Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Rondoš

Desintegrace kategorie v duchu Kuratowského-Ulamovy věty

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Rád bych poděkoval vedoucímu práce doc. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D., DSc. za cenné rady a připomínky a za množství času, které věnoval této práci.

Také bych rád poděkoval své přítelkyni a rodině za podporu a trpělivost po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Desintegrace kategorie v duchu Kuratowského-Ulamovy věty

Autor: Jakub Rondoš

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Fubiniova věta a Kuratowského-Ulamova věta poukazují na podobnost pojmů množina první kategorie v polském prostoru a množina míry nula v standardním borelovském prostoru. Tyto věty lze zobecnit. Fubiniovu větu zobecňuje věta o desintegraci měr a Kuratowského-Ulamovu větu zobecňuje věta o desintegraci kategorie. Tvrzení vět o desintegraci jsou obdobná a ještě více poukazují na podobnost systémů množin první kategorie a množin míry nula. Hlavním cílem této práce je dokázat věty o desintegraci a ukázat, jak z nich vyplývají Fubiniova a Kuratowského-Ulamova věta.

Klíčová slova: polský prostor, standardní borelovský prostor, množina první kategorie, množina míry nula

Title: Disintegration of category in the sense of the Kuratowski-Ulam theorem

Author: Jakub Rondoš

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The Fubini theorem and the Kuratowski-Ulam theorem show similarities between the concepts meager set in Polish space and set of zero measure in standard Borel space. Those theorems can be generalized. The Fubini theorem is generalized by the Measure disintegration theorem and the Kuratowski-Ulam theorem is generalized by the Category disintegration theorem. The claims of disintegration theorems are analogous and show even more the similarities between meager sets and sets of zero measure. The main aim of this thesis is to prove disintegration theorems and show how Fubini and Kuratowski-Ulam theorems follow.

Keywords: Polish space, standard Borel space, meager set, set of zero measure

Obsah

Úvod **2**

1 Základní pojmy **4**

1.1 Topologické prostory 4
1.2 Husté a řídké množiny 5
1.3 Reziduální množiny a množiny první kategorie 5
1.4 Množiny typu G_δ 6
1.5 Množiny s Baireovou vlastností 7
1.6 Baireovy prostory 9
1.7 Polské prostory 11
1.8 Cantorův prostor 12
1.9 Měřitelné prostory 13
1.10 Prostor pravděpodobnostních měr 15

2 Desintegrace kategorie **19**

3 Desintegrace měr **23**

Literatura **36**

Úvod

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Tento prostor přirozeně generuje systém $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$ všech množin μ-míry nula. Nyní uvažujme topologický prostor $(Y, \mathcal{G})$. Podobně jako v předchozím případě nám tento prostor přirozeně generuje systém $\mathcal{M}$ všech množin první kategorie v Y. Roli systému $\mathcal{S}$ zde má systém $\mathcal{B}$, který je definován jako nejmenší σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny a všechny množiny první kategorie v Y. Množiny ze systému $\mathcal{B}$ nazýváme Baireovsky měřitelné množiny nebo říkáme, že mají Baireovu vlastnost.

V této práci ukážeme, že systémy množin $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}$ mají podobné vlastnosti. Je snadné si uvědomit, že tyto systémy jsou množinové σ-ideály, tedy že jsou uzavřené na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Existuje mnoho vět ukazujících podobnost systémů množin $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Klasickým příkladem jsou Fubiniova a Kuratowského-Ulamova věta. Pro jednodušší formulaci těchto vět zavedeme následující značení.

Značení 0.0.1. *Pro množiny X, Y a $A \subseteq X \times Y$ značíme $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$, $x \in X$ a $A_y = \{x \in X : (x, y) \in A\}$, $y \in Y$. Podobně pro funkci $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ a $x \in X$ značíme $f_x : Y \to \mathbb{R}$ funkci definovanou předpisem $f_x(y) = f(x, y)$.*

Fubiniova věta je klasické tvrzení teorie míry popisující vztah mezi mírami a jejich součinem. Ve velmi speciálním případě tvrdí následující:

Věta 0.0.2 (Fubiniova věta-speciální případ)**.** *Nechť X a Y jsou standardní borelovské prostory. Nechť μ je borelovská pravděpodobnostní míra na X a nechť ν je borelovská pravděpodobnostní míra na Y. Nechť $\mu \times \nu$ je součin měr μ a ν a nechť $A \subseteq X \times Y$ je měřitelná množina. Označme*

$$\Omega^X = \{x \in X : A_x \text{ je množina } \nu\text{-míry } 0\},$$

$$\Omega^Y = \{y \in Y : A_y \text{ je množina } \mu\text{-míry } 0\}.$$

Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:
(i) A je množina $(\mu \times \nu)$-míry 0,
(ii) Ω^X je množina μ-míry 1,
(iii) Ω^Y je množina ν-míry 1.

Kuratowského-Ulamova věta je obdobou v kontextu topologických prostorů.

Věta 0.0.3 (Kuratowského-Ulamova věta). *Nechť X a Y jsou polské prostory. Nechť $A \subseteq X \times Y$ má Baireovu vlastnost. Označme*

$$\Omega^X = \{x \in X : A_x \text{ je první kategorie v } Y\},$$

$$\Omega^Y = \{y \in Y : A_y \text{ je první kategorie v } X\}.$$

Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:
(i) A je první kategorie v $X \times Y$,
(ii) Ω^X je reziduální v X,
(iii) Ω^Y je reziduální v Y.

Tyto věty lze zobecnit. Fubiniovu větu zobecňuje věta o desintegraci měr a Kuratowského-Ulamovu větu zobecňuje věta o desintegraci kategorie. Jak název napovídá, tvrzení těchto vět jsou obdobná a ještě více poukazují na podobnost systémů množin první kategorie a množin míry nula. Hlavním cílem této práce je dokázat věty o desintegraci a ukázat, jak z nich vyplývají Fubiniova a Kuratowského-Ulamova věta.

Práce je členěna do tří kapitol. První kapitola se věnuje základním pojmům a tvrzením z teorie topologických a měřitelných prostorů. V druhé kapitole dokážeme větu o desintegraci kategorie a její důsledek Kuratowského-Ulamovu větu. Třetí kapitola se věnuje důkazu věty o desintegraci měr a Fubiniově větě.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Topologické prostory

Definice 1.1.1. *Nechť X je množina. Systém množin $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ nazveme topologií na X, pokud platí:*
(i) $\emptyset \in \mathcal{G}, X \in \mathcal{G}$,
(ii) jsou-li $G,H \in \mathcal{G}$, *potom* $G \cap H \in \mathcal{G}$,
(iii) jestliže $\{G_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{G}$, *potom* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{G}$.
Je-li X množina a $\mathcal{G}$ topologie na X, potom dvojici $(X, \mathcal{G})$ nazýváme topologický prostor. Prvky systému $\mathcal{G}$ nazýváme otevřené množiny. Doplňky otevřených množin nazýváme uzavřené množiny.

Definice 1.1.2. *Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor. Systém množin $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ nazveme bází topologie $\mathcal{G}$, pokud pro každé $G \in \mathcal{G}$ platí, že $G = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \subseteq G\}$.*

Definice 1.1.3. *Nechť X je množina a d je metrika na X. Potom d na X přirozeně generuje topologii $\mathcal{G}_d = \{U \subseteq X; \forall x \in A \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq U\}$, kde pro $x \in X$ a $r > 0$ značíme $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.*
Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a nechť d metrika na X. Řekneme, že metrika d je kompatibilní s topologií $\mathcal{G}$, pokud $\mathcal{G}_d = \mathcal{G}$.
Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ nazýváme metrizovatelným prostorem, pokud existuje metrika na X, která je kompatibilní s topologií $\mathcal{G}$.
Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ je úplně metrizovatelný, pokud existuje metrika na d na X kompatibilní s topologií $\mathcal{G}$ taková, že metrický prostor (X, d) je úplný.

Definice 1.1.4. *Nechť X, Y jsou topologické prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je*

- *spojité, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subseteq Y$ je $f^{-1}(G)$ otevřená množina v X,*
- *otevřené, pokud pro každou otevřenou množinu $G \subseteq X$ je $f(G)$ otevřená množina v Y,*
- *homeomorfismus, jestliže f je prosté, spojité a otevřené zobrazení X na Y.*

1.2 Husté a řídké množiny

Definice 1.2.1. *Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že množina $A \subseteq X$ je hustá v X, pokud $\overline{A} = X$. Řekneme, že množina $M \subseteq X$ je řídká v X, pokud $X \setminus \overline{M}$ je hustá množina v X.*

Lemma 1.2.2. *Nechť X je topologický prostor a $A \subseteq X$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*
(i) A je hustá v X.
(ii) Pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subseteq X$ je $A \cap G \neq \emptyset$.

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Nechť A je hustá v X. Pro spor předpokládejme, že existuje neprázdná otevřená množina $G \subseteq X$ taková, že $A \cap G = \emptyset$. Potom $X \setminus G$ je uzavřená podmnožina X a obsahuje A, tedy také $X \setminus G = \overline{X \setminus G} \supseteq \overline{A}$. Protože G je neprázdná množina, je $X \setminus G \subsetneqq X$, čímž dostáváme spor s hustotou A.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Tuto implikaci dokažme nepřímo. Nechť A není v X hustá, potom $\overline{A} \neq X$. Tedy $X \setminus \overline{A}$ je neprázdná a otevřená podmnožina X, ale $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$, tedy (ii) neplatí. □

Lemma 1.2.3. *Nechť X je topologický prostor a $A, B \subseteq X$. Nechť A je hustá v X. Potom platí:*
(i) Pokud $B \supseteq A$, potom B je hustá v X.
(ii) Je-li B hustá v A, potom B je hustá v X.
(iii) Je-li A otevřená, pak $X \setminus A$ je řídká.

Důkaz. (i) Je-li $B \supseteq A$, potom $\overline{B} \supseteq \overline{A} = X$.
(ii) Nechť U je neprázdná otevřená podmnožina X. Potom dle Lemmatu 1.2.2 je $A \cap U$ neprázdná množina, a dle definice topologie podprostoru je $A \cap U$ otevřená množina v A.
Znovu použijeme Lemma 1.2.2 a dostaneme, že $B \cap (A \cap U)$ je neprázdná množina, neboť B je hustá v A. Jelikož množina U byla volena libovolně, dostáváme opět z Lemmatu 1.2.2, že B je hustá v X.
(iii) Je-li A otevřená, potom $X \setminus A$ je uzavřená, a tedy $X \setminus (\overline{X \setminus A}) = X \setminus (X \setminus A) = A$ je hustá množina v X. □

Lemma 1.2.4. *Nechť X je topologický prostor.*
(i) Nechť $M \subseteq X$ je řídká množina. Potom každá podmnožina M je řídká v X.
(ii) Množina M je řídká v X právě tehdy, když $\overline{M}$ je řídká množina v X.

Důkaz. (i) Nechť $N \subseteq M$. Potom máme, že $\overline{X \setminus \overline{N}} \supseteq \overline{X \setminus \overline{M}} = X$, tedy $X \setminus \overline{N}$ je v X hustá.
(ii) Tvrzení je zřejmé. □

1.3 Reziduální množiny a množiny první kategorie

Definice 1.3.1. *Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že množina $M \subseteq X$ je první kategorie v X, pokud M je spočetným sjednocením řídkých množin. Řekneme, že $A \subseteq X$ je množina druhé kategorie v X, pokud není první kategorie v X. Řekneme, že A je v X reziduální, pokud $X \setminus A$ je první kategorie v X.*

Lemma 1.3.2. *Nechť X je topologický prostor. Potom platí:*
(i) Je-li $M \subseteq X$ množina první kategorie v X, potom každá podmnožina M je množina první kategorie v X.
(ii) Jsou-li $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ množiny 1. kategorie v X, pak $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je 1. kategorie v X.

Důkaz. (i) Nechť $N \subseteq M$. Nalezněme posloupnost řídkých množin $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položme $N_k = N \cap M_k$. Potom dle Lemmatu 1.2.3 jsou N_k řídké množiny a zřejmě platí $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Tedy N je množina první kategorie v X.
(ii) Pro každé přirozené číslo n nalezněme posloupnost řídkých množin $\{M_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $M_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{n,k}$. Potom $M = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} M_{n,k}$ je množina první kategorie v X, neboť je spočetným sjednocením řídkých množin. □

Lemma 1.3.3. *Nechť X je topologický prostor. Potom platí:*
(i) Je-li $A \subseteq X$ reziduální množina v X, potom každá podmnožina X obsahující A je reziduální v X.
(ii) Jsou-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ reziduální podmnožiny X, potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ je reziduální podmnožina X.

Důkaz. Tvrzení okamžitě plyne z Lemmatu 1.3.2 přechodem k doplňkům a užitím de Morganových pravidel. □

1.4 Množiny typu G_δ

Definice 1.4.1. *Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že množina $A \subseteq X$ je typu G_δ v X, pokud je spočetným průnikem otevřených množin.*

Lemma 1.4.2. *Nechť X je topologický prostor.*
(i) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost množin typu G_δ v X, potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ je množina typu G_δ v X.
(ii) Jsou-li $A, B \subseteq X$ typu G_δ v X, pak $A \cup B$ je typu G_δ v X.

Důkaz. (i) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme posloupnost množin $\{A_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ otevřených v X takovou, že $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n^k = A_n$. Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n,k\in\mathbb{N}} A_n^k$ je spočetným průnikem otevřených množin, tedy množina typu G_δ.
(ii) Pišme $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_n$, kde A_n, B_m jsou otevřené podmnožiny X. Potom $A \cup B = \bigcap_{n,m\in\mathbb{N}} A_n \cup B_n$, což je opět spočetný průnik otevřených množin, tedy $A \cup B$ je typu G_δ v X. □

Lemma 1.4.3. *Nechť X je topologický prostor.*
(i) Je-li $A \subseteq X$ množina typu G_δ v X a B je libovolná podmnožina X, potom $A \cap B$ je množina typu G_δ v B.
(ii) Je-li $A \subseteq X$ množina typu G_δ v X a $B \subseteq A$ je množina typu G_δ v A, potom B je množina typu G_δ v X.

Důkaz. (i) Nalezněme posloupnost množin $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina A_n otevřená v X a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $A_n \cap B$ otevřená v B a zřejmě platí $A \cap B = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)$, tedy $A \cap B$ je množina typu G_δ v B.
(ii) Nalezneme posloupnost množin $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v A takovou, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n =$

B. Dále nalezneme posloupnost množin $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v X takovou, že $C_n \cap A = B_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ je množina typu G_δ v X. Jelikož $B = A \cap C$, dle Lemmatu 1.4.2 je B množina typu G_δ v X. □

Lemma 1.4.4. *Nechť X, Y jsou topologické prostory a nechť $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Je-li $A \subseteq Y$ množina typu G_δ v Y, potom $f^{-1}(A)$ je množina typu G_δ v X.*

Důkaz. Nalezněme posloupnost množin $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených v Y takovou, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Jelikož je zobrazení f spojité, jsou množiny $f^{-1}(U_n)$ otevřené v X. Potom $f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(U_n)$. Tedy $f^{-1}(A)$ je množina typu G_δ v X. □

Lemma 1.4.5. *Nechť X je topologický prostor, $A \subseteq X$ je typu G_δ a hustá v X. Potom A je v X reziduální.*

Důkaz. Pišme $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n jsou otevřené podmnožiny X. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $G_n \supseteq A$, tedy G_n je hustá v X dle Lemmatu 1.2.3. Tedy množiny $X \setminus G_n$ jsou řídké v X dle Lemmatu 1.2.3. Tedy užitím de Morganových pravidel dostaneme $X \setminus A = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus G_n)$. Tedy $X \setminus A$ je spočetným sjednocením řídkých množin, a tedy je 1. kategorie v X. Jinými slovy, A je v X reziduální. □

Lemma 1.4.6. *Nechť X je metrizovatelný prostor a F je uzavřená podmnožina X. Potom je F množina typu G_δ v X.*

Důkaz. Nechť $F \subseteq X$ je uzavřená množina. Nechť d je metrika na X kompatibilní s topologií prostoru X. Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ množinu

$$F_n = \{x \in X : d(x,F) < 1/n\}.$$

Potom F_n jsou otevřené množiny a zřejmě $F \subseteq F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy platí, že $F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Nechť nyní $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je libovolné, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $d(x,F) < 1/n$, tedy $d(x,F) = 0$. Z uzavřenosti množiny F dostáváme, že $x \in F$. Tedy jsme ukázali, že $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Tedy F je množina typu G_δ v X.

□

1.5 Množiny s Baireovou vlastností

Definice 1.5.1. *Nechť X je topologický prostor a $A \subseteq X$. Řekneme, že množina A má Baireovu vlastnost, pokud existuje otevřená množina $G \subseteq X$ taková, že $A \triangle G = (A \setminus G) \cup (G \setminus A)$ je množina první kategorie v X.*

Definice 1.5.2. *Nechť X je množina. Systém množin $P \subseteq 2^X$ se nazývá σ-algebra, pokud obsahuje prázdnou množinu a je uzavřený na doplňky a spočetná sjednocení.*

Lemma 1.5.3. *Nechť X je topologický prostor. Potom systém podmnožin X majících Baireovu vlastnost je σ-algebra na X, která obsahuje všechny otevřené podmnožiny X a všechny množiny první kategorie v X.*

Důkaz. Zřejmě všechny otevřené množiny a množiny první kategorie mají Baireovu vlastnost. Prázdná množina má Baireovu vlastnost, neboť je otevřená. Povšimněme si, že je-li $U \subseteq X$ otevřená množina, potom $\overline{U} \setminus U$ je uzavřená množina v X a

$$\overline{X \setminus \overline{(\overline{U} \setminus U)}} = \overline{X \setminus (\overline{U} \setminus U)} = \overline{(X \setminus \overline{U}) \cup U} = \overline{X \setminus \overline{U}} \cup \overline{U} \supseteq (X \setminus \overline{U}) \cup \overline{U} = X.$$

Tedy $\overline{U} \setminus U$ je řídká množina v X, a tedy množina první kategorie v X.

Nechť $A \subseteq X$ má Baireovu vlastnost. Nalezneme otevřenou množinu U takovou, že $U \triangle A$ je množina první kategorie v X. Označme $V = X \setminus \overline{U}$. Potom V je otevřená množina a

$$\begin{aligned}(X \setminus A) \triangle V &= (X \setminus A) \triangle (X \setminus \overline{U}) = \\ &= ((X \setminus A) \setminus (X \setminus \overline{U})) \cup ((X \setminus \overline{U}) \setminus (X \setminus A)) = \\ &= (\overline{U} \setminus A) \cup (A \setminus \overline{U}) = \\ &= \overline{U} \triangle A \subseteq (U \triangle A) \cup (\overline{U} \setminus U)\end{aligned}$$

je množina první kategorie v X. Tedy $X \setminus A$ má Baireovu vlastnost.

Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost množin majících Baireovu vlastnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme otevřenou množinu G_n takovou, že $M_n = A_n \triangle G_n$ je množina první kategorie v X. Označme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Potom M je množina první kategorie, G je otevřená, a

$$\begin{aligned}A \triangle G = (A \setminus G) \cup (G \setminus A) &= (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\ &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} ((A_n \setminus G_n) \cup (G_n \setminus A_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M.\end{aligned}$$

Tedy A má Baireovu vlastnost. □

Lemma 1.5.4. *Nechť X je topologický prostor. Nechť $A \subseteq X$ má Baireovu vlastnost a nechť není v X reziduální. Potom existuje neprázdná otevřená množina $O \subseteq X$ taková, že $A \cap O$ je množina první kategorie v X.*

Důkaz. Jelikož množina A má Baireovu vlastnost, můžeme nalézt otevřenou množinu $G \subseteq X$ takovou, že $N = A \triangle G$ je množina 1. kategorie v X. Potom množina $A \cup N$ není reziduální v X. Pokud by totiž množina $X \setminus (A \cup N)$ byla první kategorie v X, potom by dle Lemmatu 1.3.2 byla první kategorie také množina $(X \setminus (A \cup N)) \cup (N \setminus A) = X \setminus A$. Tedy bychom dostali spor s naším předpokladem, že množina A není v X reziduální.

Jelikož G je podmnožinou množiny $A \cup N$, není ani G reziduální v X dle Lemmatu 1.3.3. Jelikož G je otevřená množina v X, tedy typu G_δ v X, plyne z Lemmatu 1.4.5, že není v X hustá. Tedy dle Lemmatu 1.2.2 existuje neprázdná otevřená množina $O \subseteq X$ taková, že $G \cap O$ je prázdná množina. Potom

$$A \cap O \subseteq (G \cup N) \cap O = N \cap O \subseteq N$$

je množina 1. kategorie dle Lemmatu 1.3.2. □

1.6 Baireovy prostory

Definice 1.6.1. *Topologický prostor X se nazývá Baireův, pokud každá otevřená podmnožina prostoru X je druhé kategorie v X.*

Věta 1.6.2. *Nechť X je topologický prostor. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*
(i) X je Baireův,
(ii) každá reziduální podmnožina X je hustá v X,
(iii) je-li $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost otevřených hustých podmnožin X, potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá množina v X.

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Nechť X je Baireův prostor. Pro spor předpokládejme, že existuje množina $A \subseteq X$, která je v X reziduální, ale není hustá. Potom existuje neprázdná otevřená množina $O \subseteq X$ taková, že $O \cap A = \emptyset$. Tedy $O \subseteq (X \setminus A)$ je množina první kategorie v X, což je spor s tím, že X je Baireův.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Nechť $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost otevřených hustých podmnožin X. Dokážeme, že G je reziduální množina v X. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $X \setminus G_n$ řídká v X dle Lemmatu 1.2.3. Potom

$$X \setminus G = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus G_n$$

je množina první kategorie v X, tedy G je v X reziduální. Dle (ii) je tedy G v X hustá.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Předpokládejme, že X není Baireův. Potom existuje neprázdná otevřená množina $O \subseteq X$, která je první kategorie v X. Nalezneme řídké množiny $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \supseteq O$. Dle Lemmatu 1.2.4 můžeme předpokládat, že F_n jsou uzavřené. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $G_n = X \setminus F_n$ hustá a otevřená množina v X, ale

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap O = (X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \cap O \subseteq (X \setminus O) \cap O = \emptyset,$$

tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ není hustá množina v X. □

Věta 1.6.3. *Každý úplně metrizovatelný prostor je Baireův.*

Důkaz. Nechť X je úplně metrizovatelný prostor a nechť d je metrika, ve které je X úplný. Nechť $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost otevřených hustých podmnožin X a nechť O je libovolná neprázdná podmnožina prostoru X.
Jelikož $G_1 \cap O$ je neprázdná otevřená množina, můžeme nalézt $x_1 \in G_1 \cap O$ a $r_1 < 1$ takové, že $\overline{B(x_1,r_1)} \subseteq (G_1 \cap O)$. Indukcí nalezneme posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v X a $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $(0,1)$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$r_n < 1/n \quad \text{a} \quad \overline{B(x_{n+1},r_{n+1})} \subseteq B(x_n,r_n) \cap G_n \subseteq O.$$

Předpokládejme, že již známe x_m, r_m pro $m \leq n$. Jelikož $G_{n+1} \cap B(x_n,r_n)$ je neprázdná otevřená množina, můžeme nalézt $x_{n+1} \in G_{n+1} \cap B(x_n,r_n)$ a $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ tak, že $\overline{B(x_{n+1},r_{n+1})} \subseteq G_{n+1} \cap B(x_n,r_n)$.

Z konstrukce je zřejmé, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost v metrice d, existuje tedy $x \in X$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Jelikož pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $\{x_n\}_{n=m}^{\infty} \subseteq \overline{B(x_m,r_m)}$, je také $x \in \overline{B(x_m,r_m)}$. Tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n,r_n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap O$. Dle Věty 1.6.2 je tedy X Baireův prostor. □

Lemma 1.6.4. *Nechť X je Baireův prostor a B je reziduální podmnožina X. Potom existuje množina $A \subseteq B$, která je hustá a typu G_δ v X.*

Důkaz. Pišme $B = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou řídké podmnožiny X. Dle Lemmatu 1.2.4 také množiny $\overline{M_n}$ jsou řídké. Tedy položíme-li $A = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n}$, potom je množina A reziduální v X, a tedy dle Věty 1.6.2 je v tomto prostoru hustá. Navíc A je zřejmě podmnožina B a je typu G_δ v X, neboť $A = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{M_n})$. □

Lemma 1.6.5. *Nechť X je Baireův prostor, nechť $A \subseteq X$ je reziduální a $O \subseteq X$ je neprázdná otevřená množina. Potom $A \cap O$ je množina 2. kategorie v X.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $A \cap O$ je množina první kategorie v X. Potom $O \subseteq (A \cap O) \cup (X \setminus A)$ je dle Lemmatu 1.3.2 množina 1. kategorie, což je spor s tím, že X je Baireův prostor. □

Lemma 1.6.6. *Nechť X je Baireův prostor. Jsou-li A, B reziduální množiny v X, potom $A \cap B$ je reziduální množina v B.*

Důkaz. Dle Lemmatu 1.6.4 existuje $C \subseteq A$ hustá G_δ podmnožina X. Stačí ukázat, že $C \cap B$ je reziduální množina v B. Jelikož množiny C, B jsou reziduální v X, je $C \cap B$ reziduální v X. Jelikož X je Baireův, je $C \cap B$ hustá v X.

Ukažme, že $C \cap B$ je hustá v B. Nechť $U \subseteq B$ je neprázdná otevřená množina v B. Potom existuje neprázdná množina V otevřená v X taková, že $U = V \cap B$. Jelikož $C \cap B$ je hustá v X, dostáváme, že

$$U \cap (C \cap B) = V \cap (C \cap B) \neq \emptyset,$$

tedy $C \cap B$ je hustá v B. Dle Lemmatu 1.4.2 je $C \cap B$ množina typu G_δ v B. Tedy dle Lemmatu 1.4.5 je $C \cap B$ reziduální množina v B. □

Definice 1.6.7. *Nechť X, Y jsou topologické prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ zachovává kategorii, jestliže pro každou množinu A reziduální v Y je $f^{-1}(A)$ reziduální množina v X.*

Lemma 1.6.8. *Nechť X je topologický prostor a nechť Y je Baireův prostor. Potom každé spojité otevřené zobrazení $f\colon X \to Y$ zachovává kategorii.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje množina A reziduální v Y taková, že $f^{-1}(A)$ není reziduální v X. Jelikož Y je Baireův, dle Lemmatu 1.6.4 můžeme nalézt množinu $B \subseteq A$ hustou a typu G_δ v Y. Potom dle Lemmatu 1.4.4 je $f^{-1}(B)$ množina typu G_δ, neboť f je spojité. Dále $f^{-1}(B)$ není hustá v X. Jinak by totiž dle Lemmatu 1.4.5 byla v X reziduální, což by byl spor s naším předpokladem, že $f^{-1}(A)$ není reziduální, neboť $f^{-1}(A) \supseteq f^{-1}(B)$. Můžeme tedy nalézt neprázdnou otevřenou množinu $O \subseteq X$ takovou, že $O \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Jelikož f je otevřené zobrazení, je $f(O)$ otevřená množina v Y, ale $f(O) \cap B = \emptyset$, což je spor s tím, že B je hustá. □

1.7 Polské prostory

Definice 1.7.1. *Separabilní úplně metrizovatelný topologický prostor nazýváme polským prostorem.*

Věta 1.7.2. *Nechť X je polský prostor a $A \subseteq X$ je množina typu G_δ. Potom A je polský prostor.*

Důkaz. Viz [1, Věta 3.11]. □

Lemma 1.7.3. *Nechť X je polský prostor. Je-li $B \subseteq X$ hustá G_δ množina a $C \subseteq B$ je reziduální množina v B, potom je C reziduální množina v X.*

Důkaz. Jelikož B je množina typu G_δ v X, víme z Věty 1.7.2, že B je polský, a tedy Baireův prostor. Tedy dle Lemmatu 1.4.5 existuje $D \subseteq C$ hustá množina typu G_δ v B. Stačí ukázat, že D je reziduální množina v X. Dle Lemmatu 1.2.3 je D v X hustá a dle Lemmatu 1.4.3 je typu G_δ v X. Tedy dle Lemmatu 1.4.5 je D v X reziduální. □

Definice 1.7.4. *Nechť Y je polský prostor. Množina $A \subseteq Y$ se nazývá analytická, pokud existuje polský prostor X a spojité zobrazení $f : X \to Y$ takové, že $f(X) = A$.*

Věta 1.7.5. *Nechť X je polský prostor a $A \subseteq X$ je analytická množina. Potom A má Baireovu vlastnost.*

Důkaz. Viz [1, Věta 21.6]. □

Lemma 1.7.6. *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Potom existuje hustá množina $A \subseteq Y$ typu G_δ taková, že $f\colon f^{-1}(A) \to A$ je otevřené zobrazení.*

Důkaz. Nechť $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ je báze topologie prostoru X. Potom množiny $f(U_n)$ jsou dle Věty 1.7.2 analytické, a tedy dle Věty 1.7.5 mají Baireovu vlastnost. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina O_n a množina 1. kategorie M_n takové, že platí $f(U_n) \triangle O_n = M_n$. Označme $B = Y \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$. Potom B je reziduální množina v Y, tedy dle Lemmatu 1.6.4 existuje množina $A \subseteq B$, která je hustá a typu G_δ v Y.

Ukažme, že $f\colon f^{-1}(A) \to A$ je otevřené zobrazení. Nejprve si povšimněme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f(U_n) \cap A = O_n \cap A$. Jelikož ale O_n je otevřená podmnožina Y, je $f(U_n) \cap A = O_n \cap A$ otevřená množina v A. Zřejmě platí, že

$$f(U_n \cap f^{-1}(A)) = f(U_n) \cap A.$$

Mějme nyní libovolnou množinu V otevřenou v $f^{-1}(A)$. Ukažme, že potom $f(V)$ je otevřená množina v A. Existuje množina $U \subseteq X$ otevřená v X taková, že $V = U \cap f^{-1}(A)$. Potom

$$\begin{aligned} f(V) &= f(U \cap f^{-1}(A)) = f(\bigcup\{U_n : U_n \subseteq U\} \cap f^{-1}(A)) = \\ &= f(\bigcup\{U_n \cap f^{-1}(A) : U_n \subseteq U\}) = \bigcup\{f(U_n \cap f^{-1}(A)) : U_n \subseteq U\} = \\ &= \bigcup\{f(U_n) \cap A : U_n \subseteq U\} = \bigcup\{O_n \cap A : U_n \subseteq U\}, \end{aligned}$$

což je sjednocení otevřených množin v A, tedy otevřená množina v A. Tím je důkaz ukončen. □

1.8 Cantorův prostor

Definice 1.8.1. *Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že množina $A \subseteq X$ je obojetná v X, pokud A je zároveň otevřená i uzavřená množina v X.*

Definice 1.8.2. *Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor. Řekneme, že $(X, \mathcal{G})$ je nul-dimenzionální, pokud existuje báze topologie $\mathcal{G}$ tvořená obojetnými podmnožinami prostoru X.*

Lemma 1.8.3. *Nechť X je kompaktní nul-dimenzionální topologický prostor. Nechť $F \subseteq X$ je uzavřená, $G \subseteq X$ je otevřená a nechť $F \subseteq G$. Potom existuje obojetná množina $A \subseteq X$ taková, že $F \subseteq A \subseteq G$.*

Důkaz. Je-li $F = \emptyset$, můžeme volit také $A = \emptyset$. Předpokládejme tedy, že F je neprázdná. Pro každé $x \in F$ nalezneme obojetnou množinu A_x takovou, že $x \in A_x \subseteq G$. Potom systém množin $\{A_x : x \in F\}$ tvoří otevřené pokrytí množiny F. Jelikož X je kompaktní a F je uzavřená v X, je F kompaktní. Můžeme tedy nalézt přirozené číslo n_0 a konečnou posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{n_0}$ v F takovou, že $\bigcup_{n=1}^{n_0} A_{x_n} \supseteq F$. Označme $A = \bigcup_{n=1}^{n_0} A_{x_n}$. Potom A je obojetná množina obsahující F. Dále, jelikož pro každé $x \in F$ je A_{x_n} podmnožina G, je také A podmnožinou množiny G. □

Lemma 1.8.4. *Nechť X je kompaktní topologický prostor, který má spočetnou bázi topologie tvořenou obojetnými množinami. Potom systém všech obojetných podmnožin prostoru X je spočetný.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je spočetný systém obojetných podmnožin prostoru X, který tvoří bázi otevřených množin prostoru X. Nechť A je libovolná obojetná množina v X. Pak A je v X otevřená, můžeme tedy nalézt podsystém $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ takový, že $A = \bigcup \mathcal{A}'$. Jelikož A je v X uzavřená a X je kompaktní, je A kompaktní. Systém množin $\mathcal{A}'$ pokrývá A a je tvořen otevřenými podmnožinami A, tedy můžeme nalézt konečný systém $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}'$ takový, že $A = \bigcup \mathcal{A}''$.

Každou obojetnou podmnožinu prostoru X můžeme tedy vyjádřit jako konečné sjednocení prvků z $\mathcal{A}$. Jelikož systém všech konečných posloupností množin z $\mathcal{A}$ je spočetný, dostáváme, že také systém všech obojetných podmnožin X je spočetný. □

Definice 1.8.5. *Uvažujme množinu $2^{\mathbb{N}} = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}; \forall n \in \mathbb{N} : a_n = 0 \ \vee \ a_n = 1\}$. Nechť $a \in 2^{\mathbb{N}}$. Řekneme, že a má konečný nosič, pokud existuje $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = 0$ pro každé $n > n_a$. Má-li a konečný nosič, označme $U_a = \{b \in 2^{\mathbb{N}}; \forall n \leq n_a : b_n = a_n\}$. Na množině $2^{\mathbb{N}}$ uvažujeme topologii, jejíž báze je tvořena spočetným systémem množin*

$$\{U_a : a \text{ má konečný nosič}\}.$$

Množiny U_a z tohoto systému jsou v této topologii obojetné. Množinu $2^{\mathbb{N}}$ s touto topologií nazýváme Cantorovým prostorem. Cantorův prostor je kompaktní metrizovatelný, a tedy polský.

Poznámka 1.8.6. *Každý kompaktní podprostor Cantorova prostoru má spočetnou bázi topologie tvořenou obojetnými množinami. Je-li $K \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ kompaktní prostor a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost obojetných podmnožin Cantorova prostoru tvořící bázi topologie, potom $\{A_n \cap K\}_{n=1}^{\infty}$ je báze topologie prostoru K tvořena obojetnými podmnožinami prostoru K.*

1.9 Měřitelné prostory

Definice 1.9.1. *Nechť X je množina a $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin prostoru X. Potom dvojici $(X, \mathcal{S})$ nazýváme měřitelným prostorem a prvky $\mathcal{S}$ nazýváme $\mathcal{S}$-měřitelné množiny. Pro $Y \in \mathcal{S}$ označme $S|Y = \{S \cap Y : S \in \mathcal{S}\}$. Potom $(Y, \mathcal{S}|Y)$ je zřejmě také měřitelný prostor.*

Definice 1.9.2. *Nechť $(X, \mathcal{B})$ a $(Y, \mathcal{C})$ jsou měřitelné prostory. Řekneme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je*

- *měřitelné, pokud pro každou $\mathcal{C}$-měřitelnou množinu C je $f^{-1}(C)$ $\mathcal{B}$-měřitelná množina.*
- *izomorfismus, jestliže f je prosté měřitelné zobrazení X na Y a zobrazení f^{-1} je měřitelné.*

Řekneme, že prostory X, Y jsou izomorfní, pokud existuje izomorfismus prostoru X na prostor Y.

Definice 1.9.3. *Nechť $\mathcal{P}$ je systém podmnožin množiny X. Potom existuje nejmenší σ-algebra podmnožin X obsahující $\mathcal{P}$. Tuto σ-algebru nazýváme σ-algebrou generovanou systémem $\mathcal{P}$ a značíme ji $\sigma(\mathcal{P})$.*

Lemma 1.9.4. *Nechť X je množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ je systém množin uzavřený na konečné průniky. Pokud je systém množin $\mathcal{Q} \subseteq 2^X$ uzavřený na doplňky a spočetná disjunktní sjednocení a obsahuje $\mathcal{P}$, potom $\mathcal{Q}$ obsahuje $\sigma(\mathcal{P})$.*

Důkaz. Viz [1, Věta 10.1]. □

Definice 1.9.5. *Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor. Potom značíme $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G})$. Prvky systému $\mathcal{B}(X)$ nazýváme borelovské množiny.*
Měřitelný prostor $(X, \mathcal{S})$ nazýváme standardním borelovským prostorem, pokud existuje topologie $\mathcal{G}$ na prostoru X taková, že prostor $(X, \mathcal{G})$ je polský a $\mathcal{S} = \mathcal{B}(X)$.

Věta 1.9.6. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je standardní borelovský prostor a $Y \in \mathcal{S}$. Potom $(Y, \mathcal{S}|Y)$ je standardní borelovský prostor.*

Důkaz. Viz [1], kapitola 13. □

Následující věta je klíčovým prvkem pro důkaz věty o desintegraci měr.

Věta 1.9.7. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je standardní borelovský prostor. Potom existuje borelovská množina $E \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ taková, že $(X, \mathcal{S})$ je izomorfní s $(E, \mathcal{B}(E))$.*

Důkaz. Viz [1, Věta 12.1]. □

Definice 1.9.8. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a nechť $S \in \mathcal{S}$. Funkci $\chi_S\colon X \to$ [0,1] definovanou předpisem*

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \textit{je-li } x \in S, \\ 0, & \textit{jinak,} \end{cases}$$

nazýváme charakteristickou funkcí množiny S.
Funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá $\mathcal{S}$-jednoduchá, jestliže existují $n \in \mathbb{N}$, množiny $S_j \in \mathcal{S}$ a reálná čísla a_j pro $1 \le j \le n$ taková, že

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{S_j}.$$

Definice 1.9.9. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Zobrazení $\mu : S \to [0,\infty]$ nazýváme mírou na $(X, \mathcal{S})$, pokud je splněno:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$,
(ii) pokud $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin, potom $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$.
Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ potom nazýváme prostorem s mírou.
Míra μ se nazývá konečná, pokud $\mu(X) < \infty$.
Míra μ se nazývá pravděpodobnostní, pokud $\mu(X) = 1$.

V dalším budeme základní vlastnosti míry a integrálu používat bez důkazu.

Definice 1.9.10. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a nechť $A \in \mathcal{S}$. Potom značíme $\mu_{|A}$ míru na $(A, \mathcal{S}|A)$ definovanou předpisem*

$$(\mu_{|A})(B) = \mu(B), \quad B \in \mathcal{S}|A.$$

Definice 1.9.11. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ je μ-měřitelná, pokud existuje množina $Y \in \mathcal{S}$ taková, že $\mu(X \setminus Y) = 0$ a f je měřitelná na $(Y, \mathcal{S}|Y)$.*

Definice 1.9.12. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a nechť μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{S})$. Řekneme, že míra μ je absolutně spojitá vzhledem k míře ν, značíme $\mu \ll \nu$, pokud pro každou množinu $B \in \mathcal{S}$ platí $\mu(B) = 0$ kdykoli $\nu(B) = 0$.*

Lemma 1.9.13. *Nechť $(X, \mathcal{B}), (Y, \mathcal{C})$ jsou měřitelné prostory a $f\colon X \to Y$ je měřitelné zobrazení. Je-li μ míra na $(X, \mathcal{B})$ a $A \in \mathcal{B}$, potom zobrazení $\nu_A\colon \mathcal{C} \to [0,\infty]$ definované předpisem*

$$\nu_A(C) = \mu(A \cap f^{-1}(C)), \quad C \in \mathcal{C}$$

je míra na $(Y, \mathcal{C})$. Speciálně pro $A = X$ značíme $f(\mu) = \nu_X$.
Navíc platí, že jsou-li $B_1, B_2 \subseteq X$ měřitelné, $B_1 \subseteq B_2$, potom $\nu_{B_1} \ll \nu_{B_2}$. Speciálně, pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ platí $\nu_B \ll f(\mu)$.

Důkaz. Nejprve je třeba ověřit vlastnosti z Definice 1.9.9.
(i) Platí $\nu_A(\emptyset) = \mu(A \cap f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.
(ii) Zvolme posloupnost po dvou disjunktních množin $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}$. Označíme-li $B_j = A \cap f^{-1}(C_j)$, potom $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních měřitelných podmnožin prostoru X, a tedy platí

$$\nu_A(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_A(C_j).$$

Nechť $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \subseteq B_2$. Předpokládejme, že množina $A \in \mathcal{B}$ je taková, že $0 = \nu_{B_2}(A) = \mu(B_2 \cap f^{-1}(A))$. Potom $(B_1 \cap f^{-1}(A)) \subseteq (B_2 \cap f^{-1}(A))$. Tedy $\mu(B_1 \cap f^{-1}(A)) \le \mu(B_2 \cap f^{-1}(A)) = 0$, a tedy $\nu_{B_1}(A) = \mu(B_1 \cap f^{-1}(A)) = 0$. $\square$

Definice 1.9.14. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{S})$. Řekneme, že μ-měřitelná funkce $f\colon X \to [0,\infty)$ je Radonova-Nikodýmova derivace míry ν vzhledem k μ (značíme $\frac{d\nu}{d\mu}$), pokud pro každou množinu $B \in \mathcal{S}$ platí $\nu(B) = \int_B f d\mu$.*

Důkazy všech následujících tvrzení z teorie míry a integrálu lze nalézt v [3].

Lemma 1.9.15. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{S})$. Je-li f Radonova-Nikodýmova derivace míry ν vzhledem k μ, potom pro každou μ-měřitelnou funkci $g\colon X \to \mathbb{R}$ a pro každou množinu $B \in \mathcal{S}$ platí*

$$\int_B g(x) d\nu(x) = \int_B g(x) f(x) d\mu(x).$$

Věta 1.9.16 (Radon-Nikodým)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{S})$ a nechť $\nu \ll \mu$. Potom existuje nezáporná μ-měřitelná funkce $f\colon X \to [0,\infty)$, která je Radonovou-Nikodýmovou derivací míry ν vzhledem k μ. Navíc f je určena jednoznačně až na množinu μ-míry 0.*

Věta 1.9.17 (Lebesgueova o monotónní konvergenci)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \leq f_{n+1}$. Nechť $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Potom*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Definice 1.9.18. *Nechť X je množina. Řekneme, že systém $O \subseteq 2^X$ je množinový okruh, jestliže*
(i) $\emptyset \in O$,
(ii) pokud $A, B \in O$, potom $A \setminus B \in O$,
(iii) pokud $A, B \in O$, potom $A \cup B \in O$.

Definice 1.9.19. *Nechť X je množina a $O \subseteq 2^X$ je množinový okruh. Řekneme, že množinová funkce $\pi : O \to [0,\infty]$ je pramíra, pokud splňuje*
(i) $\pi(\emptyset) = 0$,
(ii) jsou-li $A_n \in O$ po dvou disjunktní množiny a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in O$, potom $\pi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \pi(A_n)$.

Věta 1.9.20 (Hopf)**.** *Nechť X je množina a nechť $O \subseteq 2^X$ je množinový okruh. Je-li π pramíra na O, potom existuje míra μ definovaná na $\sigma(O)$, která rozšiřuje π. Pokud je navíc pramíra π konečná, potom je μ určena jednoznačně.*

1.10 Prostor pravděpodobnostních měr

Definice 1.10.1. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je standardní borelovský prostor. Míra μ na $(X, \mathcal{S})$ se nazývá borelovská. Označme $P(X)$ množinu všech borelovských pravděpodobnostních měr na $(X, \mathcal{S})$.*

Poznámka 1.10.2. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je standardní borelovský prostor. Nechť $\mu \in P(X)$. Nechť $A \in \mathcal{S}$ a nechť $\mu(A) > 0$. Potom dle Věty 1.9.6 je $(A, \mathcal{S}|A)$ standardní borelovský prostor a zřejmě platí, že*

$$\frac{\mu|A}{\mu(A)} \in P(A).$$

Poznámka 1.10.3. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je standardní borelovský prostor. Nechť $A \in \mathcal{S}$ a nechť $\mu \in P(A)$. Potom můžeme μ přirozeně chápat jako míru $\tilde{\mu} \in P(X)$ definovanou předpisem*

$$\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap A), \quad B \in \mathcal{S}.$$

Tuto míru budeme opět značit μ.

Lemma 1.10.4. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je standardní borelovský prostor. Nechť $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost borelovských konečných měr na X splňující $\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = 1$. Definujme*

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(B), \quad B \in \mathcal{S}.$$

Potom $\mu \in P(X)$.

Důkaz. Platí $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Dále $\mu(X) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = 1$. Zbývá ověřit σ-aditivitu. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(A_j) \leq \mu_n(X) \leq 1$, dostáváme, že

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

□

Definice 1.10.5. *Nechť X je topologický prostor a nechť μ je borelovská míra na X. Řekneme, že μ je regulární, pokud pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(X)$ platí*

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) : G \supseteq B \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F) : F \subseteq B \text{ uzavřená}\}.$$

Lemma 1.10.6. *Nechť X je metrizovatelný prostor a nechť μ je pravděpodobnostní míra na $(X, \mathcal{B}(X))$. Potom μ je regulární.*

Důkaz. Označme

$$\mathcal{G} = \{D \in \mathcal{B}(X) : \mu(D) = \inf\{\mu(G) : G \supseteq D \text{ otevřená}\}\},$$

$$\mathcal{F} = \{D \in \mathcal{B}(X) : \mu(D) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq D \text{ uzavřená}\}\}.$$

Označíme $\mathcal{D} = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ a ukážeme, že $\mathcal{D} = \mathcal{B}(X)$.
Nechť F je uzavřená množina v X a nechť $\epsilon > 0$ je dáno. Jelikož X je metrizovatelný, dle Lemmatu 1.4.6 je F typu G_δ v X. Tedy existují otevřené množiny $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Můžeme volit $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $G_{n+1} \subseteq G_n$. Potom platí

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n).$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(G_{n_0}) < \mu(F) + \epsilon$. Jelikož G_{n_0} je otevřená a $\epsilon > 0$ bylo voleno libovolně, dostáváme, že $F \in \mathcal{G}$. Zřejmě platí také, že $F \in \mathcal{F}$. Tedy $F \in \mathcal{D}$.

Předpokládejme nyní, že $D \in \mathcal{D}$. Ukažme, že $X \setminus D \in \mathcal{D}$. Buď $\epsilon > 0$ dáno. Jelikož $D \in \mathcal{D}$, nalezneme otevřenou množinu G a uzavřenou množinu F takové, že

$$F \subseteq D \subseteq G \quad \text{a} \quad \mu(F) + \epsilon > \mu(D) > \mu(G) - \epsilon.$$

Potom množina $X \setminus F$ je otevřená, obsahuje $X \setminus D$ a

$$\mu(X \setminus F) = 1 - \mu(F) < 1 - \mu(D) + \epsilon = \mu(X \setminus D) + \epsilon.$$

Obdobně $X \setminus G$ je uzavřená podmnožina $X \setminus D$ a

$$\mu(X \setminus G) > \mu(X \setminus D) - \epsilon.$$

Tedy $X \setminus D \in \mathcal{D}$.
Nakonec ukažme, že systém $\mathcal{D}$ je uzavřený na spočetná disjunktní sjednocení. Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{D}$. Označme

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Nejprve ukažme, že $D \in \mathcal{F}$. Zvolme libovolné $\epsilon > 0$. Jelikož

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \leq \mu(X) \leq 1,$$

můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mu(D_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dále pro každé $n < n_0$ nalezneme uzavřenou množinu $F_n \subseteq D_n$ takovou, že

$$\mu(F_n) > \mu(D_n) - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

a označíme

$$F = \bigcup_{n=1}^{n_0-1} F_n.$$

Potom F je uzavřená podmnožina D a

$$\mu(D \setminus F) = \mu(D) - \mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) - \sum_{n=1}^{n_0-1} \mu(F_n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{n_0-1} (\mu(D_n) - \mu(F_n)) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \mu(D_n) < \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Nakonec ukažme, že $D \in \mathcal{G}$. Buď $\epsilon > 0$ dáno. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme otevřenou množinu $G_n \supseteq D_n$ takovou, že

$$\mu(G_n) < \mu(D_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Potom

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

je otevřená množina v X obsahující D. Dále

$$\mu(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n).$$

Tedy

$$\mu(G \setminus D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus D_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Jelikož systém všech uzavřených množin je uzavřený na konečné průniky, můžeme použít Lemma 1.9.4 a dostaneme, že $\mathcal{D}$ obsahuje všechny borelovské množiny. □

Věta 1.10.7 (Lusin). *Nechť X, Y jsou topologické prostory. Nechť Y má spočetnou bázi otevřených množin. Nechť X je metrizovatelný prostor, $\mu \in P(X)$ a nechť $f\colon (X, \mathcal{B}(X)) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$ je μ-měřitelná funkce. Potom pro každé $\epsilon > 0$ existuje uzavřená množina $F \subseteq X$ taková, že $\mu(X \setminus F) < \epsilon$ a $f|_F$ je spojité zobrazení.*

Důkaz. Nechť $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ je báze topologie prostoru Y. Dle Lemmatu 1.10.6 je μ regulární. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $f^{-1}(U_n)$ měřitelná, můžeme tedy nalézt otevřenou množinu G_n a uzavřenou množinu F_n takové, že

$$F_n \subseteq f^{-1}(U_n) \subseteq G_n$$

a

$$\mu(F_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+2}} > \mu(f^{-1}(U_n)) > \mu(G_n) - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}.$$

Označíme

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus F_n).$$

Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $G_n \setminus F_n$ otevřená a

$$\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}},$$

je také U otevřená a $\mu(U) < \epsilon$. Označíme

$$F = X \setminus U.$$

Potom F je uzavřená a $\mu(X \setminus F) < \epsilon$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$f^{-1}(U_n) \cap F = G_n \cap F$$

otevřená množina v F. Jelikož $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ je báze topologie Y, dostáváme, že $f|_F$ je spojité. □

Kapitola 2

Desintegrace kategorie

Značení 2.0.8. *Nechť X je topologický prostor. Pro množiny $A, B \subseteq X$ píšeme $A \prec_{\text{rez}} B$, pokud $A \cap B$ je reziduální množina v B.*

Věta 2.0.9 (Desintegrace kategorie)**.** *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f\colon X \to Y$ je spojité otevřené zobrazení. Nechť $A \subseteq X$ má Baireovu vlastnost. Označme*

$$\Omega_A = \{y \in Y : A \prec_{\text{rez}} f^{-1}(y)\}.$$

Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:
(i) A je reziduální množina v X,
(ii) Ω_A je reziduální množina v Y.

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Předpokládejme nejprve, že A je otevřená a hustá podmnožina X. Označme

$$C = \{y \in Y : A \cap f^{-1}(y) \text{ je hustá v} f^{-1}(y)\}.$$

Chceme ukázat, že Ω_A je reziduální v Y. Jelikož pro každé $y \in Y$ je $A \cap f^{-1}(y)$ otevřená množina v $f^{-1}(y)$, stačí dle Lemmatu 1.4.5 ukázat, že množina C je reziduální v Y. Tím bude důkaz hotov v případě, že A je otevřená hustá podmnožina X.

Lemma 2.0.10. *Množina C je reziduální v Y.*

Důkaz. Nechť $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ je báze otevřených množin prostoru Y. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$C_n = \{y \in Y : f^{-1}(y) \cap U_n \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(y) \cap U_n \cap A \neq \emptyset\}.$$

Zvolme libovolné $n \in \mathbb{N}$.
Nejprve ukažme, že C_n je množina typu G_δ. Položme

$$C_1 = Y \setminus f(U_n), \quad C_2 = f(U_n \cap A)$$

a ukažme, že $C_n = C_1 \cup C_2$.

$$\begin{aligned} y \in C_n &\Leftrightarrow y \in \{z \in Y : f^{-1}(z) \cap U_n \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(z) \cap U_n \cap A \neq \emptyset\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f^{-1}(y) \cap U_n = \emptyset) \vee (f^{-1}(y) \cap U_n \cap A \neq \emptyset) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(\exists x \in U_n : f(x) = y) \vee (\exists x \in (U_n \cap A) : f(x) = y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in (Y \setminus f(U_n)) \vee y \in f(U_n \cap A) \Leftrightarrow y \in C_1 \vee y \in C_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y \in C_1 \cup C_2. \end{aligned}$$

Dále, jelikož je f otevřené zobrazení, je C_1 uzavřená množina a C_2 je otevřená množina. Jelikož Y je metrizovatelný prostor, dle Lemmatu 1.4.3 je C_1 množina typu G_δ. Tedy C_n je sjednocením dvou množin typu G_δ. Dle Lemmatu 1.4.3 je tedy také C_n množina typu G_δ.

Nyní dokažme, že C_n je hustá. Nechť $V \subseteq Y$ je neprázdná otevřená množina. Jestliže existuje $y \in V \cap C_1$, potom $C_n \cap V \neq \emptyset$. Předpokládejme tedy naopak, že $V \subseteq Y \setminus C_1 = f(U_n)$. Potom $f^{-1}(V) \cap U_n$ je neprázdná množina a je otevřená, neboť f je spojité. Jelikož A je hustá, existuje $x \in f^{-1}(V) \cap U_n \cap A$. Položíme-li $y = f(x)$, potom $y \in V \cap C_2 \subseteq V \cap C_n$. Tedy C_n je hustá.

Ukázali jsme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je C_n hustá G_δ množina v Y, tedy dle Lemmatu 1.4.5 je C_n reziduální. Použitím Lemmatu 1.3.3 dostaneme, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ je reziduální množina v Y.

Nyní přikročme k důkazu, že C je reziduální. Stačí ukázat, že $C \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Buď $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ libovolné. Zvolme $U \subseteq f^{-1}(y)$ neprázdnou otevřenou podmnožinu $f^{-1}(y)$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\emptyset \neq U_n \cap f^{-1}(y) \subseteq U$. Jelikož $y \in C_n$, platí, že $A \cap U_n \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$, tedy také $A \cap U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Jelikož otevřená neprázdná množina U byla libovolná, je $A \cap f^{-1}(y)$ hustá podmnožina $f^{-1}(y)$, tedy $y \in C$.

□

Nechť nyní A je obecná reziduální podmnožina X. Užitím Lemmatu 1.6.4 nalezneme hustou G_δ množinu $B \subseteq A$. Nalezneme posloupnost otevřených hustých množin $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Označme

$$\Omega_{B_n} = \{y \in Y : B_n \prec_{\text{rez}} f^{-1}(y)\} \quad a \quad \Omega_B = \{y \in Y : B \prec_{\text{rez}} f^{-1}(y)\}.$$

Dle předchozího jsou množiny Ω_{B_n} reziduální v Y, tedy dle Lemmatu 1.3.3 je reziduální také množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{B_n}$. Dokažme, že Ω_B je reziduální v Y. Stačí ukázat, že $\Omega_B \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{B_n}$. Nechť $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{B_n}$ je libovolné. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $B_n \cap f^{-1}(y)$ reziduální v $f^{-1}(y)$, tedy také množina

$$B \cap f^{-1}(y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \cap f^{-1}(y))$$

je reziduální v $f^{-1}(y)$, a tedy $y \in \Omega_B$.
Konečně, jelikož $A \supseteq B$, zřejmě $\Omega_A \supseteq \Omega_B$, a tedy Ω_A je reziduální v Y.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Tuto implikaci dokažme sporem. Předpokládejme, $A \subseteq X$ je množina s Baireovou vlastností taková, že množina Ω_A je reziduální v Y, ale A není reziduální v X.

Použitím Lemmatu 1.5.4 nalezneme neprázdnou otevřenou množinu $O \subseteq X$ takovou, že $A \cap O$ je množina 1. kategorie v X. Potom reziduální množina $X \setminus (A \cap O)$ má Baireovu vlastnost dle Lemmatu 1.5.3, můžeme na ní tedy použít již dokázanou implikaci $(i) \Rightarrow (ii)$ a dostaneme, že množina

$$\begin{aligned}\Omega_{X\setminus(A\cap O)} &= \{y \in Y : (X \setminus (A \cap O)) \prec_{\text{rez}} f^{-1}(y)\} = \\ &= \{y \in Y : A \cap O \cap f^{-1}(y) \text{ je množina 1. kategorie v} f^{-1}(y)\}\end{aligned}$$

je reziduální v Y. Jelikož Y je Baireův prostor a Ω_A, $\Omega_{X\setminus(A\cap O)}$ jsou reziduální množiny v Y, jsou dle Věty 1.6.2 v Y husté.

Dále, jelikož O je neprázdná otevřená množina a f je otevřené zobrazení, je množina $f(O)$ neprázdná a otevřená, tedy můžeme nalézt $y \in f(O) \cap \Omega_A \cap \Omega_{X\setminus(A\cap O)}$. Zobrazení f je spojité, tedy $f^{-1}(y)$ je uzavřená podmnožina X. Jelikož X je úplně metrizovatelný, je také $f^{-1}(y)$ úplně metrizovatelný prostor. Dle Věty 1.6.3 je tedy $f^{-1}(y)$ Baireův prostor.

Dále $f^{-1}(y) \cap O$ je neprázdná otevřená množina v $f^{-1}(y)$. Jelikož $y \in \Omega_A \cap \Omega_{X\setminus(A\cap O)}$, platí, že $A \cap f^{-1}(y)$ je reziduální v $f^{-1}(y)$, ale $A \cap O \cap f^{-1}(y)$ je množina 1. kategorie v $f^{-1}(y)$, čímž dostáváme spor s Lemmatem 1.6.5.

□

Důsledek 2.0.11 (Kuratowského-Ulamova věta). *Nechť X, Y jsou polské prostory. Nechť $A \subseteq X \times Y$ má Baireovu vlastnost. Označme*

$$\Omega^X = \{x \in X : A_x \textit{ je reziduální v } Y\},\ \Omega^Y = \{y \in Y : A_y \textit{ je reziduální v } X\}.$$

Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:
(i) A je reziduální v $X \times Y$,
(ii) Ω^X je reziduální v X,
(iii) Ω^Y je reziduální v Y.

Důkaz. Stačí dokázat $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Důkaz ekvivalence $(i) \Leftrightarrow (iii)$ je zcela obdobný a z těchto dvou ekvivalencí již plyne $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.
Projekce $\pi_X : X \times Y \to X$ je spojité otevřené zobrazení a pro každé $x \in X$ platí $\pi_X^{-1}(x) = \{x\} \times Y$, $\pi_X^{-1}(x) \cap A = \{x\} \times A_x$.
Aplikujeme Větu 2.0.9 na polské prostory $X \times Y$ a X, množinu A a zobrazení π_X. Dostaneme tak ekvivalenci následujících dvou tvrzení:
(i) A je reziduální v $X \times Y$,
(ii) $\Omega_0^X = \{x \in X : \{x\} \times A_x$ je reziduální v $\{x\} \times Y\}$ je reziduální množina v X.
Jelikož zřejmě platí, že $\Omega^X = \Omega_0^X$, je důkaz hotov. □

Dle Lemmatu 1.6.8 každé spojité otevření zobrazení mezi polskými prostory zachovává kategorii. Následující věta říká, že Věta o desintegraci kategorie platí i za slabšího předpokladu na zobrazení f.

Věta 2.0.12 (Desintegrace kategorie-silnější verze). *Nechť X, Y jsou polské prostory a $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení zachovávající kategorii. Nechť $A \subseteq X$ má Baireovu vlastnost. Označme*

$$\Omega_A = \{y \in Y : A \prec_{\text{rez}} f^{-1}(y)\}.$$

Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:
(i) A je reziduální množina v X,
(ii) Ω_A je reziduální množina v Y.

Důkaz. Dle Lemmatu 1.7.6 nalezneme hustou G_δ množinu $Z \subseteq Y$ takovou, že $f\colon f^{-1}(Z) \to Z$ je otevřené zobrazení. Označme $W = f^{-1}(Z)$. Potom W je množina typu G_δ v X dle Lemmatu 1.4.4. Tedy W, Z jsou polské prostory dle Věty 1.7.2. Dále, jelikož Z je hustá G_δ podmnožina Y, je dle Lemmatu 1.4.5 v tomto prostoru reziduální. Zobrazení f dle předpokladu zachovává kategorii, z čehož plyne, že W je reziduální podmnožina X. Jelikož X je Baireův prostor, je

dle Věty 1.6.2 W hustá množina v X.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Nechť A je reziduální v X. Jelikož je W reziduální množina v X, dle Lemmatu 1.6.6 je $A \cap W$ reziduální množina v W. Označme

$$\Omega_{A\cap W} = \{y \in Z : A \cap W \prec_{\text{rez}} f^{-1}(y)\}.$$

Víme, že $f\colon W \to Z$ je spojité otevřené zobrazení mezi polskými prostory W, Z. Jelikož $A \cap W$ je reziduální podmnožina W, dle Věty 2.0.9 je množina $\Omega_{A\cap W}$ reziduální v Z.
Jelikož Z je hustá a typu G_δ v Y, dle Lemmatu 1.7.3 je $\Omega_{A\cap W}$ reziduální množina v Y. Jelikož zřejmě $\Omega_A \supseteq \Omega_{A\cap W}$, dostáváme, že Ω_A je reziduální v Y.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Předpokládejme, že Ω_A je reziduální množina v Y. Potom dle Lemmatu 1.6.6 je množina $Z \cap \Omega_A$ reziduální v Z. Opět použijme Větu 2.0.9 na otevřené spojité zobrazení f mezi polskými prostory W, Z a dostaneme, že $A \cap W$ je reziduální podmnožina W. Jelikož W je hustá množina typu G_δ v X, je A dle Lemmatu 1.7.3 reziduální podmnožina X. $\square$

Kapitola 3

Desintegrace měr

Věta 3.0.13 (Desintegrace měr). *Nechť $(X, \mathcal{B})$, $(Y, \mathcal{C})$ jsou standardní borelovské prostory a $f : X \to Y$ je měřitelné zobrazení. Nechť $\mu \in P(X)$ a nechť $\nu = f(\mu)$. Potom existuje zobrazení $y \mapsto \mu_y$ z Y do $P(X)$ takové, že*

$(D1)$ *zobrazení $y \mapsto \mu_y(B)$ je měřitelné z $(Y, \mathcal{C})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$,*

$(D2)$ *$\mu(B) = \int \mu_y(B) d\nu(y)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$,*

$(D3)$ *existuje množina $\Omega \in \mathcal{C}$ taková, že $\nu(\Omega) = 1$ a pro každé $y \in \Omega$ je $\mu_y(f^{-1}(y)) = 1$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{G}_X, \mathcal{G}_Y$ jsou topologie na prostorech X, Y takové, že prostory $(X, \mathcal{G}_X)$, $(Y, \mathcal{G}_Y)$ jsou polské a $\sigma(\mathcal{G}_X) = \mathcal{B}$, $\sigma(\mathcal{G}_Y) = \mathcal{C}$. Důkaz provedeme ve čtyřech krocích.

Předpokládejme nejprve, že X je kompaktní prostor, který má spočetnou bázi z obojetných množin a $f \colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Označme

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ je obojetná v } X\}.$$

Dle Lemmatu 1.8.4 je systém $\mathcal{A}$ spočetný, a můžeme tedy psát $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme množinovou funkci $\nu_{A_n} : \mathcal{C} \to [0,1]$ předpisem

$$\nu_{A_n}(C) = \mu(A_n \cap f^{-1}(C)), \quad C \in \mathcal{C}.$$

Potom ν_{A_n} je míra na Y a $\nu_{A_n} \ll \nu$ dle Lemmatu 1.9.13.
Dle Věty 1.9.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje ν-měřitelná funkce $g_{A_n} : Y \to [0,\infty)$ taková, že

$$\nu_{A_n}(C) = \int_C g_{A_n} d\nu, \quad C \in \mathcal{C}.$$

Speciálně můžeme volit $g_\emptyset \equiv 0$ a $g_X \equiv 1$. Definujme pro každé $y \in Y$ množinovou funkci π_y na $\mathcal{A}$ předpisem

$$\pi_y(A) = g_A(y), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Lemma 3.0.14. *Označme*

$$Z = \{y \in Y : \pi_y \text{ je pramíra na } \mathcal{A} \text{ a } \pi(X) = 1\}.$$

Potom Z obsahuje množinu ν-míry 1.

Důkaz. Díky volbě $g_\emptyset \equiv 0$ a $g_X \equiv 1$ dostáváme, že pro každé $y \in Y$ je $\pi_y(\emptyset) = g_\emptyset(y) = 0$ a $\pi_y(X) = g_X(y) = 1$.
Označme

$$\mathcal{K} = \{K \subseteq \mathbb{N} \text{ konečná} : A_j, A_k \text{ jsou disjunktní pro každé } j, k \in K, j \neq k\}.$$

Pro každou množinu $K \in \mathcal{K}$ označme

$$A_K = \bigcup_{n \in K} A_n \quad \text{a} \quad W_K = \{y \in Y : \pi_y(A_K) = \sum_{n \in K} \pi_y(A_n)\}.$$

Zvolme libovolné $K \in \mathcal{K}$. Zřejmě W_K je měřitelná množina. Dokažme, že $\nu(W_K) = 1$. Chceme ukázat, že $g_{A_K}(y) = \sum_{n \in K} g_{A_n}(y)$ pro ν-skoro všechna $y \in Y$. Uvažujme funkci h_{A_K} definovanou předpisem

$$h_{A_K}(y) = \sum_{n \in K} g_{A_n}(y), \quad y \in Y.$$

Potom h_{A_K} je ν-měřitelná funkce a pro každou množinu $C \in \mathcal{C}$ platí

$$\begin{aligned}\int_Y h_{A_K}(y) d\nu(y) &= \int_C \sum_{j \in K} g_{A_j}(y) d\nu(y) = \sum_{j \in K} \int_C g_{A_j}(y) d\nu(y) = \\ &= \sum_{j \in K} \nu_{A_j}(C) = \sum_{j \in K} \mu(A_j \cap f^{-1}(C)) = \\ &= \mu(A \cap f^{-1}(C)) = \nu_A(C).\end{aligned}$$

Dle Věty 1.9.16 tedy $h_{A_K} = g_{A_K}$ ν-skoro všude. Tedy pro ν-skoro všechna $y \in Y$ platí

$$\pi_y(A_k) = g_{A_K}(y) = h_{A_K}(y) = \sum_{n \in K} g_{A_n}(y) = \sum_{n \in K} \pi_{A_n}(y).$$

Jinými slovy, $\nu(W_k) = 1$, což jsme chtěli dokázat.

Jelikož systém $\mathcal{K}$ je spočetný, dostáváme, že

$$\nu(\bigcap_{K \in \mathcal{K}} W_K) = 1.$$

Nyní stačí ukázat, že

$$Z \supseteq \bigcap_{K \in \mathcal{K}} W_K.$$

Nechť $y \in \bigcap_{K \in \mathcal{K}} W_K$. Nechť $A \in \mathcal{A}$ je libovolná obojetná množina. Předpokládejme, že

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

kde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin. Potřebujeme ukázat, že

$$\pi_y(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_y(A_n).$$

Jelikož A je uzavřená množina v X a X je kompaktní, je A kompaktní v X.

Jelikož množiny A_n jsou otevřené, existuje konečná množina přirozených čísel $K \in \mathcal{K}$ taková, že

$$A = \bigcup_{n \in K} A_n.$$

Jelikož A_n jsou dle předpokladu po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in K} A_n,$$

dostáváme, že $A_n = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus K$. Jelikož $y \in W_K$, dostáváme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_y(A_n) = \sum_{n \in K} \pi_y(A_n) + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus K} \pi_y(A_n) = \sum_{n \in K} \pi_y(A_n) + 0 = \sum_{n \in K} \pi_y(A_n) = \pi_y(A).$$

□

Lemma 3.0.15. *Označme*

$$W = \{y \in Y; \forall A \in \mathcal{A} : A \supseteq f^{-1}(y) \Rightarrow \pi_y(A) = 1\}.$$

Potom W obsahuje množinu ν-míry 1.

Důkaz. Pro $A \in \mathcal{A}$ označme

$$W_A = \{y \in Y : A \supseteq f^{-1}(y) \Rightarrow \pi_y(A) = 1\},$$

$$Z_A = \{y \in Y : A \supseteq f^{-1}(y)\}.$$

Potřebujeme ukázat, že Z_A je borelovská množina v Y. Dokážeme, že je dokonce otevřená. Zřejmě $Z_A = Y \setminus f(X \setminus A)$. Jelikož A je otevřená množina v X, je $X \setminus A$ uzavřená, a tedy kompaktní množina v X, neboť X je kompaktní. Jelikož f je spojité, je $f(X \setminus A)$ kompaktní, a tedy uzavřená množina v Y. Tedy $Y \setminus f(X \setminus A)$ je otevřená množina.
Uvažujme nyní funkci h_A definovanou předpisem

$$h_A(y) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } y \in Z_A, \\ g_A(y), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom h je ν-měřitelná funkce. Platí totiž

$$h_A = 1\chi_{Z_A} + g_A \chi_{X \setminus Z_A}.$$

Dokážeme, že

$$\int_C h_A d\nu = \int_C g_A d\nu, \quad C \in \mathcal{C}. \tag{3.1}$$

Jelikož pro každou borelovskou množinu $C \subseteq Y \setminus Z_A$ vztah (3.1) zřejmě platí, stačí ukázat, že (3.1) platí pro každou borelovskou podmnožinu Z_A. Potom totiž pro každou množinu $C \in \mathcal{C}$ dostaneme, že

$$\int_C h_A d\nu = \int_{C \cap Z_A} h_A d\nu + \int_{C \cap (Y \setminus Z_A)} h_A d\nu =$$
$$= \int_{C \cap Z_A} g_A d\nu + \int_{C \cap (Y \setminus Z_A)} g_A d\nu = \int_C g_A d\nu.$$

Nechť tedy $C \subseteq Z_A$ je libovolná borelovská množina. Ukažme, že $A \supseteq f^{-1}(C)$. Nechť $x \in f^{-1}(C)$ a označme $y = f(x)$. Jelikož $C \subseteq Z_A$, je $f^{-1}(y) \subseteq A$. Tedy $x \in f^{-1}(y) \subseteq A$.
Nyní dostáváme, že

$$\int_C h_A d\nu = \int_C 1 d\nu = \nu(C) = \mu(f^{-1}(C)) = \mu(f^{-1}(C) \cap A) = \nu_A(C) = \int_C g_A d\nu.$$

Dle Věty 1.9.16 tedy dostáváme, že $h_A = g_A$ ν-skoro všude. Označíme

$$P_A = \{y \in Y : h_A(y) = g_A(y)\},$$

$$H_A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq A \Rightarrow h_A(y) = 1\}.$$

Potom $\nu(P_A) = 1$ a přímo z definice funkce h plyne, že $H_A = Y$. Nyní dostáváme, že

$$W_A \supseteq H_A \cap P_A = P_A.$$

Tedy

$$W = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} W_A \supseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} P_A.$$

Jelikož $\nu(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} P_A) = 1$, je důkaz hotov. □

Nalezněme množinu $\Omega \subseteq Z \cap W$ ν-míry 1. Systém množin $\mathcal{A}$ je množinový okruh, můžeme tedy využít Větu 1.9.20 a pro každé $y \in \Omega$ nalézt jednoznačně určenou míru μ_y definovanou na $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ splňující

$$\mu_y(A) = \pi_y(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Zvolme libovolnou míru $\mu_0 \in P(X)$ a pro každé $y \in Y \setminus \Omega$ položme $\mu_y = \mu_0$.

Lemma 3.0.16. *Označme*

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{B} : y \mapsto \mu_y(D) \text{ je } \nu\text{-měřitelná funkce}$$
$$\text{a pro každou množinu } C \in \mathcal{C} \text{ je } \mu(D \cap f^{-1}(C)) = \int_C \mu_y(D) d\nu(y)\}.$$

Potom $\mathcal{D} = \mathcal{B}$.

Důkaz. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ obsahuje všechny obojetné podmnožiny X a je uzavřený na doplňky a spočetná disjunktní sjednocení. Potom $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ dle Lemmatu 1.9.4. Nechť $A \subseteq X$ je obojetná. Potom funkce $y \mapsto \mu_y(A)$ je měřitelná, neboť

$$\mu_y(A) = \begin{cases} \pi_y(A) = g_A(y), & \text{je-li } y \in \Omega, \\ \mu_0(A), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť $C \in \mathcal{C}$. Potom

$$\mu(A \cap f^{-1}(C)) = \nu_A(C) = \int_C g_A(y) d\nu(y) =$$
$$= \int_C \pi_y(A) d\nu(y) = \int_C \mu_y(A) d\nu(y),$$

tedy $A \in \mathcal{D}$.

Nechť $D \in \mathcal{D}$. Potom $\mu_y(X \setminus D) = 1 - \mu_y(D)$, tedy $y \mapsto \mu_y(X \setminus D)$ je ν-měřitelná funkce. Jelikož X je obojetná množina, je $X \in \mathcal{D}$, a tedy máme

$$\begin{aligned}\mu((X \setminus D) \cap f^{-1}(C)) &= \mu((X \cap f^{-1}(C)) \setminus (D \cap f^{-1}(C)) = \\ &= \mu(X \cap f^{-1}(C)) - \mu(D \cap f^{-1}(C)) = \\ &= \int_C \mu_y(X) d\nu(y) - \int_C \mu_y(D) d\nu(y) = \\ &= \int_C (\mu_y(X) - \mu_y(D)) d\nu(y) = \int_C \mu_y(X \setminus D) d\nu(y).\end{aligned}$$

Jinými slovy, $X \setminus D \in \mathcal{D}$.

Nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{D}$. Označme $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Potom $\mu_y(D) = \mu_y(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_y(D_n)$, tedy $y \mapsto \mu_y(D)$ je ν-měřitelná funkce. Dále platí

$$\begin{aligned}\mu(D \cap f^{-1}(C)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n \cap f^{-1}(C)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \mu_y(D_n) d\nu(y) = \\ &= \int_C \sum_{n=1}^{\infty} \mu_y(D_n) d\nu(y) = \int_C \mu_y(D) d\nu(y),\end{aligned}$$

tedy $D \in \mathcal{D}$. □

Dle Lemmatu tedy platí $(D1)$ z tvrzení věty. Dále volbou $C = Y$ dostaneme, že pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ platí

$$\mu(B) = \mu(B \cap X) = \mu(B \cap f^{-1}(Y)) = \int_Y \mu_y(B) d\nu(y),$$

a tedy také $(D2)$ je splněno.

Nyní dokažme $(D3)$. Označme

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{B}; \forall y \in \Omega : f^{-1}(y) \subseteq E \Rightarrow \mu_y(E) = 1\}.$$

Dokažme, že $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. Nechť $y \in \Omega$ je libovolné a nechť A je obojetná množina obsahující $f^{-1}(y)$. Potom $\mu_y(A) = \pi_y(A) = 1$, jelikož $y \in W$.

Nyní ukážeme, že $\mathcal{E}$ obsahuje všechny otevřené podmnožiny X. Nechť $y \in \Omega$ je libovolné a nechť G je otevřená množina obsahující $f^{-1}(y)$. Jelikož f je spojité, je $f^{-1}(y)$ uzavřená množina. Můžeme tedy použít Lemma 1.8.3 a nalézt obojetnou množinu A takovou, že $f^{-1}(y) \subseteq A \subseteq G$. Dle předchozího je $\mu_y(A) = 1$, tedy také $\mu_y(G) = 1$.

Nyní můžeme využít regularitu míry μ_y a dostaneme, že

$$\mu_y(f^{-1}(y)) = \inf\{\mu_y(G) : G \supseteq f^{-1}(y) \text{ otevřená}\} = 1.$$

Tím je důkaz ukončen za předpokladu, že f je spojité zobrazení a X je kompaktní prostor se spočetnou bází topologie tvořenou obojetnými množinami.

Předpokládejme nyní, že $X = 2^{\mathbb{N}}$ a $f\colon 2^{\mathbb{N}} \to Y$ je měřitelné zobrazení, nikoli nutně spojité. Užijeme Větu 1.10.7 a nalezneme rostoucí posloupnost kompaktů

$\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ v X takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f|_{K_n}$ spojité zobrazení a $\mu(K_n) > 1 - 1/n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť

$$\mu_n = \frac{\mu|_{K_n}}{\mu(K_n)},\ f_n = f|_{K_n},\ \nu_n = f_n(\mu_n),\ Y_n = f_n(K_n),$$

kde používáme značení z Definice 1.9.10. Potom K_n jsou kompaktní podprostory prostoru K, a tedy jsou to standardní borelovské prostory. Zobrazení $f_n \colon K_n \to Y$ je spojité a dle Poznámky 1.10.2 je $\mu_n \in P(K_n)$. Dle předchozího tedy můžeme nalézt zobrazení $y \mapsto \mu_y^n$ z Y do $P(K_n)$ takové, že

$(D1)_n$ zobrazení $y \mapsto \mu_y^n(B)$ je měřitelné z $(Y, \mathcal{C})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(K_n)$,

$(D2)_n$ $\mu_n(B) = \int_Y \mu_y^n(B) d\nu_n(y)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(K_n)$,

$(D3)_n$ existuje množina $\Omega_n \in \mathcal{C}$ taková, že $\nu_n(\Omega_n) = 1$ a $\mu_y^n(f_n^{-1}(y)) = 1$ pro každé $y \in \Omega_n$.

Dle Poznámky 1.10.3 chápeme μ_y^n jako míry na celém X. Potom $(D2)_n$ platí pro každou borelovskou podmnožinu X, neboť

$$\mu_n(B) = \mu_n(B \cap K_n) = \int_Y \mu_y^n(B \cap K_n) d\nu_n(y) = \int_Y \mu_y^n(B) d\nu_n(y), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Dokažme, že $\nu_n \ll \nu$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $C \in \mathcal{C}$ je libovolná množina ν-míry 0. Potom

$$\nu_n(C) = \mu_n(f_n^{-1}(C)) = \frac{\mu(f_n^{-1}(C))}{\mu(K_n)} \leq \frac{\mu(f^{-1}(C))}{\mu(K_n)} = \frac{\nu(C)}{\mu(K_n)} = 0.$$

Dle Věty 1.9.16 tedy nalezneme ν-měřitelnou funkci g_n takovou, že

$$\nu_n(C) = \int_C g_n(y) d\nu(y), \quad C \in \mathcal{C}.$$

Potom dle Lemmatu 1.9.15 pro každou ν-měřitelnou funkci f na Y platí

$$\int_Y f(y) d\nu_n(y) = \int_Y f(y) g_n(y) d\nu(y),$$

má-li alespoň jeden z integrálů smysl.

Lemma 3.0.17. *Označme pro $n \in \mathbb{N}$ a $y \in Y$*

$$h_n^y(B) = \mu_y^n(B) \mu(K_n) g_n(y), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Potom h_n^y je borelovská míra na X. Dále existuje množina $\Theta \in \mathcal{C}$ taková, že $\nu(\Theta) = 1$ a pro každé $y \in \Theta$ platí následující tři výroky:

(i) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou množinu $B \in \mathcal{B}$ je $h_n^y(B) \leq 1$.

(ii) Pro každé $B \in \mathcal{B}$ je posloupnost reálných čísel $\{h_n^y(B)\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající.

(iii) Platí

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_n) g_n(y) = 1.$$

Důkaz. Je zřejmé, že h_n^y je borelovská míra na X.
(i) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každou množinu $C \in \mathcal{C}$ platí, že

$$\int_C g_n(y) d\nu(y) = \nu_n(C) = \mu_n(f_n^{-1}(C)) = \frac{\mu(f_n^{-1}(C))}{\mu(K_n)} \leq$$
$$\leq \frac{\mu(f^{-1}(C))}{\mu(K_n)} = \frac{\nu(C)}{\mu(K_n)} = \int_C \frac{1}{\mu(K_n)} d\nu,$$

a tedy existuje množina Γ_n ν-míry 1 taková, že pro každé $y \in \Gamma_n$ je

$$g_n(y) \leq \frac{1}{\mu(K_n)}.$$

Označíme

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n.$$

Potom $\nu(\Gamma) = 1$ a pro každé $y \in \Gamma$ je

$$h_n^y(B) = \mu_y^n(B)\mu(K_n)g_n(y) \leq \mu_y^n(B)\mu(K_n)\frac{1}{\mu(K_n)} = \mu_y^n(B) \leq 1.$$

(ii) Nechť $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ je báze otevřených množin prostoru X. Nechť $\mathcal{G}$ je systém všech množin, které jsou konečným sjednocením množin z $\mathcal{U}$. Nechť $G \in \mathcal{G}$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každou množinu $C \in \mathcal{C}$ použitím Lemmatu 3.0.16 máme

$$\mu(G \cap f_n^{-1}(C)) = \mu(K_n)\mu_n(G \cap f_n^{-1}(C)) = \mu(K_n) \int_C \mu_y^n(G) d\nu_n(y) =$$
$$= \int_C \mu(K_n)\mu_y^n(G) g_n(y) d\nu(y) = \int_C h_y^n(G) d\nu(y).$$

Jelikož pro každou množinu $C \in \mathcal{C}$ zřejmě platí, že

$$\mu(G \cap f_n^{-1}(C)) \leq \mu(G \cap f_{n+1}^{-1}(C)),$$

dostaneme, že

$$\int_C h_y^n(G) d\nu(y) \leq \int_C h_y^{n+1}(G) d\nu(y), \quad C \in \mathcal{C}.$$

Tedy existuje množina Λ_G^n ν-míry 1 taková, že pro každé $y \in \Lambda_G^n$ je

$$h_y^n(G) \leq h_y^{n+1}(G).$$

Označme

$$\Lambda = \Gamma \cap \bigcap \{\Lambda_G^n : n \in \mathbb{N}, G \in \mathcal{G}\}.$$

Jelikož systém $\mathcal{G}$ je spočetný, je $\nu(\Lambda) = 1$ a pro každé $y \in \Lambda$, $G \in \mathcal{G}$ a $n \in \mathbb{N}$ je $h_y^n(G) \leq h_y^{n+1}(G)$, a tedy posloupnost $\{h_y^n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $G \in \mathcal{G}$ na Λ neklesající.

Nechť G je libovolná otevřená podmnožina X. Potom můžeme nalézt neklesající posloupnost množin $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$ takovou, že $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Potom pro každé $y \in \Lambda$ a $n \in \mathbb{N}$ dostáváme, že

$$h_y^n(G) = \lim_{k\to\infty} h_y^n(G_k) \leq \lim_{k\to\infty} h_y^{n+1}(G_k) = h_y^{n+1}(G),$$

tedy dostáváme, že posloupnost $\{h_y^n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $y \in \Lambda$ neklesající.

Nechť nyní B je libovolná borelovská podmnožina X. Je-li G libovolná množina otevřená v X obsahující B, potom pro každé $y \in \Lambda$ a $n \in \mathbb{N}$ dostaneme, že

$$h_y^n(B) \leq h_y^n(G) \leq h_y^{n+1}(G).$$

Dle (i) je h_y^{n+1} konečná míra na X, a tedy dle Lemmatu 1.10.6 je regulární. Tedy dostaneme, že

$$h_y^{n+1}(B) = \inf\{h_y^{n+1}(G), G \supseteq B \text{ otevřená}\} \geq h_y^n(B).$$

Tedy také posloupnost $\{h_y^n(B)\}_{n=1}^{\infty}$ je na Λ neklesající, a tedy (ii) platí.
(iii) Nechť $B \in \mathcal{B}$. Jelikož posloupnost $\{h_y^n(B)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající na množině Λ a $\nu(\Lambda) = 1$, můžeme dle Věty 1.9.17 psát

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B \cap K_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(B)\mu(K_n) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \mu_y^n(B)\mu(K_n)g_n(y)d\nu(y) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_Y h_y^n(B)d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \int_\Lambda h_y^n(B)d\nu(y) = \int_\Lambda \lim_{n\to\infty} h_y^n(B)d\nu(y).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Speciálně platí

$$\begin{aligned}\int_\Lambda 1d\nu = 1 = \mu(X) &= \int_\Lambda \lim_{n\to\infty} h_y^n(X)d\nu(y) = \\ &= \int_\Lambda \lim_{n\to\infty} \mu_y^n(X)\mu(K_n)g_n(y)d\nu(y) = \\ &= \int_\Lambda \lim_{n\to\infty} \mu(K_n)g_n(y)d\nu(y).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dle (i) platí pro každé $y \in \Lambda$ a $n \in \mathbb{N}$, že

$$g_n(y)\mu(K_n) \leq \frac{1}{\mu(K_n)}\mu(K_n) = 1,$$

tedy také

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_n)g_n(y) \leq 1.$$

Díky tomu a (3.3) můžeme nalézt množinu $\Theta \subseteq \Lambda$ splňující $\nu(\Theta) = 1$ takovou, že pro každé $y \in \Theta$ je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_n)g_n(y) = 1.$$

□

Zvolíme pevnou borelovskou pravděpodobnostní míru μ_0 na X a definujeme

$$\mu_y(B) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} h_y^n(B), & \text{je-li } y \in \Theta, \\ \mu_0(B), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom díky Lemmatu 1.10.4 je $\mu_y \in P(X)$ pro každé $y \in Y$, a přímo z definice míry μ_y je pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ zobrazení $y \mapsto \mu_y(B)$ měřitelné, tedy platí $(D1)$. Tvrzení $(D2)$ plyne ihned z výpočtu (3.2), zbývá tedy dokázat $(D3)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme množinu Z_n takovou, že $\nu_n(Z_n) = 1$ a

$$\forall y \in Z_n : \mu_y^n(f_n^{-1}(y)) = 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme, že

$$\begin{aligned} \nu(Z_n) &= \mu(f^{-1}(Z_n)) \geq \mu(f_n^{-1}(Z_n)) = \mu_n(f_n^{-1}(Z_n))\mu(K_n) = \\ &= \nu_n(Z_n)\mu(K_n) = \mu(K_n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Položme

$$Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} Z_m.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $k \geq n$ dle (3.4) máme, že

$$\nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} Z_m) \geq \nu(Z_k) \geq \mu(K_k) > 1 - 1/k,$$

tedy

$$\nu(\bigcup_{m=n}^{\infty} Z_m) = 1.$$

Tedy také

$$\nu(Z) = \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} Z_m) = 1.$$

Označme $\Omega_{2^{\mathbb{N}}} = Z \cap \Theta$. Zvolme libovolné $y \in \Omega_{2^{\mathbb{N}}}$ a $\epsilon > 0$. Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_n) g_n(y) = 1,$$

můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\mu(K_n) g_n(y) > 1 - \epsilon.$$

Jelikož

$$y \in Z \subseteq \bigcup_{m=n_0}^{\infty} Z_m,$$

existuje $m \geq n_0$ takové, že $y \in Z_m$. Tedy dle definice Z_m je $\mu_y^m(f_m^{-1}(y)) = 1$. Tedy

$$\begin{aligned} h_y^m(f^{-1}(y)) &= \mu_m^y(f^{-1}(y))\mu(K_m) g_m(y) \geq \\ &\geq \mu_m^y(f_m^{-1}(y))\mu(K_m) g_m(y) = \mu(K_m) g_m(y) > 1 - \epsilon. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Jelikož posloupnost $\{h_y^n(f^{-1}(y))\}$ je neklesající, dostáváme, že (3.5) platí pro každé $n \geq m$, a tedy také

$$\mu_y(f^{-1}(y)) = \lim_{n\to\infty} h_y^n(f^{-1}(y)) > 1 - \epsilon.$$

Jelikož $\epsilon > 0$ bylo voleno libovolně, dostáváme, že

$$\mu_y(f^{-1}(y)) = 1.$$

Tím je důkaz ukončen za předpokladu, že f je měřitelné zobrazení z $2^{\mathbb{N}}$ do Y.

Nyní předpokládejme, že X je borelovská podmnožina $2^{\mathbb{N}}$. Máme $\mu \in P(X)$, měřitelné zobrazení $f : X \to Y$ a $\nu = f(\mu)$. Položíme

$$\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap X), \quad B \in \mathcal{B}(2^{\mathbb{N}}),$$

jako v Poznámce 1.10.3. Nechť $\tilde{f} : 2^{\mathbb{N}} \to Y$ je libovolná měřitelná funkce rozšiřující f a položme $\tilde{\nu} = \tilde{f}(\mu)$. Potom pro každé $C \in \mathcal{C}$ platí

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(C) &= \tilde{\mu}(\tilde{f}^{-1}(C)) = \mu(\tilde{f}^{-1}(C) \cap X) = \mu(f^{-1}(C) \cap X) = \\ &= \tilde{\mu}(f^{-1}(C)) = \mu(f^{-1}(C)) = \nu(C).\end{aligned}$$

Nalezneme zobrazení $y \mapsto \tilde{\mu}_y$ z Y do $P(2^{\mathbb{N}})$ splňující $(D1)$,$(D2)$,$(D3)$ z tvrzení Věty 3.0.13. Jelikož platí

$$1 = \tilde{\mu}(X) = \int_Y \tilde{\mu}_y(X) d\tilde{\nu} = \int_Y \tilde{\mu}_y(X) d\nu$$

a pro každé $y \in Y$ je

$$\tilde{\mu}_y(X) \leq 1,$$

dostaneme, že pro ν-skoro každé $y \in Y$ je $\tilde{\mu}_y(X) = 1$. Označme

$$W = \{y \in Y : \tilde{\mu}_y(X) = 1\}$$

a pro každé $y \in W$ definujeme pravděpodobnostní míru na X předpisem

$$\mu_y(B) = \tilde{\mu}_y(B), \quad B \in \mathcal{B}(X).$$

Zvolíme libovolnou borelovskou pravděpodobnostní míru μ_0 na X a pro všechna $y \in Y \setminus W$ položme $\mu_y = \mu_0$. Nyní dokážeme vlastnosti $(D1)$,$(D2)$,$(D3)$ pro zobrazení $y \mapsto \mu_y$. Přímo z definice μ_y dostaneme, že platí $(D1)$.

Dále pro každé $B \in \mathcal{B}(X)$ máme, že

$$\begin{aligned}\mu(B) = \tilde{\mu}(B) &= \int_Y \tilde{\mu}_y(B) d\tilde{\nu}(y) = \int_Y \tilde{\mu}_y(B) d\nu(y) = \\ &= \int_W \tilde{\mu}_y(B) d\nu(y) = \int_W \mu_y(B) d\nu = \int_Y \mu_y(B) d\nu(y),\end{aligned}$$

tedy platí $(D2)$.

Nakonec dokažme $(D3)$. Nechť $\Omega_{2^{\mathbb{N}}}$ je množina $\tilde{\nu}$-míry 1 taková, že pro každé $y \in \Omega_{2^{\mathbb{N}}}$ je $\tilde{\mu}_y(f^{-1}(y)) = 1$. Potom

$$\nu(\Omega_{2^{\mathbb{N}}}) = \tilde{\nu}(\Omega_{2^{\mathbb{N}}}) = 1.$$

Označme $\Omega = W \cap \Omega_{2^{\mathbb{N}}}$. Potom $\nu(\Omega) = 1$ a pro každé $y \in \Omega$ platí, že

$$\mu_y(f^{-1}(y)) = \tilde{\mu}_y(f^{-1}(y)) = \tilde{\mu}_y(\tilde{f}^{-1}(y) \cap X) = 1.$$

Nakonec předpokládejme, že $(X, \mathcal{B})$ je obecný standardní borelovský prostor, $\mu \in P(X)$, $f\colon (X, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{C})$ je měřitelné zobrazení a $\nu = f(\mu)$. Užijeme Větu 1.9.7 a nalezneme borelovskou množinu $E \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ a izomorfismus g prostoru $(E, \mathcal{B}(E))$ na prostor $(X, \mathcal{B})$. Položme

$$h = f \circ g.$$

Potom $h\colon (E, \mathcal{B}(E)) \to (Y, \mathcal{C})$ je měřitelné zobrazení. Položíme

$$\pi = g^{-1}(\mu).$$

Potom $\mu = g(\pi)$, tedy pro každou množinu $C \in \mathcal{C}$ máme, že

$$\nu(C) = \mu(f^{-1}(C)) = \pi(g^{-1}(f^{-1}(C))) = \pi(h^{-1}(C)).$$

Jinými slovy, $\nu = h(\pi)$. Dle předchozího tedy můžeme nalézt zobrazení $y \mapsto \pi_y$ z Y do $P(E)$ splňující, že

$(D1)_E$ funkce $y \mapsto \pi_y(B)$ je měřitelná pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(E)$,

$(D2)_E$ $\pi(B) = \int_Y \pi_y(B) d\nu$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(E)$,

$(D3)_E$ existuje množina $\Omega_E \in \mathcal{C}$ taková, že $\nu(\Omega_E) = 1$ a $\pi_y(h^{-1}(y)) = 1$ pro každé $y \in \Omega_E$.

Pro každé $y \in Y$ položme

$$\mu_y = g(\pi_y).$$

Potom pro libovolnou množinu $B \in \mathcal{B}$ platí $\mu_y(B) = \pi_y(g^{-1}(B))$, tedy funkce $y \mapsto \mu_y(B)$ je měřitelná. Tedy platí $(D1)$.

Dále pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ platí, že

$$\mu(B) = \pi(g^{-1}(B)) = \int_Y \pi_y(g^{-1}(B)) d\nu(y) = \int_Y \mu_y(B) d\nu(y),$$

tedy platí $(D2)$.

Nakonec dokažme $(D3)$. Pro každé $y \in \Omega_E$ máme, že

$$\mu_y(f^{-1}(y)) = \pi_y(g^{-1}(f^{-1}(y)) = \pi_y(h^{-1}(y)) = 1.$$

Tedy $(D3)$ platí, označíme-li $\Omega = \Omega_E$.

Tím je ukončen důkaz čtvrtého kroku, a tedy také celé věty. $\square$

Důsledek 3.0.18 (Fubiniova věta). *Nechť $(X, \mathcal{B})$ a $(Y, \mathcal{C})$ jsou standardní borelovské prostory. Nechť $\pi_X : X \times Y \to X$ je projekce. Nechť $\mu \in P(X \times Y)$ a nechť $\nu = \pi_X(\mu)$. Potom existuje zobrazení $x \mapsto \mu_x$ z X do $P(Y)$ takové, že pro každou omezenou měřitelnou funkci $f : (X \times Y, \mathcal{B}(X \times Y)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je funkce*

$$x \mapsto \int_Y f_x(y) d\mu_x(y)$$

měřitelná z $(X, \mathcal{B})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a platí

$$\int_{X \times Y} f(x,y) d\mu(x,y) = \int_X \int_Y f_x(y) d\mu_x(y) d\nu(x). \tag{3.6}$$

Důkaz. Aplikujeme Větu 3.0.13 na standardní borelovské prostory $X \times Y$, X, měřitelné zobrazení π_X a míry μ, ν. Nalezneme měřitelné zobrazení $x \mapsto \tilde{\mu}_x$ z X do $P(X \times Y)$ takové, že

$(D1)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ je funkce $x \mapsto \tilde{\mu}_x(B)$ měřitelná,

$(D2)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ je $\mu(B) = \int_X \tilde{\mu}_x(B) d\nu(x)$,

$(D3)$ existuje množina $\Omega \in \mathcal{B}$ taková, že $\nu(\Omega) = 1$ a pro každé $x \in \Omega$ je $\tilde{\mu}_x(\pi_X^{-1}(x)) = \tilde{\mu}_x(\{x\} \times Y)) = 1$.

Pro každé $x \in \Omega$ definujme množinovou funkci μ_x na $\mathcal{C}$ předpisem

$$\mu_x(C) = \tilde{\mu}_x(\{x\} \times C), \quad C \in \mathcal{C}.$$

Potom zřejmě pro každé $x \in \Omega$ je μ_x borelovská míra na Y. Použitím $(D3)$ dostaneme, že pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ a $x \in \Omega$ je

$$\tilde{\mu}_x(B) = \tilde{\mu}_x(B \cap (\{x\} \times Y)) = \tilde{\mu}_x(\{x\} \times B_x) = \mu_x(B_x).$$

Speciálně pro každé $x \in \Omega$ je $\mu_x(Y) = \tilde{\mu}_x(X \times Y) = 1$, a tedy $\mu_x \in P(Y)$. Zvolme libovolnou pevnou míru $\mu_0 \in P(Y)$ a pro každé $x \in X \setminus \Omega$ položme $\mu_x = \mu_0$. Potom dle $(D1)$ a definice μ_x je funkce $x \mapsto \mu_x(C)$ měřitelná pro každou množinu $C \in \mathcal{C}$. Tedy dostáváme, že pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ je funkce

$$x \mapsto \int_Y (\chi_B)_x(y) d\mu_x(y)$$

měřitelná, neboť

$$\int_Y (\chi_B)_x(y) d\mu_x(y) = \int_Y \chi_{B_x}(y) d\mu_x(y) = \int_{B_x} 1 d\mu_x(y) = \mu_x(B_x).$$

Jelikož $\nu(\Omega) = 1$, užitím $(D2)$ dostaneme, že pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ je

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \int_X \tilde{\mu}_x(B) d\nu(x) = \int_\Omega \tilde{\mu}_x(B) d\nu(x) + \int_{X \setminus \Omega} \tilde{\mu}_x(B) d\nu(x) = \\
&= \int_\Omega \tilde{\mu}_x(B) d\nu(x) + 0 = \int_\Omega \tilde{\mu}_x(B) d\nu(x) = \int_\Omega \mu_x(B_x) d\nu(x) = \\
&= \int_\Omega \mu_x(B_x) d\nu(x) + 0 = \int_\Omega \mu_x(B_x) d\nu(x) + \int_{X \setminus \Omega} \mu_0(B_x) d\nu(x) = \\
&= \int_\Omega \mu_x(B_x) d\nu(x) + \int_{X \setminus \Omega} \mu_x(B_x) d\nu(x) = \int_X \mu_x(B_x) d\nu(x).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Nyní z (3.7) dostáváme platnost (3.6) pro charakteristickou funkci χ_B, neboť

$$\int_{X\times Y} \chi_B(x,y)d\mu(x,y) = \mu(B) = \int_X \mu_x(B_x)d\nu(x) = \int_X \int_Y \chi_{B_x}(y)d\mu_x(y)d\nu(x) =$$
$$= \int_X \int_Y (\chi_B)_x(y)d\mu_x(y)d\nu(x).$$

Tedy Fubiniova věta platí pro všechny charakteristické funkce. Standardním postupem konečně dostaneme, že platí i pro všechny omezené měřitelné funkce. □

Poznámka 3.0.19. *Předchozí věta je obecnější, než klasická Fubiniova věta. Tu dostaneme ve speciálním případě, kdy existují míry $\nu \in P(X)$ a $\rho \in P(Y)$ takové, že míra μ je jejich součinem. V tomto případě $\nu = \pi_X(\mu)$ a zobrazení $x \mapsto \mu_x$ je konstantní na Ω, neboť $\mu_x = \rho$ pro každé $x \in \Omega$.*

Literatura

[1] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, 156.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Julien Melleray and Todor Tsankov. Generic representations of abelian groups and extreme amenability. *Israel J. Math*, 198(1):129–167, 2013.

[3] Jan Malý and Jaroslav Lukeš. *Measure and integral.* Matfyzpress, Praha, 2005.