AA' , afinně sdružené body jsou A , \bar{A} .



Obrázek 5.6: Řez kosého hranolu

5.4 Řez jehlanu

K řešení rovinného řezu jehlanu je velmi výhodné využít kolineaci mezi rovinou řezu a půdorysnou.¹² Středem kolineace je hlavní vrchol jehlanu, osou půdorysná stopa roviny řezu.¹³

Stejně jako u řezu kosého hranolu, musíme i při řešení řezu jehlanu nejprve najít jeden bod řezu (tedy jeden pár bodů sdružených v kolineaci). Na obr. 5.7 hledáme řez jehlanu $ABCDEV$ rovinou β . Můžeme si všimnout nalezení bodu \bar{A} pomocí krycí přímký k nebo l .¹⁴ Řez je následně určen pomocí kolineace.¹⁵ Viditelnost řezu určíme stejně jako u řezů hranolů.

Řez komolého jehlanu může ovlivnit jeho druhá podstava. Stejně jako při řešení řezů hranolů musíme sledovat, zda rovina řezu protíná podstavu, která leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou, či nikoliv.

5.5 Průnik přímky s mnohostěnem

Průnik přímky s tělesem určíme tak, že danou přímkou proložíme libovolnou rovinu a sestrojíme řez tělesa touto rovinou. Body, ve kterých přímka protíná hranici řezu, určují průnik přímky s tělesem.

Na obr. 5.8 vidíme jehlan $ABCDEV$ a přímkou p . Přímkou p jsou proloženy roviny β, δ , dále jsou sestrojeny řezy jehlanu těmito rovinami. Můžeme si všimnout,

¹²Kolineace viz [1], str. 34.

¹³Osou kolineace je vždy průsečnice roviny dolní podstavy jehlanu s rovinou řezu. Vzhledem k volbě polohy jehlanu (podstava leží v půdorysně) je rovinou podstavy půdorysna.

¹⁴Přímky k, l leží v rovině β . Axonometrický průmět přímky k splývá s axonometrickým průmětem hrany AV jehlanu, půdorys l_1 přímky l splývá s půdorysem AV_1 hrany AV . (K získání bodu \bar{A} stačí jedna krycí přímka.)

¹⁵Např. přímka AE je v kolineaci sdružená s přímkou $\bar{A}\bar{E}$. Přímka $\bar{A}\bar{E}$ tedy prochází bodem \bar{A} a průsečíkem přímky AE s půdorysnou stopou p^β roviny β . Bod \bar{E} najdeme na hraně EV .

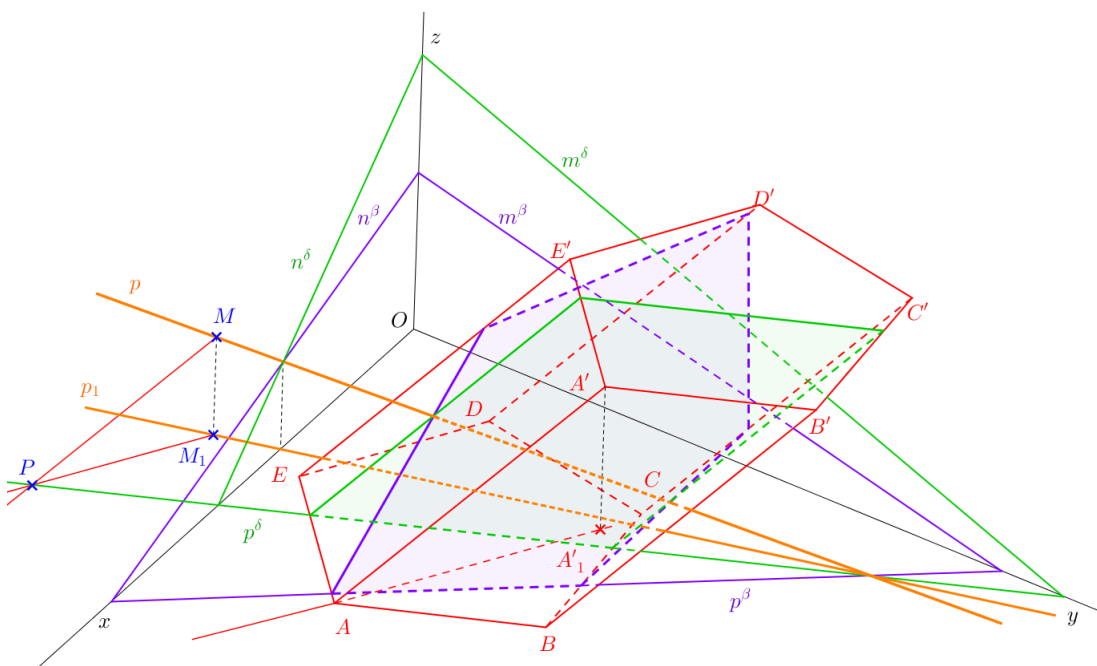
že oba řezy protíná přímka p ve stejné úsečce. Tato úsečka je průmětem přímky s jehlanem.

Rovina β je dána přímkou p a jednou stopou, kterou můžeme zvolit libovolně.¹⁶ Dále sestrojíme řez jehlanu $ABCDEV$ rovinou β . Průsečík řezu s přímkou p je průnikem přímky p s jehlanem $ABCDEV$.

Rovina δ je **vrcholová rovina**, tzn. rovina, která obsahuje hlavní vrchol jehlanu. Konstrukce řezu jehlanu vrcholovou rovinou je obvykle jednodušší než konstrukce řezu jinou rovinou. Řezem je totiž vždy trojúhelník. Vrcholy řezu jsou hlavní vrchol jehlanu a průsečíky půdorysné stopy roviny δ s obvodem podstavy jehlanu.

Rovina δ je zadána přímkou p a vrcholem V .¹⁷ Na obr. 5.8 je přímka q rovnoběžná s přímkou p . Průsečíky přímek p, q s nárysnou (resp. s bokorysnou) prochází nárysná (bokorysná) stopa. Nyní jsme schopni zobrazit půdorysnou stopu.

Ani při řešení průniku přímky s tělesem nesmíme zapomenout na viditelnost. Je-li přímka vně tělesa, musíme ještě řešit, zda leží před tělesem, nebo za ním. Pokud průsečík přímky s tělesem leží ve stěně tělesa, která je vidět (tzn. průmět stěny je zcela ohraničen plnými čarami), přímka vycházející z tělesa (tímto bodem) je rovněž vidět. Pokud průsečík leží ve stěně, která vidět není, není vidět ani tento průsečík. Přímka je zde neviditelná až do části, kde její průmět vychází ven z průmětu tělesa.



Obrázek 5.9: Průnik přímky s hranolem

Průnik přímky s hranolem určujeme stejně jako průnik přímky s jehlanem. Zvolíme libovolnou rovinu, která obsahuje danou přímku, sestrojíme řez hranolu touto rovinou, a určíme body průniku. Výhodné je zvolit **směrovou rovinu**,

¹⁶Stopa musí procházet příslušným stopníkem přímky p . Např. nárysná stopa n^β prochází nárysným stopníkem.

¹⁷Nalezení stop roviny viz podkapitola 2.2.

tedy rovinu, která obsahuje přímky rovnoběžné se směrem bočních hran hranolu. Řezem hranolu touto rovinou je zpravidla¹⁸ kosodélník.¹⁹

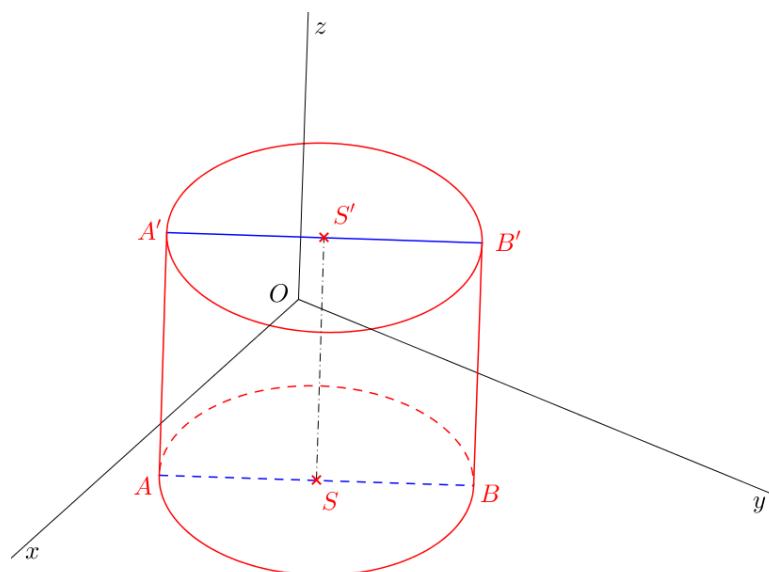
Na obr. 5.9 je průnik přímky p s hranolem $ABCDEA'B'C'D'E'$. Je zvolena rovina β (určena přímkou p a jednou stopou) a sestrojen řez hranolu touto rovinou. Průsečíky přímky p s hranolem jsou její průsečíky s řezem hranolu rovinou β .

Půdorysnou stopu směrové roviny δ najdeme tak, že libovolným bodem M na přímce p vedeme přímkou rovnoběžnou s boční hranou hranolu. Stopník této přímky a stopník přímky p určí stopu p^δ roviny δ . Půdorysná stopa p^δ určí jednu stranu řezu, další dvě strany získáme vedením rovnoběžek s bočními hranami hranolu z průsečíků stopy p^δ s hranami podstavy hranolu. Poslední strana řezu leží v horní podstavě hranolu a je rovnoběžná s půdorysnou stopou roviny δ .

5.6 Rotační válec

Chceme-li zobrazit rotační válec (viz obr. 5.10), zobrazíme nejprve jeho podstavu (viz podkapitola 4.2). Dále sestrojíme obrysové přímky válce, které se zobrazí jako tečny k podstavám ve směru průmětu osy válce (tedy spojnice středů podstav).

Nakonec vyřešíme viditelnost: horní podstava a obrysové přímky budou vidět; část dolní podstavy tvořící konvexní obálku (je ohraničená dotykovými body obrysových hran) je viditelná, její druhá část je neviditelná.



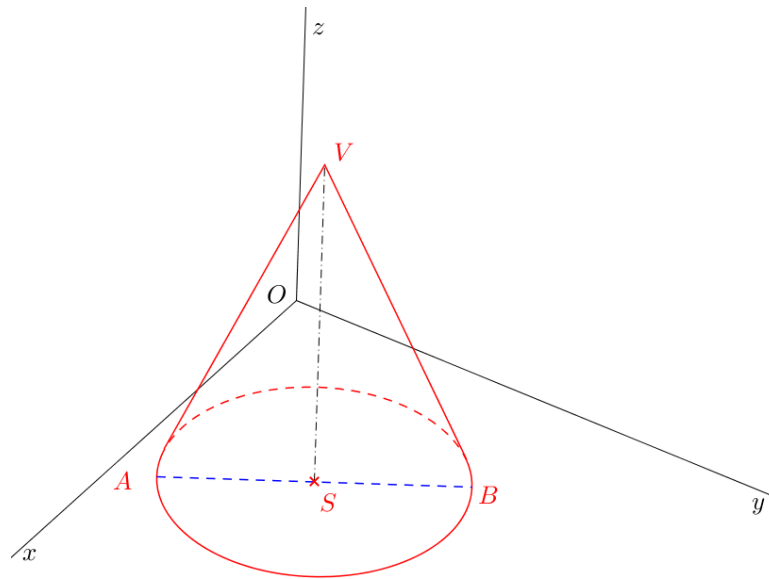
Obrázek 5.10: Rotační válec

5.7 Rotační kužel

Pro zobrazení rotačního kužele (obr. 5.11) sestrojíme nejprve jeho podstavu (viz podkapitola 4.2) a vrchol V . Obrysovými přímkami jsou tečny k průmětu podstavy z průmětu vrcholu kužele (tj. tečny z bodu k elipse, viz [1], str. 40).

¹⁸Za předpokladu, že průnikem hranolu s přímkou je úsečka.

¹⁹Je-li hranol kolmý, řezem je obdélník.

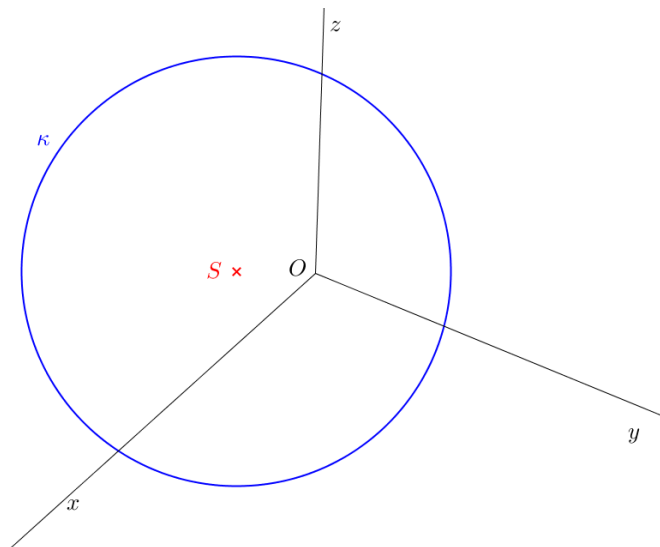


Obrázek 5.11: Rotační kužel

Viditelnost určíme stejně jako u válců: obrysové přímky jsou viditelné, podstava je z části neviditelná.

5.8 Koule

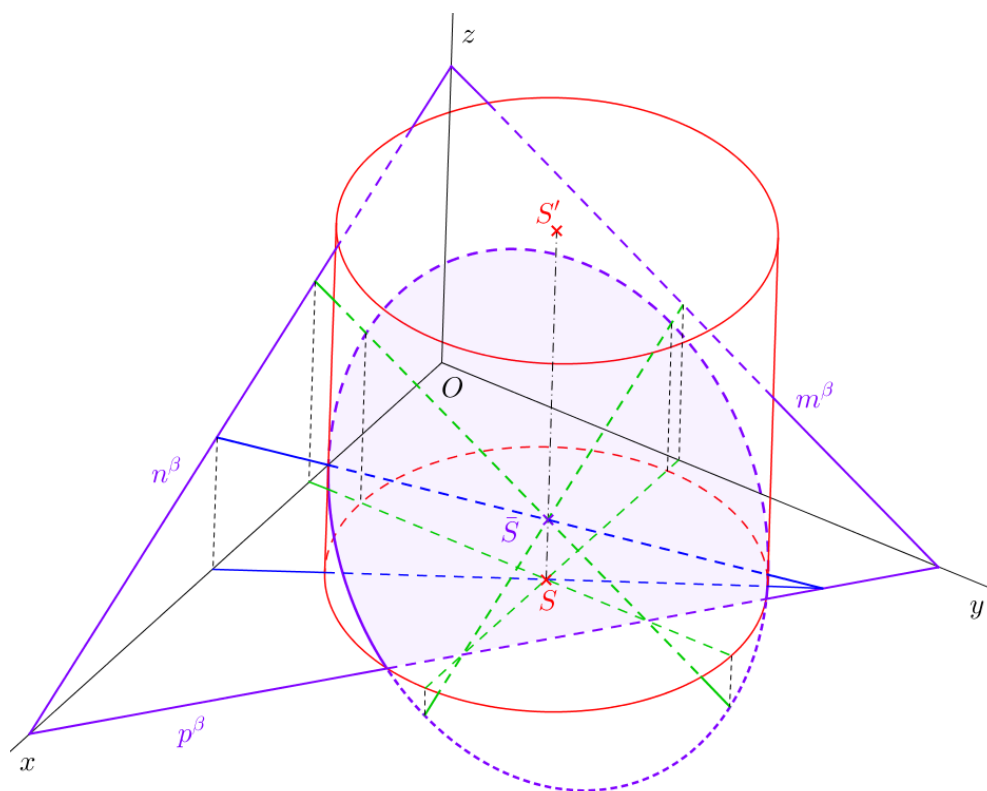
Průmětem koule v pravoúhlé axonometrii je kružnice, jejímž poloměrem je poloměr koule. Ke konstrukci (viz obr. 5.12) je tedy třeba najít střed S koule a sestavit příslušnou kružnici se středem v bodě S .



Obrázek 5.12: Koule

5.9 Řez rotačního válce

K nalezení řezu rotačního válce danou rovinou nám pomůže afinita mezi rovinou řezu a půdorysnou.²⁰



Obrázek 5.13: Řez rotačního válce

Je-li rovina řezu směrovou rovinou válce²¹, řezem je obdélník. Pokud je rovina řezu rovnoběžná s půdorysnou, řezem je kružnice (průmětem řezu je elipsa). V ostatních případech je řezem válce elipsa, nebo její část (pokud ovšem rovina řezu válec protíná). Elipsu určíme jednoznačně, najdeme-li její sdružené průměry. Sdružené průměry řezu získáme jako afinně sdružené přímky ke kolmým průměrům podstavy.²²

Na obr. 5.13 je vyřešen řez válce rovinou β , která je určena svými stopami. Zeleně je vyznačena dvojice afinně sdružených průměrů podstavy a řezu (zvolili jsme průměry, které jsou v podstavě rovnoběžné s osami x , y , tedy ve skutečnosti kolmé). Lze také použít přímo hlavní a vedlejší osu průmětu podstavy (hlavní osa je na obrázku modře). Na přímce afinně sdružené k hlavní ose podstavy totiž najdeme body řezu, ve kterých se mění jeho viditelnost (body leží na obrysových přímkách válce).

²⁰Afinita zde funguje stejně jako u řezu hranolu. Osou afinity je průsečnice roviny podstavy s rovinou řezu, směrem afinity směr osy válce. V našem případě je osou afinity půdorysná stopa roviny řezu.

²¹Směrová rovina válce je rovnoběžná s osou válce.

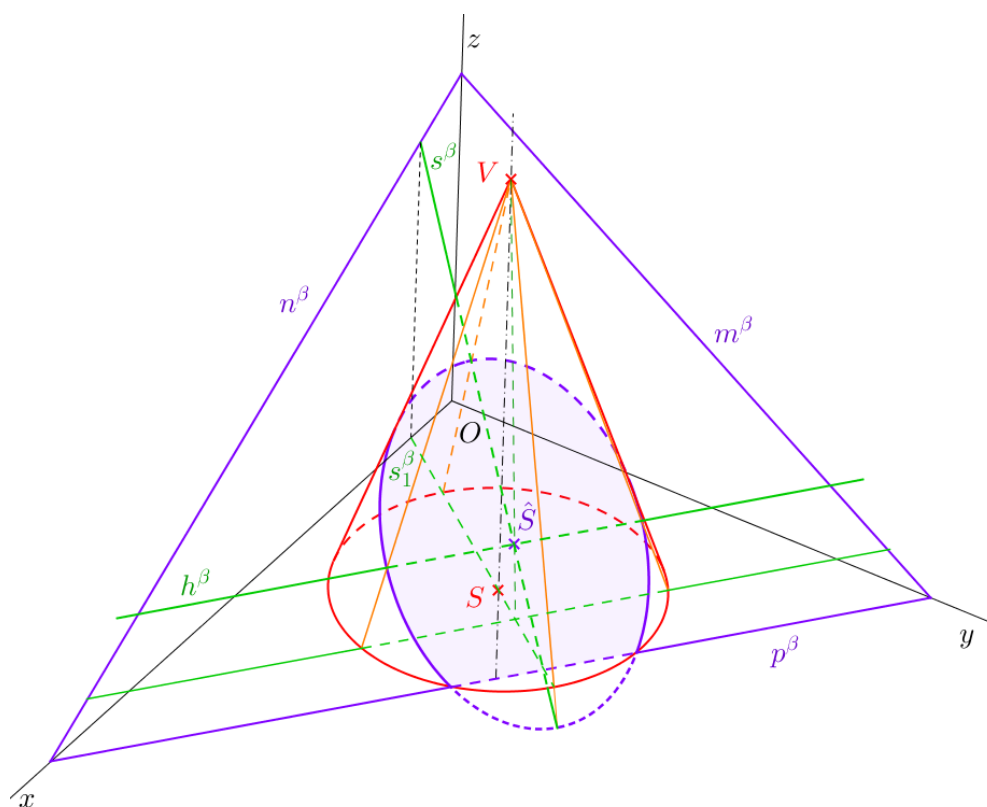
²²Kolmé průměry kružnice odpovídají v afinitě sdruženým průměrům elipsy (viz [1], str. 50). Ačkoliv se podstava zobrazí na elipsu, ve skutečnosti (tedy v prostoru) je to kružnice. Její kolmé průměry můžeme nanést z otočení.

Viditelnost části řezu zakončené bodem na obrysové přímce válce určíme podle viditelnosti části válce, ve které tato část řezu leží. Část řezu, která je afinně sdružená s viditelnou částí podstavy, je vidět, část sdružená s neviditelnou částí podstavy vidět není. Protíná-li rovina řezu dolní podstavu, vzniklá část řezu v podstavě je neviditelná. Pokud rovina řezu protíná horní podstavu, průsečnice je viditelná.

5.10 Řez rotačního kužele

Určení řezu rotačního kužele je náročnější, než je tomu u válce. Řezem není vždy elipsa nebo kružnice. Může vzniknout i parabola nebo hyperbola (v případě vrcholové roviny trojúhelník).²³ Parabolický a hyperbolický řez můžeme vynést bod po bodu pomocí kolineace mezi rovinou řezu a rovinou podstavy.²⁴

K eliptickému řezu umíme najít sdružené průměry. Musíme být ale obezřetní, protože se postup zásadně liší od určování řezu válce.



Obrázek 5.14: Řez rotačního kužele

Na obr. 5.14 je kužel a rovina β . Jeden průměr najdeme na spádové přímce s^β roviny β různoběžné s osou kužele (axonometrický půdorys spádové přímky přeneseme z otočené půdorysny jako kolmici ke stopě roviny β , axonometrický průmět

²³Uvažujme případy, kdy má rovina s přímkou více než jeden společný bod nebo společnou úsečku.

²⁴Osou kolineace je půdorysná stopa roviny řezu, středem kolineace vrchol kužele.

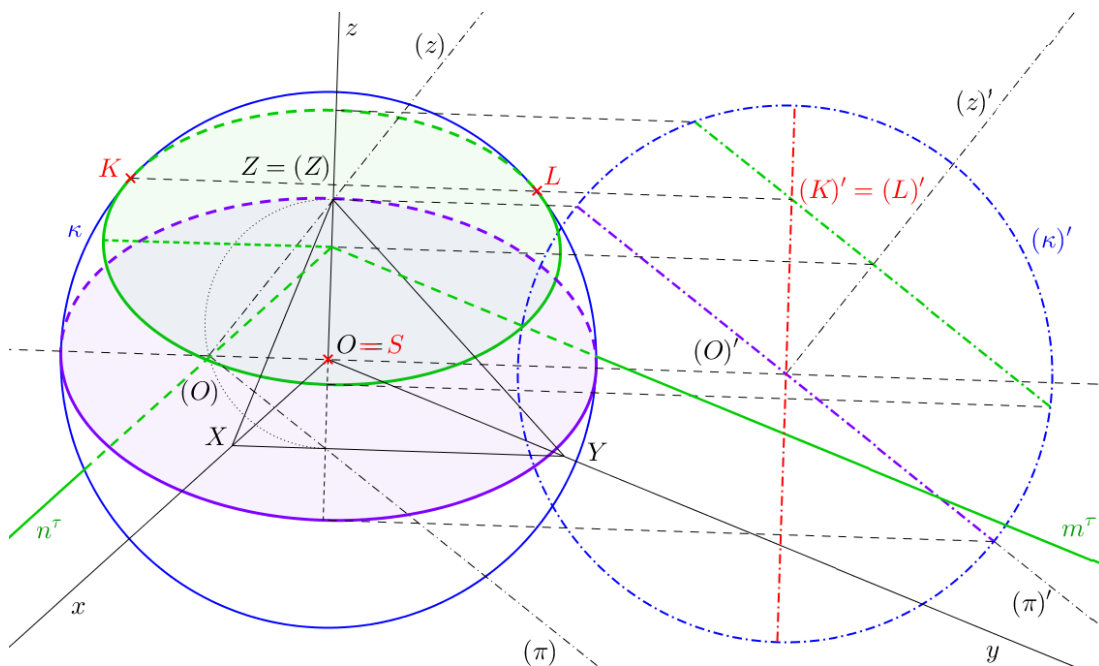
vynesením stopníků přímky s).²⁵ Částí přímky s^β , která je uvnitř kužele, je jeden průměr řezu. Nyní najdeme střed \hat{S} tohoto průměru. Střed \hat{S} neleží na ose kužele!

Sdružený průměr najdeme na hlavní přímce h^β roviny β . Vedeme tedy středem \hat{S} přímku h^β rovnoběžnou se stopou p^β . Touto přímkou proložíme vrcholovou rovinu a najdeme její průsečíky s kružnicí, která ohraničuje podstavu kužele.²⁶ Průsečíky spojíme přímkami s vrcholem V , tzv. povrchovými přímkami kužele. Na povrchových přímkách najdeme krajní body průměru.

Viditelnost řezu určujeme stejně jako u válce. Body řezu, které jsou v kolíneaci sdružené s viditelnými body podstavy, jsou vidět a naopak. Leží-li část řezu v půdorysně, nebude tato část vidět.

5.11 Řez koule

K řezu koule si ukážeme jenom speciální případy. Střed koule umístíme do počátku soustavy souřadnic O . Řezy budeme provádět pouze pomocnými průmětnami a rovinami, které jsou s nimi rovnoběžné.



Obrázek 5.15: Řez koule

Kouli κ na obr. 5.15 vedeme řez půdorysnou (fialově) a řez rovinou τ , která je s půdorysnou rovnoběžná (zeleně). K určení řezů vysuneme sklopenou pomocnou průmětnu (viz podkapitola 4.2.4). Ve vysunuté průmětně zobrazíme průmět koule $(\kappa)'$ a oba řezy (čerchované úsečky). Následně vyneseme hlavní osy axonometrických průmětů řezů²⁷ a řezy dorýsujeme.

²⁵Spádová přímka roviny β je přímka, která leží v rovině β a je kolmá k její stopě p^β . Její půdorys s_1^β je rovněž kolmý ke stopě p^β . (Kolmice k přímce rovnoběžné s průmětnou se v pravouhlém promítání zobrazí na kolmici k průmětu dané rovnoběžky s průmětnou, pokud se nezobrazí na bod, viz [1], str. 31.)

²⁶Stopa vrcholové roviny je rovnoběžná s přímkou h^β . Prochází bodem, ve kterém přímka s_1^β protíná přímku $V\hat{S}$.

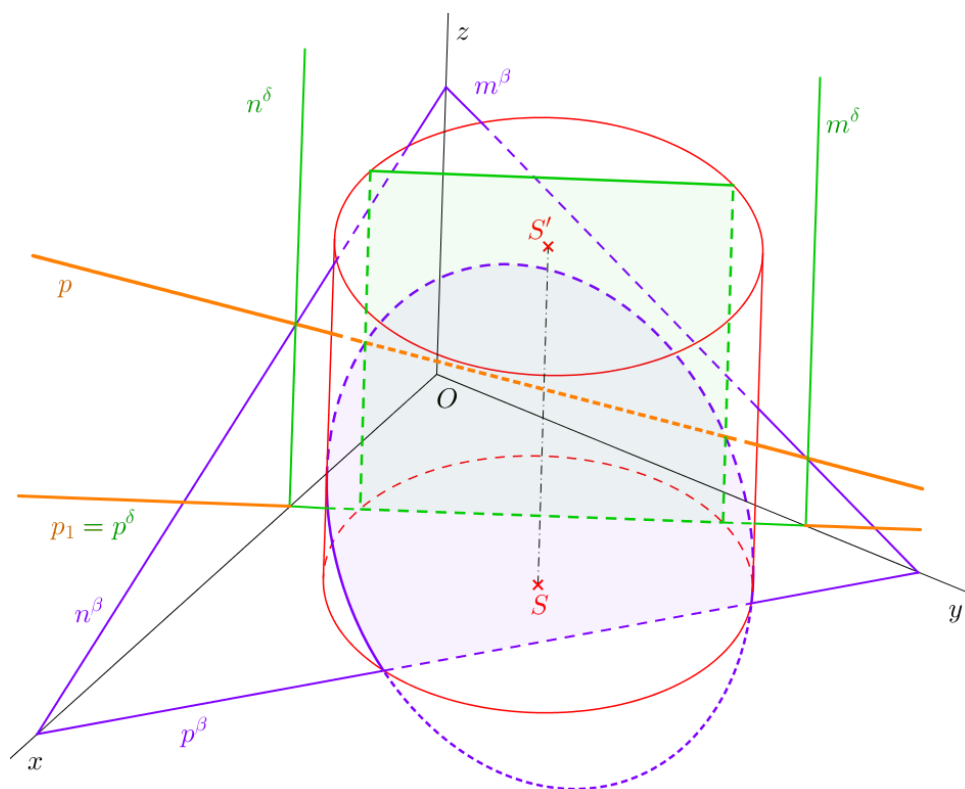
²⁷Ve skutečnosti jsou oba řezy kruhy, zobrazí se jako elipsy.

Viditelnost řezu nám pomůže určit červená úsečka na obr. 5.15 (vysunutý průmět axonometrického průmětu koule – kolmice k přímce $(O)O$ vysunutým počátkem $(O)'$). Protíná-li tato úsečka vysunutý průmět řezu, z průsečíku přeneseme do axonometrického průmětu průsečíky průmětu řezu s průmětem koule (body K, L na zelené elipse). V těchto bodech se mění viditelnost řezu.

Zmíněnou červenou úsečkou nyní rozdělme vysunutý průmět na dvě poloviny. Směřuje-li vektor $\overrightarrow{(O)O}$ doprava, části axonometrických řezů vysunutých v pravé polorovině budou vidět. Části v levé polorovině vidět nebudou. Pokud vektor $\overrightarrow{(O)O}$ směřuje doleva, části řezů v levé polorovině vidět budou, zatímco části ležící v pravé polorovině vidět nebudou.

5.12 Průnik přímky s rotačním tělesem

Průnik přímky s rotačním tělesem najdeme stejně jako průnik přímky s mnohostěnem: zvolíme rovinu, která danou přímku obsahuje, a sestrojíme řez tělesa touto rovinou. Průnikem přímky s tělesem je její průnik s řezem. Vzhledem k obtížnější konstrukci řezu je ale nevýhodné volit u válců/kuželů jinou rovinu, než směrovou/vrcholovou (viz obr. 5.16 a 5.17).

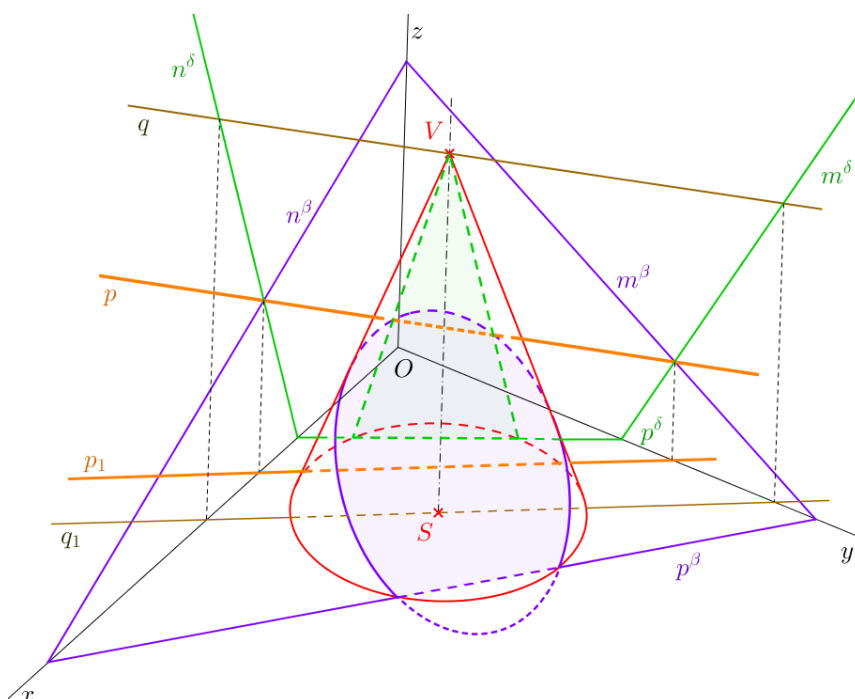


Obrázek 5.16: Průnik přímky s rotačním válcem

Na obr. 5.16 je průnik přímky p s rotačním válcem. Můžeme si všimnout dvou různých řezů. Řez obecnou rovinou β vede k řešení průniku, konstrukce řezu je ale velmi náročná (je třeba sestavit elipsu). Při volbě směrové roviny²⁸ δ

²⁸Směrová rovina je rovnoběžná s osou z , protože směr válce je rovnoběžný s osou z .

je řezem válce obdélník (zobrazí se jako kosodélník). Vyhneme se tak konstrukci kuželosečky.

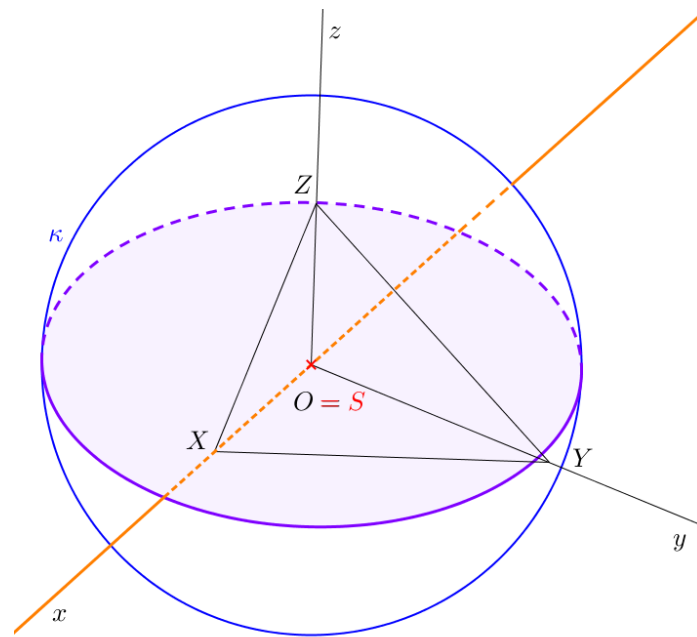


Obrázek 5.17: Průnik přímky s kuželem

Řešení průniku přímky p s kuželem vidíme na obr. 5.17. Jednou možností je libovolná rovina β , jejímž řezem je kuželosečka, kterou následně musíme sestavit, abychom našli průnik přímky s kuželem. Nebo můžeme přímkou p proložit vrcholovou rovinou δ .²⁹ Řezem kužele rovinou δ je trojúhelník.

Ukažme si ještě průnik osy x s koulí, jejíž střed je v počátku O (obr. 5.18). Mohli bychom sestavit řez koule půdorysnou (nebo nárysnou) a najít průnik s osou x pomocí tohoto řezu. Tím bychom si ale zbytečně zkomplikovali práci. Uvědomme si, že průsečíky leží na ose a jejich vzdáleností od středu koule je její poloměr. Stačí tedy sklopit promítací rovinu osy x nebo otočit půdorysnou/nárysnou. Ze sklopení (otočení) přeneseme skutečnou vzdálenost na axonometrickou osu x .

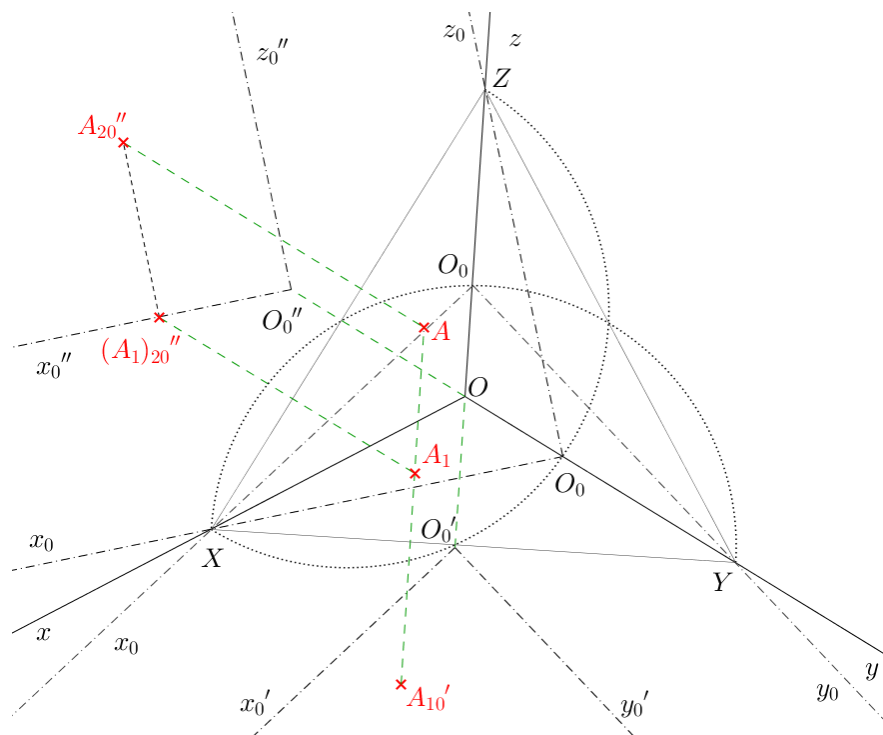
²⁹Na obrázku najdeme stopy n^δ, m^δ roviny δ jako spojnice stopníků přímek p, q (přímka q je rovnoběžná s přímkou p a prochází vrcholem kužele V).



Obrázek 5.18: Průnik přímky s koulí

6 Průsečná (zářezová) metoda

Pro konstrukci náročnějších těles je vhodné použít tzv. **zářezovou metodu**. V ní se využívá zobrazení dvou pravouhlých průmětů daného tělesa do pomocných průmětů. Postup zobrazení bodu si ukážeme na obrázku 6.1.

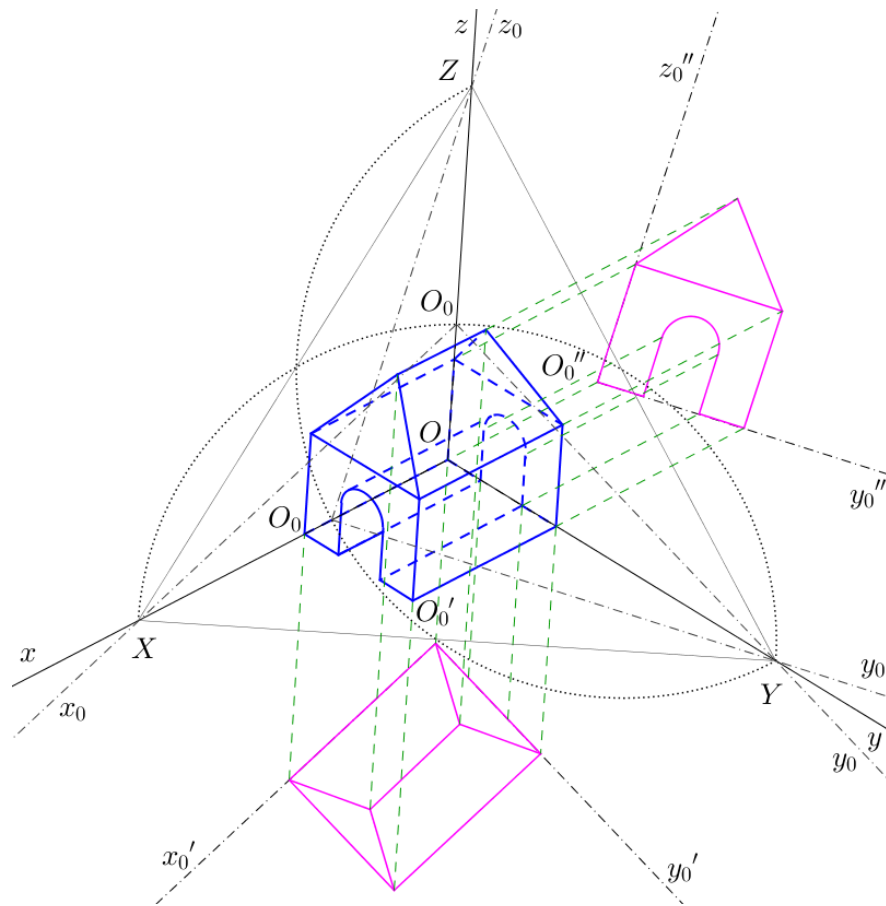


Obrázek 6.1: Průsečná metoda – zobrazení bodu

Nejprve otočíme půdorysnu do axonometrické průmětny.¹ Tuto rovinu (resp. osy x_0, y_0) posuneme libovolně ve směru OO_0 . Stejným postupem otočíme a vysuneme nárysnu nebo bokorysnu (na obr. 6.1 je vysunutá nárysna). Do vysunutých průmětů zobrazíme půdorys a nárys (bokorys) bodu, jako je tomu v Mongeově promítání (více o Mongeově promítání viz [1], str. 117). Bod A zobrazíme v axonometrické průmětně následovně: průmětem A'_{10} bodu A v půdorysu vedeme rovnoběžku se směrem vysunutí půdorysny (tedy se směrem axonometrické osy z), průmětem A''_{20} v nárysu (bokorysu) vedeme rovnoběžku se směrem vysunutí nárysny (bokorysny). Průsečíkem takto vedených rovnoběžek je axonometrický průmět A . K sestavení axonometrického půdorysu A_1 použijeme stejný postup, místo rovnoběžky vedené vysunutým nárysem A''_{20} (bokorysem) ale musíme vést rovnoběžku vysunutým nárysem půdorysu $(A_1)''_{20}$.

Pro zobrazení jednoho bodu je průsečná metoda zbytečně obtížná. Zato k zobrazení složitějších těles je velmi praktická a přehledná. Příklad můžeme vidět na obr. 6.2, kde jsme pro porovnání použili vysunutý bokorys namísto nárysnu. Průsečnou metodou najdeme průměty všech vrcholů tělesa, které spojíme hranami.

¹Otočení půdorysny viz podkapitola 1.2.2).



Obrázek 6.2: Průsečná metoda – zobrazení tělesa

7 Úlohy

Úlohy jsou rozděleny do šesti skupin uspořádaných podle kapitol popisujících danou látku. Např. úlohy na vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin (teorie ve 3. kapitole) najdeme v podkapitole 7.3.

V každé úloze je pravoúhlá axonometrie zadána axonometrickým trojúhelníkem XYZ . Tento trojúhelník je označen $\triangle XYZ$. Následuje výčet délek stran axonometrického trojúhelníka, poté zadání úlohy. **Všechny uvedené jednotky jsou v centimetrech.** Značení $X[3-7; 4-13]$ nám doporučuje vhodné umístění bodu X axonometrického trojúhelníka na papír tak, aby se nám na stránku vešly všechny důležité body. V tomto případě bychom bod X měli umístit 3–7 od levého okraje a 4–13 cm od dolního okraje stránky. Úsečka XY je vodorovná, bod Y umísťujeme vpravo od bodu X . Úlohy se vejdou na papír formátu A4, orientovaný na výšku.

7.1 Princip zobrazení

- 1.1 $X[3-7; 4-13]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 11, |YZ| = 17, |XZ| = 15.$
Sestrojte axonometrický osový kříž.
- 1.2 $X[3-7; 4-13]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 11, |YZ| = 17, |XZ| = 15.$
Otočte půdorysnu do axonometrické průmětny.
- 1.3 $X[3-7; 4-13]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 11, |YZ| = 17, |XZ| = 15.$
Do axonometrické průmětny sklopte promítací rovinu osy z .

7.2 Přímka a rovina

- 2.1 $X[2-7; 7-18]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 13, |YZ| = 6, |XZ| = 12.$
Jsou dány body $D = [12; 3; 14], E = [3; 1; 2].$
Sestrojte stopníky přímky $p = DE.$
- 2.2 $X[2-7; 7-18]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 13, |YZ| = 6, |XZ| = 12.$
Jsou dány body $A = [4; 1; 11], B = [9; 1; 13], C = [3; 3; 10].$
Sestrojte stopy roviny $\omega = ABC.$

7.3 Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin

- 3.1 $X[6-13; 10-18]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 1, |YZ| = 2, |XZ| = 2.$
Jsou dány body $A = [5; 7; 9], B = [1; 7; 2], C = [12; 3; 5], D = [8; 3; -2].$
Určete vzájemnou polohu přímek $p = AB$ a $q = CD.$

- 3.2** $X[1; 8-15]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 15, |YZ| = 10, |XZ| = 14.$
 Jsou dány body $A = [8; 11; 4]$, $B = [8; 14; 7]$, $C = [4; 3; 12]$, $D = [5; 5; 10]$.
 Určete vzájemnou polohu přímek $p = AB$ a $q = CD$.
- 3.3** $X[4-8; 5-14]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 6, |YZ| = 7, |XZ| = 6.$
 Jsou dány body $A = [3; 2; 2]$, $B = [4; -2; 14]$, $C = [1; 12; 3]$, $D = [2; 8; 15]$.
 Určete vzájemnou polohu přímek $p = AB$ a $q = CD$.
- 3.4** $X[2-8; 6-20]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 10, |YZ| = 9, |XZ| = 5.$
 Jsou dány body $A = [1; 5; 7; 0]$, $B = [2; 2; 5; 5]$ a rovina $\varrho = (1, 5; 1; 12)$.
 Zobrazte průsečík přímky $p = AB$ s rovinou ϱ .
- 3.5** $X[3-8; 6-20]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 10, |YZ| = 9, |XZ| = 5.$
 Jsou dány roviny $\varrho = (1, 5; 1; 12)$, $\sigma = (8; 2; 7)$.
 Zobrazte průsečnici rovin ϱ s rovinou σ .

7.4 Rovinné útvary

- 4.1** $X[4-8; 9-21]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 8, |YZ| = 9, |XZ| = 7.$
 Jsou dány body $A = [4; 8; 0]$, $B = [0; 4; 0]$, $C = [5; 2; 0]$, $D = [2; 4; 0]$,
 $E = [9; 6; 0]$, $F = [8; 8; 0]$, $G = [1; 9; 0]$.
 Sestrojte sedmiúhelník $ABCDEFG$.
- 4.2** $X[3-10; 8-23]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 5, |YZ| = 5, |XZ| = 3.$
 Jsou dány body $A = [4; 1; 5]$, $B = [6; 7; 5]$, $C = [4; 9; 5]$, $D = [0; 9; 5]$.
 Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$.
- 4.3** $X[12-15; 8-23]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 5, |YZ| = 4, |XZ| = 4.$
 Jsou dány body $A = [6; 0; 1]$, $T = [9; 0; 4]$.
 Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem A a těžištěm T .
- 4.4** $X[9; 8-21]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 6, |YZ| = 8, |XZ| = 8.$
 Je dán bod $S = [8; 6; 0]$ a délka $r = 10$.
 V půdorysně sestrojte kružnici se středem S a poloměrem r .
- 4.5** $X[5-9; 2-16]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 5, |YZ| = 6, |XZ| = 7.$
 Je dán bod $S = [2; 0; 7]$ a délka $r = 6$.
 V bokorysně sestrojte kružnici se středem S a poloměrem r .
- 4.6** $X[7-10; 11-17]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 7, |YZ| = 7, |XZ| = 9.$
 Je dán bod $S = [9; 9; 8]$ a délka $r = 7$.
 V rovině rovnoběžné s půdorysnou sestrojte kružnici se středem S a poloměrem r .

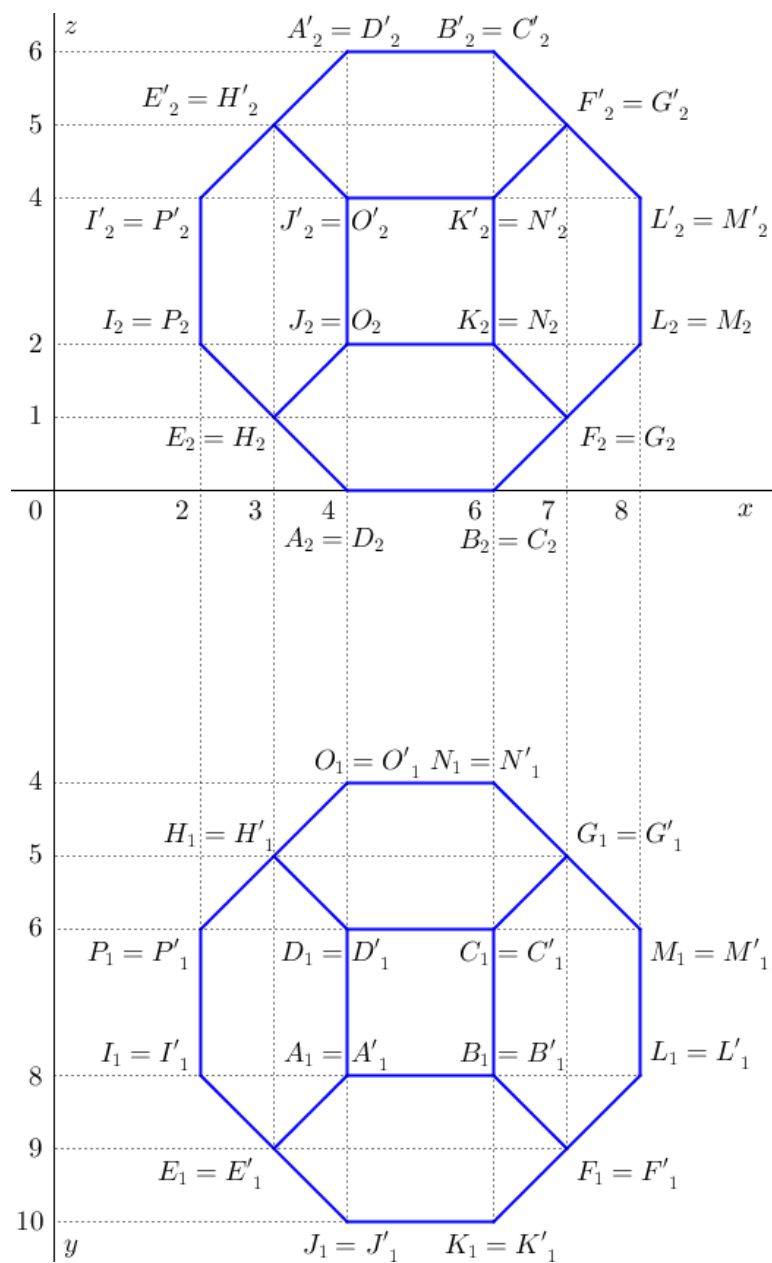
7.5 Tělesa

- 5.1** $X[11; 4-18]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 9, |YZ| = 9, |XZ| = 5.$
Jsou dány body $A = [2; 0; 5], B = [9; 0; 9], C = [5; 0; 4], D = [3, 0, 4],$
 $E = [1; 0; 1]$ a délka $v = 5.$
Sestrojte kolmý hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož výška je $v.$
- 5.2** $X[4-10; 10-20]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 7, |YZ| = 8, |XZ| = 5.$
Jsou dány body $A = [6; 1; 0], B = [8; 0; 0], C = [9; 8; 0], A' = [7; 9; 8].$
Sestrojte kosý hranol $ABCA'B'C'.$
- 5.3** $X[5-9; 3-21]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 7, |YZ| = 8, |XZ| = 8.$
Jsou dány body $A = [8; 0; 3], B = [2; 0; 2], C = [0; 0; 9], D = [7; 0; 8],$
 $E = [4; 0; 7], F = [3; 0; 4], V = [1; 10; 9].$
Sestrojte jehlan $ABCDEFV.$
- 5.4** $X[10; 4-21]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 6, |YZ| = 8, |XZ| = 8.$
Jsou dány body $A = [0; 3; 8], B = [0; 2; 0], C = [0; 0; 7], A' = [8; 1; 4]$
a vzdálenost $|A'B'| = 4.$
Sestrojte komolý jehlan $ABCA'B'C'.$
- 5.5** $X[4-10; 7-20]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 9, |YZ| = 9, |XZ| = 6.$
Jsou dány body $A = [6; 9; 0], B = [9; 3; 0], C = [5; 3; 0], D = [5; 8; 0],$
rovina $\varrho = (8; \infty; 8)$ a délka $v = 8.$
Sestrojte řez kolmého hranolu $ABCD A'B'C'D'$ rovinou $\varrho.$ Výška hra-
nolu je $v.$
- 5.6** $X[2-6; 3-19]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 8, |YZ| = 7, |XZ| = 8.$
Jsou dány body $A = [8; 0; 3], B = [3; 0; 0], C = [6; 0; 6], A' = [4; 6; 2]$
a rovina $\varrho = (8; 9; 8).$
Sestrojte řez kosého hranolu $ABCA'B'C'$ rovinou $\varrho.$
- 5.7** $X[7-12; 8-19]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 5, |YZ| = 4, |XZ| = 6.$
Jsou dány body $A = [5; 5; 0], B = [8; 0; 0], C = [3; 1; 0], V = [1; 7; 9]$
a rovina $\varrho = (8; \infty; 8).$
Sestrojte řez jehlanu $ABCV$ rovinou $\varrho.$
- 5.8** $X[5-8; 3-19]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 7, |YZ| = 8, |XZ| = 9.$
Jsou dány body $A = [4; 0; 2], B = [4; 0; 6], C = [7; 0; 8], K = [8; 8; 8],$
 $L = [6; 4; 2]$ a délka $v = 9.$
Sestrojte průnik přímky KL s kolmým hranolem $ABCA'B'C'.$ Výška
hranolu je $v.$
- 5.9** $X[2-11; 2-18]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 8, |YZ| = 9, |XZ| = 6.$
Je dán bod $S = [0; 1; 0]$ a délky $r = 3, v = 7.$
Sestrojte rotační válec, jehož podstava se středem S a poloměrem r leží
v půdorysně. Výška válce je $v.$

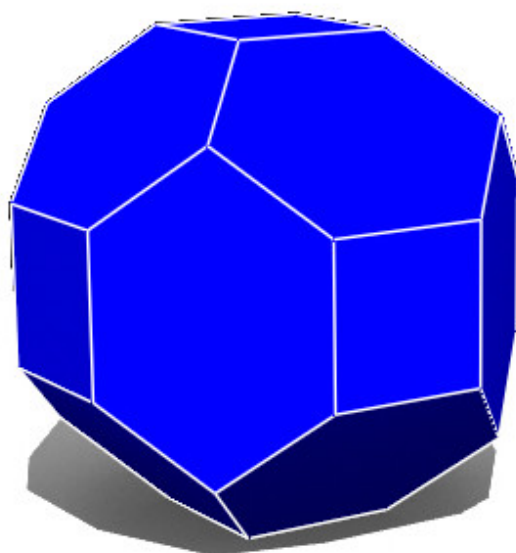
- 5.10** $X[2-11; 2-21]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 5, |YZ| = 7, |XZ| = 8.$
 Je dán bod $S = [0; 0; 5]$ a délky $r = 2, v = 5.$
 Sestrojte rotační kužel, jehož podstava se středem S a poloměrem r leží v nárysně. Výška kužele je $v.$
- 5.11** $X[4-10; 14-22]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 6, |YZ| = 6, |XZ| = 3.$
 Je dán bod $S = [7; 2; 0],$ délky $r = 3, v = 6$ a rovina $\varrho = (10; \infty; 6).$
 Sestrojte rotační válec, jehož podstava se středem S a poloměrem r leží v půdorysně. Výška válce je $v.$ Sestrojte řez válce rovinou $\varrho.$
- 5.12** $X[4-9; 6-19]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 9, |YZ| = 9, |XZ| = 9.$
 Jsou dány body $S = [2; 0; 1], A = [4; 2; 1], B = [1; 1; 8]$ a délky $r = 6, v = 5.$
 Sestrojte rotační válec, jehož podstava se středem S a poloměrem r leží v nárysně. Výška válce je $v.$ Sestrojte průnik válce s přímkou $KL.$

7.6 Průsečná (zářezová) metoda

- 6.1** $X[10; 19]$
 $\triangle XYZ: |XY| = 6, |YZ| = 7, |XZ| = 8.$
 Jsou dány průměty komolého osmistěnu v Mongeově promítání (obr. 7.1). Pro lepší představu může posloužit obr. 7.2.
 Zobrazte těleso v pravoúhlé axonometrii.



Obrázek 7.1: Komolý osmistěn v Mongeově promítání



Obrázek 7.2: Komolý osmistěn v prostoru

Závěr

V předloženém učebním textu jsme podali výklad středoškolského učiva pravoúhlé axonometrie. Zaměřili jsme se především na obsah doporučený pro výuku deskriptivní geometrie na gymnáziích.¹ U rovinných řezů těles jsme vysvětlili i rozšiřující učivo (řez tělesa obecnou rovinou).

Úlohy k procvičení slouží k ověření pochopení učiva. Mohou je použít nejen žáci při domácí přípravě, ale také vyučující v hodinách.

Do budoucna plánujeme přidat další krokované konstrukce a doplnit teoretickou část o další rozšiřující pasáže. Naším největším cílem je upravit práci do podoby webových stránek.

¹Viz [4].

Literatura

- [1] POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 1. vydání. Praha: nakladatelství Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
- [2] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. 1. vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. L11-C3-IV-31/1475/XI.
- [3] KADEŘÁVEK, František, KLÍMA, Josef, KOUNOVSKÝ, Josef. *Deskriptivní geometrie I*. 3. vydání. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1954. 301 03/2 – 12695/8/53/III/2 – 126.
- [4] *Metodický portál* [online]. [cit. 2015-07-30]. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/G/370/deskriptivni-geometrie.html>

Přílohy

Příložené CD obsahuje prezentace s krokovanými konstrukcemi k úlohám 2.1, 3.1, 4.1 a 6.1. Ke shlédnutí je třeba software umožňující prohlížet prezentace ve formátu *.pdf (např. AdobeReader).

Na obrázcích níže jsou snímky prezentace 4-1.pdf, tedy krokované konstrukce k úloze 4.1.

Pro shlédnutí krokované konstrukce otevřete soubor, jehož názvem je číslo příslušné úlohy.²

Pod snímky prezentace jsou vytištěné modely k úlohám 1.2 a 1.3. Jde o modely, které lze slepit ze čtvrtky a průhledné fólie (k vytvoření dílů z fólie mohou posloužit průhledné spisové desky).

Model k úloze 1.2 se skládá z dílů *1a* a *1b* na obr. 15 a z dílu *1c* na obr. 17.

Díly *1a* a *1b* vytiskněte na čtvrtku. Díl *1c* překreslete na fólii. Vystřižený díl *1a* přeložte podle osy z . Díl *1b* zastříhnete podle os x , y a nastříhnete u bodů X , Y podle dvojitých čar. Díl *1c* zastříhnete podle otočených os a šedých límců a prostrihnete díru na straně trojúhelníka podle dvojité čáry. Límce přehněte dopředu podle stran trojúhelníka.

Model sestavíte prostrčením dílu *1b* zpředu do díry ve fólii a přilepením límců fólie k šedým oblastem dílu *1a*. Fólie modelu reprezentuje axonometrickou průmětnu, pohyblivý díl *1b* půdorysnu, kterou otáčíme do axonometrické průmětny.

Model k úloze 1.2 se skládá z dílů *2a* a *2b* na obr. 16 a z dílu *2c* na obr. 17.

Díly *2a* a *2b* vytiskněte na čtvrtku. Díl *2c* překreslete na fólii. Díl *2a* zastříhnete podle osy y (z) a přeložte podle osy x . Díl *2b* zastříhnete podle čárkované přímky a šedého límce.³ Límec přehněte dozadu podél plné čáry. Fólii zastříhnete podle šedých límců. Límce přehněte dopředu podle stran trojúhelníka.

Přilepte límec dílu *2b* k fólii v místě, které je na obr. 16 naznačeno šedou oblastí. Límce fólie přilepte k šedým oblastem dílu *2a*. Fólie představuje axonometrickou průmětnu, pohyblivý díl *2b* promítací rovinu, kterou sklápíme do axonometrické průmětny.

²Číslování je zachováno, namísto dělicích teček jsou však pomlčky. Pro shlédnutí např. úlohy 2.1 tedy spusťte soubor 2-1.pdf.

³Límec se bude lepit na fólii. Pro spolehlivější slepení je vhodné zastříhnout díl *2b* podle plné čáry a přilepit k němu límec z papíru.

4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE

Zadání příkladu:

X[4-8; 9-21]

$\triangle XYZ$: $|XY| = 8$, $|YZ| = 9$, $|XZ| = 7$

$A = [4, 8, 0]$, $B = [0, 4, 0]$, $C = [5, 2, 0]$, $D = [2, 4, 0]$, $E = [9, 6, 0]$,
 $F = [8, 8, 0]$, $G = [1, 9, 0]$

Sestrojte sedmiúhelník $ABCDEFG$.

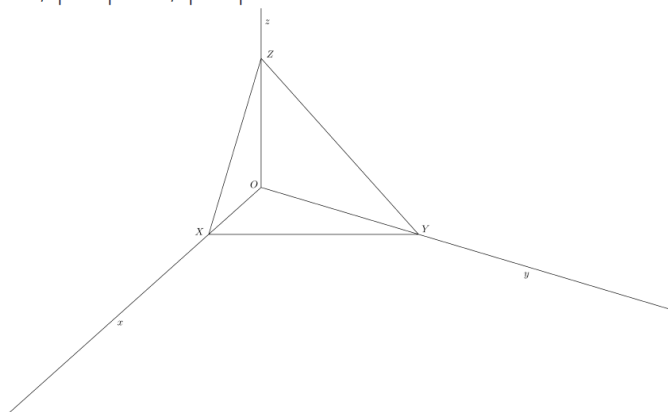
PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 3: Prezentace – snímek 1

X[4-8; 9-21]

$\triangle XYZ$: $|XY| = 8$, $|YZ| = 9$, $|XZ| = 7$

$A = [4, 8, 0]$,
 $B = [0, 4, 0]$,
 $C = [5, 2, 0]$,
 $D = [2, 4, 0]$,
 $E = [9, 6, 0]$,
 $F = [8, 8, 0]$,
 $G = [1, 9, 0]$.

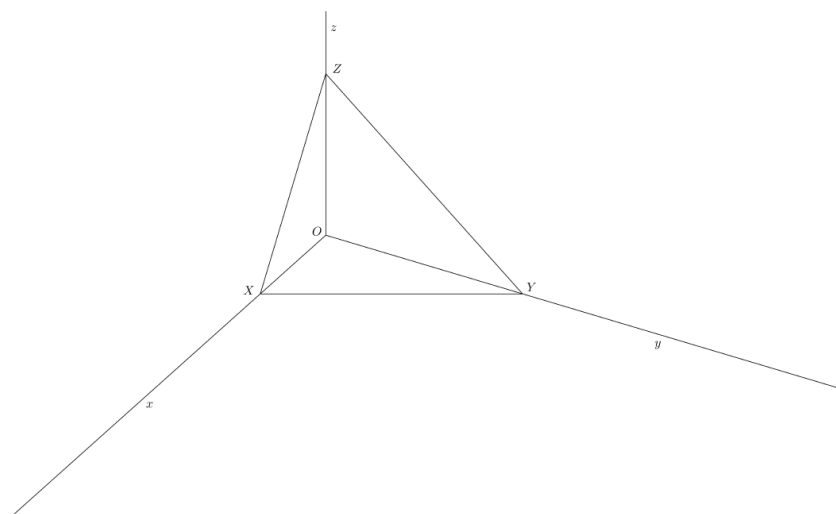


Sestrojte sedmiúhelník $ABCDEFG$.

PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 4: Prezentace – snímek 2

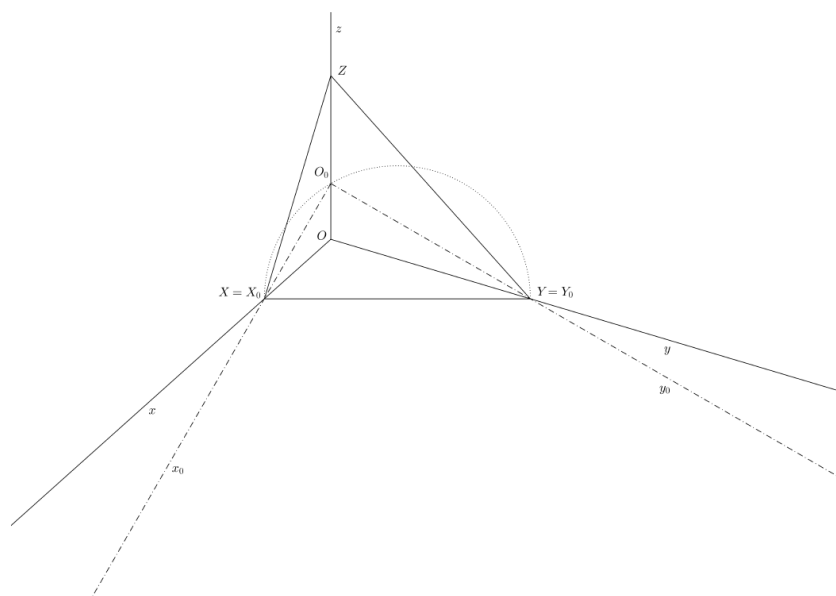
1. Sestrojíme axonometrický trojúhelník a osový kříž.
 $|XY| = 8$, $|YZ| = 9$, $|XZ| = 7$.



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 5: Prezentace – snímek 3

1. Sestrojíme axonometrický trojúhelník a osový kříž.
2. Otočíme půdorysnu do axonometrické průmětny.

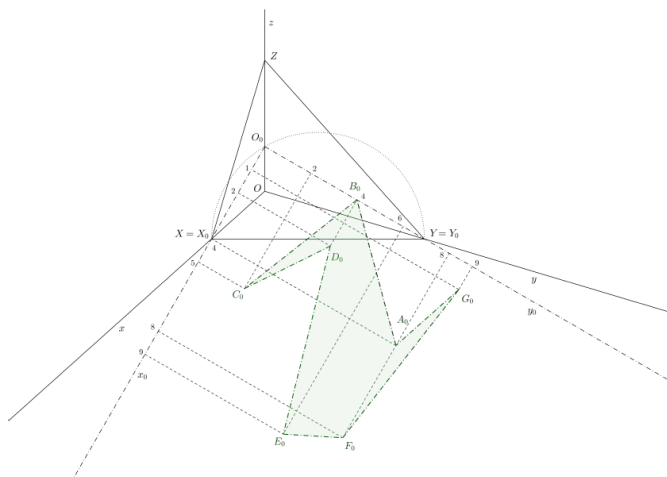


PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 6: Prezentace – snímek 4

2. Otočíme půdorysnu do axonometrické průmětny.
3. **V otočené půdorysně zobrazíme otočený sedmiúhelník.**

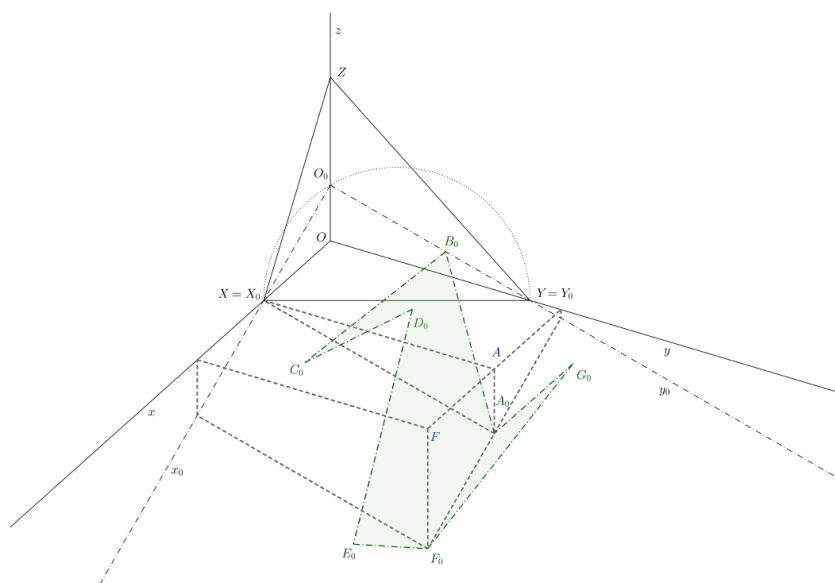
$$\begin{aligned}
 A &= [4, 8, 0], \\
 B &= [0, 4, 0], \\
 C &= [5, 2, 0], \\
 D &= [2, 4, 0], \\
 E &= [9, 6, 0], \\
 F &= [8, 8, 0], \\
 G &= [1, 9, 0].
 \end{aligned}$$



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 7: Presentace – snímek 5

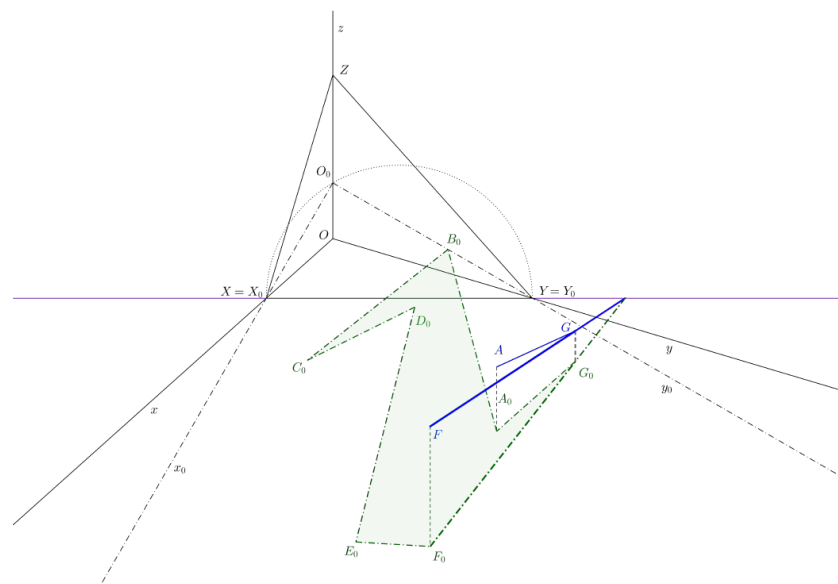
3. V otočené půdorysně zobrazíme otočený sedmiúhelník.
4. **Zobrazíme axonometrické průměty bodů A, F.**



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 8: Presentace – snímek 6

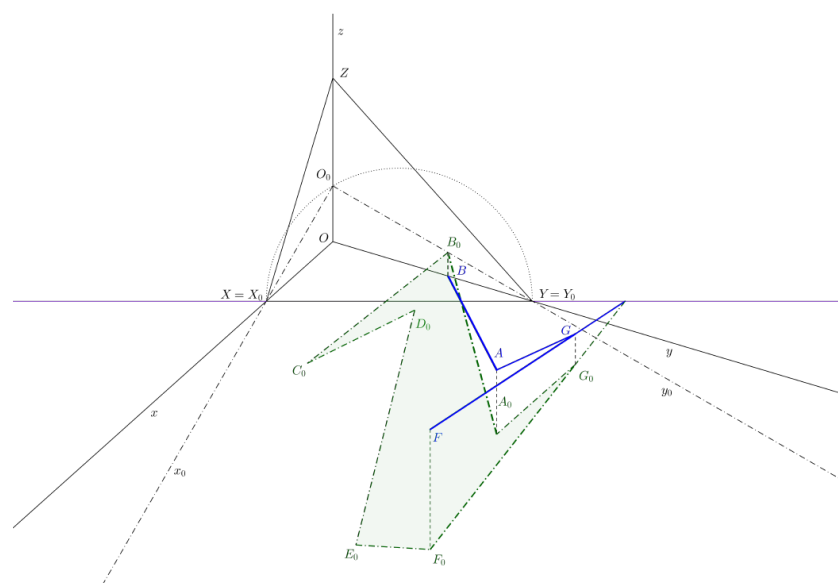
4. Zobrazíme axonometrické průměty bodů A , F .
5. Zobrazíme axonometrický průmět bodu G . (afinita)



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 9: Presentace – snímek 7

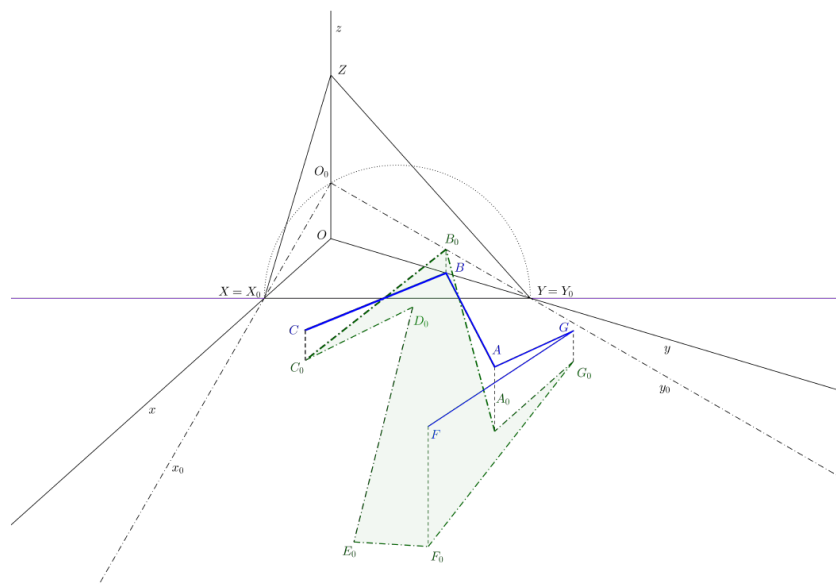
5. Zobrazíme axonometrický průmět bodu G .
6. Zobrazíme axonometrický průmět bodu B . (afinita)



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 10: Presentace – snímek 8

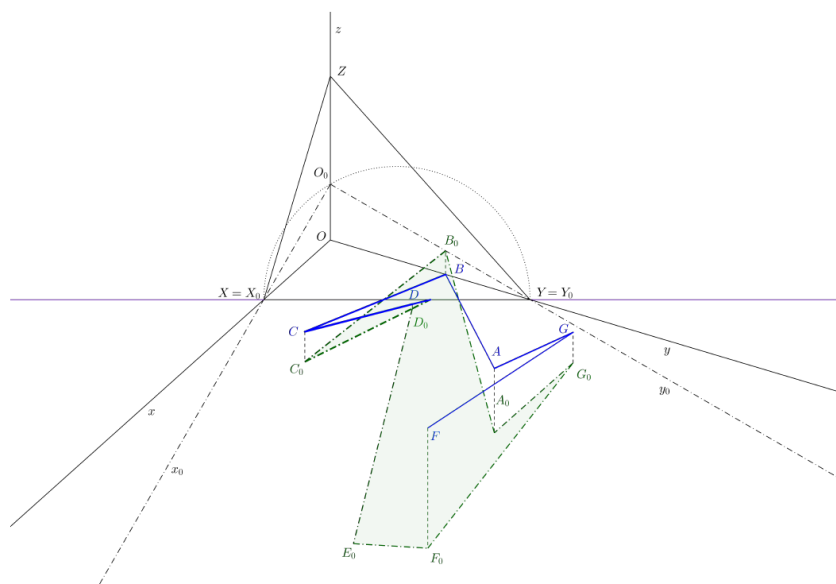
6. Zobrazíme axonometrický průmět bodu B .
 7. **Zobrazíme axonometrický průmět bodu C .** (afinita)



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 11: Presentace – snímek 9

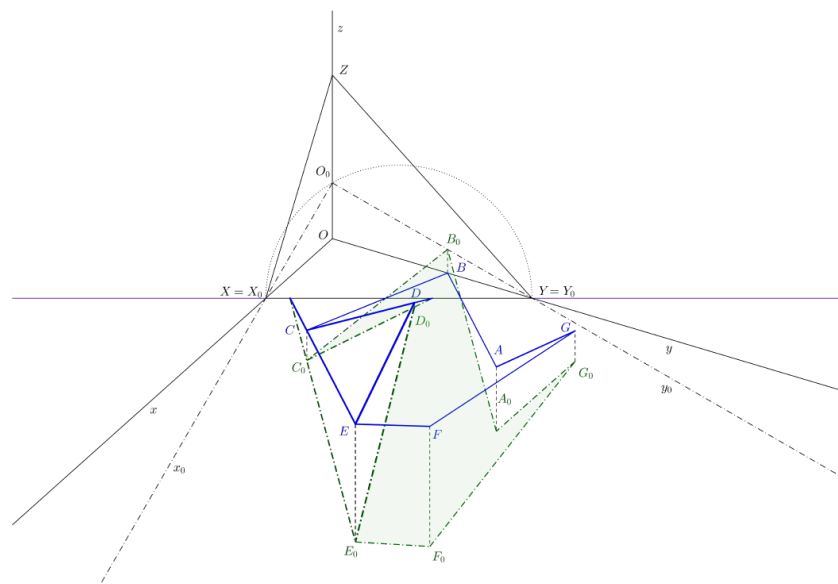
7. Zobrazíme axonometrický průmět bodu C .
 8. **Zobrazíme axonometrický průmět bodu D .** (afinita)



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 12: Presentace – snímek 10

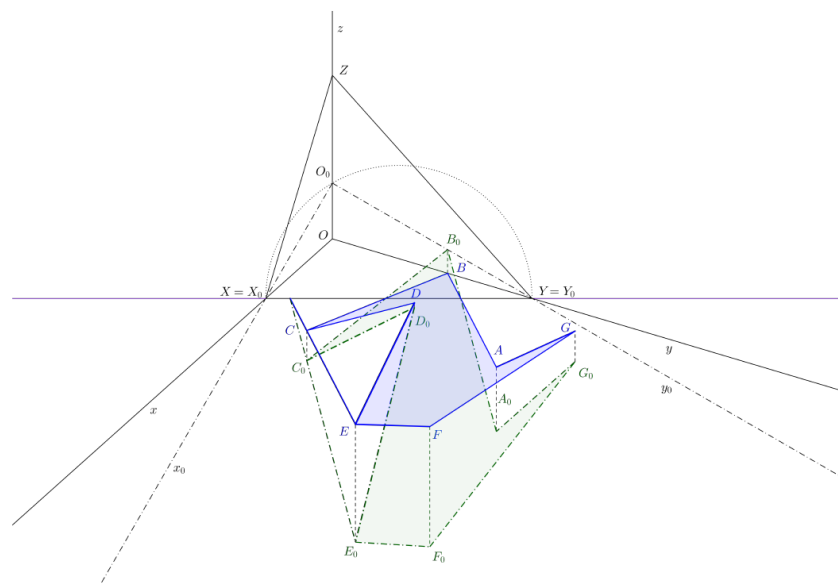
8. Zobrazíme axonometrický průmět bodu D .
 9. Zobražíme axonometrický průmět bodu E . (afinita)



PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

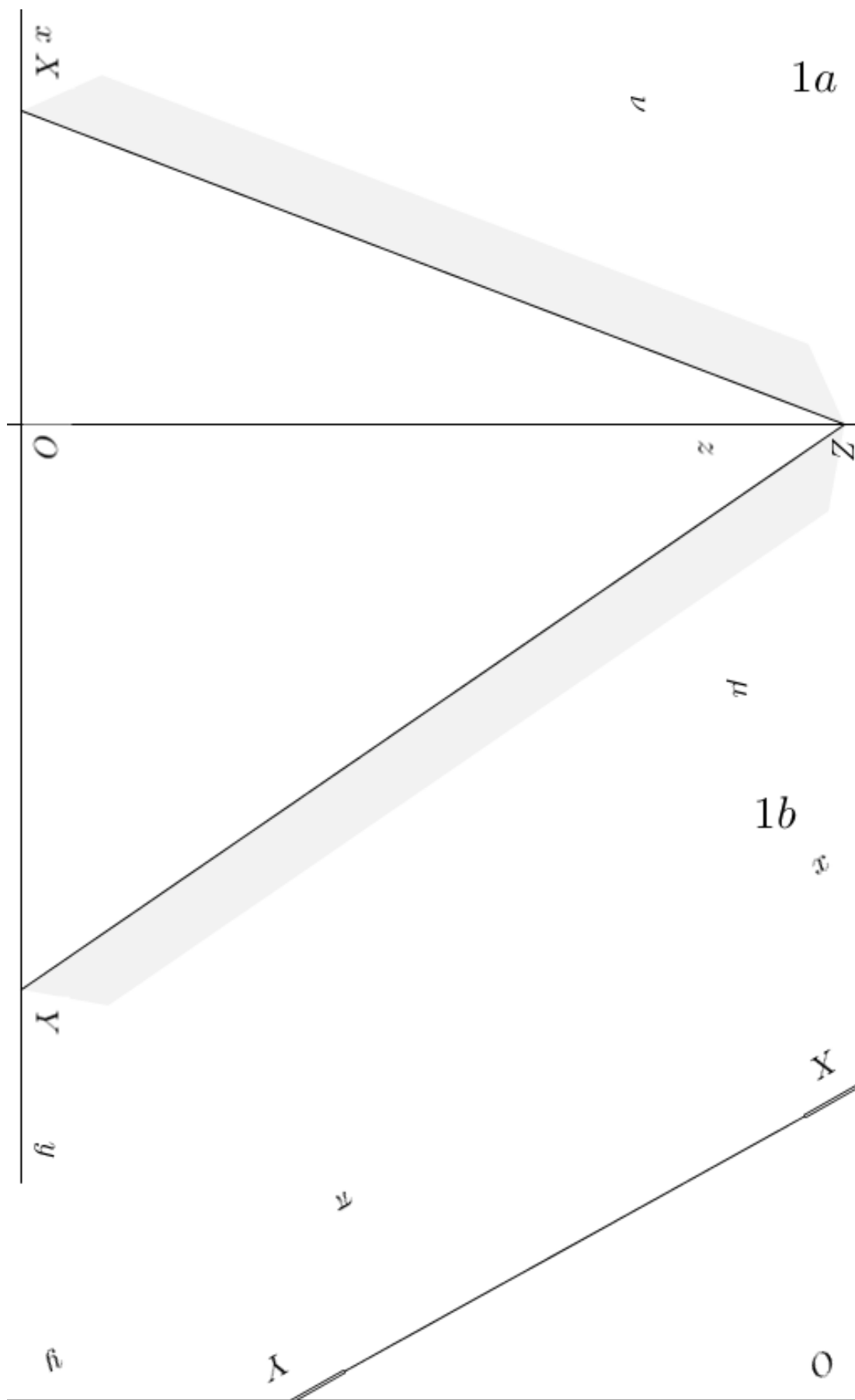
Obrázek 13: Presentace – snímek 11

9. Zobražíme axonometrický průmět bodu E .
 10. Zvýrazníme sedmiúhelník $ABCDEFG$.

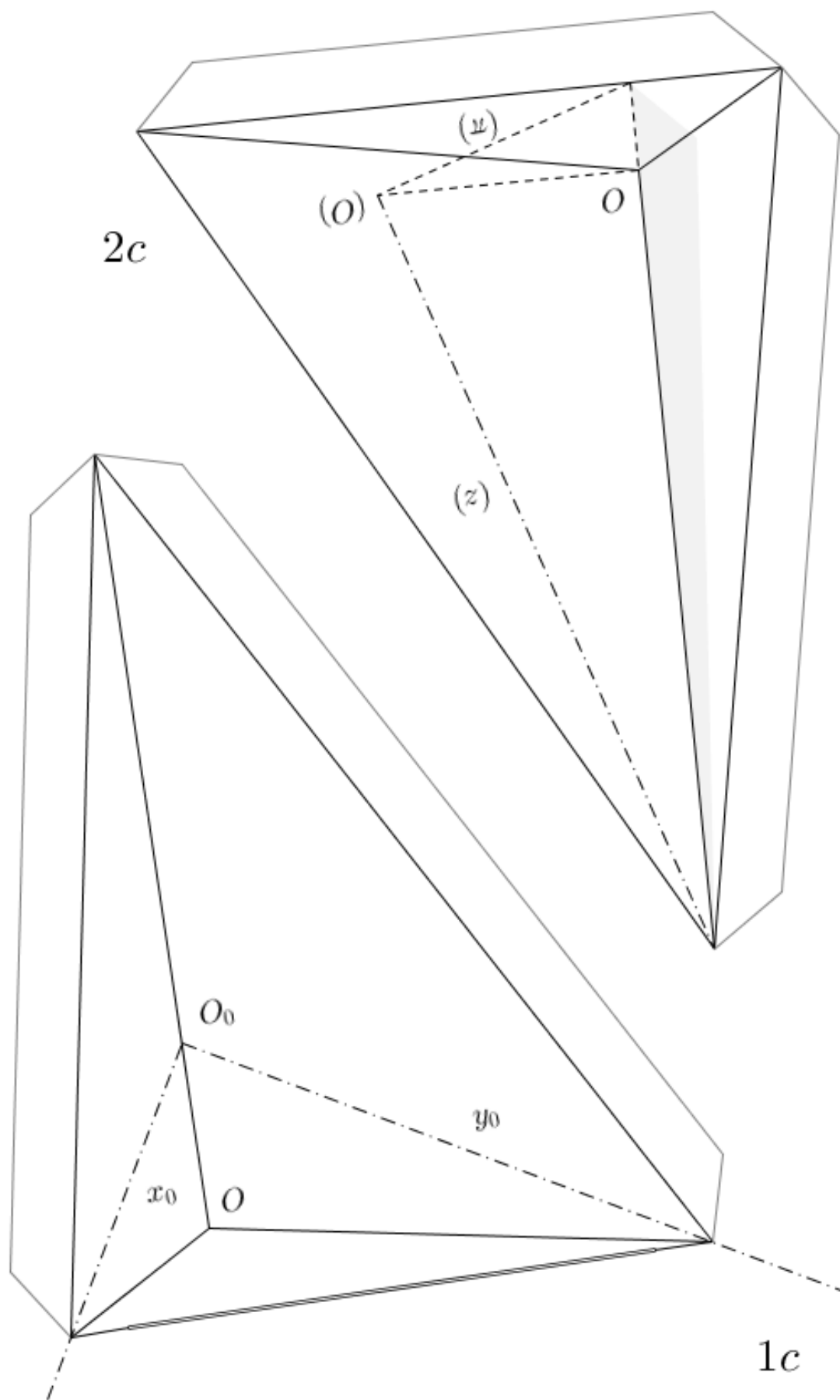


PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE 4.1 Mnohoúhelník v půdorysně

Obrázek 14: Presentace – snímek 12



Obrázek 15: Čtvrtka k modelu 1



Obrázek 17: Fólie