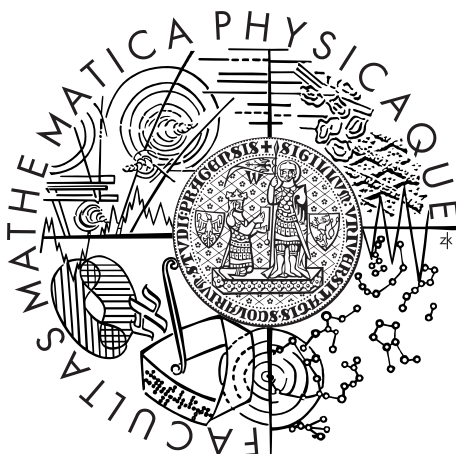


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Michal Karamazov

Impulsní gravitační vlny

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2015

Děkuji vedoucímu práce, doktoru Robertu Švarcovi, za vstřícnost, přátelský přístup a také za pečlivost, již věnoval připomínkám a návrhům úprav.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Impulsní gravitační vlny

Autor: Michal Karamazov

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V rešeršní části této bakalářské práce shrneme poznatky o řešeních Einsteinových rovnic gravitačního pole, která popisují neexpandující i expandující impulsní gravitační vlny v prostoročasech konstantní křivosti. Zvláštní pozornost budeme věnovat geodetickým pohybům v těchto prostoročasech a geometrickým metodám jejich konstrukce. V rámci původní části této práce ověříme kompatibilitu přímého řešení rovnice geodetiky v (anti-)de Sitterově prostoročase s neexpandující impulsní vlnou a refrakčních vztahů odvozených za předpokladu spojitosti geodetik v jistém souřadném systému. Dále budeme zkoumat interakce testovacích částic s expandující sférickou impulsní vlnou na Minkowského pozadí, která je generovaná dvojicí kolmých přetržených kosmických strun.

Klíčová slova: Impulsní gravitační vlny, geodetiky, kosmické struny.

Title: Impulsive gravitational waves

Author: Michal Karamazov

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In the review part of this bachelor thesis, we summarize various results about solutions to Einstein's gravitational field equations which describe both non-expanding and expanding impulsive gravitation waves in spacetimes of constant curvature. Special attention will be paid to geodesic motion in these spacetimes and to geometrical methods of their construction. In the original part of the thesis, we check compatibility of a direct solution to geodesic equation in (anti-)de Sitter spacetime with non-expanding impulsive wave and refraction formulae derived under the assumption of continuity of geodesics in a specific coordinate system. We also investigate an interaction of test particles with expanding spherical impulsive wave propagating on the Minkowski background which is generated by a pair of perpendicular snapping cosmic strings.

Keywords: Impulsive gravitational waves, geodesics, cosmic strings.

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 3 |
| 1 Prostoročasy konstantní křivosti | 7 |
| 1.1 Minkowského prostoročas | 7 |
| 1.2 de Sitterův prostoročas | 9 |
| 1.3 Anti-de Sitterův prostoročas | 10 |
| 2 Neexpandující impulsní gravitační vlny | 13 |
| 2.1 Minkowského prostoročas | 13 |
| 2.2 (Anti-)de Sitterův prostoročas | 15 |
| 3 Geodetiky v neexpandujících impulsních vlnách | 19 |
| 3.1 Řešení rovnice geodetiky pro $\Lambda \neq 0$ | 19 |
| 3.2 Podmínky napojení na impulsním rozhraní | 20 |
| 3.3 Kompatibilita řešení rovnic geodetiky a podmínek napojení | 23 |
| 4 Expandující impulsní gravitační vlny | 29 |
| 4.1 Minkowského prostoročas | 29 |
| 4.2 (Anti-)de Sitterův prostoročas | 31 |
| 4.3 Stereografická projekce a kosmické struny | 34 |
| 5 Geodetiky v expandujících impulsních vlnách | 39 |
| 5.1 Obecné refrakční vztahy | 39 |
| 5.2 Srážka a přetržení dvojice kosmických strun | 41 |
| Závěr | 53 |
| Seznam použité literatury | 55 |

Úvod

Obecná teorie relativity, od jejíž formulace Albertem Einsteinem letos na podzim uplyne právě sto let, představuje dosud neúspěšnější teorii gravitace. Její fyzikální předpovědi byly mnohokrát experimentálně potvrzeny, přičemž tyto experimenty značně omezily případné teorie alternativní.

Gravitace je v obecné relativitě popisována jako samotná vlastnost prostoru a času, přesněji jako zakřivení prostoročasu. V přirozeném matematickém aparátu diferenciální geometrie je prostoročas reprezentován diferencovatelnou varietou s metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$. Právě metrika pak musí splňovat Einsteinovy rovnice gravitačního pole

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (1)$$

tedy soustavu deseti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro deset nezávislých složek metrického tenzoru. Na levé straně těchto rovnic vystupují ryze geometrické objekty konstruované z metriky – Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}$ a skalární křivost R – a kosmologická konstanta Λ , které jsou prostřednictvím pravé strany svázány s „hmotou“ v daném prostoročase reprezentovanou tenzorem energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$.

Nalézt přesné řešení těchto rovnic je ve většině realistických situací nemožné. Analytickými nebo numerickými metodami se proto často zkoumají pouze řešení aproximativní. Přesto však přesná řešení, byť často představující pouze velmi idealizované prostoročasy, hrají nezastupitelnou úlohu při snaze o pochopení obecné relativity. Mimo jiné umožňují plně zkoumat nelinearitu rovnic v případě silných polí, poskytují pozadí pro použití perturbačních aproximací a zajišťují kontrolu přesnosti numerických metod.

Již roku 1916 předpověděl Albert Einstein v rámci své obecné teorie relativity existenci gravitačních vln, tedy oscilací v zakřivení prostoročasu šířících se rychlostí světla. Limitním případem specifických idealizovaných přesných řešení popisujících gravitační vlny jsou takzvané impulsní gravitační vlny, jejichž vlastnostmi se bude zabývat tato práce. Konkrétně budeme zkoumat různé aspekty interakce expandujících a neexpandujících impulsních vln s volnými testovacími, to znamená geodetickými, pozorovateli, jejichž trajektorie tedy musí v daném, obecně zakřiveném, prostoročase splňovat rovnici geodetiky ve tvaru

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 . \quad (2)$$

Ještě v této úvodní části uveďme základní referenční monografie věnující se Einsteinově teorii. Formalismus obecné teorie relativity pojednávají například kanonické knihy [1] a [2]. Systematický přehled přesných řešení Einsteinových rovnic lze pak nalézt v [3] a fyzikální interpretaci významných přesných prostoročasů v [4]. Právě tato kniha spolu s přehledovým příspěvkem v [5] byla základním zdrojem informací o impulsních gravitačních vlnách pro tuto bakalářskou práci.

Impulsní gravitační vlny

Impulsními gravitačními vlnami rozumíme infinitezimálně krátké pulzy gravitačního záření šířící se prostoročasem rychlostí světla. Formálně se jedná o přesná řešení Einsteinových rovnic s křivostí úměrnou Diracově δ -funkci lokalizované na jisté světelné nadploše. O ryze gravitační impulsní vlně mluvíme v případě, kdy se δ -funkce objevuje v příslušných složkách Weylova tenzoru. Vyskytuje-li se δ -funkce v Ricciho tenzoru, jedná se impuls hmoty pohybující se rychlostí světla.

Dobře prozkoumány jsou především jednoduché modelové příklady prostoročasů s impulsními vlnami patřící do neexpandující Kundtovy a expandující Robinonovy–Trautmanovy třídy řešení. V obou případech se pak impulsní vlny šíří na pozadí prostoročasů konstantní křivosti, neboli výsledný prostoročas je tvořený Minkowského, de Sitterovým či anti-de Sitterovým vesmírem všude kromě jisté světelné nadplochy představující impuls.

Dělení impulsních vln na neexpandující a expandující je zvláště v případě Minkowského pozadí dobře intuitivně srozumitelné. Neexpandující impulsní vlnoplochy zde představují roviny, na nichž je křivost úměrná δ -funkci, propagující se rychlostí světla ve směru své normály. Oproti tomu expandujícím vlnám odpovídají světelné sférické plochy rozpínající/kolabující od/do svého středu. Formálněji lze neexpandující a expandující vlny rozlišit pomocí optických vlastností geodetických nulových kongruencí. Uvažujme netwistující a bezshearovou světelnou geodetickou kongruence tečnou ke směru šíření impulsní vlny, potom je-li navíc optický skalár *expanze* nulový hovoříme o neexpandující vlně, zatímco v případě expandující vlny nabývá expanze nenulové hodnoty.

Fyzikálně a matematicky zajímavou se jeví především interakce impulsních gravitačních vln s hmotou respektive volnými testovacími částicemi. Z toho důvodu jsou studovány geodetiky v prostoročasech obsahujících tyto vlny. Omezíme-li se na pozadové prostoročasy konstantní křivosti, jsou geodetiky v oblastech mimo impuls dobře známy. Netriviální jsou ale podmínky pro napojení geodetik přecházejících z oblasti *před* do oblasti *za* vlnou. Obecně platí, že částice při setkání s impulsní gravitační vlnou skokově změni svou polohu a rychlost viz [6, 7, 8] a kapitoly 3 a 5.

Historicky lze studium impulsních gravitačních vln rozdělit do tří etap oddělených vždy přibližně 20 lety.

V *první* etapě vrcholící pracemi Lichnerowicze a dalších [9] byly v padesátých letech minulého století nalezeny a prozkoumány základní matematické vlastnosti řešení Einsteinových rovnic se skokovými a impulsními vlnami. Bylo například ukázáno, že tyto vlny se musí nacházet na světelných nadplochách, na nichž jsou derivace metriky nespojité. Nicméně explicitní řešení popisující impulsní vlny dosud známa nebyla.

Ve *druhé* etapě sahající do počátku sedmdesátých let byla tato řešení, a rozdílné metody jejich konstrukce, explicitně nalezena. Toto období je možné nazvat „zlatým věkem“ impulsních gravitačních vln. Hlavní zásluhu zde mají zejména Roger Penrose [10], Peter C. Aichelburg a Roman U. Sexl [11]. Výše zmíněnými metodami pak byly takzvaná „cut and paste“ konstrukce, užití spojitých souřadnic, limity sendvičových vln, vhodná vnoření do vícedimenzionálního prostoru, boosty a nekonečná zrychlení původně statických objektů viz závěr této úvodní části.

Třetí období začíná počátkem let devadesátých a představuje „renesanci“ stu-

dia impulsních gravitačních vln. Zde uvedme práci Hotty a Tanaky [12], kteří získali řešení odpovídající neexpandující impulsní vlně boostem Schwarzschildovy černé díry v (anti-)de Sitterově vesmíru. Současně byl nalezen a zkoumán spojitý tvar řešení odpovídajícího expandující impulsní vlně generované přetrženou kosmickou strunou. Tímto řešením, jeho analogiemi a zobecněními se v různých kontextech zabývali především Gleiser a Pullin [13], Bičák [14], Nutku a Penrose [15], Hogan [16, 17], Podolský a Griffiths [18]. Obecnější situaci odpovídající srážce a přetržení dvojice kosmických strun poté zkonstruovali taktéž Podolský a Griffiths [19].

Nyní stručně shrneme možné způsoby konstrukce impulsních vln, přičemž odpovídající reference lze nalézt například v [4, 5, 7, 8]. Podrobněji se však dále budeme věnovat pouze metodě „cut and paste“ a následné konstrukci spojitého souřadného systému v úvodu kapitoly 2, respektive kapitoly 4.

- *Metoda „cut and paste“*, neboli „rozstříhni a slep“ představuje elegantní způsob geometrické konstrukce prostoročasů s impulsními gravitačními vlnami. Prostoročas je rozdělen podél světelné nadplochy, která se má stát vlnoplochou impulsní vlny, na dvě části, které jsou poté vůči sobě posunuty a následně opět spojeny. Penrose ukázal, že v Minkowského prostoročase představuje stříhání a lepení podél světelné roviny konstrukci neexpandující impulsní vlny, zatímco stříhání a lepení podél světelného kužele odpovídá konstrukci impulsu expandujícího. Touto metodou se později podařilo zkonstruovat neexpandující i expandující impulsní gravitační vlny v obecných prostoročasech konstantní křivosti viz Hogan [20], Podolský a Griffiths [18, 21, 22].
- *Spojitě souřadnice* hrají zásadní roli ve studiu impulsních gravitačních vln. Ačkoli obecná metoda „cut and paste“ umožňuje formálně zkonstruovat libovolnou neexpandující i expandující vlnu v Minkowského či (anti-)de Sitterově vesmíru, fakticky poskytuje pouze podmínky pro napojování oddělených částí prostoročasu, nikoli však užitečnější metriku prostoročasu kompletního. Klíčovým krokem je tedy nalezení takového systému souřadnic, v němž je metrika globální a spojitá všude, včetně nadplochy impulsu. Vztah k impulsnímu tvaru metriky je dán obecně nespojitou transformací vyhovující podmínkám navázání plynoucím z konstrukce „cut and paste“.
- *Limity sendvičových vln* představují patrně fyzikálně nejpřirozenější přístup ke konstrukci impulsních gravitačních vln. Přirozeně se nabízí využít známá řešení Einsteinových rovnic s gravitačními vlnami a s profily těchto vln limitně přejít k δ -funkci, jejímž nosičem je nulová vlnoplocha. Impulsní gravitační vlny je tedy možné přirozeně chápat jako idealizaci krátkých pulzů záření, takzvaných sendvičových vln. Jedná se o přirozenou a obecnou metodu konstrukce, která však u některých typů expandujících vln naráží na technické problémy týkající se spojitosti prostoročasu v místě impulsu.
- *Vnoření do pěti dimenzí* je efektivní metoda konstrukce neexpandujících impulsů v (anti-)de Sitterově vesmíru. Distribuční forma metriky na pozadí plochého pětirozměrného prostoru s neexpandující impulsní vlnou může být užita ke konstrukci neexpandujících impulsních vln v případě nenulové

kosmologické konstanty. Výsledný čtyřrozměrný prostoročas s neexpandujícím impulsem a $\Lambda \neq 0$ získáme jako 4-hyperboloid vnořený právě do tohoto impulsního plochého pětidimenzionálního prostoročasu.

- *Boosty a zrychlení* původně statických zdrojů ve svých limitních případech s vhodně škálovanými dalšími fyzikálními parametry reprezentují jistou speciální, avšak fyzikálně zajímavou, cestu k impulsním gravitačním vlnám. Aichelburg a Sexl [11] tak získali řešení odpovídající neexpandující impulsní vlně v Minkowského prostoročase jako limitu boostu Schwarzschildovy černé díry k rychlosti světla, zatímco její hmotnost limitně klesala k nule. Obdobné konstrukce byly poté provedeny pro (anti-)de Sitterův prostoročas a řešení Kerrový-Newmanovy a Weylovy třídy a také pro obecné multipólové zdroje. Expandující impulsní vlny pak mohou být zkonstruovány jako limitní případy prostoročasů s urychlovanými zdroji, jejichž zrychlení roste nad všechny meze.

1. Prostorůčasy konstantní křivosti

V této kapitole stručně shrneme základní poznatky o prostorůčasech konstantní křivosti, které dále využijeme v kapitolách následujících, kde se budeme zabývat impulsními gravitačními vlnami šířícími se právě na pozadí těchto geometrií. Konkrétně budeme studovat vlastnosti takových řešení Einsteinových rovnic, která odpovídají prostorůčasům konstantní křivosti všude kromě jistého infinitesimálního impulsu viz kapitola 2 a 4.

Jak název napovídá, tyto prostorůčasy jsou určeny požadavkem konstantní skalární křivosti R , přičemž je lokálně splněna podmínka svazující Riemannův tenzor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ a právě Ricciho skalár R ,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{12} R (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \quad (1.1)$$

Dle znaménka křivosti R pak rozlišuje Minkowského prostorůčas ($R = 0$), de Sitterův prostorůčas ($R > 0$) a anti-de Sitterův prostorůčas ($R < 0$).

Alternativně je možné tyto geometrie charakterizovat jako *maximálně symetrické* prostorůčasy, přičemž maximální počet isometrií ve čtyřech dimenzích je 10.

Jsou to rovněž jediná vakuová řešení Einsteinových rovnic s nulovým Weylovým tenzorem, tedy $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Navíc kontrakcí rovnic pole (1) s $T_{\mu\nu} = 0$ dostáváme vztah mezi kosmologickou konstantou Λ a skalární křivostí R ,

$$R = 4\Lambda, \quad (1.2)$$

a zpětně pak vakuové Einsteinovy rovnice ve tvaru $R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$. Minkowského prostorůčas představuje tedy jejich maximálně symetrické řešení s nulovou, de Sitterův vesmír s kladnou a anti-de Sitterův vesmír se zápornou hodnotou kosmologické konstanty Λ .

1.1 Minkowského prostorůčas

Minkowského prostorůčas je nejjednodušším myslitelným řešením Einsteinových polních rovnic. Není v žádném bodě zakřiven ($R = 0$), neobsahuje žádnou hmotu ani žádné gravitační pole. Lze jej vždy jednoznačně identifikovat na základě nulovosti Riemannova tenzoru křivosti, tedy $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Představuje přirozené dějiště speciální teorie relativity a může se tak objevit jako limita slabého gravitačního pole mnohých řešení v plné teorii, či jako asymptotická limita pole lokalizovaných zdrojů. Jak již bylo zmíněno, Minkowského prostor je maximálně symetrický s Poincarého grupou isometrií obsahující čtyři translace, tři rotace a tři boosty.

Metrika Minkowského prostorůčasu se nejpřirozeněji vyjádří v kartézských souřadnicích. Má zde tvar

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.3)$$

kde souřadnice t , x , y a z nabývají hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$ a odpovídající topologie je tedy \mathbb{R}^4 .

Mnohdy je užitečnější zavést retardované a advanceované souřadnice transformačními vztahy

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z), \quad \mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z), \quad (1.4)$$

které převedou metriku (1.3) do tvaru

$$ds^2 = -2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + dx^2 + dy^2. \quad (1.5)$$

Podmínky $\mathcal{U} = konst.$ a $\mathcal{V} = konst.$ představují světlu podobné nadplochy kolmé na rovinu xy . Tuto rovinu bývá dále vhodné parametrizovat nulovou komplexní souřadnicí,

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy). \quad (1.6)$$

Metrika poté nabývá symetrického tvaru

$$ds^2 = -2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}. \quad (1.7)$$

Minkowského prostoročas (1.3) můžeme též reparametrizovat užitím standardních cylindrických souřadnic

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (1.8)$$

kde $\rho \in [0, \infty)$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ a dostat tak metriku

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (1.9)$$

Vyjděme nyní z tohoto tvaru metriky a zkonstruujeme jednoduchý model takzvané *kosmické struny*. Konstrukce spočívá v odstranění výseče o úhlu $2\pi\delta$ z roviny xy . Konkrétně omezíme rozsah souřadnice φ pouze na $\varphi \in [0, (1 - \delta)2\pi)$ a poloroviny ohraničující odstraňovanou výseč poté ztotožníme. Takto zkonstruovaný prostoročas je plochý všude kromě osy $\rho = 0$. Tenzor křivosti je na této ose singulární. Po ztotožnění okrajů výřezu lze jednotlivé řezy, na nichž jsou t a z konstanty, reprezentovat jako kužele. Topologické defekty tohoto druhu se proto označují jako *kónické singularity*.

Zavedením reparametrizace $\varphi = C\phi$, kde $C = 1 - \delta$ a $\phi \in [0, 2\pi)$ získáme dobře srozumitelný tvar metriky Minkowského prostoročasu s kónickou singularitou, tedy

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + C^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (1.10)$$

Lze ukázat, že dvě původně rovnoběžné geodetiky, které obcházejí kónickou singularitu, zde osu z , každá z jedné strany, se po uražení konečné vzdálenosti setkají. Vlivem přítomnosti této singularity tedy může docházet k fokusaci geodetik v plochem prostoru bez působení gravitace. Ricciho tenzor má na ose z distribuční složku, což skrze Einsteinovy rovnice pole odpovídá nenulové složce napětí v tenzoru energie a hybnosti. Uvažovaný prostoročas lze tedy interpretovat jako lineární konstantně napnutý zdroj odpovídající jednoduchému modelu kosmické struny. Deficitní úhel pak určuje napětí struny. Označíme-li hmotnost struny na jednotku její délky μ , pak platí $\mu = \frac{1}{4}\delta = \frac{1}{4}(1 - C)$. Nejedná se zde však o klasickou gravitující hmotu, neboť okolní prostoročas je lokálně plochý. Na závěr poznamenejme, že kromě napnuté kosmické struny vyznačující se deficitním úhlem lze analogicky konstruovat též stlačenou tyčku s úhlem přebývajícím, tedy parametrem $C > 1$, kterému ovšem odpovídá záporná hodnota hmotnosti μ .

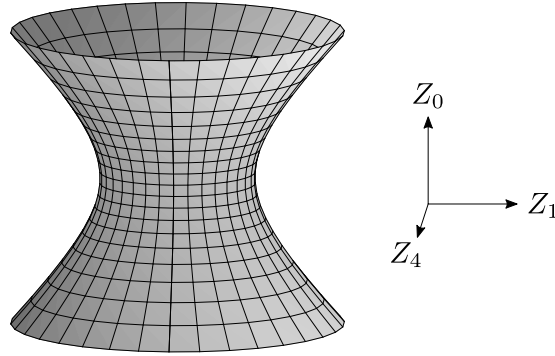
1.2 de Sitterův prostoročas

Maximálně symetrický prostoročas s kladnou konstantní křivostí R , a tedy kladnou kosmologickou konstantou Λ , byl zkonstruován již roku 1917 Willemem de Sitterem a je standardně nazýván po svém objeviteli de Sitterův vesmír. Grupou jeho izometrií je $SO(1, 4)$ a lze si jej přirozeně představovat jako 4-hyperboloid

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = a^2, \quad \text{kde } a = \sqrt{3/\Lambda}, \quad (1.11)$$

vnořený do pětirozměrného plochého Mikowského prostoročasu

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2. \quad (1.12)$$



Obrázek 1.1: Znázornění de Sitterova vesmíru jakožto 4-hyperboloidu vnořeného do plochého pětirozměrného prostoročasu. Souřadnice Z_2 a Z_3 nejsou vykresleny. Kružnice vyznačené na povrchu hyperboloidu představují nadplochy konstantního globálního času.

Takovýto hyperboloid lze globálně parametrizovat pomocí souřadnic (t, χ, θ, ϕ) takových, že

$$\begin{aligned} Z_0 &= a \sinh \frac{t}{a}, \\ Z_1 &= a \cosh \frac{t}{a} \cos \chi, \\ Z_2 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \cos \theta, \\ Z_3 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ Z_4 &= a \cosh \frac{t}{a} \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (1.13)$$

kde $t \in (-\infty, +\infty)$, $\chi \in [0, \pi)$, $\theta \in [0, \pi)$ a $\phi \in [0, 2\pi)$. Tato transformace převede metriku (1.12) do známého Friedmannova–Lemaîtreova–Robertsonova–Walkerova tvaru

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cosh^2 \frac{t}{a} \left(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (1.14)$$

Vidíme, že prostor odpovídající konstantnímu časovému řezu $t = \textit{konst.}$ je 3-sféra o poloměru $a \cosh \frac{t}{a}$. Tento poloměr exponenciálně klesá z maximální hodnoty v čase $t \rightarrow -\infty$, minima a nabývá v čase $t = 0$ a poté exponenciálně expanduje s časem $t \rightarrow \infty$. Celý prostoročas má tedy topologii $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3$.

Dále uvedme například sféricky symetrické souřadnice (T, R, θ, ϕ) zavedené vztahy

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{a^2 - R^2} \sinh \frac{T}{a}, \\ Z_1 &= \sqrt{a^2 - R^2} \cosh \frac{T}{a}, \\ Z_2 &= R \cos \theta, \\ Z_3 &= R \sin \theta \cos \phi, \\ Z_4 &= R \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \tag{1.15}$$

kde $T \in (-\infty, +\infty)$, $R \in [0, a)$, $\theta \in [0, \pi)$ a $\phi \in [0, 2\pi)$.

I když tyto souřadnice nepokrývají celý de Sitterův vesmír, interpretace hranice $R = a$ parametrizované oblasti je zajímavá právě z hlediska globální struktury tohoto prostoročasu. Tato světlu podobná nadplocha představuje takzvaný *kosmologický horizont*. De Sitterův prostoročas totiž expanduje tak rychle, že informace, která se může šířit nejvýše rychlostí světla, nikdy nedoputuje z oblasti za tímto horizontem do počátku souřadnic v $R = 0$.

Nakonec uvažujme parametrizaci pomocí souřadnic $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \eta, \bar{\eta})$,

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^{-1}, \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{U} - \mathcal{V}) \left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^{-1}, \\ Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \bar{\eta}) \left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^{-1}, \\ Z_3 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\eta - \bar{\eta}) \left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^{-1}, \\ Z_4 &= a \left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right] \left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

která pro $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in (-\infty, +\infty)$ a libovolné komplexní η globálně pokrývá de Sitterův hyperboloid až na souřadnicové singularitu v $\mathcal{U}, \mathcal{V} = \infty$. Aplikací transformace (1.16) přejde pětirozměrná metrika (1.12) na konformně plochý tvar

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}}{\left[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})\right]^2}, \tag{1.17}$$

který lze přirozeně použít pro všechny prostoročasy konstantní křivosti - Minkowského, de Sitterův i anti-de Sitterův vesmír - v závislosti na znaménku kosmologické konstanty Λ .

Pro úplnost dodejme, že inverzní transformace má podobu

$$\mathcal{U} = \sqrt{2} a \frac{Z_0 - Z_1}{Z_4 + a}, \quad \mathcal{V} = \sqrt{2} a \frac{Z_0 + Z_1}{Z_4 + a}, \quad \eta = \sqrt{2} a \frac{Z_2 + iZ_3}{Z_4 + a}. \tag{1.18}$$

1.3 Anti-de Sitterův prostoročas

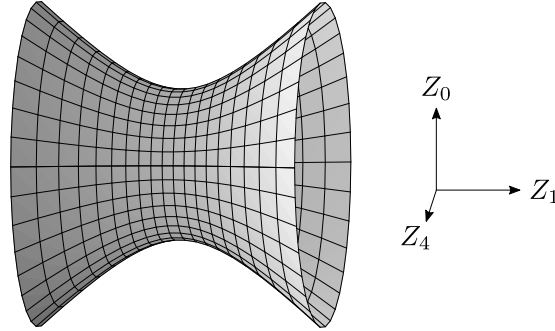
Anti-de Sitterův prostoročas představuje maximálně symetrické konformně ploché vakuové řešení Einsteinových polních rovnic se zápornou kosmologickou konstantou Λ , přičemž pro jeho křivost platí $R = 4\Lambda < 0$. Analogicky jako v případě de Sitterova vesmíru, viz (1.12) s vazbou (1.11), jej lze popsat jako 4-hyperboloid

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = a^2, \quad \text{kde } a = \sqrt{-3/\Lambda}, \tag{1.19}$$

vnořený do plochého pětidimenzionálního prostoru s metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 - dZ_4^2, \quad (1.20)$$

která má však nyní dvě časové souřadnice Z_0 a Z_4 . Anti-de Sitterův prostoročas je takto reprezentován jako podvarieta se strukturou symetrií danou desetiparametrickou grupou $SO(2, 3)$.



Obrázek 1.2: Znázornění anti-de Sitterova vesmíru jakožto 4-hyperboloidu vnořeného do plochého pětirozměrného prostoročasu. Souřadnice Z_2 a Z_3 nejsou vykresleny. Hyperboly vyznačené na povrchu hyperboloidu představují nadplochy konstantního času, který je v případě této vizualizace tedy cyklický.

Pro anti-de Sitterův 4-hyperboloid lze přirozeně užít globální parametrizaci pomocí souřadnic (T, r, θ, ϕ) , kde

$$\begin{aligned} Z_0 &= a \cosh r \sin \frac{T}{a}, \\ Z_1 &= a \sinh r \cos \theta, \\ Z_2 &= a \sinh r \sin \theta \cos \phi, \\ Z_3 &= a \sinh r \sin \theta \sin \phi, \\ Z_4 &= a \cosh r \cos \frac{T}{a}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

která převede metriku (1.20) do tvaru

$$ds^2 = -\cosh^2 r dT^2 + a^2 \left(dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (1.22)$$

kde $r \in [0, \pi)$, $\theta \in [0, \pi)$ a $\phi \in [0, 2\pi)$. Nyní objasníme význam souřadnice T . Časový řez $T = konst.$ představuje 3-prostor konstantní záporné křivosti. Ze vztahů (1.21) pak vidíme, že dvojice pětirozměrných časových souřadnic Z_0 a Z_4 je v čtyřrozměrné řeči parametrizovaná jedinou časovou souřadnicí T , která je však periodická, neboť hodnoty T lišící se o $2\pi a$ představují tytéž body uvažovaného hyperboloidu. Takto zkonstruovaný prostoročas má topologii $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$ a vyskytují se v něm tedy uzavřené časupodobné světočáry. Díky tvaru metriky (1.22) je však možné periodickou souřadnici nahradit $T \in (-\infty, +\infty)$, což odpovídá nekonečnému počtu oběhů kolem anti-de Sitterova hyperboloidu. Rozbalením kružnice \mathbb{S}^1 a jejím rozšířením na celé \mathbb{R} , nyní již bez použití parametrizace (1.21), dostáváme univerzální pokrývací prostor anti-de Sitterova vesmíru s topologií \mathbb{R}^4 , který již uzavřené časupodobné světočáry neobsahuje.

Užitím parametrizace (1.16) zavedené v případě de Sitterova prostoru získáme zcela analogický konformně plochý tvar metriky anti-de Sitterova prostoročasu, viz (1.17), tedy

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}}{[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})]^2}. \quad (1.23)$$

kde opět $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in (-\infty, +\infty)$ a η je libovolné komplexní číslo, ale nyní $\Lambda < 0$. Tyto souřadnice pokrývají rovněž celý anti-de Sitterův prostoročas kromě souřadnicových singularit \mathcal{U}, \mathcal{V} jako v případě prostoročasu de Sitterova.

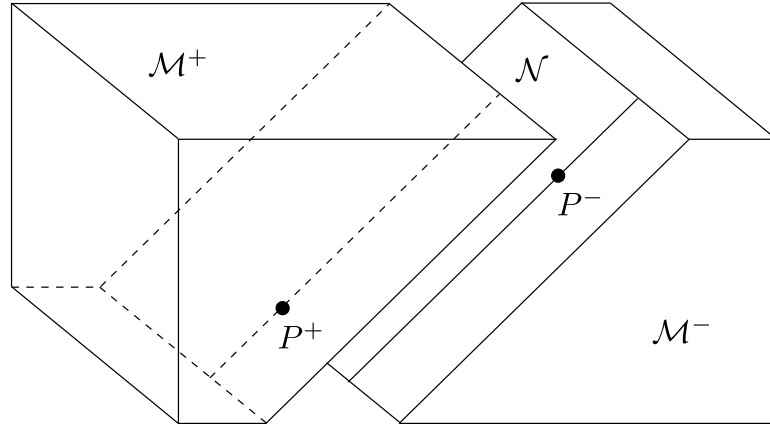
2. Neexpandující impulsní gravitační vlny

Nejprve v podkapitole 2.1 popíšeme Penroseovu [10] „cut and paste“ metodu v nejjednodušším případě neexpandujících impulsních gravitačních vln na pozadí Minkowského prostoročasu a zároveň zavedeme vhodné spojité souřadnice pro takto zkonstruovanou geometrii.

Poté zopakujeme stejnou konstrukci i pro pozadí s nenulovou kosmologickou konstantou, tedy (anti-)de Sitterův vesmír, viz část 2.2.

2.1 Minkowského prostoročas

Rozdělme Minkowského prostoročas podél rovinné světelné nadplochy \mathcal{N} na dvě části \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ , které následně opět spojíme, přičemž ztotožněné body na rozhraní jsou vůči sobě v rámci nadplochy \mathcal{N} posunuty.



Obrázek 2.1: Minkowského prostoročas je podél světelné nadplochy \mathcal{N} rozdělen na části \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- . Obě části jsou poté opět spojeny a body na jejich rozhraní s jistým posunutím ztotožněny.

Minkowského prostoročas popíšeme standardními dvojitými nulovými souřadnicemi (1.7), tedy

$$ds^2 = -2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta} . \quad (2.1)$$

Nyní definujme transformaci

$$\mathcal{U} = U , \quad \mathcal{V} = V - H + UH_{,Z}H_{,\bar{Z}} , \quad \eta = Z - UH_{,\bar{Z}} , \quad (2.2)$$

kde $H = H(Z, \bar{Z})$ je libovolná reálná funkce prostorových souřadnic. Tato transformace převede (2.1) na tvar

$$ds^2 = -2 dU dV + 2 |dZ - U(H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z})|^2 . \quad (2.3)$$

Tato metrika bude reprezentovat poloprostor \mathcal{M}^+ pro $U > 0$ výsledného impulsního prostoročasu, přičemž nadplocha $U = 0$, odpovídající $\mathcal{U} = 0$, bude společnou nulovou nadplochou \mathcal{N} .

V části prostoročasu s $U < 0$, tedy \mathcal{M}^- , použijeme přímo metriku (2.1) s triviálním přeznačením

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V, \quad \eta = Z, \quad (2.4)$$

kteřou dostaneme také přímo z (2.2) pro $H = 0$. Nakonec spojením \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ přes nulovou nadplochu \mathcal{N} získáváme globální metriku tvaru

$$ds^2 = -2 dU dV + 2 |dZ - U\Theta(U)(H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}\bar{Z}} d\bar{Z})|^2, \quad (2.5)$$

kde $\Theta(U)$ je Heavisideova skoková funkce. Tato metrika je spojitá podél celé nadplochy $U = 0$. Případná nespojitost se může objevit pouze v místech singularit funkce H . Nespojitosti v derivacích metriky v místě nadplochy \mathcal{N} vedou k impulsním složkám tenzoru křivosti, přičemž v místech $U \neq 0$ je prostoročas plochý. Metrika (2.5) tedy popisuje rovinnou neexpandující impulsní vlnu šířící se na Minkowského pozadí.

Transformace souřadnic (2.2), spolu s výše provedenou triviální transformací (2.4), mohou být zkombinovány a explicitně vyjádřeny ve tvaru

$$\mathcal{U} = U, \quad \mathcal{V} = V - H\Theta(U) + U\Theta(U)H_{,Z}H_{,\bar{Z}}, \quad \eta = Z - U\Theta(U)H_{,\bar{Z}}, \quad (2.6)$$

který je nespojitý na $\mathcal{U} = 0$, konkrétně

$$(\mathcal{U} = 0, \mathcal{V}, \eta, \bar{\eta})_{\mathcal{M}^-} \equiv (\mathcal{U} = 0, \mathcal{V} + H(\eta, \bar{\eta}), \eta, \bar{\eta})_{\mathcal{M}^+}, \quad (2.7)$$

což odpovídá obecné *Penroseově podmínce* pro napojení částí prostoročasu \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ s příslušným posunutím daným libovolnou reálnou funkcí $H(\eta, \bar{\eta})$.

Pokud bychom formálně dosadili inverzi kombinované transformace (2.6) do spojitě metriky (2.5), dostaneme¹

$$ds^2 = -2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} - 2H(\eta, \bar{\eta})\delta(\mathcal{U})d\mathcal{U}^2 + 2 d\eta d\bar{\eta}, \quad (2.8)$$

tedy explicitní tvar impulsní rovinné vlny, ve kterém je dobře zřetelný impuls úměrný Diracově δ -funkci nacházející se na světelné nadploše $\mathcal{U} = 0$. Tento tvar metriky lze také chápat jako limitní případ obecných *pp*-vlnových řešení, v nichž uvažujeme profil vlny limitně se blížící δ -funkci. Toto odpovídá konstrukci neexpandující impulsní vlny jako limity takzvaných sendvičových vln.

Na přítomnost impulsní vlny dále ukazují jediné nenulové složky tenzoru křivosti plynoucí z metriky (2.8), tedy

$$\Psi_4 = H_{,\eta\eta} \delta(\mathcal{U}), \quad \Phi_{22} = H_{,\eta\bar{\eta}} \delta(\mathcal{U}). \quad (2.9)$$

Aichelburg a Sexl (1971) [11] získali konkrétní tvar metriky (2.8)

$$ds^2 = -2d\mathcal{U}d\mathcal{V} - 4\mu \log(\eta\bar{\eta})\delta(\mathcal{U})d\mathcal{U}^2 + 2d\eta d\bar{\eta}, \quad (2.10)$$

limitou boostu Schwarzschildovy černé díry hmotnosti m . Zatímco se rychlost blížila k rychlosti světla ($v \rightarrow 1$), hmotnost se blížila k nule ($m \rightarrow 0$) a veličina $\mu = m(1 - v^2)^{-1/2}$ byla držena konstantní.

¹Průhlednější a explicitně realizovatelný je však obrácený postup. Provedením úplné transformace (2.6), tj. včetně distribučních členů, metriky (2.8) dostaneme spojitý tvar (2.5).

Lze ukázat, že se Einsteinovy rovnice pole pro metriku (2.8) redukují na dvou-
rozměrnou Poissonovu rovnici

$$\Delta H = 2H_{,\eta\bar{\eta}} = 8\pi T_{\mathcal{U}\mathcal{U}} , \quad (2.11)$$

čehož využili Griffiths a Podolský [23] ke konstrukci vln odpovídajících částicím s obecnou multipólovou strukturou, které se pohybují rychlostí světla. Další speciální případy neexpandujících impulsních vln byly získány limitami boostu Kerrových, Kerrových-Newmanových a Weylových řešení.

2.2 (Anti-)de Sitterův prostoročas

Stejný postup jako v případě Minkowského pozadí, tedy metoda „cut and paste“ a následné nalezení spojitých souřadnic, může být použit i ke konstrukci neexpandujících vln v de Sitterově a anti-de Sitterově vesmíru. V tomto případě budeme vycházet z konformně plochého tvaru metriky prostoročasu konstantní křivosti (1.17), tedy

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} + 2 d\eta d\bar{\eta}}{[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})]^2} . \quad (2.12)$$

Zcela analogicky nyní provedeme transformaci souřadnic (2.6) ve *dvou částech* prostoročasu oddělených světelnou nadplochou $\mathcal{U} = 0$, což zaručuje splnění Penroseovy napojovací podmínky (2.7). Příslušná spojitá metrika pak má tvar

$$ds^2 = \frac{-2 dU dV + 2 |dZ - U\Theta(U)(H_{,Z\bar{Z}} dZ + H_{,\bar{Z}Z} d\bar{Z})|^2}{[1 - \frac{1}{6}\Lambda(UV - Z\bar{Z} - U\Theta(U)G)]^2} , \quad (2.13)$$

kde $G = H - ZH_{,Z} - \bar{Z}H_{,\bar{Z}}$. Pro $\Lambda = 0$ tak dostáváme již známou metriku (2.5) popisující neexpandující impulsní vlny v Minkowského prostoročase. Zpětným dosazením inverzních vztahů pro souřadnicovou transformaci (2.6) do této spojitě metriky bychom dostali metriku v distribučním tvaru s explicitním impulsním členem, konkrétně

$$ds^2 = \frac{-2 d\mathcal{U} d\mathcal{V} - 2H(\eta, \bar{\eta}) \delta(\mathcal{U}) d\mathcal{U}^2 + 2 d\eta d\bar{\eta}}{[1 - \frac{1}{6}\Lambda(\mathcal{U}\mathcal{V} - \eta\bar{\eta})]^2} , \quad (2.14)$$

která se pro $\Lambda = 0$ opět redukuje na již známý tvar (2.8) z výše diskutovaného případu neexpandující impulsní vlny v Minkowského prostoročase. Ještě poznamenejme, že tuto metriku lze opět získat jako limitu vhodných neimpulsních radiačních řešení. Podrobnější reference viz [5].

Tak jako můžeme de Sitterův a anti-de Sitterův vesmír popisovat jako 4-hyperboloid vnořený do pětirozměrného plochého prostoročasu, tedy (1.11) s (1.12) respektive (1.19) s (1.20), můžeme také (anti-)de Sitterův prostoročas s neexpandující impulsní vlnou chápat jako 4-hyperboloid vnořený do plochého pětirozměrného prostoročasu s neexpandujícím impulsem,

$$ds^2 = -2 d\tilde{U} d\tilde{V} + \mathcal{H}(Z_2, Z_3, Z_4) \delta(\tilde{U}) d\tilde{U}^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + \epsilon dZ_4^2 , \quad (2.15)$$

kde jsme zavedli nulové souřadnice

$$\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 + Z_1) , \quad \tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_0 - Z_1) . \quad (2.16)$$

Označíme-li $a = \sqrt{3/(\epsilon\Lambda)}$, kde $\epsilon = \text{sgn } \Lambda$, a užitíme čtyřrozměrnou parametrizaci

$$\tilde{U} = \frac{\mathcal{U}}{\Omega}, \quad \tilde{V} = \frac{\mathcal{V}}{\Omega}, \quad Z_2 + iZ_3 = \frac{\sqrt{2}\eta}{\Omega}, \quad Z_4 = a \left(\frac{2}{\Omega} - 1 \right), \quad (2.17)$$

pak lze převést metriku (2.15) do čtyřrozměrného konformně plochého tvaru (2.14). Přitom zde zavádíme Ω jako označení konformního faktoru

$$\Omega = 1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V}). \quad (2.18)$$

Přechod k reálným prostorovým souřadnicím x, y vztahem $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$, viz (1.6), navíc vede k identifikaci

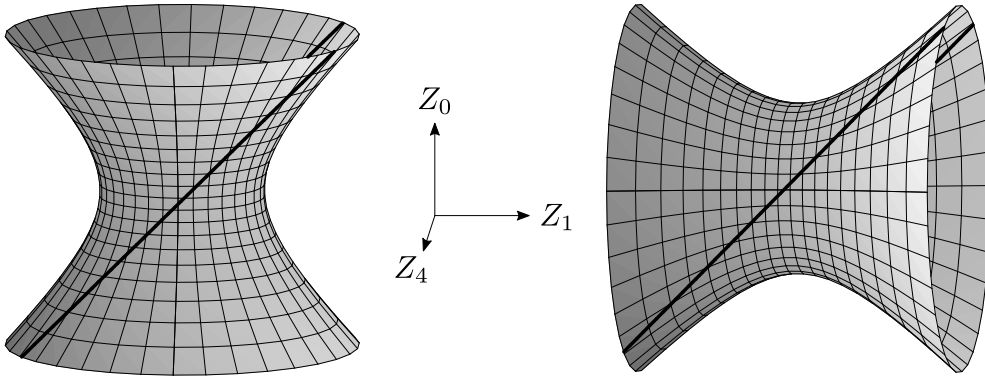
$$Z_2 + iZ_3 = \frac{x + iy}{\Omega}, \quad \Omega = 1 + \frac{1}{12}\Lambda(x^2 + y^2 - 2\mathcal{U}\mathcal{V}). \quad (2.19)$$

Funkce H respektive \mathcal{H} , vystupující v parametrizacích (2.14) a (2.15), které popisují vzájemnou identifikaci bodů na světelné nadploše impulsní vlny $\tilde{U} = 0 = \mathcal{U}$ spolu pak souvisejí vztahem

$$\mathcal{H} = \frac{2H}{1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta}}. \quad (2.20)$$

V kontextu pětirozměrného formalismu chápeme neexpandující impulsní vlnu v (anti-)de Sitterově prostoročase jako řez vnořeného 4-hyperboloidu nulovou rovinnou nadplochou $\tilde{U} = 0$. Rovnici tohoto řezu získáme prostým dosazením podmínky $\tilde{U} = 0$ do rovnice 4-hyperboloidu (1.11) respektive (1.19), tedy

$$Z_2^2 + Z_3^2 + \epsilon Z_4^2 = \epsilon a^2. \quad (2.21)$$



Obrázek 2.2: Znázornění neexpandujících impulsních vln v (anti-)de Sitterově prostoročase pomocí řezů příslušných hyperboloidů světelnou rovinou $Z_0 - Z_1 = 0$. Impulsní vlny jsou vykresleny jako tlusté černé světelné čáry.

Nyní se podívejme na geometrickou povahu neexpandující impulsní vlnoplochy v závislosti na znaménku ϵ kosmologické konstanty Λ .

Uvažujeme-li de Sitterův prostoročas, pro nějž platí $\Lambda > 0$ a tedy $\epsilon = 1$, dostáváme dosazením do (2.21) rovnici impulsní nadplochy ve tvaru $Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = a^2$. Vlna má tedy evidentně podobu sféry konstantního povrchu $4\pi a^2 = 12\pi/\Lambda$ a je

tedy dobře patrná její neexpandující povaha. Nadplocha impulsní vlny se navíc shoduje s kosmologickým horizontem de Sitterova prostoročasu, viz podkapitola 1.2. Rovnoběžné čáry na protějších stranách hyperboloidu znázorněné na obrázku 2.2 vlevo, které odpovídají řezu tohoto hyperboloidu rovinou $\tilde{U} = 0$, pak představují trajektorie protilehlých pólů sféry v bodech $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$ a $Z_4 = \pm a$.

V případě anti-de Sitterova prostoročasu je $\Lambda < 0$, tedy $\epsilon = -1$, a proto dosazením do (2.21) získáme rovnici hyperboloidu $Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = -a^2$. Čára na čelní straně anti-de Sitterova 4-hyperboloidu vykreslená na obrázku 2.2 vpravo odpovídající řezu světelnou nadplochou nyní představuje trajektorii bodu $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$, $Z_4 = \pm a$, který se pohybuje z jedné strany prostoročasu na druhou. Nulová čára na protější straně, kde $Z_4 = -a$, je pak kvůli cykličnosti času v anti-de Sitterově vesmíru trajektorií téhož bodu pohybujícího se v opačném směru.

Jediné nenulové složky Weylova a Ricciho tensoru pro metriku (2.14) jsou v adaptované tetradě dány vztahy

$$\begin{aligned}\Psi_4 &= \left(1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta}\right)^2 H_{,\eta\eta}\delta(\mathcal{U}) , \\ \Phi_{22} &= \left(1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta\bar{\eta}\right)H_{,\eta\bar{\eta}} + \frac{1}{6}\Lambda(H - \eta H_{,\eta} - \bar{\eta}H_{,\bar{\eta}}) \right] .\end{aligned}\quad (2.22)$$

Tyto vztahy se zjevně redukují na (2.9) pro $\Lambda = 0$. Ryze gravitační impulsní vlny pak dostáváme, pokud

$$(\Delta + \frac{2}{3}\Lambda)\mathcal{H} = 0 , \quad (2.23)$$

kde Δ představuje dvourozměrný Laplaceův operátor působící na ploše impulsu. Toho bylo opět využito (Podolský, Griffiths [24]) ke konstrukci neexpandujících vln generovaných částicemi s obecnou multipólovou strukturou pohybujícími se rychlostí světla.

Stejně jako v případě plochého pozadí lze také neexpandující impulsní vlny v (anti-)de Sitterově prostoročase zkonstruovat jako limitu boostu částic k rychlosti světla za použití vhodné grupy izometrií. Tuto konstrukci jako první provedli Hotta a Tanaka v roce 1993, viz práce [12], analogickým postupem jako dříve Aichelburg a Sexl v případě nulové kosmologické konstanty. Ještě poznamenejme, že v de Sitterově prostoročase se pak takto boostované částice nachází na opačných pólech sféry reprezentující impuls, která zároveň odpovídá kosmologickému horizontu.

3. Geodetiky v neexpandujících impulsních vlnách

Geodetiky v Minkowského prostoročase s neexpandujícími impulsními vlnami byly diskutovány v mnoha fyzikálních i ryze matematických pracích. Příslušné explicitní rovnice totiž obsahují problematické nelineární distribuční členy, které však nejsou dobře definované v klasické teorii distribucí a k jejichž rigoróznímu zvládnutí je užitečné aplikovat pokročilé regularizační metody Colombeauových algeber.

Překvapivě matematicky přístupnější rovnice geodetiky poskytují prostoročasy s neexpandujícími impulsními vlnami na kosmologických pozadích de Sitterova ($\Lambda > 0$) a anti-de Sitterova ($\Lambda < 0$) vesmíru. Tento případ shrneme v následující podkapitole 3.1.

Alternativou ke studiu kompletních rovnic je oprávněný předpoklad existence C^1 geodetik ve spojitých souřadnicích (2.13) a analýza refrakčních efektů na impulsním rozhraní dvou poloprostorů konstantní křivosti, viz podkapitola 3.2.

Cílem závěrečné podkapitoly 3.3 je porovnání těchto komplementárních postupů jejichž výsledky byly shrnuty v podkapitolách 3.1 a 3.2.

3.1 Řešení rovnice geodetiky pro $\Lambda \neq 0$

Pro nenulovou kosmologickou konstantu se ukazuje výhodné užít pětirozměrný formalismus, tedy vnoření 4-hyperboloidu (1.11), respektive (1.19), do plochého pětirozměrného prostoročasu s impulsní vlnou (2.15), viz Podolský a Ortaggio [6]. Složky rovnice geodetiky zde mají tvar

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{U}} &= -\frac{1}{3}\Lambda U e , \\ \ddot{\tilde{V}} - \frac{1}{2}\mathcal{H}\delta'(\tilde{U})\dot{\tilde{U}}^2 - \mathcal{H}_{,p}\dot{Z}_p\delta(\tilde{U})\dot{\tilde{U}} &= -\frac{1}{3}\Lambda\tilde{V}[e + \frac{1}{2}\mathcal{G}\delta(\tilde{U})\dot{\tilde{U}}^2] , \\ \ddot{Z}_k - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{,k}\delta'(\tilde{U})\dot{\tilde{U}}^2 &= -\frac{1}{3}\Lambda Z_k[e + \frac{1}{2}\mathcal{G}\delta(\tilde{U})\dot{\tilde{U}}^2] , \\ \ddot{Z}_4 - \frac{1}{2}\epsilon\mathcal{H}_{,4}\delta'(\tilde{U})\dot{\tilde{U}}^2 &= -\frac{1}{3}\Lambda Z_4[e + \frac{1}{2}\mathcal{G}\delta(\tilde{U})\dot{\tilde{U}}^2] , \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde indexy nabývají hodnot $p = 2, 3, 4$, respektive $k = 2, 3$, a parametr e je spojen s charakterem geodetiky, tedy $e = 0$ pro světelnou, $e = -1$ pro časupodobnou a $e = +1$ pro prostorupodobnou geodetiku. Navíc \mathcal{G} označuje

$$\mathcal{G} = Z_p\mathcal{H}_{,p} - \mathcal{H} , \quad (3.2)$$

kde je užita Einsteinova sumační konvence v indexu p .

Jelikož rovnice pro \tilde{U} neobsahuje žádný distribuční člen ani závislost na jiné souřadnici, bude její řešení všude hladkou funkcí afinního parametru τ , přičemž uvažujeme impuls lokalizovaný na $\tau = 0$. Toto řešení lze dle hodnoty součinu ϵe psát explicitně ve tvaru

$$\tilde{U} = \tau , \quad \tilde{U} = a\dot{\tilde{U}}^0 \sinh \frac{\tau}{a} , \quad \tilde{U} = a\dot{\tilde{U}}^0 \sin \frac{\tau}{a} , \quad (3.3)$$

postupně pro $\epsilon\epsilon = 0$, $\epsilon\epsilon < 0$ a $\epsilon\epsilon > 0$. Kompletní geodetiku můžeme nyní parametrizovat přímo pomocí souřadnice \tilde{U} namísto parametru τ . Pro řešení zbývajících rovnic geodetiky poté dostáváme

$$Z_p(\tilde{U}) = Z_p^0 \sqrt{1 - \frac{1}{3}\Lambda e \frac{\tilde{U}^2}{\dot{\tilde{U}}^2}} + \frac{\dot{Z}_p^0}{\dot{\tilde{U}}^0} \tilde{U} + A_p \Theta(\tilde{U}) \tilde{U}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{U}) = \tilde{V}^0 \sqrt{1 - \frac{1}{3}\Lambda e \frac{\tilde{U}^2}{\dot{\tilde{U}}^2}} + \frac{\dot{\tilde{V}}^0}{\dot{\tilde{U}}^0} \tilde{U} + B \Theta(\tilde{U}) \sqrt{1 - \frac{1}{3}\Lambda e \frac{\tilde{U}^2}{\dot{\tilde{U}}^2}} \\ + \frac{\dot{Z}_k^0 A_k + \epsilon \dot{Z}_4^0 A_4}{\dot{\tilde{U}}^0} \Theta(\tilde{U}) \tilde{U} + C \Theta(\tilde{U}) \tilde{U}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

přičemž použité koeficienty jsou dány jako

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2} [\mathcal{H}_{i,k} - \frac{1}{3}\Lambda Z_k^0 \mathcal{G}_i], \\ A_4 &= \frac{1}{2} [\epsilon \mathcal{H}_{i,4} - \frac{1}{3}\Lambda Z_4^0 \mathcal{G}_i], \\ B &= \frac{1}{2} \mathcal{H}_i, \\ C &= \frac{1}{8} [\mathcal{H}_{i,2}^2 + \mathcal{H}_{i,3}^2 + \epsilon \mathcal{H}_{i,4}^2 + \frac{1}{3}\Lambda (Z_p^0 \mathcal{H}_{i,p})^2], \end{aligned} \quad (3.6)$$

kde označením \mathcal{H}_i rozumíme vyčíslení v okamžiku průchodu geodetiky impulsem, tedy $\mathcal{H}_i \equiv \mathcal{H}(Z_p(0)) = \mathcal{H}(Z_p^0)$. Integrační konstanty, značené nulou v horním indexu, jsou navíc svázány třemi následujícími podmínkami

$$-2\dot{\tilde{U}}^0 \dot{\tilde{V}}^0 + (\dot{Z}_2^0)^2 + (\dot{Z}_3^0)^2 + \epsilon (\dot{Z}_4^0)^2 = e, \quad (3.7)$$

$$-2\tilde{U}^0 \tilde{V}^0 + (Z_2^0)^2 + (Z_3^0)^2 + \epsilon (Z_4^0)^2 = \epsilon a^2, \quad (3.8)$$

$$-\tilde{U}^0 \dot{\tilde{V}}^0 - \dot{\tilde{U}}^0 \tilde{V}^0 + Z_2^0 \dot{Z}_2^0 + Z_3^0 \dot{Z}_3^0 + \epsilon Z_4^0 \dot{Z}_4^0 = 0, \quad (3.9)$$

kde první z podmínek představuje normalizaci afinního parametru, druhá odpovídá vnoření 4-hyperboloidu do pětirozměrného prostoročasu a třetí podmínka je derivací druhé.

Formálním dosazením $\Lambda = 0$ a vynecháním souřadnice Z_4 se výše popsané řešení redukuje na geodetiku v Minkowského prostoročase s neexpandujícími impulsními vlnami získané Kunzingerem a Steinbauerem rigorózním postupem za použití Colombeauových algeber viz [25].

3.2 Podmínky napojení na impulsním rozhraní

Alternativního výsledku dosáhli Podolský, Sämann, Steinbauer a Švarc v článku [7] z roku 2014. S využitím Filippovova konceptu řešení obyčejných diferenciálních rovnic zde byla dokázána existence a jednoznačnost řešení rovnic geodetiky. Poznamenejme, že klíčovou ingrediencí tohoto důkazu je lokální Lipschitzovská spojitost metrických funkcí prostoročasů konstantní křivosti s neexpandujícími impulsními vlnami vyjádřených ve formě (2.13). Právě tento výsledek ospravedlňuje explicitní konstrukci podmínek pro napojování geodetik v místě světelné nadplochy impulsní vlny. Tyto výsledky nyní shrneme.

Kromě standardních reálných souřadnic (1.6) pro konformně plochá pozadí, je také vhodné zavést nové reálné souřadnice X, Y v případě spojitého tvaru

metriky (2.13). Konkrétně tedy

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY), \quad \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY). \quad (3.10)$$

Odpovídající reálná verze transformace (2.6) převádějící metriku prostoročasu konstantní křivosti s impulsní vlnou typu (2.8) na spojitý tvar je následně

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= U, \\ \mathcal{V} &= V + \Theta(U)H + \frac{1}{2}U_+ [(H_{,X})^2 + (H_{,Y})^2], \\ x &= X + U_+ H_{,X}, \\ y &= Y + U_+ H_{,Y}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde

$$U_+ \equiv U \Theta(U) = \begin{cases} 0 & \text{pro } U \leq 0, \\ U & \text{pro } U \geq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Právě *existence a jednoznačnost* řešení rovnice geodetiky ve spojitých souřadnicích spolu s transformací (3.11) umožňují vyjádřit vztahy mezi polohami, respektive rychlostmi, na impulsním rozhraní v přirozených konformně plochých souřadnicích pozadí konstantní křivosti, podrobnosti viz [7]. Zmiňované podmínky pro napojení geodetiky v místě impulsu pak předepisují vztah interakčních *poloh před a za* impulsem jako

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i^+ &= 0 = \mathcal{U}_i^-, \\ \mathcal{V}_i^+ &= \mathcal{V}_i^- + H_i, \\ x_i^+ &= x_i^-, \\ y_i^+ &= y_i^-, \end{aligned} \quad (3.13)$$

a pro příslušné *složky rychlosti* platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}_i^+ &= \dot{\mathcal{U}}_i^-, \\ \dot{\mathcal{V}}_i^+ &= \dot{\mathcal{V}}_i^- + H_{i,X} \dot{x}_i^+ + H_{i,Y} \dot{y}_i^+ - \frac{1}{2} [(H_{i,X})^2 + (H_{i,Y})^2] \dot{\mathcal{U}}_i^+, \\ \dot{x}_i^+ &= \dot{x}_i^- + H_{i,X} \dot{\mathcal{U}}_i^+, \\ \dot{y}_i^+ &= \dot{y}_i^- + H_{i,Y} \dot{\mathcal{U}}_i^+. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dolní index i zde opět označuje hodnoty vyčíslené v okamžiku průchodu geodetiky impulsem lokalizovaným na $U = 0$, v případě derivace tedy zkratkou $H_{i,X}$ rozumíme $H_{,X}|_{U=0}$. Horní indexy $+$ a $-$ dále specifikují poloprostor, z kterého geodetika k impulsu přichází, respektive do kterého pokračuje. Konkrétně $+$ značí veličinu vyčíslenou v $U = 0_+$, tedy oblast „před impulsem“ s hodnotou $U > 0$. Naopak index $-$ odpovídá hodnotě spočtené v $U = 0_-$, to jest „za impulsem“, tedy v poloprostoru $U < 0$.

Z pohledu porovnání úplného řešení rovnic geodetiky (3.4) a (3.5) a refrakčních formulí (3.13) a (3.14) je poněkud užitečnější přechod k pětirozměrnému formalismu s využitím transformace souřadnic (2.17), která dává do souvislosti metriky (2.15) a (2.14). Vyjádříme-li z (2.19) konformní faktor v okamžiku interakce, dostáváme

$$\Omega_i^\pm = 1 + \frac{1}{12} \Lambda [(x_i^\pm)^2 + (y_i^\pm)^2]. \quad (3.15)$$

Použitím napojovacích podmínek (3.13) pro složky polohy x a y okamžitě dostáváme rovnost $\Omega_i^+ = \Omega_i^-$ a dále si tedy vystačíme pouze s označením Ω_i .

V pětirozměrných souřadnicích mají vztahy (3.13) pro polohu testovací částice před a za impulsem tvar

$$\tilde{U}_i^+ = 0 = \tilde{U}_i^-, \quad \tilde{V}_i^+ = \tilde{V}_i^- + \frac{H_i}{\Omega_i}, \quad Z_{pi}^+ = Z_{pi}^-, \quad (3.16)$$

který reprodukuje Penroseovy podmínky navázání (2.7) v pětirozměrném formalismu. Než zapíšeme obdobu vztahů (3.14) pro komponenty pětirozměrné rychlosti, je třeba si uvědomit, že pro derivaci konformního faktoru (2.19) platí

$$\dot{\Omega}_i^+ = \dot{\Omega}_i^- - \frac{1}{2\epsilon a^2} G_i \Omega_i \dot{U}_i^+, \quad (3.17)$$

kde

$$G_i \equiv G_i^\pm = H_i - H_{i,X} \Omega_i Z_{2i}^\pm - H_{i,Y} \Omega_i Z_{3i}^\pm. \quad (3.18)$$

Podmínky napojení složek rychlosti geodetiky procházející impulsem pak nabývají tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{U}}_i^+ &= \dot{\tilde{U}}_i^-, \\ \dot{\tilde{V}}_i^+ &= \dot{\tilde{V}}_i^- - 2p \dot{\tilde{U}}_i^+ + H_{i,X} \dot{Z}_{2i}^+ + H_{i,Y} \dot{Z}_{3i}^+ + \frac{G_i}{2a} \dot{Z}_{4i}^+, \\ \dot{Z}_{2i}^+ &= \dot{Z}_{2i}^- + \dot{\tilde{U}}_i^+ \left(H_{i,X} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2} Z_{2i}^+ \right), \\ \dot{Z}_{3i}^+ &= \dot{Z}_{3i}^- + \dot{\tilde{U}}_i^+ \left(H_{i,Y} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2} Z_{3i}^+ \right), \\ \dot{Z}_{4i}^+ &= \dot{Z}_{4i}^- + \dot{\tilde{U}}_i^+ \frac{G_i}{\epsilon a \Omega_i}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde

$$p \equiv \frac{1}{4} \left[(H_{i,X})^2 + (H_{i,Y})^2 - \frac{G_i}{\epsilon a^2} \left(\tilde{V}_i^+ - \frac{H_i}{\Omega_i} \right) \right]. \quad (3.20)$$

Pro úplnost ještě uveďme vyjádření podmínek pro napojení geodetik v pětirozměrných souřadnicích (1.12), respektive (1.20). Pro polohy platí

$$Z_{0i}^- = Z_{0i}^+ - \frac{H_i}{\sqrt{2}\Omega_i}, \quad Z_{1i}^- = Z_{1i}^+ + \frac{H_i}{\sqrt{2}\Omega_i}, \quad Z_{pi}^- = Z_{pi}^+, \quad (3.21)$$

a pro rychlosti

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{0i}^- &= (1+p)\dot{Z}_{0i}^+ + p\dot{Z}_{1i}^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}(H_{i,X}\dot{Z}_{2i}^+ + H_{i,Y}\dot{Z}_{3i}^+ + \frac{G_i}{2a}\dot{Z}_{4i}^+), \\ \dot{Z}_{1i}^- &= -p\dot{Z}_{0i}^+ + (1-p)\dot{Z}_{1i}^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}(H_{i,X}\dot{Z}_{2i}^+ + H_{i,Y}\dot{Z}_{3i}^+ + \frac{G_i}{2a}\dot{Z}_{4i}^+), \\ \dot{Z}_{2i}^- &= \dot{Z}_{2i}^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Z}_{0i}^+ + \dot{Z}_{1i}^+)(H_{i,X} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2}\dot{Z}_{2i}^+), \\ \dot{Z}_{3i}^- &= \dot{Z}_{3i}^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Z}_{0i}^+ + \dot{Z}_{1i}^+)(H_{i,Y} + \frac{G_i}{2\epsilon a^2}\dot{Z}_{3i}^+), \\ \dot{Z}_{4i}^- &= \dot{Z}_{4i}^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Z}_{0i}^+ + \dot{Z}_{1i}^+) \frac{G_i}{\epsilon a \Omega_i}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde p je nyní dáno vztahem

$$p \equiv \frac{1}{4} \left[(H_{i,X})^2 + (H_{i,X})^2 - \frac{\sqrt{2}G_i}{\epsilon a^2} \left(Z_{1i}^+ - \frac{H_i}{\sqrt{2}\Omega_i} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Výše uvedené napojovací podmínky lze slovně popsat tak, že testovací částice může být v místě impulsu urychlena v libovolném směru krom \mathcal{U} , respektive \tilde{U} . Navíc dojde ke skoku ve směru souřadnice \mathcal{V} , respektive \tilde{V} , tedy podél nulové nadplochy, přesně dle Penroseovy podmínky (2.7).

3.3 Kompatibilita řešení rovnic geodetiky a podmínek napojení

V této podkapitole ověříme, že prezentované řešení rovnic geodetiky (3.4) a (3.5) v (anti-)de Sitterově prostoročase s neexpandující impulsní vlnou získané použitím pětirozměrného formalismu splňuje refrakční podmínky (3.16) a (3.19) odvozené rigorózními analytickými postupy na základě Filipovova konceptu řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Toto ověření spočívá v dosazení interakční polohy určující impuls, tedy $\tilde{U} = 0$, do úplné geodetiky, přesněji ve vyčíslení poloh a rychlostí těsně *po* ($U = 0_-$) a *před* ($U = 0_+$) průchodu geodetiky impulsem. Příslušné výrazy se však zvláště v případě podmínek pro napojování rychlostí stávají značně netriviálními z důvodu použití několika systémů souřadnic a množství vystupujících členů.

Nejprve ověříme kompatibilitu napojení interakčních poloh. Přímým dosazením $\tilde{U} = 0$ do (3.4) a (3.5) vyjádříme složky polohy v místě impulsu těsně před, respektive po, průchodu geodetiky. Zjevná nespojitost je dána přítomností skokové Θ -funkce v příslušném řešení rovnice geodetiky. Takto tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i^- &= \tilde{V}^0, & Z_{pi}^- &= Z_p^0, \\ \tilde{V}_i^+ &= \tilde{V}^0 + \frac{1}{2}\mathcal{H}_i, & Z_{pi}^+ &= Z_p^0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nyní připomeňme napojovací podmínky pro polohy (3.16),

$$\tilde{U}_i^+ = 0 = \tilde{U}_i^-, \quad \tilde{V}_i^+ = \tilde{V}_i^- + \frac{H_i}{\Omega_i}, \quad Z_{pi}^+ = Z_{pi}^-. \quad (3.25)$$

Je zřejmé, že podmínka pro \tilde{U}_i je splněna automaticky díky spojitosti souřadnice \tilde{U} , čehož bylo ostatně využito již v podkapitole 3.1 při konstrukci řešení rovnice geodetiky.

Z vyjádření (3.24) rovněž vidíme, že podmínky pro Z_{pi} jsou zjevně splněny. Pro ověření napojení v souřadnici \tilde{V}_i zbývá uvážit vztah (2.20) mezi funkcemi H a \mathcal{H} charakterizujícími impulsní vlnu, které vystupují v metrikách (2.14) a (2.15), a vyčíslit ho v okamžiku interakce s užitím (2.18), konkrétně $\Omega_i = 1 + \frac{1}{6}\Lambda\eta_i\bar{\eta}_i$. Takto dostaneme

$$\frac{1}{2}\mathcal{H}_i = \frac{H_i}{\Omega_i}, \quad (3.26)$$

a tedy podmínka pro navázání \tilde{V}_i je tímto také ověřena.

Dále přejdeme k ověření podmínek napojení pro složky rychlosti. Nejprve snadno nahlédneme, že první z podmínek (3.19) je triviálně splněna, neboť rovněž první derivace komponenty $\tilde{U}(\tau)$ v úplném řešení, viz (3.3), je spojitou funkcí afinního parametru, potom platí

$$\dot{\tilde{U}}_i^- = \dot{\tilde{U}}^0, \quad \dot{\tilde{U}}_i^+ = \dot{\tilde{U}}^0, \quad \text{tedy} \quad \dot{\tilde{U}}_i^+ = \dot{\tilde{U}}_i^-. \quad (3.27)$$

Dále ověříme kompatibilitu pro \dot{Z}_2 , respektive \dot{Z}_3 . Tyto složky rychlosti vystupují zcela symetricky, proto stačí provést porovnání jen pro jednu z nich, například \dot{Z}_2 . Derivujme tedy úplné řešení rovnice geodetiky pro $Z_2(\tilde{U})$, viz (3.4), podle parametru \tilde{U} a vyjádřeme tuto derivaci těsně před ($\tilde{U} = 0_-$) a po ($\tilde{U} = 0_+$) průchodu impulsem. S užitím prvních dvou rovností pro $\dot{\tilde{U}}^0$ v (3.27), tedy $\dot{\tilde{U}}^0 = \dot{\tilde{U}}_i^-$ a $\dot{\tilde{U}}^0 = \dot{\tilde{U}}_i^+$, takto dostaneme

$$\dot{Z}_{2i}^- = \dot{Z}_2^0, \quad \dot{Z}_{2i}^+ = \dot{Z}_2^0 + A_2 \dot{\tilde{U}}_i^+. \quad (3.28)$$

Tyto výrazy upravíme dosazením koeficientu A_2 z (3.6) a \mathcal{G}_i z (3.2). Roznásobením a vytknutím získáme

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{2i}^- &= \dot{Z}_2^0, \\ \dot{Z}_{2i}^+ &= \dot{Z}_2^0 + \dot{\tilde{U}}_i^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i[Z_{2i}^+] + \mathcal{H}_{i,2} \left[\frac{3}{\Lambda} - (Z_{2i}^+)^2 \right] + \mathcal{H}_{i,3}[-Z_{2i}^+ Z_{3i}^+] + \mathcal{H}_{i,4}[-Z_{2i}^+ Z_{4i}^+] \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

kde jsme také použili výše ověřenou rovnost $Z_p^0 = Z_{pi}^\pm$, viz (3.24). Tyto vztahy chceme porovnat s příslušnou podmínkou (3.19) upravenou užitím $\frac{\Lambda}{6} = \frac{1}{2\epsilon a^2}$, tedy

$$\dot{Z}_{2i}^+ = \dot{Z}_{2i}^- + \dot{\tilde{U}}_i^+ \frac{\Lambda}{6} (2\epsilon a^2 H_{i,X} + G_i Z_{2i}^+), \quad (3.30)$$

kde

$$G_i = H_i - H_{i,X} \Omega_i Z_{2i}^\pm - H_{i,Y} \Omega_i Z_{3i}^\pm. \quad (3.31)$$

V těchto výrazech však vystupuje funkce H charakterizující impuls ve spojitých souřadnicích (U, V, X, Y) a její derivace dle X a Y . Nyní je tedy třeba tyto členy vyjádřit pomocí funkce \mathcal{H} a jejich derivací vzhledem k pětirozměrným souřadnicím. Nejprve proto uijeme vztah (2.20) mezi H a \mathcal{H} , tedy

$$H = \frac{1}{2} \mathcal{H}(Z_2, Z_3, Z_4) \Omega_i(x, y), \quad (3.32)$$

a transformační vztahy určující složení souřadnic jsou (2.19) a (3.11). Nyní můžeme formálně vyjádřit hledané derivace vyčíslené v okamžiku interakce $U = 0$,

$$\begin{aligned} H_{i,X} &= \frac{1}{2} (\mathcal{H}_{i,2} Z_{2i,x} + \mathcal{H}_{i,3} Z_{3i,x} + \mathcal{H}_{i,4} Z_{4i,x}) \Omega_i + \frac{1}{2} \mathcal{H}_i \Omega_{i,x}, \\ H_{i,Y} &= \frac{1}{2} (\mathcal{H}_{i,2} Z_{2i,y} + \mathcal{H}_{i,3} Z_{3i,y} + \mathcal{H}_{i,4} Z_{4i,y}) \Omega_i + \frac{1}{2} \mathcal{H}_i \Omega_{i,y}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

kde jsme využili toho, že $Z_{p,\nu}|_{U=0} = 0$, viz (2.17), a že dle (3.11) platí

$$\begin{aligned} x_{,X}|_{U=0} &= 1, & y_{,X}|_{U=0} &= 0, & \mathcal{U}_{,X}|_{U=0} &= 0, \\ x_{,Y}|_{U=0} &= 0, & y_{,Y}|_{U=0} &= 1, & \mathcal{U}_{,Y}|_{U=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Derivace pětirozměrných souřadnic Z_p , a konformního faktoru Ω , podle souřadnic x a y snadno vyjádříme ze vztahů (2.19),¹

$$\begin{aligned} Z_{2i,x} &= -\frac{\Lambda x_i^2}{6\Omega_i^2} + \frac{1}{\Omega_i}, & Z_{3i,x} &= -\frac{\Lambda x_i y_i}{6\Omega_i^2}, & Z_{4i,x} &= -\frac{a\Lambda x_i}{3\Omega_i^2}, & \Omega_{i,x} &= \frac{\Lambda x_i}{6}, \\ Z_{2i,y} &= -\frac{\Lambda x_i y_i}{6\Omega_i^2}, & Z_{3i,y} &= -\frac{\Lambda y_i^2}{6\Omega_i^2} + \frac{1}{\Omega_i}, & Z_{4i,y} &= -\frac{a\Lambda y_i}{3\Omega_i^2}, & \Omega_{i,y} &= \frac{\Lambda y_i}{6}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Před závěrečným krokem ještě připomeňme vztah svazující parametr a s kosmologickou konstantou Λ ,

$$a = \sqrt{\frac{3}{\epsilon \Lambda}}. \quad (3.36)$$

Nyní postupně dosazujeme do refrakčního vztahu (3.30) z (3.31), (3.33), (3.35), (2.19) až nakonec s užitím (3.36) vyjádříme změnu složky rychlosti \dot{Z}_2 pouze pomocí komponenty \dot{U}_i^+ , funkce \mathcal{H} a jejich derivací podle Z_p a pomocí souřadnic x , y . Po provedení několika drobných zjednodušení dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{2i}^+ &= \dot{Z}_{2i}^- + \dot{U}_i^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i \left[\frac{x_i}{\Omega_i} \right] + \mathcal{H}_{i,2} \left[\frac{3}{\Lambda} \frac{\left(1 + \frac{1}{12}\Lambda(x_i^2 + y_i^2)\right)^2 - \frac{1}{3}\Lambda x_i^2}{\Omega_i^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{H}_{i,3} \left[-\frac{x_i y_i}{\Omega_i^2} \right] + \mathcal{H}_{i,4} \left[-\frac{x_i}{\Omega_i} \frac{a\left(1 - \frac{1}{12}\Lambda(x_i^2 + y_i^2)\right)}{\Omega_i} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

S použitím vztahů (2.19) se nyní již snadno přesvědčíme o rovnosti příslušejících hranatých závorek ve výrazech (3.29) a (3.37). Tím je ověřena kompatibilita napojovací podmínky pro \dot{Z}_2 . Jelikož se výrazy pro \dot{Z}_2 a \dot{Z}_3 se liší pouze záměnou indexů 2 a 3 a souřadnic X a Y , tedy i x a y , není již třeba provádět nezávislé ověření napojovací podmínky pro složku rychlosti \dot{Z}_3 .

Dále ověříme napojovací podmínku pro \dot{Z}_4 . Analogicky jako v předchozím případě dostáváme z řešení rovnice geodetiky (3.4) pro \dot{Z}_4 těsně před a za impulsem

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{4i}^- &= \dot{Z}_4^0, \\ \dot{Z}_{4i}^+ &= \dot{Z}_4^0 + \dot{U}_i^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i[Z_{4i}^+] + \mathcal{H}_{i,2}[-Z_{2i}^+ Z_{4i}^+] + \mathcal{H}_{i,3}[-Z_{3i}^+ Z_{4i}^+] + \mathcal{H}_{i,4} \left[\frac{3}{\epsilon \Lambda} - (Z_{4i}^+)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nyní upravme refrakční vztah (3.19) pro \dot{Z}_4 , tedy

$$\dot{Z}_{4i}^+ = \dot{Z}_{4i}^- + \dot{U}_i^+ \frac{G_i}{\epsilon a \Omega_i}, \quad (3.39)$$

obdobným postupem jako výše. Takto dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{4i}^+ &= \dot{Z}_{4i}^- + \dot{U}_i^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i \left[\frac{a\left(1 - \frac{1}{12}\Lambda(x_i^2 + y_i^2)\right)}{\Omega_i} \right] + \mathcal{H}_{i,2} \left[-\frac{x_i}{\Omega_i} \frac{a\left(1 - \frac{1}{12}\Lambda(x_i^2 + y_i^2)\right)}{\Omega_i} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{H}_{i,3} \left[-\frac{y_i}{\Omega_i} \frac{a\left(1 - \frac{1}{12}\Lambda(x_i^2 + y_i^2)\right)}{\Omega_i} \right] + \mathcal{H}_{i,4} \left[\frac{x_i^2 + y_i^2}{\epsilon \Omega_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

¹Zřejmě přímočařejší postup by byl zpětný přepis vztahů (3.35) užitím pětirozměrných souřadnic.

Rovnost hranatých závorek ve výrazech (3.38) a (3.40) opět dokážeme použitím vztahů (2.19) a (3.36) a několika algebraických úprav. Tímto je platnost napojovací podmínky pro \dot{Z}_4 tedy také dokázána.

Zbývá ukázat platnost napojovací podmínky pro \dot{V} . Opět derivací řešení rovnice geodetiky (3.19) s použitím $\dot{U}_i^+ = \dot{U}^0 = \dot{U}_i^-$ dostáváme

$$\begin{aligned}\dot{V}_i^- &= \dot{V}^0, \\ \dot{V}_i^+ &= \dot{V}^0 + (\dot{Z}_k^0 A_k + \epsilon \dot{Z}_4^0 A_4) + C \dot{U}_i^+.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Druhý z výrazů upravíme tak, že dosadíme ze vztahů (3.29) a (3.38) vyjádření \dot{Z}_p^0 pomocí \dot{Z}_{pi}^+ , a rozepíšeme jako v předchozích případech,

$$\begin{aligned}\dot{V}_i^+ &= \dot{V}^0 + \dot{U}_i^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i^2 \left[-\frac{1}{4} \right] + \mathcal{H}_{i,2}^2 \left[\frac{-3 + \Lambda(Z_{2i}^+)^2}{4\Lambda} \right] + \mathcal{H}_{i,3}^2 \left[\frac{-3 + \Lambda(Z_{3i}^+)^2}{4\Lambda} \right] \right. \\ &\quad + \mathcal{H}_{i,4}^2 \left[\frac{-3\epsilon + \Lambda(Z_{4i}^+)^2}{4\Lambda} \right] + \mathcal{H}_{i,2} H_{i,3} \left[\frac{Z_{2i}^+ Z_{3i}^+}{2} \right] \\ &\quad \left. + \mathcal{H}_{i,2} H_{i,4} \left[\frac{Z_{2i}^+ Z_{4i}^+}{2} \right] + \mathcal{H}_{i,3} H_{i,4} \left[\frac{Z_{3i}^+ Z_{4i}^+}{2} \right] \right\} \\ &\quad + \dot{Z}_{2i}^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i [Z_{2i}^+] + \mathcal{H}_{i,2} \left[\frac{3}{\Lambda} - (Z_{2i}^+)^2 \right] + \mathcal{H}_{i,3} [-Z_{2i}^+ Z_{3i}^+] + \mathcal{H}_{i,4} [-Z_{2i}^+ Z_{4i}^+] \right\} \\ &\quad + \dot{Z}_{3i}^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i [Z_{3i}^+] + \mathcal{H}_{i,2} [-Z_{2i}^+ Z_{3i}^+] + \mathcal{H}_{i,3} \left[\frac{3}{\Lambda} - (Z_{3i}^+)^2 \right] + \mathcal{H}_{i,4} [-Z_{3i}^+ Z_{4i}^+] \right\} \\ &\quad + \dot{Z}_{4i}^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i [\epsilon Z_{3i}^+] + \mathcal{H}_{i,2} [-\epsilon Z_{2i}^+ Z_{4i}^+] + \mathcal{H}_{i,3} [-\epsilon Z_{3i}^+ Z_{4i}^+] + \mathcal{H}_{i,4} \left[\frac{3 - \epsilon \Lambda (Z_{4i}^+)^2}{\Lambda} \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.42)$$

kde jsme pro některé zjednodušující úpravy použili podmínku (3.8), která definuje uvažovaný prostoročas jakožto 4-hyperboloid vnořený do pětirozměrného prostoru. Tato podmínka spolu s (3.36) v okamžiku interakce s impulsem na $\tilde{U} = 0$ nabývá tvaru

$$(Z_{2i}^+)^2 + (Z_{3i}^+)^2 + \epsilon (Z_{4i}^+)^2 = \frac{3}{\Lambda}. \quad (3.43)$$

Dále upravíme odpovídající refrakční vztah v (3.19), tedy

$$\dot{V}_i^+ = \dot{V}_i^- - 2p \dot{U}_i^+ + H_{i,X} \dot{Z}_{2i}^+ + H_{i,Y} \dot{Z}_{3i}^+ + \frac{G_i}{2a} \dot{Z}_{4i}^+, \quad (3.44)$$

kde

$$p \equiv \frac{1}{4} \left[(H_{i,X})^2 + (H_{i,Y})^2 - \frac{G_i}{\epsilon a^2} \left(\tilde{V}_i^+ - \frac{H_i}{\Omega_i} \right) \right]. \quad (3.45)$$

Funkci H_i vyjádříme pomocí vztahu (2.20). Dále pomocí derivace vazby na pětirozměrný hyperboloid dle afinního parametru, viz (3.9), vyčíslené za impulsem, vyloučíme \tilde{V}_i^+ , tedy

$$\tilde{V}_i^+ = \frac{Z_{2i}^+ \dot{Z}_{2i}^+ + Z_{3i}^+ \dot{Z}_{3i}^+ + \epsilon Z_{4i}^+ \dot{Z}_{4i}^+}{\dot{U}_i^+}. \quad (3.46)$$

Dále již klasicky dosadíme z (2.19), (3.31), (3.33), (3.35) a (3.36), čímž skok v komponentě $\dot{\check{V}}$ vyjádříme pouze pomocí ostatních složek rychlosti těsně po průchodu, funkce \mathcal{H} a jejích derivací, souřadnic x, y a parametrů ϵ a Λ . Po provedení několika zjevných zjednodušení pomocí (2.19) a (3.36) konečně dostaneme

$$\begin{aligned}
\dot{\check{V}}_i^+ = & \dot{\check{V}}_i^- + \dot{\check{U}}_i^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i^2 \left[-\frac{1}{4} \right] + \mathcal{H}_{i,2}^2 \left[-\frac{\epsilon(144 - 24\Lambda(x^2 - y^2) + \Lambda^2(x^2 + y^2)^2)}{192\Lambda\Omega^2} \right] \right. \\
& + \mathcal{H}_{i,3}^2 \left[-\frac{\epsilon(144 - 24\Lambda(y^2 - x^2) + \Lambda^2(x^2 + y^2)^2)}{192\Lambda\Omega^2} \right] + \mathcal{H}_{i,4}^2 \left[-\frac{\epsilon(x^2 + y^2)}{4\Omega^2} \right] \\
& + \mathcal{H}_{i,2}H_{i,3} \left[\frac{xy}{2\Omega^2} \right] + \mathcal{H}_{i,2}H_{i,4} \left[\frac{ax(12 - \Lambda(x^2 + y^2))}{24\Omega^2} \right] \\
& \left. + \mathcal{H}_{i,3}H_{i,4} \left[\frac{ay(12 - \Lambda(x^2 + y^2))}{24\Omega^2} \right] \right\} \\
& + \dot{Z}_{2i}^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i \left[\frac{x}{\Omega} \right] + \mathcal{H}_{i,2} \left[\frac{144 - 24\Lambda(x^2 - y^2) + \Lambda^2(x^2 + y^2)^2}{48\Lambda\Omega^2} \right] + \mathcal{H}_{i,3} \left[-\frac{xy}{\Omega^2} \right] \right. \\
& \left. + \mathcal{H}_{i,4} \left[\frac{ax(-12 + \Lambda(x^2 + y^2))}{12\Omega^2} \right] \right\} \\
& + \dot{Z}_{3i}^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i \left[\frac{y}{\Omega} \right] + \mathcal{H}_{i,2} \left[-\frac{xy}{\Omega^2} \right] + \mathcal{H}_{i,3} \left[\frac{144 - 24\Lambda(y^2 - x^2) + \Lambda^2(x^2 + y^2)^2}{48\Lambda\Omega^2} \right] \right. \\
& \left. + \mathcal{H}_{i,4} \left[\frac{ay(-12 + \Lambda(x^2 + y^2))}{12\Omega^2} \right] \right\} \\
& + \dot{Z}_{4i}^+ \frac{\Lambda}{6} \left\{ \mathcal{H}_i \left[\frac{12 - \Lambda(x^2 + y^2)}{4a\Lambda\Omega} \right] + \mathcal{H}_{i,2} \left[\frac{x(-12 + \Lambda(x^2 + y^2))}{4a\Lambda\Omega^2} \right] \right. \\
& \left. + \mathcal{H}_{i,3} \left[\frac{y(-12 + \Lambda(x^2 + y^2))}{4a\Lambda\Omega^2} \right] + \mathcal{H}_{i,4} \left[\frac{x^2 + y^2}{\Omega^2} \right] \right\} . \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Rovnost příslušných hranatých závorek v rovnicích (3.42) a (3.47) opět standardně dokážeme s použitím vztahů (2.19) a (3.36). Tímto jsme ověřili kompatibilitu podmínek pro napojení složky $\dot{\check{V}}$.

Výsledek této podkapitoly můžeme tedy shrnout do následujícího tvrzení.

Efekt neexpandující impulsní gravitační vlny na pozadí (anti-)de Sitterova vesmíru na pohyb volných testovacích částic popsaný úplným řešením rovnic geodetiky (3.4) a (3.5) nalezeným s užitím pětirozměrného formalismu v práci [6] je plně ekvivalentní refrakčním vztahům (3.16) a (3.19) získaným na základě Filipovova konceptu řešení obyčejných diferenciálních rovnic v práci [7].

4. Expandující impulsní gravitační vlny

V této kapitole shrneme základní vlastnosti expandujících impulsních gravitačních vln. V První podkapitole 4.1 zkonstruujeme užitím Penroseovy „cut and paste“ metody expandující impuls v nejjednodušším případě Minkowského pozadí a nulové gaussovské křivosti. Rovněž zavedeme spojitý souřadný systém adaptovaný na tuto geometrii.

Dále zobecníme výše uvedenou konstrukci i pro případ (anti-)de Sitterova pozadového prostoročasu a obecné Gaussovské křivosti, viz podkapitola 4.2.

V poslední části 4.3 prozkoumáme konkrétní tvary funkce $h(Z)$ určující navázání poloprostorů *před* a *za* vlnou a generující konkrétní profil impulsní vlny.

4.1 Minkowského prostoročas

Obdobně jako v případě neexpandujících impulsních vln budeme nyní postupovat i u vln expandujících. Nejprve popíšeme nejjednodušší situaci, tedy expandující sférickou impulsní vlnu v Minkowského prostoročase. Penroseova metoda „cut and paste“ v tomto případě opět spočívá v rozdělení Minkowského prostoročasu na dvě části \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- podél nulové nadplochy \mathcal{N} , kterou však nyní bude *světelný kužel*. Oba poloprostory jsou následně opět identifikovány s předepsaným posunutím bodů podél nadplochy \mathcal{N} . Na rozdíl od případu neexpandujících vln vyžaduje nyní globální struktura prostoročasu přítomnost zdrojů. Je možné nahlédnout, že množina všech bodů z jedné strany světelného kužele \mathcal{N} se při posunutí nezobrazuje na celou druhou stranu. Tato neúplnost může být interpretována jako přítomnost kosmických strun nebo jiné topologické struktury v alespoň jedné z rozdělených částí prostoročasu.

Pro explicitní konstrukci sférického expandujícího impulsu vyjděme z metriky Minkowského prostoročasu v dvojitých nulových souřadnicích (1.7), tedy

$$ds^2 = -2d\mathcal{U}d\mathcal{V} + 2d\eta d\bar{\eta}. \quad (4.1)$$

Nyní provedeme transformaci

$$\mathcal{U} = Z\bar{Z}V - U, \quad \mathcal{V} = V, \quad \eta = VZ, \quad (4.2)$$

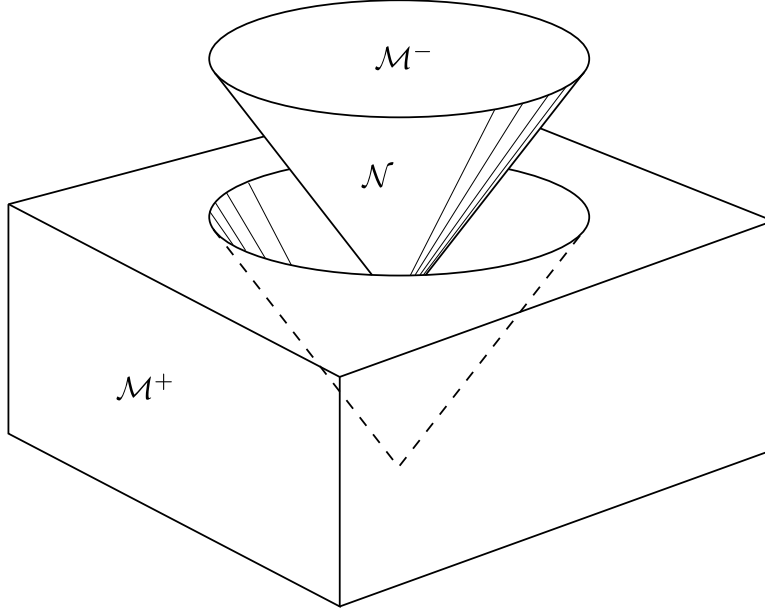
čímž dostaneme metriku ve tvaru

$$ds^2 = 2V^2 dZ d\bar{Z} + 2dU dV. \quad (4.3)$$

Vyjádríme-li tyto souřadnice pomocí standardních kartézských souřadnic Minkowského prostoročasu, dostaneme

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}{t + z}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z), \quad Z = \frac{x + iy}{t + z}. \quad (4.4)$$

Vztah pro Z zde odpovídá *stereografické projekci* mezi Riemannovou sférou a +rovinou komplexních čísel. Tato korespondence bude podrobněji diskutována a využita v podkapitole 4.3. Z prvního vztahu pak vidíme, že nadplochy $U = konst.$



Obrázek 4.1: Princip konstrukce expandující impulsní vlny v Minkowského prostoročase spočívající v jeho rozdělení podél světelného kužele \mathcal{N} na dvě části \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- , které jsou následně opět slepeny, přičemž body na jejich rozhraní jsou ztotožněny s předepsaným posunutím.

představují světelné kužele. Konkrétně uvažujme nadplochu $U = 0$, pro kterou v kartézských souřadnicích explicitně dostáváme

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 . \quad (4.5)$$

Jedná se tedy o sféru expandující rychlostí světla pro $t > 0$ a naopak smršťující se pro časy $t < 0$.

Dále uvažujme obecnější verzi transformace (4.2), v níž bude vystupovat libovolná komplexní holomorfní funkce $h(Z)$, která po následném zkonstruování expandujícího impulsu určí vzájemné posunutí bodů na vnitřní a vnější straně světelného kužele. Konkrétně tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{|h|^2}{|h'|} \left[V + \left| \frac{h'}{h} - \frac{h''}{2h'} \right|^2 U \right] , \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{|h'|} \left[V - \left| \frac{h''}{2h'} \right|^2 U \right] , \\ \eta &= \frac{h}{|h'|} \left[V + \left| \frac{h'}{h} - \frac{h''}{2h'} \right| \frac{\bar{h}''}{2\bar{h}'} U \right] , \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde symbol h' označuje derivaci podle souřadnice Z . Tato transformace převádí metriku (4.1) do tvaru

$$ds^2 = 2 |VdZ + U\bar{H}d\bar{Z}|^2 + 2dUdV , \quad (4.7)$$

kde

$$H(Z) = \frac{1}{2} \left[\frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

je Schwarzovou derivací funkce $h(Z)$. Poznamenejme ještě, že pro triviální volbu $h(Z) = Z$ se tato metrika redukuje právě na (4.3).

Nyní použijeme Penroseovu metodu „cut and paste“. Za impulsní nadplochu \mathcal{N} zvolíme světelný kužel $U = 0$, část prostoročasu \mathcal{M}^- pro $U < 0$ popíšeme metrikou (4.3) a část \mathcal{M}^+ pro $U > 0$ metrikou (4.7). Kombinovaná metrika výsledného prostoročasu je, kromě případných pólu funkce $H(Z)$, spojitá v místě impulsu $U = 0$ a má tvar

$$ds^2 = 2 |V dZ + U \Theta(U) \bar{H} d\bar{Z}|^2 + 2 dU dV . \quad (4.9)$$

Tato metrika tedy představuje sférickou expandující impulsní gravitační vlnu v Minkowského prostoročase. Srovnáním transformací (4.2) a (4.6) v místě impulsu okamžitě zreprodukuje Penroseovy napojovací podmínky,

$$\left(U = 0, V, Z, \bar{Z} \right)_{\mathcal{M}^-} = \left(U = 0, \frac{V}{|h'|}, h(Z), \bar{h}(\bar{Z}) \right)_{\mathcal{M}^+} . \quad (4.10)$$

Ukazuje se, že jediné nenulové složky tenzoru křivosti jsou

$$\Psi_4 = \frac{H}{V} \delta(U) , \quad \Phi_{22} = -\frac{H\bar{H}}{V^2} U \delta(U) , \quad (4.11)$$

což skutečně odpovídá impulsu o amplitudě úměrné funkci $H(Z)$, který se nachází na světelné nadploše $U = 0$.

Obdobně jako v případě neexpandujících vln můžeme i zde formálně aplikovat inverzní transformaci k spojení transformací (4.3) a (4.7) na spojitou metrikou (4.9). Takto bychom získali metrikou explicitně obsahující δ -funkce souřadnice U prozrazující přítomnost impulsní vlny. Na rozdíl od neexpandujících vln se zde bude δ -funkce vyskytovat i v druhé mocnině, což zcela znemožňuje rigorózní práci s touto metrikou v rámci klasické teorie distribucí. Na druhé straně však tento tvar metriky, srovnáním s Robinsonovým–Trautmanovým řešením typu N, umožňuje interpretovat sférické expandující gravitační impulsy jako limity expandujících sendvičových vln.

Řešení tohoto typu se rovněž podařilo zkonstruovat uvážením dvojice částic vzdalujících se od sebe se zrychlením limitně jdoucím k nekonečnu. V takové situaci jsou však nezbytně přítomné buď kosmické struny spojující tyto částice s nekonečnem, či příčka spojující částice navzájem. Zadáním konkrétního tvaru funkce $h(Z)$ lze tedy přímo konstruovat sférické expandující impulsní vlny generované přetrženou kosmickou strunou, jejíž konce se od sebe vzdalují rychlostí světla a napínají tak na sebe impulsní vlnoplochu. Diskutováno bylo rovněž řešení se dvěma kosmickými strunami, které se v jistém bodě srazí a přetrhnou, což opět vede ke vzniku sférické expandující impulsní vlny. Impulsní vlnou generovanou dvojicí přetržených navzájem statických kosmických strun se budeme zabývat v podkapitole 5.2.

4.2 (Anti-)de Sitterův prostoročas

Nyní zkonstruujeme obecnou expandující impulsní vlnu na pozadí libovolného prostoročasu konstantní křivosti. Zobecníme tedy konstrukci popsanou v předchozí podkapitole pro případ (anti-)de Sitterova vesmíru. Přitom budeme vycházet

z konformně plochého tvaru metriky pozadí (1.17), tedy

$$ds^2 = \frac{2 d\eta d\bar{\eta} - 2 d\mathcal{U} d\mathcal{V}}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda(\eta\bar{\eta} - \mathcal{U}\mathcal{V})\right]^2}. \quad (4.12)$$

Opět rozdělíme prostoročas na dvě části podél světelné nadplochy $U = 0$. V části $U \geq 0$ budeme uvažovat zobecnění transformace (4.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\equiv \mathcal{V}^+ = AV - DU, \\ \mathcal{U} &\equiv \mathcal{U}^+ = BV - EU, \\ \eta &\equiv \eta^+ = CV - FU, \end{aligned} \quad (4.13)$$

kde koeficienty jsou již pouze funkcemi Z a \bar{Z} , a jejich explicitní tvar je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{p|h'|}, & B &= \frac{|h|^2}{p|h'|}, & C &= \frac{h}{p|h'|}, \\ D &= \frac{1}{|h'|} \left\{ \frac{p}{4} \left| \frac{h''}{h'} \right|^2 + \epsilon \left[1 + \frac{Z}{2} \frac{h''}{h'} + \frac{\bar{Z}}{2} \frac{\bar{h}''}{\bar{h}'} \right] \right\}, \\ E &= \frac{|h|^2}{|h'|} \left\{ \frac{p}{4} \left| \frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right|^2 + \epsilon \left[1 + \frac{Z}{2} \left(\frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right) + \frac{\bar{Z}}{2} \left(\frac{\bar{h}''}{\bar{h}'} - 2 \frac{\bar{h}'}{\bar{h}} \right) \right] \right\}, \\ F &= \frac{h}{|h'|} \left\{ \frac{p}{4} \left(\frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right) \frac{\bar{h}''}{\bar{h}'} + \epsilon \left[1 + \frac{Z}{2} \left(\frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right) + \frac{\bar{Z}}{2} \frac{\bar{h}''}{\bar{h}'} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

přičemž platí

$$p = 1 + \epsilon Z \bar{Z}, \quad \epsilon = -1, 0, +1. \quad (4.15)$$

Parametr ϵ udává gaussovskou křivost prostorových 2-ploch. Geometricky tato konstanta specifikuje konkrétní foliaci prostoročasu světelnými kužely, viz související Robinsonova–Trautmanova třída, viz [4]. Funkce $h = h(Z)$ je pak libovolnou holomorfní funkcí charakterizující posunutí bodů v místě impulsu a symbol h' označuje opět derivaci h podle souřadnice Z . Tato transformace převede konformně plochou metriku prostoročasů konstantní křivosti (4.12) na tvar

$$ds^2 = \frac{2 |(V/p) dZ + Up \bar{H} d\bar{Z}|^2 + 2 dU dV - 2\epsilon dU^2}{\left[1 + \frac{1}{6}\Lambda U(V - \epsilon U)\right]^2}, \quad (4.16)$$

kde H je Schwarzovou derivací funkce h , tedy

$$H(Z) = \frac{1}{2} \left[\frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2 \right]. \quad (4.17)$$

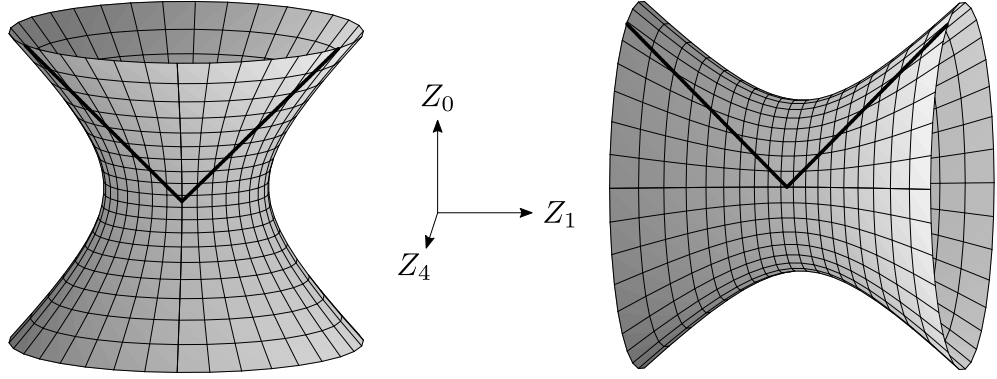
V poloprostoru $U \leq 0$ uijeme transformaci (4.13) s triviální volbou $h(Z) = Z$. Výsledná transformace se takto zjednoduší do tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{V}^- = \frac{V}{p} - \epsilon U, \\ \mathcal{U} &= \mathcal{U}^- = \frac{|Z|^2}{p} V - U, \\ \eta &= \eta^- = \frac{Z}{p} V. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Jelikož Schwarzova derivace v případě $h(Z) = Z$ je nulová, v druhé části prostoročasu dostáváme metriku

$$ds^2 = \frac{2(V/p)^2 dZ d\bar{Z} + 2dU dV - 2\epsilon dU^2}{[1 + \frac{1}{6}\Lambda U(V - \epsilon U)]^2}. \quad (4.19)$$

V obou případech (4.13) a (4.18) platí, že impulsní nadplocha $U = 0$ představuje světelný kužel daný rovnicí $\eta\bar{\eta} - \mathcal{UV} = 0$. Použijeme-li nyní kartézské souřadnice zavedené v případě Mikowského prostoročasu vztahy (1.4) a (1.6), dostaneme pro nadplochu $U = 0$ rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Jedná se tedy skutečně o expandující sféru. Požitím transformace (1.18) v případě (anti-)de Sitterova vesmíru pak dostáváme $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_0^2$. Dosadíme-li nyní toto vyjádření do vazby na (anti-)de Sitterovský 4-hyperboloid (1.11), respektive (1.19), zjistíme, že nadplocha impulsu $U = 0$ představuje svislý řez $Z_4 = a$ tímto hyperboloidem vnořeným v plochem pětirozměrném prostoru. Geometricky tato situace odpovídá sférickému impulsu vzniklému v čase $Z_0 = 0$ a expandujícímu rychlostí světla, viz obrázek 4.2.



Obrázek 4.2: Znárodnění expandující impulsní vlny v (anti-)de Sitterově prostoročase pomocí řezu hyperboloidu svislou rovinou $Z_4 = a$. Vyznačené čáry představují trajektorie opačných pólu sférického impulsu.

Přímým porovnáním transformací (4.13) a (4.18) dostaneme Penroseovy napojovací podmínky ve tvaru

$$\left(U = 0, V, Z, \bar{Z}\right)_{\mathcal{M}^-} = \left(U = 0, \frac{(1 + \epsilon h\bar{h})V}{(1 + \epsilon Z\bar{Z})|h'|}, h(Z), \bar{h}(\bar{Z})\right)_{\mathcal{M}^+}. \quad (4.20)$$

Konstrukce spojitého tvaru metriky je završena slepením částí (4.19) pro $U < 0$ a (4.16) pro $U > 0$. Takto dostaneme globální metriku spojitou v místě impulsu $U = 0$, tedy

$$ds^2 = \frac{2|(V/p)dZ + U_+ p\bar{H}d\bar{Z}|^2 + 2dUdV - 2\epsilon dU^2}{[1 + \frac{1}{6}\Lambda U(V - \epsilon U)]^2}, \quad (4.21)$$

kde $U_+ \equiv U\Theta(U)$. Právě tato kombinace má za následek přítomnost impulsních členů v tenzoru křivosti. Konkrétně platí

$$\Psi_4 = \frac{p^2 H}{V} \delta(U), \quad \Phi_{22} = \frac{p^4 H\bar{H}}{V^2} U\delta(U). \quad (4.22)$$

Prostorčas je tedy konformně plochý všude kromě světelné nadplochy $U = 0$ a vakuový všude s výjimkou místa impulsu s $V = 0$ a případných singularit funkce $p^2 H$.

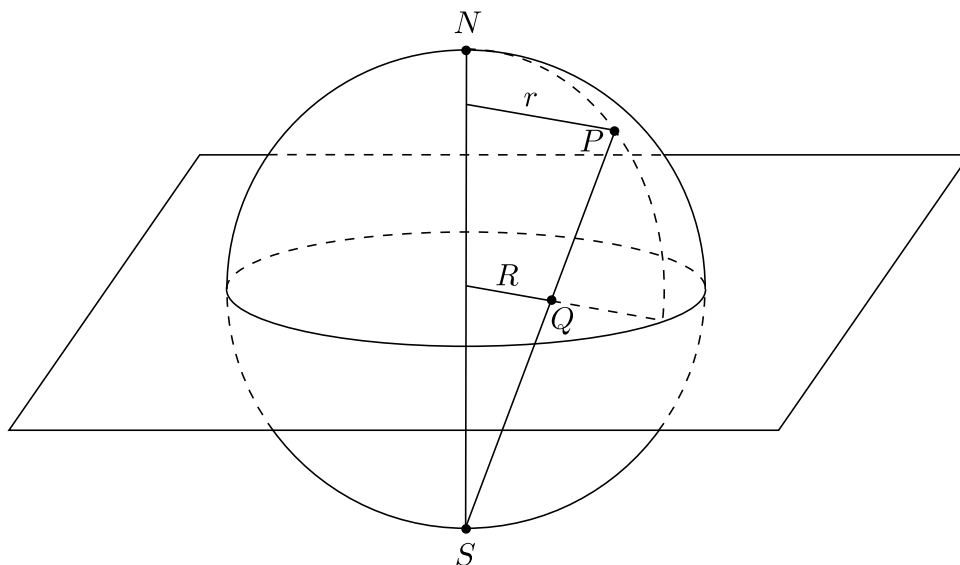
Vedle popsané metody „cut and paste“ a zavedení spojitých souřadnic lze expandující impulsní vlny v (anti-)de Sitterově vesmíru zkonstruovat rovněž jako limity sendvičových vln či urychlených částic analogicky jako v případě plochého Minkowského prostoročasu.

4.3 Stereografická projekce a kosmické struny

Jak již bylo poznamenáno, vztah (4.4), tedy

$$Z = \frac{x + iy}{t + z}, \quad (4.23)$$

svazuje souřadnici Z , vhodnou k popisu prostoročasů s expandujícími impulsními vlnami, viz metrika (4.3), s původními kartézskými souřadnicemi Minkowského prostoru (1.3). Geometricky jej lze interpretovat jako stereografickou projekci mezi Riemannovou sférou a rovinou komplexních čísel procházející středem této sféry. Vztah (4.23) konkrétně odpovídá stereografické projekci z jižního pólu, viz obrázek 4.3.



Obrázek 4.3: Stereografická projekce bodu P z Riemannovy sféry na bod Q ležící v komplexní rovině.

Bez újmy na obecnosti položme $t = 1$, tedy uvažujme sféru jednotkového poloměru. Označme r vzdálenost bodu P , o souřadnicích (x, y, z) na Riemannově sféře, od osy z a R vzdálenost bodu Q od středu sféry, který vzniká projekcí bodu P do komplexní roviny a je zde tedy určen komplexní souřadnicí Z . Použitím podobnosti trojúhelníků pak dostáváme

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{1 + z}. \quad (4.24)$$

Pro reálnou a imaginární část souřadnice Z v komplexní rovině potom platí

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x}{1+z}, \quad \operatorname{Im}(Z) = \frac{y}{1+z}, \quad (4.25)$$

a celkem tedy

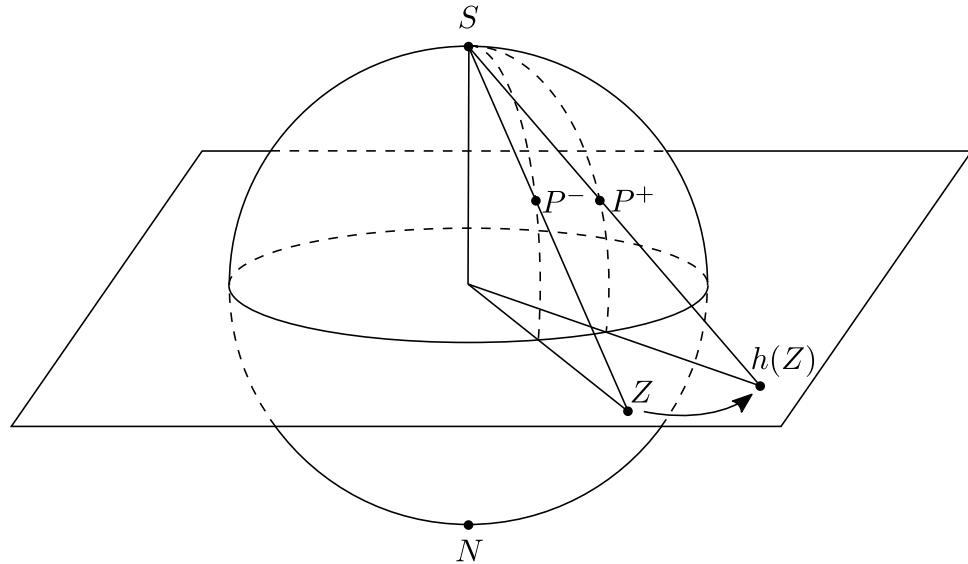
$$Z = \frac{x+iy}{1+z}, \quad (4.26)$$

což skutečně odpovídá vztahu (4.23) s $t = 1$. Inverzní vztahy pak jsou

$$x = \frac{Z + \bar{Z}}{1 + Z\bar{Z}}, \quad y = -i \left(\frac{Z - \bar{Z}}{1 + Z\bar{Z}} \right), \quad z = \frac{1 - Z\bar{Z}}{1 + Z\bar{Z}}. \quad (4.27)$$

Takto lze jednoznačně přiřadit libovolný bod Riemannovy sféry, kromě jižního pólu, vlastnímu bodu komplexní roviny. Ujijeme-li navíc komplexní rovinu rozšířenou o nekonečno, lze jižní pól ztotožnit právě s nekonečnem komplexní roviny.

Tímto způsobem tedy můžeme identifikovat libovolný bod P^- ležící na ploše impulsu \mathcal{N} a patřící do části prostoročasu \mathcal{M}^- s bodem Z komplexní roviny. Obdobně lze postupovat pro bod P^+ ležící na sférické nadploše \mathcal{N} nyní však z pohledu poloprostoru \mathcal{M}^+ . Bod P^+ ztotožníme stereografickou projekcí s obrazem bodu Z , který je reprezentován holomorfní funkcí $h(Z)$. Takovéto zobrazení $h(Z)$ charakterizuje posunutí bodů v místě impulsu. Formálně zobrazuje komplexní rovinu samu na sebe a lze jej tedy pomocí stereografické projekce chápat jako ztotožnění bodu P^- na vnitřní straně světelné nadplochy impulsu s bodem P^+ na straně vnější. Popsanou situaci ilustruje obrázek 4.4



Obrázek 4.4: Stereografická projekce mezi Riemannovou sférou a rovinou komplexních čísel umožňuje geometrickou interpretaci Penroseových podmínek napojení. Komplexní zobrazení $Z \mapsto h(Z)$ tak odpovídá ztotožnění bodů P^- a P^+ na vnitřní a vnější straně impulsu.

S užitím transformace (4.18) pro $U = 0_-$, respektive (4.13) pro $U = 0_+$, a vztahů (1.4) a (1.6) vedoucích ke kartézským souřadnicím, lze stereografické

projekce bodů P^- a P^+ na impulsní nadploše, tedy Z_i a $h(Z_i)$ v komplexní rovině, vyjádřit jako

$$Z_i = \frac{x_i^- + iy_i^-}{t_i^- + z_i^-}, \quad h(Z_i) = \frac{x_i^+ + iy_i^+}{t_i^+ + z_i^+}. \quad (4.28)$$

Fyzikálně zajímavé jsou situace, kdy se obor hodnot zobrazení $h(Z)$ neshoduje s definičním oborem hodnot Z . Potom „vnitřek“ sféry reprezentující impuls nepokrývá skrze zobrazení $h(Z)$ celou „vnější“ část, případně naopak. Oproti tomu pokud je Schwarzova derivace funkce $h(Z)$, tedy $H(Z)$, identicky rovna nule, člen zodpovědný za přítomnost expandujícího impulsu ve spojitě metrice (4.21) mizí a zobrazení $Z \rightarrow h(Z)$ odpovídá pouhé Lorentzově transformaci.

Požadavek, aby se jednotlivé strany impulsní sféry zobrazením $h(Z)$ zcela nepokrývali, nutně vede k přítomnosti topologických singularit v alespoň jednom z poloprostorů \mathcal{M}^- a \mathcal{M}^+ . Jednoduchým příkladem takového topologického defektu je takzvaná kosmická struna popsaná na konci kapitoly 1.1. Impulsní vlnu lze poté chápat jako důsledek přetržení této struny, jejíž konce se od sebe rozbíhají rychlostí světla. Funkce $h(Z)$ odpovídající kosmické struně orientované podél kartézské osy z má tvar

$$h(Z) = Z^{1-\delta}. \quad (4.29)$$

Vyjádříme-li komplexní souřadnici Z v exponenciálním tvaru $Z = |Z|e^{i\phi}$, kde $\phi \in [-\pi, \pi)$, je patrné, že funkce $h(Z)$ pokrývá komplexní rovinu až na výseč $\arg(h(Z)) \in [-(1-\delta)\pi, (1-\delta)\pi)$. Deficitní úhel uvažované struny je tedy $2\pi\delta$. Ještě dodejme, že pro metrickou funkci $H(Z)$, tedy Schwarzovu derivaci (4.17) funkce $h(z)$, v tomto případě dostáváme

$$H(Z) = \frac{\frac{1}{2}\delta(1 - \frac{1}{2}\delta)}{Z^2}. \quad (4.30)$$

Dále budeme zkoumat složitější situaci, kterou prvně nastínili Nutku a Penrose v práci [15], kdy se dvě kosmické struny strazí a přetrhnou, což opět vede ke vzniku impulsní gravitační vlny. Explicitní konstrukci odpovídající funkce $h(Z)$ poté provedli Podolský a Griffiths v práci [19] a to nejprve pro kolmé struny, které jsou původně v klidu a leží tedy v rovině, a poté výsledek zobecnili použitím Lorentzovy transformace pro případ kolize letící dvojice strun.

Ve statickém případě, na který se nadále pro jednoduchost omezíme, vyšli při konstrukci strukturní funkce $h(Z)$ z funkce (4.29), která vytváří kosmickou strunu podél osy z s deficitním úhlem $2\pi\delta$. S použitím stereografické projekce provedli rotaci ve všech třech Eulerových úhlech ψ , θ , ϕ o hodnotu $\frac{\pi}{2}$. Takto otočili původní osu z , i s kosmickou strunou, na místo původní osy y . Nakonec opět v duchu vztahu (4.29) umocnili dosavadní mezivýsledek na $(1-\epsilon)$, čímž vytvořili druhou kosmickou strunu podél nové osy z a tedy defekt kolmý na strunu první. Odpovídající funkce $h(Z)$ je tedy tvaru

$$h(Z) = \left(\frac{iZ^{1-\delta} - 1}{Z^{1-\delta} - i} \right)^{1-\epsilon}, \quad (4.31)$$

a pro metrickou funkci $H(Z)$ dostáváme

$$H(Z) = \frac{\frac{1}{2}\delta(1 - \frac{1}{2}\delta)}{Z^2} - \frac{\frac{1}{2}\varepsilon(1 - \frac{1}{2}\varepsilon)4(1 - \delta)^2 Z^{-2\delta}}{(Z^{1-\delta} + i)^2(Z^{1-\delta} - i)^2}, \quad (4.32)$$

přičemž hodnoty $2\pi\delta$ a $2\pi\varepsilon$ jsou interpretovány jako deficitní úhly příslušející kolidujícím strunám.

Takto zkonstruovaná funkce $h(Z)$ však není příliš vhodná ke studiu geodetik, kterým se budeme dále zabývat v kapitole 5. Zvolíme-li totiž parametry δ, ε rovny nule, tedy situaci bez strun a impulsu, dostaneme sice dle očekávání $H = 0$, ale funkce $h(Z)$ zde není triviální identitou $h(Z) = Z$, ale odpovídá rotaci souřadnic o úhel $\frac{\pi}{2}$ užitá při konstrukci dvojice strun. Část prostoročasu uvnitř sféry $U = 0$ je tedy otočená vůči části vnější. Vztah vyjadřující rotaci použitý v [19] byl navíc odvozen pro opačně zavedené souřadnice \mathcal{U} a \mathcal{V} , tedy stereografickou projekci ze severního pólu Riemannovy sféry, na rozdíl od práce [8] analyzující refrakci geodetik. Z těchto důvodů znovu zkonstruujeme funkci $h(Z)$, odpovídající přetržení dvojice kolmých kosmických strun v relativním klidu, analogickým postupem jako Podolský a Griffiths, avšak nyní s *kompensovanou rotací*.

Nejprve připomeňme, jakým způsobem lze parametrizovat rotace pomocí odpovídající transformace komplexní stereografické souřadnice Z při projekci z jižního pólu Riemannovy sféry, viz například [26]. Při konstrukci využijeme vyjádření libovolné rotace jako složení rotací okolo os z, y a opět z o takzvané Eulerovy úhly.

Uvažme, že rotace okolo osy z o úhel φ transformuje $x + iy \mapsto e^{i\varphi}(x + iy)$, zatímco souřadnice z se nemění. Transformaci komplexní souřadnice Z odpovídající rotaci okolo z lze tedy psát jako

$$Z \mapsto e^{i\varphi} Z. \quad (4.33)$$

Pro účely naší konstrukce vyjádříme rotaci okolo osy y o úhel θ . Hodnota souřadnice y zůstává pevná a kombinace $z + ix$ se zobrazí na $e^{i\theta}(z + ix)$. Položme tedy

$$\zeta = \frac{z + ix}{1 + y}, \quad (4.34)$$

a uvažujme $\zeta \mapsto e^{i\theta}\zeta$. Pomocí vztahů (4.27) navíc dostáváme

$$\zeta = \frac{1 + i(Z + \bar{Z}) - Z\bar{Z}}{1 - i(Z - \bar{Z}) + Z\bar{Z}} = \frac{(1 + iZ)(1 + i\bar{Z})}{(1 - iZ)(1 + i\bar{Z})} = \frac{(1 + iZ)}{(1 - iZ)}, \quad (4.35)$$

a tudíž

$$Z = i \left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \right). \quad (4.36)$$

Transformace komplexní souřadnice Z odpovídající rotaci okolo osy y o úhel θ má tedy tvar

$$\begin{aligned} Z \mapsto i \left(\frac{1 - e^{i\theta}\zeta}{1 + e^{i\theta}\zeta} \right) &= i \left(\frac{1 - iZ - e^{i\theta}(1 + iZ)}{1 - iZ + e^{i\theta}(1 + iZ)} \right) = \\ &= \frac{(e^{i\theta} + 1)Z - i(e^{i\theta} - 1)}{i(e^{i\theta} - 1)Z + i(e^{i\theta} + 1)} = \frac{(\cos \frac{1}{2}\theta)Z + \sin \frac{1}{2}\theta}{-(\sin \frac{1}{2}\theta)Z + \cos \frac{1}{2}\theta}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nyní již můžeme zkonstruovat funkci $h(Z)$ odpovídající expandující impulsní vlně vzniklé přetržením dvou kolmých kosmických strun, které jsou na počátku

v relativním klidu. Nejprve provedeme otočení okolo osy y o úhel $\frac{\pi}{2}$. Takto se osa x dostane na původní místo osy z . Po dosazení do vztahu (4.37) zjistíme, že této rotaci odpovídá transformace

$$Z \mapsto \frac{1+Z}{1-Z} \equiv Z_{R_1} . \quad (4.38)$$

Dále umocněním na $1-\delta$ vytvoříme kosmickou strunu s parametrem δ podél nové osy z , tedy původní osy x ,

$$Z_{R_1} \mapsto Z_{R_1}^{1-\delta} \equiv Z_{S_1} . \quad (4.39)$$

Nyní provedeme zpětnou rotaci kolem osy y o úhel $-\frac{\pi}{2}$. Kosmická struna vytvořená v předchozím kroku nyní míří opět podél původní osy x . Tuto rotaci vyjadřuje transformace

$$Z_{S_1} \mapsto \frac{-1+Z_{S_1}}{1+Z_{S_1}} \equiv Z_{R_2} . \quad (4.40)$$

Na závěr vytvoříme druhou kosmickou strunu s parametrem ε podél osy z , neboli

$$Z_{R_2} \mapsto Z_{R_2}^{1-\varepsilon} \equiv Z_{S_2} . \quad (4.41)$$

Složením těchto čtyř transformací získáme explicitní tvar příslušné funkce $h(Z)$ odpovídající hodnotě Z_{S_2} , tedy

$$h(Z) = \left(\frac{-1 + \left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^{1-\delta}}{1 + \left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^{1-\delta}} \right)^{1-\varepsilon} , \quad (4.42)$$

který pro hodnoty parametrů $\delta = 0 = \varepsilon$ přechází na identické zobrazení $h(Z) = Z$.

5. Geodetiky v expandujících impulsních vlnách

Chování geodetik v Minkowského prostoročase s expandující impulsní vlnou popsalí Podolský a Steinbauer v práci [27]. Tyto výsledky následně zobecnili Podolský a Švarc také pro případ nenulové kosmologické konstanty, tedy pozadí (anti-)de Sitterova vesmíru, viz [8]. Ke konstrukci globálních geodetik přitom využili znalosti geodetik v těchto pozadích konstantní křivosti a přirozeného fyzikálního předpokladu, že geodetika by měla být ve spojitých souřadnicích (4.21) třídy C^1 v místě impulsu. Tento předpoklad dostal následně pevný matematický rámec v práci [28].

5.1 Obecné refrakční vztahy

V přirozených souřadnicích konformně plochého pozadí mají geodetiky před a za impulsem standardní tvar odpovídající prázdnému prostoru, přičemž vlnový efekt je dán navázání integračních konstant zadaných v místě impulsu. Dále označíme horním indexem „+“ oblast před vlnou, tedy $U \geq 0$, indexem „-“ oblast za vlnou, tedy $U \leq 0$, a dolní index „i“ bude značit hodnoty vyčíslené v místě impulsu. S užitím této notace a konformně plochých souřadnic mají podmínky pro napojení složek geodetiky v místě impulsu, tedy interakčních *poloh*, tvar

$$\mathcal{V}_i^- = |h'| \mathcal{V}_i^+, \quad \mathcal{U}_i^- = |h'| \frac{|Z_i|^2}{|h|^2} \mathcal{U}_i^+, \quad \eta_i^- = |h'| \frac{Z_i}{h} \eta_i^+. \quad (5.1)$$

Pro *rychlosti* pak dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_i^- &= b_v \dot{\mathcal{V}}_i^+ + a_v \dot{\mathcal{U}}_i^+ + \bar{c}_v \dot{\eta}_i^+ + c_v \dot{\eta}_i^+, \\ \dot{\mathcal{U}}_i^- &= b_u \dot{\mathcal{V}}_i^+ + a_u \dot{\mathcal{U}}_i^+ + \bar{c}_u \dot{\eta}_i^+ + c_u \dot{\eta}_i^+, \\ \dot{\eta}_i^- &= b_\eta \dot{\mathcal{V}}_i^+ + a_\eta \dot{\mathcal{U}}_i^+ + \bar{c}_\eta \dot{\eta}_i^+ + c_\eta \dot{\eta}_i^+, \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde

$$\begin{aligned} b_v &= \frac{|h|^2}{4|h'|} \left| \frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right|^2, \\ a_v &= \frac{1}{4|h'|} \left| \frac{h''}{h'} \right|^2, \\ c_v &= -\frac{h}{4|h'|} \left(\frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right) \frac{\bar{h}''}{\bar{h}'}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} b_u &= \frac{|h|^2}{|h'|} \left| 1 + \frac{Z_i}{2} \left(\frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right) \right|^2, \\ a_u &= \frac{1}{|h'|} \left| 1 + \frac{Z_i}{2} \frac{h''}{h'} \right|^2, \\ c_u &= -\frac{h}{|h'|} \left[1 + \frac{Z_i}{2} \left(\frac{h''}{h'} - 2 \frac{h'}{h} \right) \right] \left[1 + \frac{\bar{Z}_i}{2} \frac{\bar{h}''}{\bar{h}'} \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
b_\eta &= \frac{|h|^2}{2|h'|} \left[1 + \frac{Z_i}{2} \left(\frac{h''}{h'} - 2\frac{h'}{h} \right) \right] \left(\frac{\bar{h}''}{\bar{h}'} - 2\frac{\bar{h}'}{\bar{h}} \right), \\
a_\eta &= \frac{1}{2|h'|} \left(1 + \frac{Z_i h''}{2 h'} \right) \frac{\bar{h}''}{\bar{h}'}, \\
\bar{c}_\eta &= -\frac{\bar{h}}{2|h'|} \left(1 + \frac{Z_i h''}{2 h'} \right) \left(\frac{\bar{h}''}{\bar{h}'} - 2\frac{\bar{h}'}{\bar{h}} \right), \\
c_\eta &= -\frac{h}{2|h'|} \left[1 + \frac{Z_i}{2} \left(\frac{h''}{h'} - 2\frac{h'}{h} \right) \right] \frac{\bar{h}''}{\bar{h}'}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Zde platí $\bar{c}_\nu = \overline{c_\nu}$ a $\bar{c}_\mu = \overline{c_\mu}$, přičemž všechny tyto koeficienty jsou konstanty získané vyčíslením funkce h a jejích derivací v okamžiku interakce, tedy pro $Z = Z_i$. V Případě $h(Z) = Z$ přecházejí výše uvedené vztahy na identity a nedochází tedy k lomu geodetik, což je v naprostém souladu s tím, že funkce H ve spojitě metrice vymizí a v prostoročase není přítomný žádný impuls.

Z hlediska interpretace je výhodnější přejít vztahy (1.4) a (1.6) ke kartézským souřadnicím. Rovněž se dále omezíme pouze na testovací částice které jsou před interakcí s vlnou, tedy v poloprostoru $U \geq 0$, *statické*, což znamená $\dot{x}_i^+ = \dot{y}_i^+ = \dot{z}_i^+ = 0$ a $\dot{t}_i^+ = 1$. Takto pro napojení poloh dostáváme

$$\begin{aligned}
x_i^- &= |h'| \frac{Z_i + \bar{Z}_i}{h + \bar{h}} x_i^+, \\
y_i^- &= |h'| \frac{Z_i - \bar{Z}_i}{h - \bar{h}} y_i^+, \\
z_i^- &= |h'| \frac{|Z_i|^2 - 1}{|h|^2 - 1} z_i^+, \\
t_i^- &= |h'| \frac{|Z_i|^2 + 1}{|h|^2 + 1} t_i^+,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

a pro rychlosti

$$\dot{x}_i^- = d_x \dot{t}_i^+, \quad \dot{y}_i^- = d_y \dot{t}_i^+, \quad \dot{z}_i^- = d_z \dot{t}_i^+, \quad \dot{t}_i^- = d_t \dot{t}_i^+, \tag{5.7}$$

přičemž platí

$$\begin{aligned}
d_x &= \frac{1}{2} (a_\eta + a_{\bar{\eta}} + b_\eta + b_{\bar{\eta}}), \\
d_y &= \frac{1}{2i} (a_\eta - a_{\bar{\eta}} + b_\eta - b_{\bar{\eta}}), \\
d_z &= \frac{1}{2} (-a_\mu + a_\nu - b_\mu + b_\nu), \\
d_t &= \frac{1}{2} (a_\mu + a_\nu + b_\mu + b_\nu),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

kde konstanty napravo jsou dány vztahy (5.3)–(5.6) a platí $a_{\bar{\eta}} = \overline{a_\eta}$, $b_{\bar{\eta}} = \overline{b_\eta}$.

Na závěr zbývá vyjádřit komplexní číslo Z_i pomocí počátečních poloh testovacích částic před impulsem. Využitím transformací (1.4) a (1.6) dostaneme

$$h(Z_i) = \frac{\eta_i^+}{V_i^+} = \frac{x_i^+ + i y_i^+}{t_i^+ + z_i^+},$$

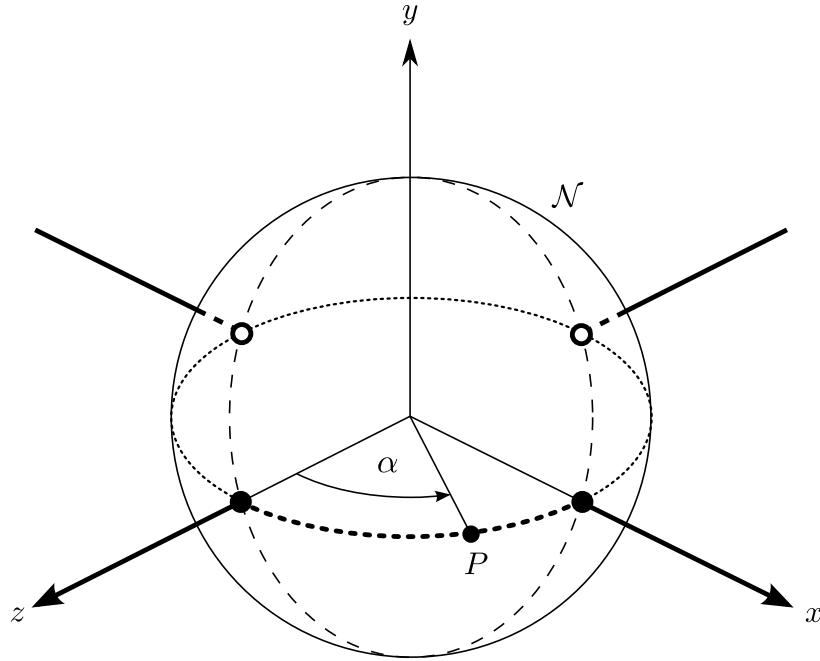
a tedy

$$Z_i = h^{-1}\left(\frac{x_i^+ + iy_i^+}{t_i^+ + z_i^+}\right), \quad (5.9)$$

kde h^{-1} je inverzní funkcí k funkci h .

5.2 Srážka a přetržení dvojice kosmických strun

V této podkapitole budeme zkoumat geodetiky v situaci popsané funkcí $h(Z)$ zkonstruovanou výše viz (4.42). Při tom budeme postupovat obdobně jako Podolský a Švarc v [8] pro případ jediné kosmické struny. Omezíme se při tom na studium změn poloh a rychlostí testovacích částic původně jsoucích v klidu a rovnoměrně rozmístěných na jednotkové čtvrtkružnici se středem v počátku, která leží v rovině xz určené dvojicí strun. Popsaná fyzikální situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 5.1: Dvě kolmé kosmické struny splývající s osami x a z jsou ve vzájemném klidu se ve svém průsečíku (počátku souřadnic) přetrhnou, čtyři jejich vzniklé konce se rozlétají rychlostí světla a napínají na sebe impulsní nadplochu \mathcal{N} . V jednotkovém čase zasáhne impulsní vlna prstenec testovacích částic (v našem případě pouze tlustě tečkovaná čtvrtkružnice). Testovací částice se tím posunou po impulsní sféře a je jim udělena rychlost.

Testovací částice před interakcí s vlnou leží v bodě P popsaném souřadnicemi $[x_i^+, y_i^+ = 0, z_i^+, t_i^+ = 1]$. Pomocí druhého ze vztahů (4.28) spočteme hodnotu $h(Z_i)$ v bodě P . Aplikací inverzní funkce k $h(Z)$ poté dostaneme komplexní souřadnici Z_i zkoumaného bodu. V prvním kvadrantu roviny xz ($x > 0, z > 0$) má funkce $h(Z)$ zadaná vztahem (4.42) komplexní inverzi

$$Z_i = h^{-1}(\xi) = \frac{\left(\frac{\xi^\nu + 1}{\xi^\nu - 1}\right)^\mu - 1}{\left(\frac{\xi^\nu + 1}{\xi^\nu - 1}\right)^\mu + 1}, \quad \text{kde} \quad \mu = \frac{1}{1 - \delta}, \quad \nu = \frac{1}{\varepsilon - 1} \quad (5.10)$$

a ξ odpovídá původní hodnotě funkce $h(Z_i)$. Provést inverzi v dalších kvadrantech se jeví být netriviální úlohou, avšak vzhledem k předpokládané symetrii zkoumané fyzikální situace nám postačí omezit se pouze na kvadrant první.

S takto získanou hodnotou souřadnice Z_i již můžeme použít vztahů (5.6) a (5.7) ke spočítání kartézských souřadnic a rychlostí po průchodu vlny. Tyto hodnoty budou značeny indexem „-“.

Na rozdíl od Podolského a Švarcovy práce [8] zde z důvodu složitosti a nepřehlednosti nebudeme explicitně uvádět výsledné refrakční formule ani vztahy pro koeficienty v nich vystupující. Při následné diskusi a interpretaci výsledků se tak budeme opírat především o grafy a diagramy vykreslené užitím programu Wolfram Mathematica na základě právě popsaného postupu.

Pro snazší interpretaci výsledků ještě zavedme některé další veličiny. Jelikož jsou uvažované testovací částice před i těsně po průchodu impulsu rozmístěny na kružnici, lze jejich polohu místo dvou kartézských souřadnic popsat pouze jediným úhlovým parametrem α . Úhel budeme měřit počínaje u osy z směrem k ose x . Indexem „+“ opět značíme hodnoty před a indexem „-“ hodnoty po průchodu vlny. Pro zaváděné úhly tedy platí

$$\text{tg } \alpha^+ = \frac{x_i^+}{z_i^+}, \quad \text{tg } \alpha^- = \frac{x_i^-}{z_i^-}. \quad (5.11)$$

Dále je vhodné zavést složky skutečné fyzikální rychlosti v klidových soustavách před a za impulsem

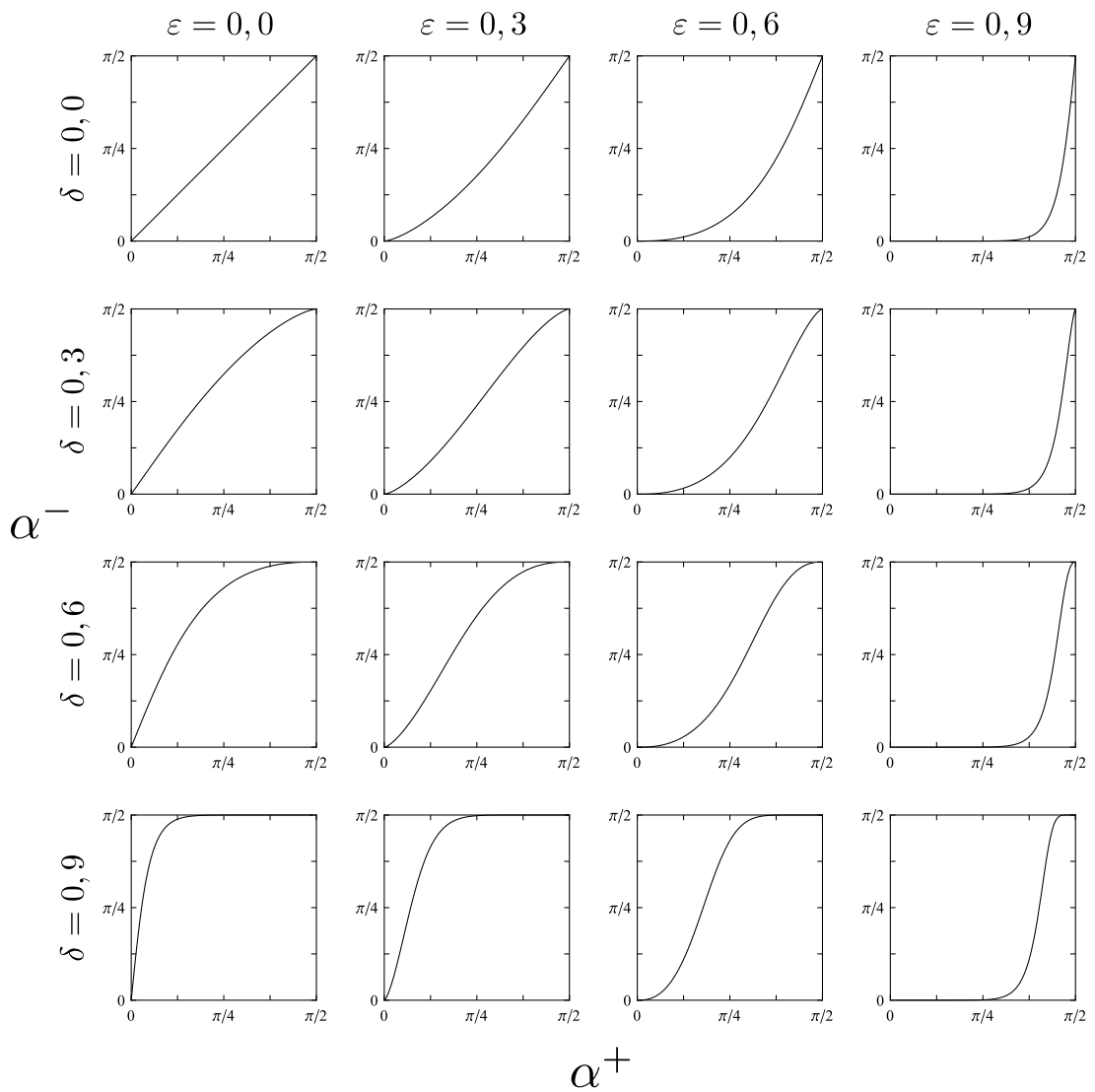
$$(v_x^\pm, v_y^\pm, v_z^\pm) \equiv \left(\frac{\dot{x}_i^\pm}{\dot{t}_i^\pm}, \frac{\dot{y}_i^\pm}{\dot{t}_i^\pm}, \frac{\dot{z}_i^\pm}{\dot{t}_i^\pm} \right). \quad (5.12)$$

Velikost rychlosti se pak standardně vypočte Pythagorovou větou a nabývá pouze hodnot od 0 do rychlosti světla $c = 1$.

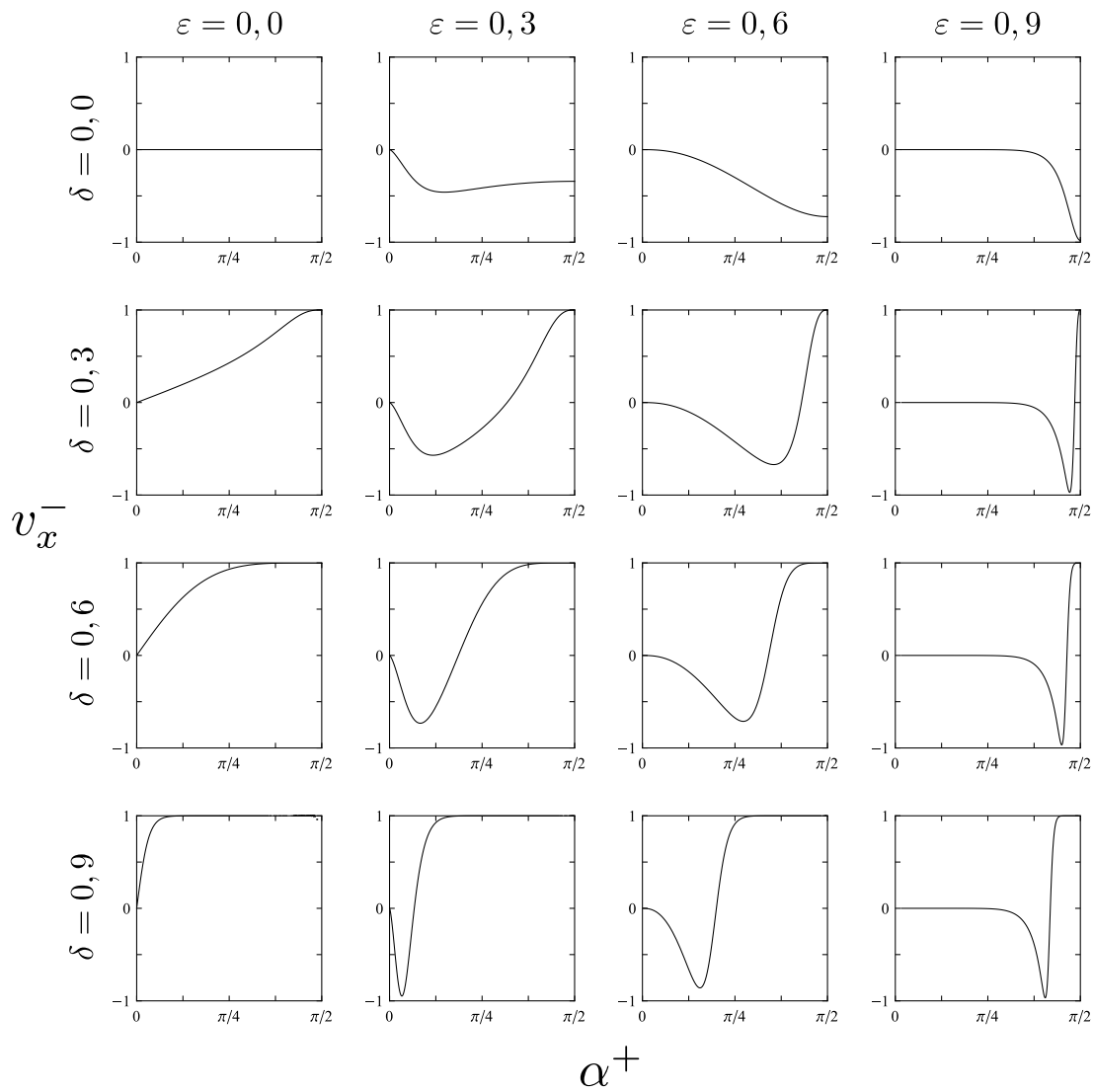
Následující obrázky vykreslené na základě zmíněného postupu popisují interakci testovacích částic, původě rozmístěných na jednotkové čtvrtkužnici v prvním kvadrantu, s impulsní vlnou pro vybrané hodnoty parametrů strun δ a ε . U každého obrázku je uveden popis vizualizované situace, přičemž podrobnější diskuse a fyzikální interpretace následuje v závěru této kapitoly.

Všimněme si, že koeficient d_y je v našem případě roven nule, jelikož použitá funkce $h(Z)$ je ryze reálná, viz (5.8) a definice použitých symbolů výše. Ze vztahů (5.7) poté vyplývá, že $v_y^- = 0$ a testovací částice tedy setrvávají v rovině tvořené osami x a z .

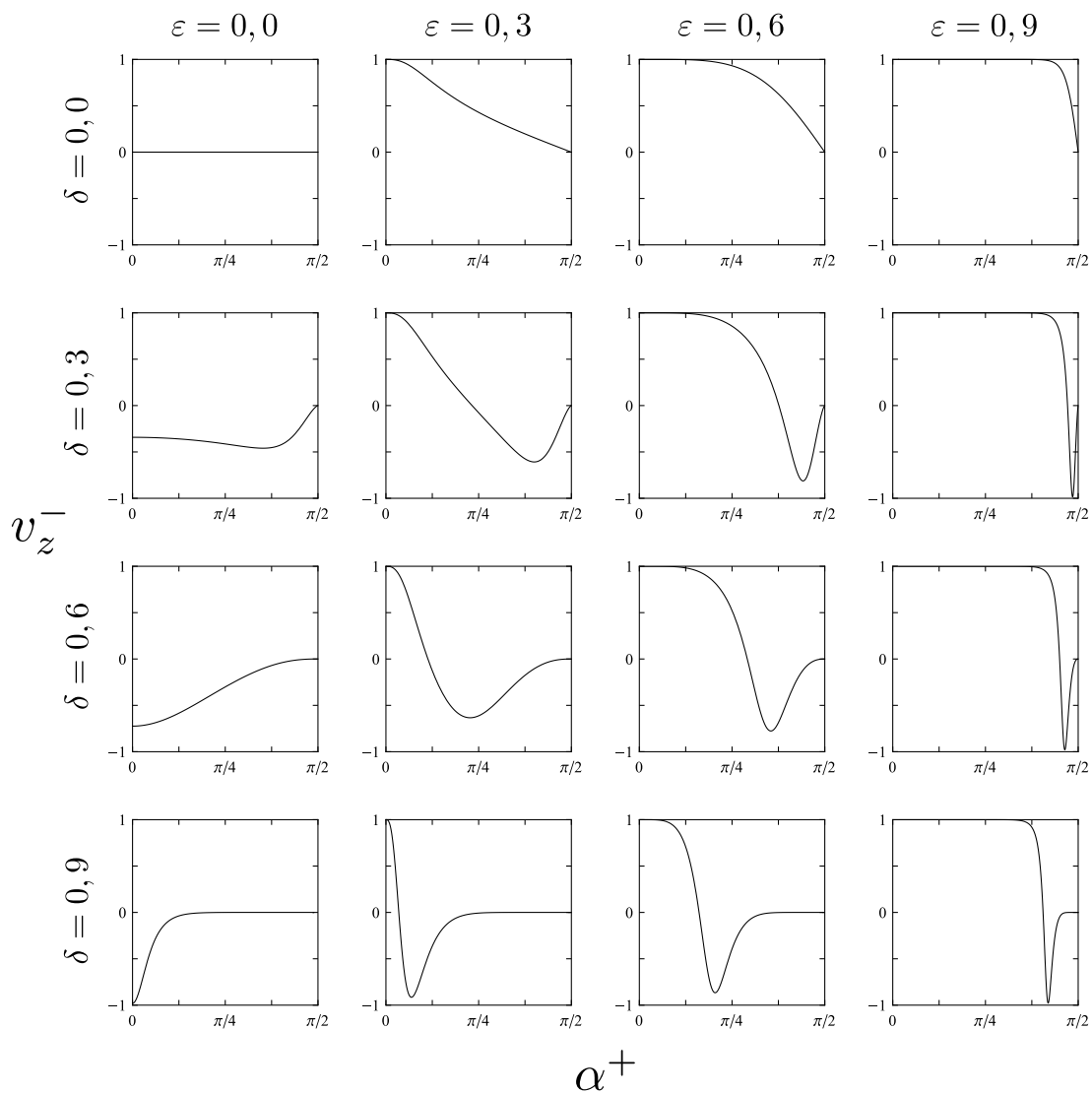
Ještě poznamenejme, že při konstrukci funkce $h(Z)$ jsme nejprve vytvořili strunu podél osy x charakterizovanou parametrem δ a poté strunu podél osy z charakterizovanou parametrem ε . Právě specifické pořadí konstrukce je zodpovědné za neintuitivní nesymetrii chování geodetik.



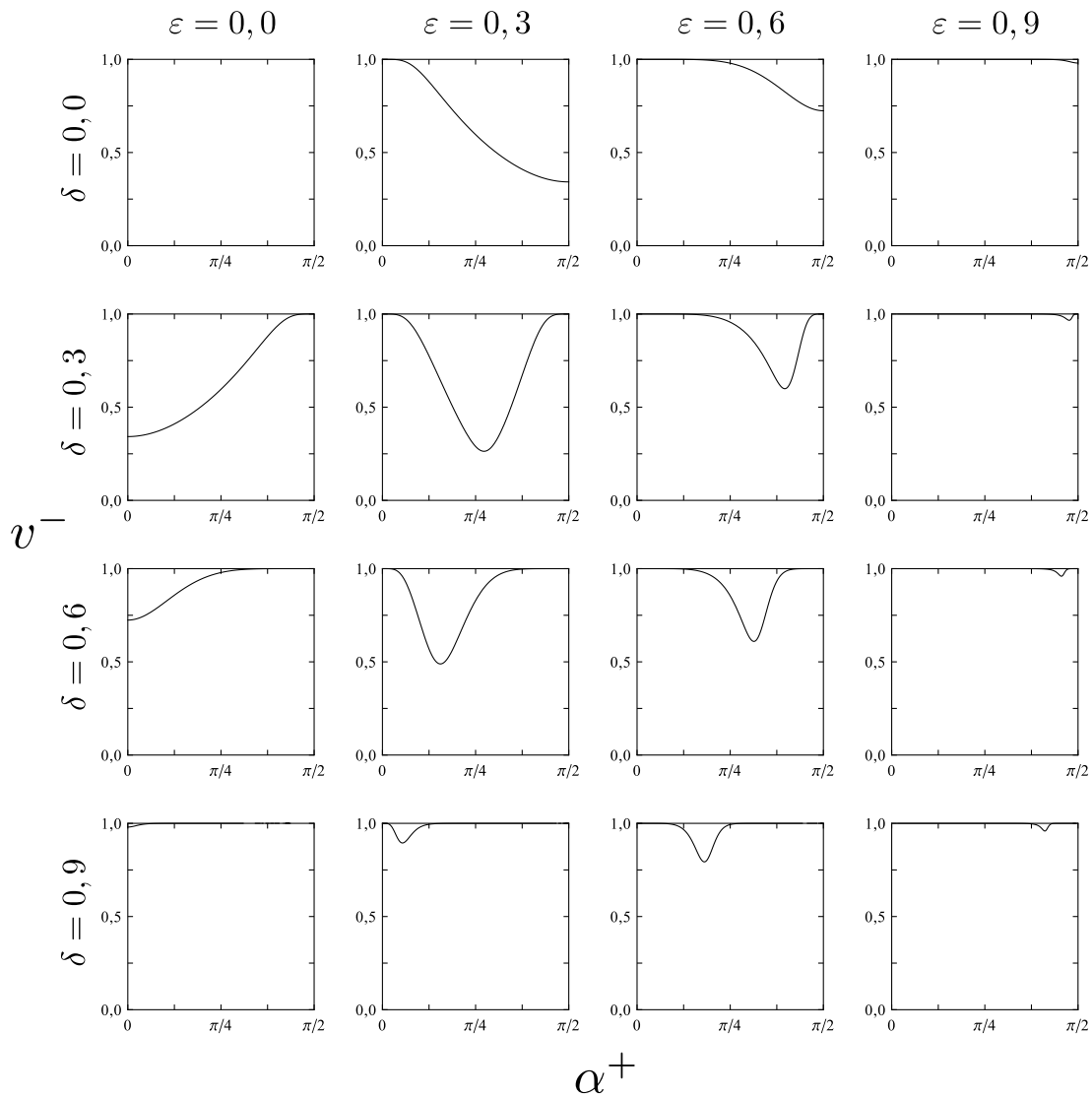
Obrázek 5.2: Grafy vzájemné závislosti úhlů určujících polohu testovacích částic α^- (α^+) pro různé hodnoty parametrů strun δ a ε . Testovací částice jsou tím víc přitahovány ke koncům strun ($\alpha^+ = 0$ a $\alpha^+ = \pi/2$), čím větší je parametr ε nebo δ . V případech s oběma parametry nenulovými je patrná asymetrie vůči kombinaci horizontálního a vertikálního zrcadlení, a to především u vyšších hodnot parametrů.



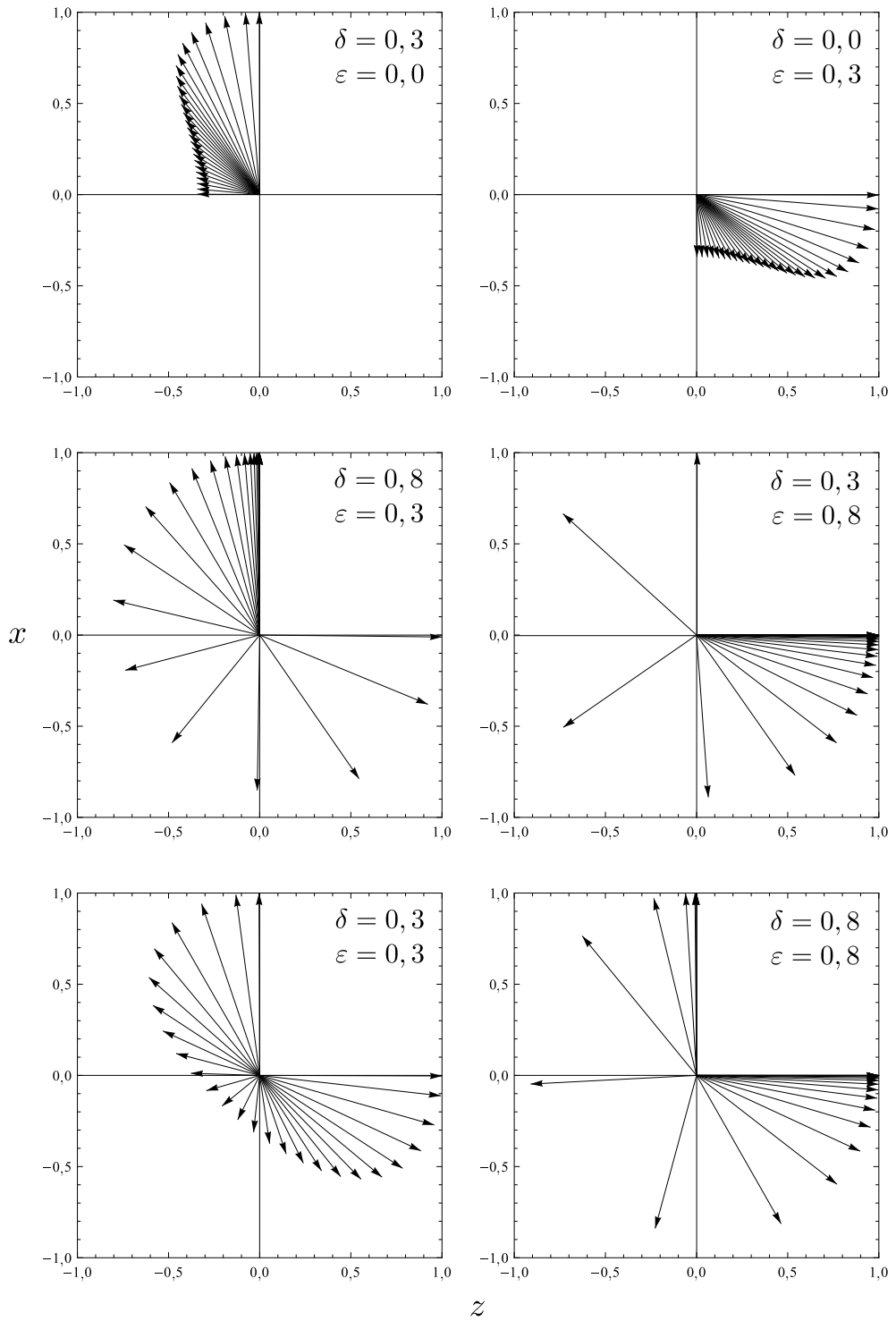
Obrázek 5.3: Grafy závislosti x -ové složky rychlosti v_x^- udělené testovací částici vlnou v závislosti na její poloze dané úhlem α^- pro různé hodnoty parametrů strun ε , δ . Částicím v blízkosti konce struny je udělena rychlost ve směru podél příslušné struny. Velikost složky rychlosti v_x^- se limitně blíží rychlosti světla pro částici ležící přesně v místě konce struny $\alpha^+ = \pi/2$.



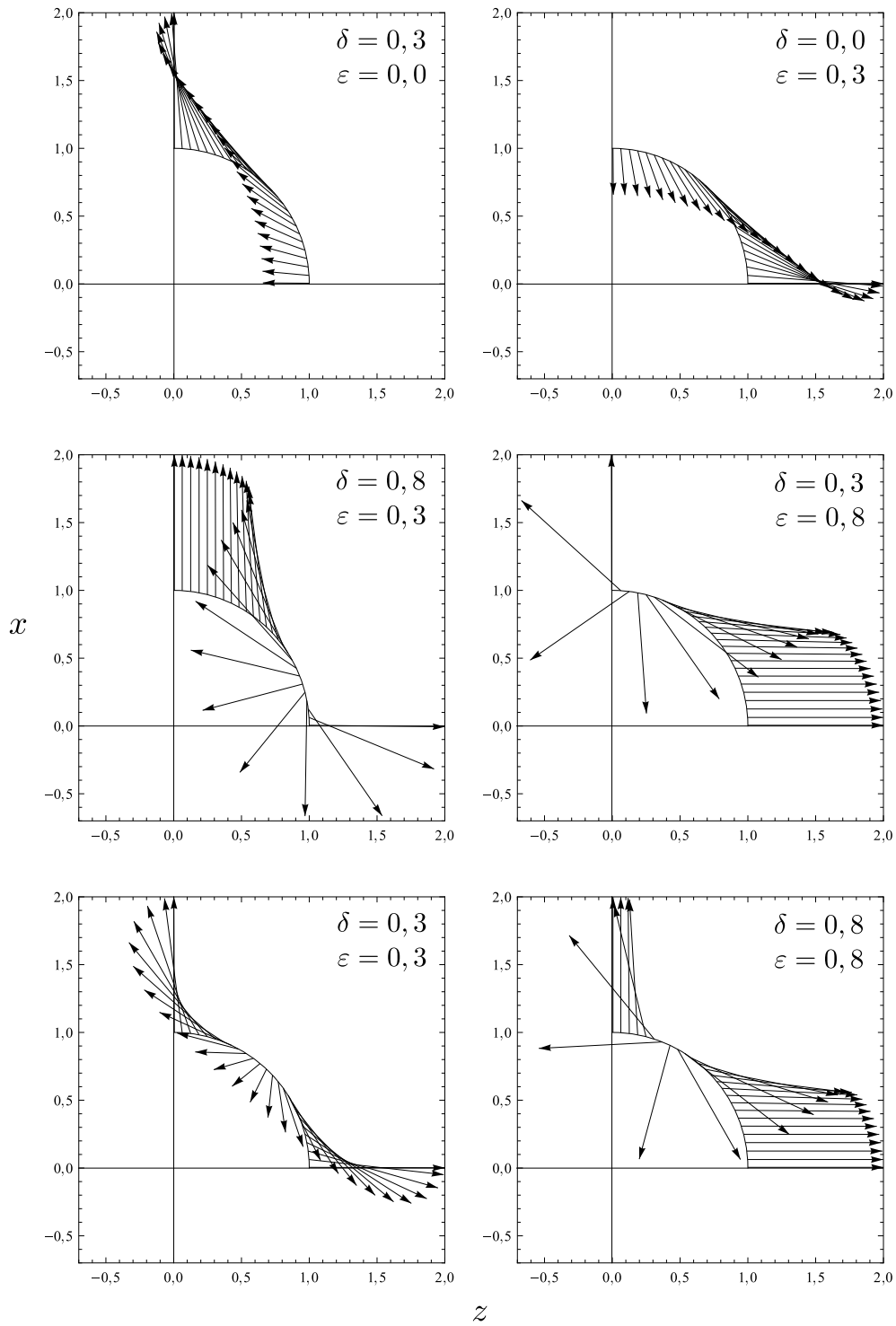
Obrázek 5.4: Grafy analogické předchozím, avšak tentokrát pro z -ovu složku rychlosti. Velikost složky rychlosti v_z^- se limitně blíží rychlosti světla pro částici ležící přesně v místě konce struny $\alpha^+ = 0$. Srovnání s předchozím obrázkem opět prozradí nesymetrii mezi efekty způsobenými strunami ležícími podél os x a z . Očekávali bychom totiž, že horizontálním zrcadlením grafů v_x^- dostaneme grafy v_z^- pro prohozené parametry strun.



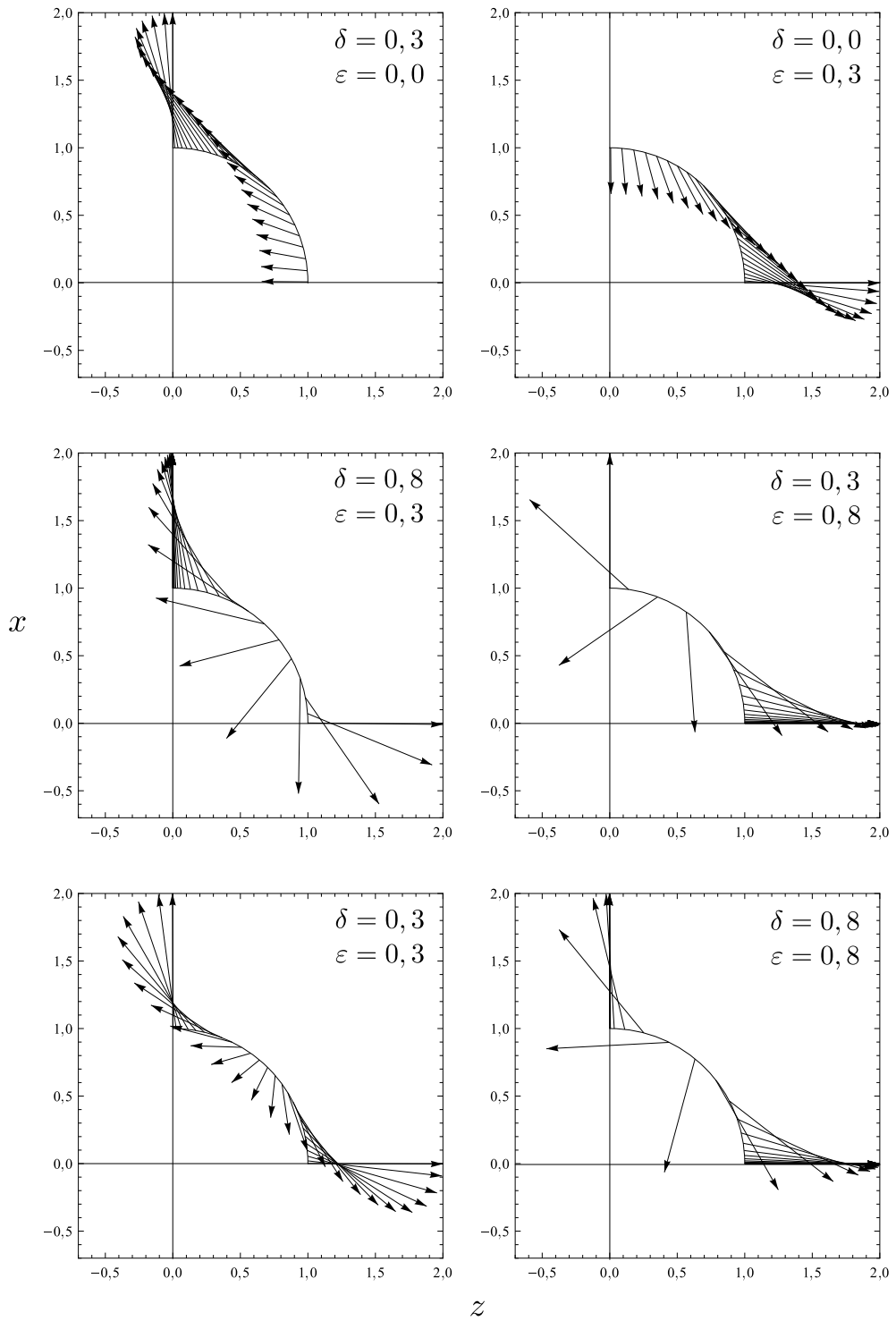
Obrázek 5.5: Grafy celkové velikosti rychlosti $v^- = \sqrt{(v_x^-)^2 + (v_z^-)^2}$. V Případě vyšších hodnot strunových parametrů ε , δ jsou rychlosti udělené i vzdáleným částicím značné. V grafech je opět dobře viditelné porušení očekávané symetrie, a tedy závislost na pořadí konstrukce strun. Pro velké hodnoty parametrů ε , δ je téměř všude velikost celkové rychlosti $v^- \doteq 1 = c$ a příslušná křivka tedy splývá s horní hranou grafu.



Obrázek 5.6: Diagramy znázorňující směry a velikosti vektorů rychlosti udělené průchodem vlny testovacím částicím *rovnoměrně* rozloženým podél jednotkové čtvrtkružnice v 1. kvadrantu. Směrem do tohoto kvadrantu (prostoru mezi strunami) částice urychlovány nejsou. S rostoucími parametry ε , δ je opět zřetelná výrazná nesymetrie.



Obrázek 5.7: Vektory rychlosti tentokrát umístěné do *původních poloh* α^+ částic před interakcí s vlnou. Zvláště v šestém diagramu velmi zřetelná asymetrie.



Obrázek 5.8: Vektory rychlostí umístěné do poloh α^- daných *posunutím* vlivem interakce s impulsní vlnou. Z těchto diagramů je nejlépe patrná podstata interakce vlny s testovacími částicemi – přitažení částic ke konci struny, jakož i urychlení ve směru letícího konce struny.

Z vykreslených obrázků 5.2 až 5.8 je kvalitativně zřejmé, jakým způsobem reagují uvažované testovací částice na průchod impulsní vlny popsané funkcí (4.42). Obecně lze říci, že částice jsou při interakci s vlnou posunuty podél sférické plochy směrem ke koncům kosmických strun, které na sebe plochu impulsu napínají. Míra přitahování částice koncem struny pak závisí na jejím parametru, tedy příslušném deficitním úhlu.

Rychlosti částic umístěných v okamžiku interakce s vlnou v blízkosti konců strun míří podél strun, tedy ven z původní kružnice, a velikost jejich rychlosti se limitně blíží rychlosti světla. Takové chování lze interpretovat tak, že konec struny odlétající rychlostí světla od místa přetržení strhává částice s sebou. Čím vzdálenější je původní poloha částice od konce struny, tím menší rychlost je částici udělena a dostatečně vzdálené částice jsou naopak vtahovány dovnitř kružnice. Výsledné rychlosti jsou navíc tím větší, čím větší jsou deficitní úhly kosmických strun, viz obrázky 5.3 až 5.8.

Až potud se výsledky našich výpočtů kvalitativně shodují s intuicí získanou na základě výsledků práce [8], kde byla zkoumána situace s pouze jednou strunou. Vykreslené obrázky však postrádají symetrie, které bychom od nich intuitivně očekávali. Uvažujme prostoročas se dvěma ekvivalentními kolmými kosmickými strunami. Ten by měl být symetrický vůči mnohým rotacím a zrcadlením. Konkrétně se jedná o bodovou grupu symetrie D_{4h} . Stejnou symetrii bychom tedy očekávali i od chování našich testovacích částic a také s tím související symetrie námi vykreslených grafů a diagramů. Tedy například poslední ze šestice diagramů na obrázku 5.7 by měl být symetrický vůči záměně os z a x . Místo toho však vidíme, že struna mířící ve směru z ovlivňuje blízké částice podstatně více než druhá ze strun. Ačkoliv byly struny charakterizovány pomocí stejných hodnot parametrů δ a ε , symetrie je zde značně narušena.

Naše funkce $h(Z)$ zkonstruovaná dle elegantního a intuitivního geometrického postupu z [19] tedy patrně nepopisuje fyzikální situaci impulsní vlny generované přetrhnutím dvou ekvivalentních kolmých kosmických strun s deficitními úhly danými parametry δ a ε , tedy $2\pi\delta$ a $2\pi\varepsilon$. Zdá se, že druhá aplikace funkce $Z \mapsto Z^{1-\delta}$ při konstrukci $h(Z)$ nemá za následek očekávané vytvoření nové kosmické struny se zadaným deficitním úhlem $2\pi\delta$. Deficitní úhly odpovídající strunám v takto konstruované funkci totiž zřejmě nejsou nezávislé a zobrazení $Z \mapsto Z^{1-\delta}$ nelze použít ke konstrukci struny s deficitním úhlem $2\pi\delta$ v prostoročase, který již jednu kosmickou strunu obsahuje. Popsaný problém se přirozeně nepodařilo odstranit změnou pořadí kroků při konstrukci funkce $h(Z)$. Takto jsme pouze obdrželi převrácené, ale stále nesymetrické verze uvedených obrázků.

Zpětně se zdá být nelineární interakce při konstrukci dvojice strun přirozená. Konkrétně nageenerujme mocninným zobrazením dvě struny ležící podél osy z . Pro první z nich tedy vezměme $Z \mapsto Z^{1-\delta} \equiv Z_{S_1}$ a pro druhou pak $Z_{S_1} \mapsto Z_{S_1}^{1-\varepsilon}$. Výsledné zobrazení je tedy $Z^{1-\delta-\varepsilon+\delta\varepsilon}$ a výsledný deficitní úhel $2\pi(\delta + \varepsilon - \delta\varepsilon)$ nikoliv pouze triviální součet $2\pi\delta + 2\pi\varepsilon$.

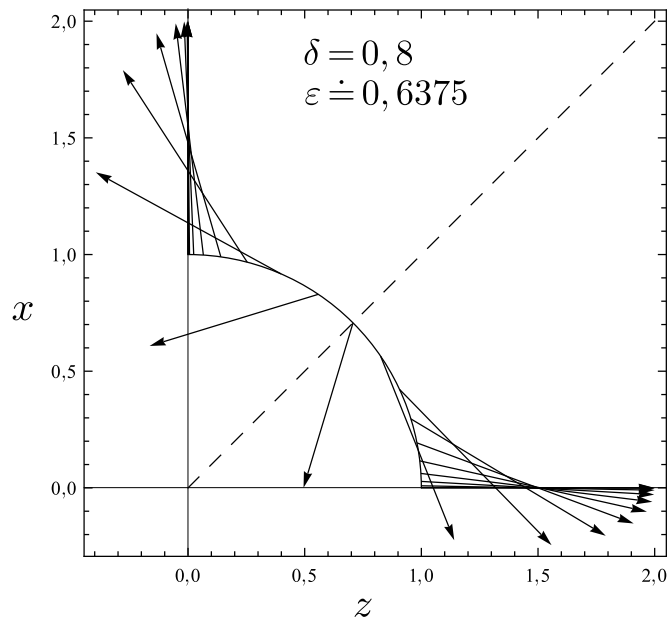
Nyní se nabízí možnost, že ačkoliv použitá funkce $h(Z)$ nepopisuje situaci se dvěma kolmými strunami, jejichž deficitní úhly jsou přímo úměrné parametrům δ a ε , stále popisuje kolmé struny s konstantními deficitními úhly. V případě správnosti takové hypotézy by pro zvolené δ mělo být možné nalézt takové ε , aby se deficitní úhly strun vyrovnaly a zkoumaný prostoročas nabyl očekávané symetrie. Zvolme tedy na kružnici testovací částici stejně vzdálenou od obou

strun, tedy $\alpha^+ = \pi/4$. Pokud budou mít obě struny stejný deficitní úhel a situace tedy bude symetrická, poloha částice by se průchodem vlny neměla změnit, a tedy $\alpha^- = \pi/4 = \alpha^+$ nebo například $x_i^- = x_i^+$. Vyjádříme-li tuto rovnici pomocí (5.6) může jejím řešením pro zvolené δ získat odpovídající ε . Obrázek 5.9 ilustruje tuto situaci pro zvolené $\delta = 0,8$ a dopočtené $\varepsilon \doteq 0,6375$.

Ačkoliv se obrázek na první pohled již zdá být symetrickým, ve skutečnosti není. To je dobře patrné, zakreslíme-li přerušovanou čarou osu kvadrantu a tedy předpokládanou osu symetrie. Vidíme, že ačkoliv se poloha částice umístěné v $\alpha^- = \pi/4$ skutečně nezměnila, vektor její rychlosti je poměrně značnou měrou odkloněn směrem k jedné ze strun a náš výsledek je tedy opět nesymetrický.

K analogickému nesymetrickému výsledku lze dojít i opačným postupem. Požadujeme-li správný směr vektoru rychlosti prostřední částice, zjistíme že se při interakci s vlnou posunula její poloha. Ještě poznamenejme, že pro výrazně menší (a tedy realističtější) fixovanou hodnotu parametru δ lze dopočtením parametru ε získat již téměř symetrickou situaci.

Ukázalo se tedy, že funkce $h(Z)$ daná předpisem (4.42) a zkonstruovaná intuitivním geometrickým postupem analogickým článku [19] ve skutečnosti a zcela navzdory intuitivnímu očekávání nepopisuje expandující impulsní gravitační vlnu generovanou přetržením dvou ekvivalentních kolmých kosmických strun s deficitními úhly přímo úměrnými parametrům δ a ε . Zdá se, že dokonce vůbec nepopisuje situaci s námi uvažovanými kosmickými strunami definovanými *konstantními* deficitními úhly. Přesnější interpretace použité funkce $h(Z)$ se však ukázala být značně netriviálním problémem, na jehož objasnění budeme dále pracovat



Obrázek 5.9: Diagram znázorňující posunutí a rychlosti testovacích částic pro zvolené δ a dopočtené ε . Testovací částice umístěná v $\alpha^+ = \pi/4$ se interakcí s vlnou neposune, avšak její vektor rychlosti je vychýlen směrem ke struně splývající s osou z . Situace tedy ani zde není symetrická.

Závěr

V rámci rešeršní části této bakalářské práce byla prostudována odborná literatura týkající se neexpandujících i expandujících impulsních gravitačních vln v prostoročasech konstantní křivosti. Pozornost byla věnována především jejich geometrické konstrukci a geodetickým pohybům v prostoročasech tohoto typu. V případě expandujících vln byl rovněž kladen důraz na možný popis jejich zdroje v podobě dvojice přetržených kosmických strun. Získané poznatky byly shrnuty v přehledových částech této práce, konkrétně v kapitolách 1, 2, 4 a dále v podkapitolách 3.1, 3.2 a 5.1, které tak slouží jako referenční základ pro dosažení originálních výsledků.

Prvním původním výsledkem této práce je ověření kompatibility dvou možných přístupů k nalezení geodetik v (anti-)de Sitterově prostoročase s neexpandující impulsní vlnou. Konkrétně se jedná o ekvivalenci podmínek napojení geodetik v místě impulsního rozhraní, které byly na základě konceptu Filipovova řešení obyčejných diferenciálních rovnic rigorózně odvozeny v práci [7], s explicitním řešením rovnice geodetiky uvedeným v [6]. Bylo ukázáno, že oba zmíněné postupy vedou ve výsledku ke stejnému pohybu geodetických pozorovatelů viz část 3.3.

Druhý původní výsledek souvisí s chováním volných testovacích částic interagujících s expandující impulsní vlnou vzniklou v důsledku přetržení dvou na sebe kolmých kosmických strun. Takto generovaná vlna je charakterizována funkcí $h(Z)$ původně zkonstruovanou postupem uvedeným v [19]. Tuto konstrukci jsme modifikovali přidáním dodatečné rotace v podkapitole 4.3, která následně umožňuje přímočařejší popis geodetických pohybů. Použitím postupů publikovaných v [8], kde byl diskutován pouze případ jedné struny, jsme vyšetřovali interakci statických částic umístěných v rovině tvořené dvojicí strun s expandujícím impulsem viz podkapitola 5.2. Ukázalo se, že takto intuitivně konstruovaná funkce $h(Z)$ navzdory očekávání nepopisuje uvažovanou fyzikální situaci se dvěma ekvivalentními kolmými kosmickými strunami se zadanými deficitními úhly.

Seznam použité literatury

- [1] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*, San Francisco: W. H. Freeman (1973). ISBN 978-0716703440.
- [2] WALD, R. M. *General Relativity*, Chicago: University of Chicago Press (2010). ISBN 978-0226870373.
- [3] STEPHANI, H.; KRAMER, D.; MACCALLUM, M.; HOENSELAERS, C.; HERLT, E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations (2nd edn.)*, Cambridge: Cambridge University Press (2003). ISBN 0-521-46136-7.
- [4] GRIFFITHS, J. B.; PODOLSKÝ, J. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*, Cambridge: Cambridge University Press (2009). ISBN 978-0521889278.
- [5] PODOLSKÝ, J. *Exact impulsive gravitational waves in spacetimes of constant curvature*, in *Gravitation: Following the Prague Inspiration*, O. Semerák, J. Podolský a M. Žofka, Singapore: World Scientific (2002) 205-246.
- [6] PODOLSKÝ, J.; ORTAGGIO, M. *Symmetries and geodesics in (anti-)de Sitter spacetimes with non-expanding impulsive waves*, *Class. Quantum Grav.* **18** (2001) 2689.
- [7] PODOLSKÝ, J.; SÄMANN, C.; STEINBAUER, R.; ŠVARC, R. *The global existence, uniqueness and C^1 -regularity of geodesics in nonexpanding impulsive gravitational waves*, *Class. Quantum Grav.* **32** (2015) 025003.
- [8] PODOLSKÝ, J.; ŠVARC, R. *Refraction of geodesics by impulsive spherical gravitational waves in constant-curvature spacetimes with a cosmological constant*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 124035.
- [9] LICHNEROWICZ, A. *Théorie relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris (1955).
SYNGE, J. L. *Relativity: the general theory*, North Holland, Amsterdam (1960).
- [10] PENROSE, R. *The geometry of impulsive gravitational waves*, in *General Relativity*, L. O'Raiheartaigh (ed.), Clarendon Press, Oxford (1972) 101-115.
- [11] AICHELBURG, P. C.; SEXL, R. U. *On the gravitational field of a massless particle*, *Gen. Relativ. Gravit.* **2** (1971) 303-312.
- [12] HOTTA, M.; TANAKA, M. *Shock-wave geometry with non-vanishing cosmological constant*, *Class. Quantum Grav.* **10** (1993) 307-314.
- [13] GLEISER, R.; PULLIN, J. *Are cosmic strings gravitationally stable topological defects?*, *Class. Quantum Grav.* **6** (1989) L141-L144.
- [14] BIČÁK, J. *Is there a news function for an infinite cosmic string?*, *Astron. Nachr.* **311** (1990) 189-192.

- [15] NUTKU, Y.; PENROSE R. *On Impulsive Gravitational Waves*, Twistor Newsletter No. **34** (1992) 9-12.
- [16] HOGAN, P. A. *A Spherical Impulse Gravity Wave*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 117-118.
- [17] HOGAN, P. A. *Lorentz group and spherical impulsive gravity wave*, Phys. Rev. D **49** (1994) 6521-6525.
- [18] PODOLSKÝ, J.; GRIFFITHS, J. B. *Expanding impulsive gravitational waves*, Class. Quantum Grav. **16** (1999) 2937.
- [19] PODOLSKÝ, J.; GRIFFITHS, J. B. *The collision and snapping of cosmic strings generating spherical impulsive gravitational waves*, Class. Quantum Grav. **17** (2000) 1401.
- [20] HOGAN, P. A. *A spherical gravitational in the de Sitter universe*, Phys. Lett. A **171** (1992) 21-22.
- [21] PODOLSKÝ, J.; GRIFFITHS, J. B. *Nonexpanding impulsive gravitational waves with an arbitrary cosmological constant*, Phys. Lett. A **261** (1999) 1-4.
- [22] GRIFFITHS, J. B.; PODOLSKÝ, J. *Exact solutions for impulsive gravitational waves*, Ann. Phys. **9** (2000) SI59-SI62.
- [23] GRIFFITHS, J. B.; PODOLSKÝ, J. *Null multipole particles as sources of pp-waves*, Phys. Lett. A **236** (1997) 8–10.
- [24] PODOLSKÝ, J.; GRIFFITHS, J. B. *Impulsive waves in de Sitter and anti-de Sitter space-times generated by null particles with an arbitrary multipole structure*, Class. Quantum Grav. **15** (1998) 453–463.
- [25] KUNZINGER, M.; STEINBAUER, R. *A rigorous solution concept for geodesic and geodesic deviation equations in impulsive gravitational waves*, J. Math. Phys. **40** (1999) 1479-1489.
- [26] CRAMPIN, M.; PIRANI, F. A. E. *Applicable Differential Geometry*, Cambridge: Cambridge University Press (1986). ISBN 0521231906.
- [27] PODOLSKÝ, J.; STEINBAUER, R. *Geodesics in spacetimes with expanding impulsive gravitational waves*, Phys. Rev. D **67** (2003) 064013.
- [28] STEINBAUER, R. *Every Lipschitz metric has C^1 -geodesics*, Class. Quantum Grav. **31** (2014) 057001.