Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Pavol Oravec

Finanční deriváty a jejich využití jako zajištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Jan Šrámek
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

2006

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své diplomové práce Mgr. Janu Šrámkovi za cenné rady a připomínky.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 14. prosince 2006. Pavol Oravec

Abstrakt

Název práce: Finanční deriváty a jejich využití jako zajištění
Autor: Pavol Oravec
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Jan Šrámek, ČSOB Pojišťovna, Pardubice
E-mail vedoucího: *jan.sramek@csobpoj.cz*

Abstrakt: Práca sa venuje problematike finančných derivátov. Rozoberá vymedzenie pojmu derivát v českej legislatíve a právne normy popisujúce možnosti použitia finančných derivátov v poisťovniach. Sú popísané spôsoby účtovania o derivátoch a metódy používané pri zaisťovacom účtovníctve podľa Českých účtovných štandardov. Ďalšou časťou diplomovej práce je prehľad najrozšírenejších finančných derivátov, v ktorom sú tiež uvedené spôsoby ocenenia týchto nástrojov používané v praxi. Pre opcie na dlhopisy a swapy a tiež pre capy a floory sú ukázané analytické vzorce pre výpočet hodnoty a citlivostí na pohyb úrokových sadzieb v Hullovom-Whiteovom modeli úrokových mier. Tieto výsledky sú aplikované pri zaistení životnej poisťovne proti riziku plynúcemu z paralelných pohybov výnosovej krivky.

Klíčová slova: finančný derivát, zaistenie, riadenie rizík, životné poistenie

Title: Financial derivatives and their use in hedging
Author: Pavol Oravec
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Jan Šrámek, ČSOB Pojišťovna, Pardubice
Supervisor's e-mail address: *jan.sramek@csobpoj.cz*

Abstract: The thesis deals with financial derivatives. It presents the derivative definition in the Czech law system, also law norms describing the possibilities of derivatives use in insurance companies in Czech Republic are discussed. The derivative accounting methods and hedging accounting methods according to Czech Accounting Standards are described. The other part of the diploma thesis is the summary of the most popular financial derivatives, pricing methods for these instruments are also included. For swaptions, bond options and also caps and floors the analytic pricing formulae (as well as value sensitivities formulae) are given using the Hull-White interest rate model. These results are applied to hedging of the life insurance company against the parallel movements of the yield curve.

Keywords: financial derivative, hedging, risk management, life insurance

Obsah

Úvod

Finančné deriváty sú moderným a stále populárnejším typom finančných nástrojov. Ich základnou vlastnosťou je nízka nadobúdacia hodnota a na druhej strane vysoká citlivosť ich hodnoty na zmenu podkladových tržných parametrov. To z derivátov robí veľmi populárne nástroje pri riadení finančných rizík.

Riadeniu rizík sa pritom kladie stále väčšia dôležitosť. Príklad v [2] ukazuje dôsledky nevhodného (resp. žiadneho) spôsobu riadenia rizík v životnej poisťovni. Nissan Mutual Life bola japonská poisťovacia spoločnosť s viac ako miliónom poistených a objemom aktív vo výške 17 miliárd dolárov. Spoločnosť predávala poistné kontrakty s garantovanou úrokovou mierou 5% a 5,5% bez toho, aby tieto pasíva adekvátne zaistila. Pád úrokových mier štátnych dlhopisov potom spôsobil spoločnosti veľké problémy a viedol v roku 1997 ku krachu. Podobná je aj situácia v Českej Republike, keď v ostatných rokoch došlo k výraznému poklesu tržných úrokových sadzieb, čo následne viedlo k značným stratám poisťovacích spoločností v ČR. Podstatná časť práce preto bude venovaná možnostiam použitia úrokových derivátov v riadení rizík životných poisťovní. Prirodzenou snahou by bolo zaisťovať opcie vložené v poistných kontraktoch opciami na strane aktív, ktoré na pohyby tržných sadzieb reagujú podobne. Regulátor v ČR však takýto postup neumožňuje, keď zakazuje možnosť použiť takéto opcie v rámci finančného umiestnenia technických rezerv poisťovní. Alternatívou je nákup takýchto opcií z vlastných prostriedkov spoločnosti do vlastného kapitálu. Klady a zápory takéhoto postupu v práci rozoberieme a ukážeme na príklade.

Práca je rozdelená na tri kapitoly a jeden dodatok. V prvej kapitole rozoberieme právne prostredie v Českej Republike týkajúce sa derivátov. Ukážeme rôzne definície derivátov v rôznych právnych úpravách a porovnáme ich s definíciou derivátu podľa medzinárodných účtovných štandardov. Tiež priblížime spôsoby účtovania a oceňovania vyplývajúce zo Zákona o účetnictví a z Českých účtovných štandardov. Pozrieme sa i na zákonné obmedzenia použitia derivátov v poisťovníctve a možné komplikácie z týchto omedzení plynúce priblížime na príkladoch.

Druhá kapitola sa venuje oceňovaniu finančných nástrojov. Uvedieme spôsoby oceňovania dlhopisov s pevným i pohyblivým kupónom. V ďalšej časti potom uvedieme stručný prehľad rôznych typov derivátov. Keďže typov derivátov je veľké množstvo, obmedzíme sa v tejto časti len na tie najrozšírenejšie. Venovať sa postupne budeme forwardom, swapom a opciám. U každého druhu derivátu tiež ukážeme spôsoby ocenenia, ktoré sú v používané v praxi.

Podkladom k ďalšej kapitole bol článok [9], v ktorom boli odvodené analytické vzorce pre ocenenie opcií na dlhopisy a swapy v Heath-Jarrow-Mortonovom modeli úrokových mier, za splnenia dodatočných technických predpokladov na tento model. Ukážeme, že Hull-Whiteov model úrokových mier tieto predpoklady spĺňa a preto je možné závery z [9] aplikovať i v tomto modeli. Budú odvodené citlivosti hodnoty uvažovaných opcií na paralelný pohyb úrokových mier (durácia a konvexita). V príkladoch tiež ukážeme, že floorlety a caplety je možné chápať aj ako opcie na swapy. Preto je možné ich v HW modeli analyticky oceniť a analyticky spočítať ich duráciu a konvexitu. V záverečnej časti kapitoly ukážeme možný spôsob použitia úrokových opcií v životnej poisťovni. Využijeme pritom poznatky o úrokových opciách odvodené v tejto kapitole. Na príklade ukážeme, že dôsledné zaistenie proti pohybom výnosovej krivky môže byť v prípade veľkého nesúladu medzi jej aktívami a pasívami pre poisťovňu značne finančne náročné.

V dodatku potom uvádzme rôzne definície durácie a konvexity a niektoré vlastnosti týchto mier citlivosti hodnoty finančných nástrojov na pohyby úrokových mier.

Kapitola 1

Legislatívny rámec a účtovanie derivátov

V tejto kapitole rozoberieme právny rámec týkajúci sa derivátov v Českej Republike. Uvedieme niekoľko definícií derivátu nachádzajúcich sa v rôznych právnych normách. Následne uvedieme spôsoby účtovania o derivátoch v ČR a tiež zákonné obmedzenia ich použitia v poisťovniach. Na záver ešte uvedieme niektoré skutočnosti týkajúce sa derivátov v medzinárodných účtovných štandardoch.

1.1 Legislatíva v Českej Republike

Použitie derivátov sa v Českej Republike riadi viacerými právnymi normami. Začneme vymedzením pojmu derivát v českej legislatíve. Hneď na úvod treba povedať, že definícia pojmu derivát v českom právnom prostredí nie je jednoznačná, vyskytuje sa na viacerých miestach.

Ak by sme sa sústredili na použitie derivátov v poisťovníctve a vychádzali zo zákona číslo 363/1999 Zb., o poisťovníctve, v znení neskorších predpisov a jeho prevádzacej vyhlášky č. 303/2004 Zb., ktorou sa prevádzajú niektoré ustanovenia zákona o poisťovníctve, zistili by sme, že oba tieto dokumenty pojem derivát obsahujú, no nikde ho nedefinujú. Rovnako neobsahujú ani odkaz na definíciu derivátu v iných zákonoch.

Pozrieme sa preto, v ktorých zákonoch je pojem derivátu definovaný a akým spôsobom. Východiskom by mohol byť zákon o cenných papieroch č. 591/1992 Zb., v znení neskorších predpisov. V tomto zákone bol skutočne až do 1.5.2004 pojem derivátu definovaný v § 8a odst. 5 nasledujúcim spôsobom:

> Derivátmi sa rozumejú peniazmi oceniteľné práva a záväzky, ktorých hodnota sa vzťahuje k cenným papierom alebo je odvodená z cenných papierov, komodít, mien, iných majetkových hodnôt, úrokových mier, kurzových indexov alebo akýchkoľvek iných faktorov stanovených pre tento účel a k zmluvám alebo zo zmlúv o nich.

Ako vidíme táto definícia v porovnaní s definíciou v medzinárodných účtovných štandardoch (viz. kap. 1.2) neobsahuje požiadavok na vysporiadanie derivátu v budúcnosti, ani požiadavok na nízke počiatočné náklady pri zaobstaraní derivátu. Z toho dôvodu, ako je uvedené napr. aj v [18], bolo možné na základe tejto definície za derivát považovať v podstate ľubovoľný finančný nástroj. Daná definícia zrejme nevystihovala podstatu derivátov a bola k 1.5.2004 z tohto zákona vypustená.

Po tejto novelizácii už zákon o cenných papieroch pojem derivát neobsahuje, ale odkazuje sa na zákon číslo 256/2004 Zb., o podnikaní na kapitálovom trhu, v otázke finančných nástrojov iných než sú cenné papiere. Na úvod spomenieme definíciu investičného nástroja podľa § 3 odstavec 1 tohoto zákona:

> Investičnými nástrojmi sú
>
> a) investičné cenné papiere,
>
> b) cenné papiere kolektívneho investovania,
>
> c) nástroje, s ktorými sa obvykle obchoduje na peňažnom trhu (nástroje peňažného trhu),
>
> d) deriváty.

Definícia derivátu sa nachádza v § 3 odst. 3 tohto zákona a hovorí:

> Derivátmi sa pre účely tohoto zákona rozumejú
>
> a) opcie na investičné nástroje uvedené v odstavci 1 písm. a) až c),
>
> b) finančné termínové zmluvy (hlavne futures, forwardy a swapy) na investičné nástroje uvedené v odstavci 1 písm. a) až c),
>
> c) rozdielové zmluvy a obdobné nástroje pre prenos úrokového alebo kurzového rizika,
>
> d) nástroje umožňujúce prenos úverového rizika,
>
> e) iné nástroje, z ktorých vyplýva právo na vysporiadanie v peniazoch a ktorých hodnota sa odvodzuje hlavne z kurzu investičného cenného papiera, indexu, úrokovej miery, kurzu meny alebo ceny komodity.

Podľa tejto právnej úpravy je derivát definovaný jednoznačnejšie, ako tomu bolo v pôvodnom zákone o cenných papieroch. V prvých štyroch prípadoch (písm. a) až d)) sú jednoznačne vymenované niektoré druhy finančných nástrojov, ktoré sú považované za deriváty. Tým sa odstránilo množstvo nejasností plynúcich z predchádzajúcej právnej úpravy. V písm e) je však definícia podobajúca sa predchádzajúcej úprave v zákone o cenných papieroch. Je otázne či formuláciou „právo na vysporiadanie v peniazoch“ sa rozumie toto vysporiadanie v budúcnosti. Stále však oproti medzinárodným účtovným štandardom chýba požiadavok na nízku počiatočnú investíciu do derivátu. Naďalej preto môže táto definícia spôsobovať problémy pri správnej klasifikácii derivátov.

S definíciou pojmu finančný derivát je možné sa stretnúť ešte v Devízovom zákone číslo 219/1995 Zb., v znení neskorších predpisov. Z tejto definície plynie, že jej použiteľnosť je obmedzená len pre účely tohoto zákona. Navyše je táto definícia veľmi úzka, keďže finančným derivátom sa podľa nej rozumejú len „peniazmi oceniteľné práva a záväzky odvodené od devízových hodnôt peňažných prostriedkov v cudzej mene a zahraničných cenných papierov". Vidíme, že aj táto definícia obsahuje nedostatky spomenuté už v predchádzajúcich odstavcoch, tj. nepožaduje vysporiadanie v budúcnosti ani minimálne počiatočné náklady. Navyše pokladá za deriváty len práva a záväzky odvodené od peňažných prostriedkov v cudzej mene alebo od zahraničných cenných papierov, čo zrejme súvisí s jej obmedzeným využitím v rámci Devízového zákona.

Účtovanie derivátov

Deriváty sú nástroje, ktoré reagujú na pohyby hodnoty podkladových nástrojov výraznejšie ako samotné podkladové nástroje. Ich správne účtovné zachytenie je preto veľmi žiadúce. Preto sa vo všeobecnosti o derivátoch vždy účtuje v reálnych hodnotách. Hovorí o tom zákon číslo 563/1991 Zb., o účtovníctve, v znení neskorších predpisov. Pritom pri vzniku účtovného prípadu (tj. pri jeho nadobudnutí) je derivát podľa § 25 odst. 1 písm. f) ocenený nadobúdacou cenou[1]:

> Z jednotlivých zložiek majetku a záväzkov sa oceňujú
>
> f) podiely, cenné papiere a deriváty nadobúdacími cenami.

Pritom nadobúdacou cenou sa podľa odst. 4 písm. a) toho istého paragrafu rozumie cena, za ktorú bol majetok nadobudnutý a náklady s jeho nadobudnutím súvisiace. Ku koncu účtovného obdobia, alebo k inému dňu, kedy sa účtovná uzávierka zostavuje, sa deriváty oceňujú reálnou hodnotou, ako o tom hovorí § 27 odst. 1, písm. b) zákona o účtovníctve:

> Z jednotlivých zložiek majetku a záväzkov k okamihu ocenenia podľa § 24 odst. 2 písm. b) sa reálnou hodnotou oceňujú
>
> b) deriváty.

Definíciu reálnej hodnoty ponúka § 27 odst. 4:

> Pre účely tohoto zákona sa ako reálna hodnota použije
>
> a) tržná hodnota,
>
> b) ocenenie kvalifikovaným odhadom alebo posudkom znalca v prípade, ak tržná hodnota nie je k dispozícii alebo táto nedostatočne predstavuje reálnu

[1] V češtine ide o *pořizovací cenu*.

hodnotu; metódy ocenenia použité pri kvalifikovanom odhade alebo posudku znalca musia zaistiť primerané priblíženie sa k tržnej hodnote,

c) ocenenie stanovené podľa zvláštnych právnych predpisov v prípade, ak sa nedá postupovať podľa písmen a) a b).

Na tomto mieste pripomenieme, že spôsob účtovania i definícia reálnej hodnoty sú konzistentné s medzinárodnými účtovnými štandardmi, ako uvidíme v kapitole 1.2. Zákon o účtovníctve ďalej rozvádzajú vyhlášky. Existuje šesť vyhlášok, ktoré na tento zákon nadväzujú. Každá z týchto vyhlášok sa pritom vzťahuje na inú skupinu subjektov, a to konkrétne na:

- podnikateľov,
- finančné inštitúcie,
- poisťovne,
- zdravotné poisťovne,
- účtovné jednotky, ktorých hlavným predmetom činnosti nie je podnikanie,
- územné samosprávne celky, príspevkové organizácie, štátne fondy a organizačné zložky štátu.

Pre úplnosť ešte uvedieme, že poisťovňami sa zaoberá vyhláška čislo 502/2002 Zb., ktorou sa prevádzajú niektoré ustanovenia zákona č. 563/1991 Zb., o účtovníctve, v znení neskorších predpisov, pre účtovné jednotky, ktoré sú poisťovňami. Táto právna norma pritom definuje, do ktorých účtovných skupín by sa mali deriváty účtovať, aké prípadné podrozvahové účty pri účtovaní derivátov sa majú použiť. Tiež definuje požiadavky na zverejnenie metódy ocenenia derivátov v rámci účtovnej uzávierky.

Ďalšími normami, ktoré sa venujú účtovaniu derivátov sú České účtovné štandardy. V krátkosti si preto zhrnieme i dôsledky, ktoré z nich plynú. České účtovné štandardy sa delia opäť na šesť skupín, podľa subjektov, ktoré o derivátoch účtujú. Členenie pritom vychádza z vyhlášok, ktoré prevádzajú zákon o účtovníctve (viz. vyššie).

Najprepracovanejšími štandardmi, pokiaľ ide o deriváty, sú České účtovné štandardy pre finančné inštitúcie. Konrétny štandard, ktorý sa derivátmi zaoberá je štandard číslo 110. Štandardy pre iné inštitúcie v oblasti derivátov z tohoto štandardu vychádzajú, prípadne sa naňho odkazujú.[2] V stručnosti preto tento štandard rozoberieme. Na úvod treba povedať, že tento štandard ponúka najúplnejšiu definíciu derivátu v českom právnom prostredí. Definícia pritom vychádza z medzinárodných účtovných štandardov a je preto s nimi úplne konzistentná:

[2] To platí aj pre účtovné štandardy pre poisťovne.

> Derivátom sa pre účely účtovníctva rozumie finančný nástroj (finančným nástrojom sa rozumie akákoľvek právna skutočnosť, na ktorej základe vzniká finančné aktívum jedného subjektu a finančný záväzok alebo kapitálový nástroj iného subjektu) súčasne splňujúci tieto podmienky:
>
> a) jeho reálna hodnota se mení v závislosti na zmene úrokovej sadzby, ceny cenného papiera, ceny komodity, menového kurzu, cenového indexu, na úverovom hodnotení (ratingu) alebo indexe, resp. v závislosti na inej premennej (tzv. podkladovom aktíve),
>
> b) ktorý v porovnaní s ostatnými typmi kontraktov, v ktorých je založená podobná reakcia na zmeny tržných podmienok, vyžaduje malú alebo nevyžaduje žiadnu počiatočnú investíciu,
>
> c) ktorý bude vysporiadaný v budúcnosti, pričom doba zjednania obchodu do jeho vysporiadania je u neho dlhšia ako u spotovej operácie.

Štandard ďalej vymenúva nástroje, ktoré sa za deriváty nepovažujú. Ide napríklad o repo obchody, zmluvy o nákupe, predaji a prenájme hmotného a nehmotného majetku a zásob, ďalej zmluvy o nákupe a predaji vlastných akcií a zmluvy, ktoré vyžadujú úhradu v súvislosti s klimatickými, geologickými a inými faktormi, ktoré sú obvykle považované za poistky.

Ďalej štandard delí deriváty na určené k obchodovaniu a zaisťovacie deriváty. Z hľadiska podkladových nástrojov ich delí na úrokové, menové, akciové, komoditné a úverové a ich kombinácie. Podľa tohto štandardu je nutné zmeny reálnych hodnôt derivátov účtovať do nákladov resp. výnosov k dátumu precenenia derivátu.

Uvedieme ešte požiadavky týkajúce sa zaisťovacieho účtovníctva plynúce z tohoto štandardu. Začneme definíciou zaisťovacieho derivátu z odst. 17 tohoto štandardu:

> Zaisťovacími derivátmi sa rozumejú deriváty, ktoré splňujú súčasne tieto podmienky:
>
> a) odpovedajú stratégii účtovnej jednotky v riadení rizík,
>
> b) na počiatku zaistenia je zaisťovací vzťah formálne zdokumentovaný, dokumentácia obsahuje identifikáciu zaisťovaných a zaisťovacích nástrojov, jednoznačné vymedzenie rizika, ktoré je predmetom zaistenia, prístup k zisťovaniu a doloženie efektívnosti zaistenia,
>
> c) zaistenie je efektívne, ak v priebehu zaisťovacieho vzťahu budú zmeny reálnych hodnôt alebo peňažných tokov zaisťovacích nástrojov odpovedajúce zaisťovanému riziku, príp. celkové zmeny reálnych hodnôt alebo peňažných tokov zaisťovacích nástrojov, v rozmedzí 80% až 125% zmien reálnych hodnôt alebo peňažných tokov zaisťovaných nástrojov odpovedajúcich zaisťovanému riziku. Účtovná jednotka zisťuje, či je zaistenie efektívne na počiatku zaistenia a ďalej efektívnosť zaistenia posudzuje aspoň k dátumu zostavenia riadnej, mimoriadnej a medzitýmnej účtovnej uzávierky a k dátumu zostavenia výkazov podľa zvláštnych právnych predpisov,

d) v prípade zaistenia peňažných tokov musí byť očakávaná transakcia, ktorá je predmetom zaistenia vysoko pravdepodobná a musí predstavovať riziko, že v peňažných tokoch dôjde k zmenám, ktoré ovlivnia zisk alebo stratu.

Štandard tiež rozoznáva viacero typov zaisťovacích vzťahov. Ide o zaistenie reálnej hodnoty, zaistenie peňažných tokov, prípadne o zaistenie čistej investície spojenej s cudzomenovými účasťami s rozhodujúcim alebo podstatným vplyvom, prípadne zahraničnej organizačnej zložky. Z každého z týchto zaisťovacích vzťahov potom plynú špecifické účtovné metódy.

Pri zaistení reálnou hodnotou sú zisky a straty zo zaisťovacích derivátov súvisiace so zaisťovaným rizikom účtované do nákladov resp. výnosov. Rovnako sú na účty nákladov a výnosov účtované zmeny reálnej hodnoty zaisťovaných nástrojov, a to i v prípade, že tieto sú oceňované nadobúdacou cenou. Pre účtovnú jednotku z tohoto postupu plynú jednoznačné výhody. Predstavme si, že účtovná jednotka účtuje o nejakých záväzkoch v nadobúdacích cenách. Manažment s ekonomickým pohľadom (tj. nie účtovným) však chápe riziká spojené s pohybom reálnej hodnoty týchto záväzkov a chce zaistiť riziká plynúce z týchto pohybov. Bez možnosti zaisťovacieho účtovníctva by jeho snaha viedla k značnej volatilite hospodárskeho výsledku spoločnosti (zmena hodnoty zaisťovacích nástrojov by bola účtovaná do nákladov resp. výnosov; na druhej strane by však o zmene hodnoty zaisťovaných nástrojov takto účtované nebolo), aj napriek tomu, že manažment sa správa ekonomicky správne a spoločnosť je zdravá.

Pri zaistení peňažných tokov sú zisky a straty zo zaisťovacích derivátov súvisiace so zaisťovaným rizikom účtované na rozvahové účty. Pokiaľ v dôsledku zaistenej očakávanej transakcie dôjde k zaúčtovaniu finančného aktíva alebo finančného záväzku, potom sa súvisiace zisky alebo straty účtované na rozvahových účtoch účtujú na účty nákladov alebo výnosov v rovnakých obdobiach, kedy sú zúčtovávané náklady resp. výnosy spojené so zaisťovanými nástrojmi.

Zaistením čistých investícií do cudzomenových účastí s rozhodujúcim alebo podstatným vplyvom sa potom rozumie zaistenie sa proti menovému riziku plynúcemu z týchto investícií.

Vo svojom závere štandard 110 hovorí o vložených derivátoch. V niektorých prípadoch totiž derivát môže byť časťou tzv. hostiteľského nástroja. Takýto derivát je potom nutné od hostiteľského nástroja oddeliť, ak splňuje všetky nasledujúce podmienky:

a) ekonomické vlastnosti a riziká vloženého derivátu nie sú v tesnom vzťahu s ekonomickými vlastnosťami a rizikami hostiteľského nástroja,

b) finančný nástroj s rovnakými podmienkami ako vložený derivát by ako samostatný nástroj splňoval definíciu derivátu,

c) hostiteľský nástroj nie je oceňovaný reálnou hodnotou alebo je oceňovaný reálnou hodnotou, ale zmeny z ocenenia sú účtované na rozvahovom účte.

Na záver tejto časti ešte podotkneme, že vzorom a predlohou Českých účtovných štandardov v otázke derivátov boli medzinárodné účtovné štandardy. Preto množstvo definícií, postupov a metód je s medzinárodnými štandardmi v súlade.

Deriváty v poisťovníctve

Ako bolo uvedené na začiatku tejto kapitoly, zákon o poisťovníctve[3] a jeho prevádzacia vyhláška[4] neobsahujú definíciu derivátov, hovoria však niečo o ich použití. Hlavným obmedzním plynúcim pre poisťovne je možnosť použitia derivátov v rámci finančného umiestnenia technických rezerv. Podľa § 21a odst. 2 písm. c) sú zaisťovacie deriváty súčasťou finančného umiestnenia poisťovne. Ako zaisťovacie deriváty pritom zákon chápe deriváty, ktoré podľa § 21a odst. 3 spĺňajú tieto podmienky:

a) uľahčujú riadenie investičných rizík poisťovne alebo zaisťovne,

b) od začiatku vzniku zaisťovacieho vzťahu sú písomne určené zaisťované a zaisťovacie nástroje, vymedzené investičné riziká, ktoré sú predmetom investičného zaistenia, a spôsob zisťovania a doloženia efektívnosti tohoto zaistenia,

c) investičné zaistenie je efektívne; poisťovňa alebo zaisťovňa je povinná zisťovať efektívnosť investičného zaistenia priebežne, bližšie podmienky zisťovania efektívnosti investičného zaistenia stanoví Česká národní banka vyhláškou.

Ako vidíme, do finančného umiestnenia můžu byť zahrnuté len deriváty, ktoré zaisťujú investičné riziká poisťovne. Nie je preto možné do finančného umiestnenia zahrnovať deriváty, ktoré zaisťujú záväzky poisťovne, ani deriváty určené k obchodovaniu. Potvrdzuje to i vyhláška k tomuto zákonu, ktorá v § 4 odst. 2 písm. c) obmedzuje iba zaisťovanie nástrojov[5] vo finančnom umiestnení technických rezerv. Ďalej tiež obmedzuje objem týchto derivátov, keď deriváty ako položka finančného umiestnenia nesmú prekročiť 5% celkových technických rezerv.

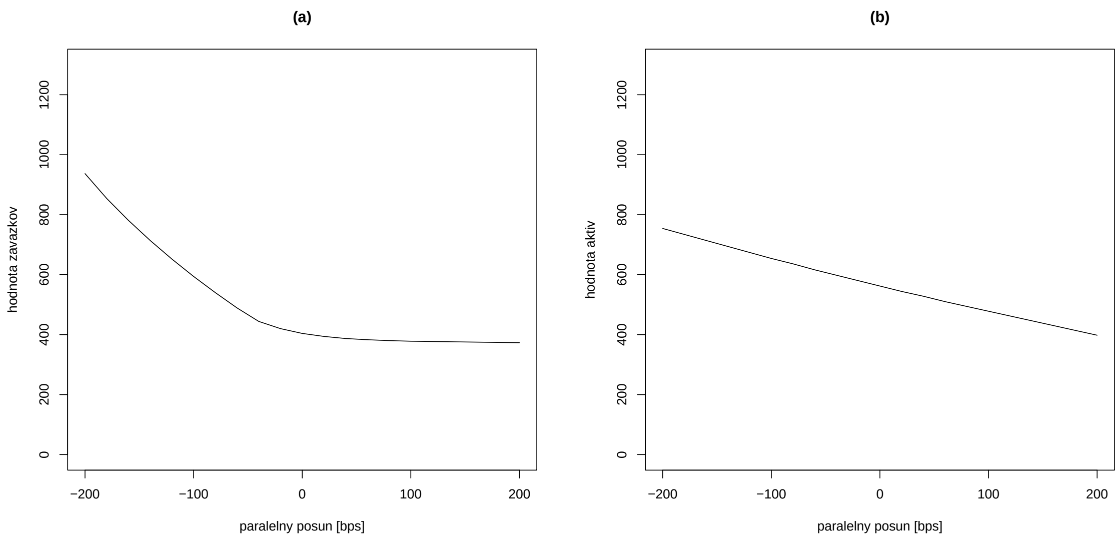
V § 5 potom vyhláška stanovuje podmienky zisťovania efektívnosti investičného zaistenia. Zaistenie je podľa tohto paragrafu považované za efektívne, ak zmeny reálnej hodnoty odpovedajúce zaistenému riziku u derivátov sa pohybujú v rozmedzi 80% až 125% zmien reálnych hodnôt zaisťovaných nástrojov odpovedajúcich zaisťovanému riziku. Efektivita zaistenia pritom musí byť sledovaná priebežne a to aspoň k dátumom zostavovania účetnej uzávierky a tiež k dátumu výkazu o tvorbe a výške rezerv a skladbe finančného umiestnenia (§ 13 odst. 7 zákona o poisťovníctve). Výsledky zisťovania efektívnosti sú potom súčasťou výkazu o tvorbe a výške rezerv a skladbe finančného umiestnenia.

Žiadna právna norma, podľa dostupných informácií, však poisťovniam nezakazuje použitie derivátov v rámci vlastného kapitálu. Motiváciou manažmentu k takémuto kroku môže byť zaistenie pohybov reálnych hodnôt vložených opcií a garancií v poistných produktoch (tj. v záväzkoch poisťovne). Situáciu si popíšeme na dvoch príkladoch.

[3]Zákon číslo 363/1999 Zb., o poisťovníctve, v znení neskorších predpisov.

[4]Vyhláška číslo 303/2004 Zb., ktorou sa prevádzajú niektoré ustanovenia zákona o poisťovníctve, v znení neskorších predpisov.

[5]Zoznam možných zaisťovaných nástrojov je dlhý, odkážeme sa preto na § 4 odst. 1 a odst 2 písm. a) vyhlášky, kde je tento zoznam uvedený.



Obrázok 1.1: (a) Hodnota poistných záväzkov životnej poisťovne v závislosti na paralelnom posune výnosovej krivky. (b) Hodnota finančného umiestnenia v závislosti na paralelnom posune. Nezávisle premenná je udávaná v bázických bodoch (bps), kde 1 bps = 0,01 %.

Príklad 1.1. Predstavme si, že modelová poisťovňa má portfólio poistných kontraktov, ktorého podstatnú časť tvoria bežne platené životné poistky s podielom na zisku z investovania. Zároveň poisťovňa dokáže tieto kontrakty dostatočne presne oceniť a dokáže z nich oddeliť a tiež oceniť vložené opcie a garancie. Jej cieľom je zaistiť sa aspoň proti prípadným paralelným pohybom výnosovej krivky. Pritom hodnotu poistných záväzkov v závislosti na paralelnom pohybe výnosovej krivky ilustruje obrázok 1.1 (a). Oproti záväzkom má poisťovňa finančné umiestnenie, ktoré jej dovoľuje vyhláška. Prevažnú časť tohto finančného umiestnenia obvykle predstavujú dlhopisy. Citlivosť tržnej hodnoty finančného umiestnenia na pohyby úrokových mier ilustruje obrázok 1.1 (b).

Citlivosť hodnoty dlhopisov na pohyb výnosovej krivky je však vo všeobecnosti nižšia ako citlivosť poistných kontraktov s vloženými derivátmi, čo je možné vidieť pri porovnaní obrázkov 1.1 (a) a 1.1 (b). Keďže cieľom modelovej spoločnosti je zaistiť sa proti paralelným pohybom výnosovej krivky, nakúpi do vlastného kapitálu deriváty, ktorých citlivosti odpovedajú derivátom vloženým v poistných kontraktoch.

Predpokladajme teraz, že reálna hodnota poistných záväzkov je vyššia ako minimálna hodnota požadovaná regulátorom. Podľa smernice [17] teda poisťovňa účtuje o poistných záväzkoch v ich reálnych hodnotách.

Poisťovňa je teda zaistená proti paralelným pohybom výnosovej krivky. Na druhej strane má však jej postup aj jednu podstatnú nevýhodu – v prípade významného pohybu úrokových sadzieb smerom nadol vzrastie významne hodnota garancií v poistných produktoch. Na druhej strane vzrastie rovnakou mierou hodnota zaisťovacích derivátov vo vlastnom kapitále spoločnosti. Problémom je, že objem finančného umiestnenia zareaguje miernejšie a môže sa následne ukázať ako nedostatočný. Spoločnosť teda bude nútená navyšovať objem finančného umiestnenia z vlastných zdrojov. Prípadne bude nútená deriváty vo vlastnom kapitále predať a nakúpiť iné aktíva splňujúce limity vyhlášky. To však pre spoločnosť môže znamenať zvýšené transakčné náklady.

Záverom dodajme, že tento postup je v praxi použiteľný, limitujú ho však skutočnosti spomenuté vyššie. Naopak výhodou vyloženej stratégie pre poisťovňu je, že zníži volatilitu hospodárskeho výsledku. Pohyby reálnych hodnôt poistných záväzkov sú totiž kompenzované pohybom reálnych hodnôt derivátov vo vlastnom kapitále.

Príklad 1.2. Uvažujme rovnakú situáciu ako v predchádzajúcom príklade avšak s tým rozdielom, že reálna hodnota poistných záväzkov spoločnosti je nižšia ako ich minimálna hodnota požadovaná regulátorom. Poisťovna o ich hodnote preto účtuje v tejto minimálnej hodnote, ako vyplýva z [17]. K problémom v predchádzajúcom príklade pribudne ďalší. Pri paralelnom pohybe úrokových mier dôjde k zmene reálnej hodnoty záväzkov i zaisťovacích derivátov, ktoré sa vzájomne kompenzujú. Do hospodárskeho výsledku sa však premietnu iba zmeny hodnoty zaisťovacích derivátov. Ustanovenia účtovného štandardu 110 o zaisťovacom účtovníctve sa totiž v tomto prípade nedajú použiť, keďže poistné kontrakty sa nedajú chápať ako záväzky, o ktorých sa účtuje v nadobúdacích cenách.

Aj napriek tomu, že poisťovňa je ekonomicky zdravá a správa sa obozretne, bude teda jej počínanie viesť k vysokej volatilite hospodárskeho výsledku.

Ako sme videli v tejto kapitole, právne úpravy týkajúce sa derivátov sú v českej legislatíve značne roztrieštené. Dokladom toho sú napríklad rôzne definície tohoto pojmu v rôznych právnych úpravách, ale tiež rôzne účtovné nakladanie s derivátmi v rôznych druhoch spoločností. Rovnako v oblasti poisťovníctva existujú úpravy, ktoré komplikujú riadenie rizík poisťovní, ako bolo ukázané na príkladoch. So zdokonaľovaním oceňovacích postupov pri poistných produktoch a tiež s postupujúcim pochopením vložených derivátov v nich sa však dá očakávať rastúci tlak poistného sektora na zmeny niektorých legislatívnych úprav. Dôležitým impulzom tiež môže byť zavedenie konceptu Solvency II v Českej Republike.

1.2 Medzinárodné účtovné štandardy

Ako sme uviedli už v časti o Českých účtovných štandardoch (ČÚS), ich predlohou sú medzinárodné účtovné štandardy (IFRS). Množstvo ustanovení českých štandardov preto kopíruje ustanovenia v medzinárodných štandardoch. Preto, aby sme sa neopakovali, uvedieme na tomto mieste iba stručný prehľad ustanovení z IFRS týkajúcich sa derivátov.

Začneme definíciou derivátu, ktorá sa nachádza v štandarde IAS 39 – Finančné nástroje: účtovanie a oceňovanie:

> Derivát je finančný nástroj alebo iná zmluva spadajúca do pôsobnosti tohto štandardu so všetkými tromi nasledujúcimi znakmi:

a) jeho hodnota sa mení v závislosti na zmene úrokovej sadzby, ceny finančného nástroja, ceny komodity, menového kurzu, cenového indexu, na úverovom ratingu alebo indexe, resp. v závislosti na inej premennej (tzv. „podkladové aktíva“);

b) nevyžaduje žiadnu počiatočnú investíciu alebo počiatočnú investíciu nižšiu než aká by byla požadovaná u ostatných typov zmlúv, u ktorých by bolo možné očakávať podobnú reakciu na zmeny tržných podmienok;

c) bude vysporiadaný v budúcnosti.

Vidíme, že táto definície je plne konzistentná s definíciou, ktorú poskytujú České účtovné štandardy. Drobnou odlišnosťou oproti ČÚS je definícia reálnej hodnoty:

> Reálna hodnota je čiastka, za ktorú by mohlo byť v transakciách medzi znalými a ochotnými stranami za obvyklých podmienok vymenené aktívum alebo vyrovnaný záväzok.

V implementačnej príručke k tomuto štandardu je potom vysvetlené, čo sa dá za reálnu honotu nástroja považovať. Podobne ako v ČÚS je to v prvom rade tržná cena, ak je daný nástroj kótovaný na aktívnom trhu. V prípade, ak takáto cena nie je dostupná, používa sa pri ocenení oceňovacia technika. Požiadavky na túto techniku je tiež možné nájsť v implementačnej príručke štandardu.

IAS 39 rozoberá tiež problematiku vložených derivátov a stanovuje, za akých podmienok je nutné derivát od hostiteľského nástroja oddeliť.

Taktiež dôležité sú časti týkajúce sa zaisťovacieho účtovníctva. Štandard rozoznáva opäť tri druhy zaisťovacieho vzťahu, a to zaistenie reálnej hodnoty, zaistenie peňažných tokov a tiež zaistenie čistej investície do zahraničnej aktivity. Tieto časti boli opäť predlohou k ČÚS, a tak mnohé ustanovenia týkajúce sa definície zaisťovacích i zaisťovaných nástrojov, efektivity zaisťovacieho vzťahu, zaisťovacieho účtovníctva i požiadavkov, ktoré sa týkajú zverejňovania informácií týkajúcich sa zaistenia sú podobné ako pri ČÚS.

Treba však zdôrazniť, že medzinárodné štandardy sú prepracovanejšie a tiež obsahujú viac podrobností oproti ČÚS. Pre konkrétne náležitosti preto čitateľa odkazujeme priamo na tieto medzinárodné štandardy.

Kapitola 2

Finančné deriváty a spôsob ich ocenenia

V tejto kapitole uvedieme prehľad najčastejšie používaných finančných derivátov. Postupne sa budeme venovať forwardom, swapom, a opciám. Budú nás zaujímať deriváty uplatniteľné pri riadení finančných rizík poisťovní, nebudeme sa teda venovať úverovým, komoditným a iným typom derivátov.

V prípade, že sa s konkrétnym finančným nástrojom aktívne obchoduje na nejakom aktívnom trhu, používa sa pri jeho ocenení reálnou hodnotou tržná cena indikovaná na tomto trhu. Častokrát však, napríklad u OTC kontraktov, aktívny trh neexistuje a je treba voliť iný spôsob ocenenia. Budeme preto v nasledujúcom prehľade uvádzať aj výpočet reálnej hodnoty derivátov.

Pri oceňovaní sa často používa metóda diskontovania peňažných tokov. My budeme pre jednoduchosť používať diskontovanie bezrizikovou, spojite úročenou úrokovou mierou. Je nutné upozorniť, že tento predpoklad je zjednodušujúci. Vo všeobecnosti je možné používať bezrizikovú mieru, ako napovedá už jej názov, len pri oceňovaní bezrizikových (resp. málo rizikových) investícií. Za také možno považovať napríklad štátne cenné papiere, prípadne finančné nástroje kreditne silných súkromných spoločností (s vysokým ratingom), u ktorých je riziko nesplatenia záväzku veľmi nízke. Naopak, ak by sme ocenili inštrument kreditne slabšej spoločnosti bezrizikovou mierou, dospeli by sme k cene, ktorá sa môže významne líšiť od prípadnej ceny pozorovateľnej na trhu. Vysvetlením tejto skutočnosti je averzia k riziku u väčšiny investorov na trhu. Investori chcú byť za prípadné vyššie riziko kompenzovaní práve takýmto cenovým rozdielom. Tento rozdiel je možné vyjadriť kreditným spreadom, tj. určitou prirážkou nad bezrizikovú úrokovú mieru. Bližšie k vysvetleniu kreditných spreadov napr. v [6].

Pre účely oceňovania budeme predpokladať nasledovné:

- kontrakty sú zjednávané bez transakčných nákladov,
- všetky aktíva sú neobmedzene deliteľné,

- obchodovanie prebieha spojite,
- všetci účastníci trhu si požičiavajú i investujú za rovnakú bezrizikovú úrokovú mieru,
- všetci účastníci trhu podliehajú rovnakej dani z príjmu (v celom ďalšom texte budeme túto daň ignorovať, inými slovami – budeme ju považovať za nulovú pre všetkých účastníkov trhu),
- neexistuje úverové riziko,
- na trhu neexistuje arbitráž.

Tieto predpoklady sú štandardne používané pri oceňovaní množstva finančných nástrojov. Sú však určitým zjednodušením skutočnej situácie na trhu. Napriek tomu, modely vychádzajúce z týchto predpokladov vedú k veľmi dobrej aproximácii cien pozorovaných na trhu a boli mnohokrát úspešne testované v praxi.

2.1 Úrokové miery

V celej tejto práci budeme pri diskontovaní budúcich peňažných tokov používať spojité úročenie. Predpokladajme bezrizikový bezkupónový dlhopis, ktorý v čase T vypláca jednu peňažnú jednotku. Hodnotu takéhoto dlhopisu v čase $t \leq T$ budeme označovať $P(t,T)$. Z definície zrejme platí $P(T,T) = 1$. Priemernú úrokovú intenzitu takéhoto dlhopisu v časovom intervale (t,T) označíme $R(t,T)$. Teda platí

$$P(t,T) = \mathrm{e}^{-(T-t)\ R(t,T)}, \qquad t < T, \tag{2.1}$$

a preto

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}, \qquad t < T. \tag{2.2}$$

$R(t,T)$ v čase t nazývame spotovým výnosom pre obdobie do času T. $R(t,T)$ ako funkcia doby splatnosti T, pri pevnom t, reprezentuje výnosovú krivku v čase t.

Okamžitú úrokovú intenzitu v čase t označíme r_t a definujeme nasledovne:

$$r_t = \lim_{\Delta t \to 0+} -\frac{\ln P(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T)\bigg|_{T=t}. \tag{2.3}$$

Hodnota r_t reprezentuje úrok, ktorý by sme obdržali pri investovaní peňažnej jednotky na infinitezimálny časový okamih v čase t. Pre vývoj hodnoty peňažného kapitálu B_t teda môžme písať

$$dB_t = r_t\ B_t\ dt. \tag{2.4}$$

To nás, v prípade, že poznáme $r_s,\ s \in [t,T]$ a za predpokladu $B_T = 1$, oprávňuje písať

$$P(t,T) = B_t = \exp\left(-\int_t^T r_s\, ds\right), \qquad t < T. \tag{2.5}$$

Forwardové úrokové miery sú miery implikované spotovými sadzbami v čase t, udávajúce výnos v časovom intervale v budúcnosti. Nech $t < T_1 < T_2$, označme ako $F(t,T_1,T_2)$ forwardovú úrokovú sadzbu v čase t, vzťahujúcu sa k časovému intervalu (T_1,T_2). Potom platí:

$$\mathrm{e}^{(T_2-T_1)F(t,T_1,T_2)} = \mathrm{e}^{(T_2-t)R(t,T_2)-(T_1-t)R(t,T_1)}, \qquad t < T_1 < T_2, \tag{2.6}$$

a teda, s využitím (2.2)

$$\begin{aligned} F(t,T_1,T_2) &= \frac{(T_2-t)R(t,T_2)-(T_1-t)R(t,T_1)}{(T_2-T_1)} \\ &= -\frac{\ln P(t,T_2) - \ln P(t,T_1)}{T_2-T_1}, \qquad t < T_1 < T_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Zdôvodnením vzťahu (2.6) je nasledujúca úvaha. Nech $t < T_1 < T_2$, v čase t kúpime bezkupónový dlhopis so splatnosťou v T_1 za cenu $\exp^{-(T_1-t)R(t,T_1)}$ a zároveň predáme dlhopis so splatnosťou v čase T_2 v rovnakej hodnote. Celkové náklady na zostavenie tohto portfólia sú nulové. V čase T_1 nastane splatnosť prvého dlhopisu a sme nútení zaplatiť $\mathrm{e}^{-(T_1-t)R(t,T_1)}\,\mathrm{e}^{(T_1-t)R(t,T_1)} = 1$. V čase T_2 naopak obdržíme platbu vo výške $\mathrm{e}^{-(T_1-t)R(t,T_1)}\,\mathrm{e}^{(T_2-t)R(t,T_2)}$. Forwardovou investíciou jednej peňažnej jednotky na interval (T_1,T_2) sme dosiahli jej zhodnotenie na $\mathrm{e}^{(T_2-t)R(t,T_2)-(T_1-t)R(t,T_1)}$. To zodpovedá zhodnoteniu hotovosti pri konštantnej úrokovej miere $F(t,T_1,T_2)$ počas tohto obdobia, čo je matematicky vyjadrené vzťahom (2.6).

Podobne ako sme dospeli k okamžitej úrokovej intenzite r_t, je možné limitným prechodom definovať i forwardovú intenzitu $f(t,T)$ nasledujúcim spôsobom:

$$f(t,T) = \lim_{\Delta T \to 0+} -\frac{\ln P(t,T+\Delta T)}{\Delta T} = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T). \tag{2.8}$$

Zrejme pritom platí, že $r_t = f(t,t)$. Analogicky so vzťahom (2.5) je tiež možné vyjadriť závislosť ceny dlhopisu na vývoji forwardových intenzít. Za predpokladu, že poznáme $f(t,s), s \in [t,T]$ máme

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\, ds\right), \qquad t < T. \tag{2.9}$$

2.2 Oceňovanie dlhopisov

Dlhopisy s pevnými kupónovými platbami

Predpokladajme, že sme vlastníkmi bezrizikového dlhopisu s pevným výnosom. Platby sú teda vopred definované a isté. Predpokladajme, že tento dlhopis nám prinesie ešte n platieb $CF_1,\ CF_2,\ \ldots,\ CF_n$ splatných postupne v časoch $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Takýto dlhopis je zrejme možné rozložiť na sériu bezkupónových dlhopisov so splatnosťami v časoch $t_1,\ t_2,\ \ldots\ ,t_n$ a nominálnymi hodnotami $CF_1,\ CF_2,\ \ldots,\ CF_n$. Tieto sme na základe vyššie uvedeného schopní oceniť. Pre cenu dlhopisu P_t v čase $t < t_1$ teda platí:

$$P_t = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-R(t,t_i)\,(t_i-t)} CF_i. \tag{2.10}$$

Rovnaký postup je zrejme použiteľný na ocenenie akejkoľvek série vopred známych bezrizikových platieb.

Dlhopisy s premenlivými kupónovými platbami

U dlhopisov s premenlivým kupónom je situácia trochu odlišná. V každom momente dokážeme presne určiť výšku len jednej kupónovej platby (tej najbližšej), výška ostatných platieb bude závisieť od situácie na trhu v budúcnosti, a preto o nich v súčasnosti nič nevieme.

V tejto časti sa obmedzíme na špeciálnu skupinu pohyblivých dlhopisov, a síce dlshopisov vyplácajúcich bezrizikovú mieru odpovedajúcu danému úrokovému obdobiu. Presnejšie, dlhopis s jednotkovou nominálnou hodnotou generuje v časoch $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ postupne sériu pohyblivých úrokových platieb vo výške $R_j(t_0,t_1)AF(t_0,t_1)$, $R_j(t_1,t_2)AF(t_1,t_2),\ \ldots,\ R_j(t_{n-1},t_n)AF(t_{n-1},t_n)$, kde $t_0 < t_1$ je čas začiatku prvého kupónového obdobia, $R_j(u,v)$ udáva jednoducho úročenú spotovú bezrizikovú sadzbu v čase u na obdobie o dĺžke $v-u > 0$ a $AF(u,v)$ predstavuje akruálny faktor, ktorý vyjadruje dĺžku obdobia $v-u > 0$ podľa použitej konvencie počítania dní v rokoch. Navyše dôjde v čase t_n k splátke istiny, tj. jednej peňažnej jednotky.

Pokúsime sa oceniť tento dlhopis v čase $t \in [t_0,t_1)$. Finančné toky tohoto dlhopisu je možné v čase t replikovať jednoduchou stratégiou – v čase t stačí investovať do bezkupónového dlhopisu so splatnosťou v čase t_1 sumu $(1+R_j(t_0,t_1)AF(t_0,t_1))$ $\mathrm{e}^{-R(t,t_1)\,(t_1-t)}$. Táto investícia produkuje v čase t_1 platbu vo výške $1+R_j(t_0,t_1)AF(t_0,t_1)$. Ako vidíme zreplikovali sme týmto postupom prvú kupónovú platbu premenlivého dlhopisu v čase t_1 a navyše budeme v čase t_1 disponovať jednou peňažnou jednotkou. Jej postupným reinvestovaním na obdobia $(t_1,t_2],\ (t_2,t_3],\ldots,\ (t_{n-1},t_n]$ postupne pri spotových mierach $R_j(t_1,t_2),\ R_j(t_2,t_3),\ldots,\ R_j(t_{n-1},t_n)$ zreplikujeme všetky ostatné kupónové platby oceňovaného dlhopisu i splátku jeho istiny. Náklady na túto stratégiu boli vo výške $(1+R_j(t_0,t_1)AF(t_0,t_1))\,\mathrm{e}^{-R(t,t_1)\,(t_1-t)}$ v čase t, žiadne dodatočné prostriedky už v ďalších obdobiach nebolo nutné investovať. Za predpokladu neexistencie arbitráže na trhu preto nutne musí pre cenu premenlivého dlhopisu v čase t platiť:

$$P_t = (1 + R_j(t_0, t_1)AF(t_0, t_1))\, \mathrm{e}^{-R(t,t_1)\,(t_1-t)}, \qquad t \in [t_0, t_1). \tag{2.11}$$

Samozrejme, v praxi je možné sa stretnúť aj s iným spôsobom určenia kupónovej platby, ako bolo uvedené vyššie. Uveďme zopár príkladov:

1. Dlhopis s premenlivým kupónom, u ktorého je premenlivá tržná sadzba odpovedajúca danému obdobiu navýšená (resp. znížená) o nejakú konštantnú hodnotu. Tj. pri označení aké bolo zavedené vyššie dochádza u dlhopisu s jednotkovým nominálom v čase t_i ku kupónovej platbe vo výške $(R_j(t_{i-1}, t_i) + \delta)\, AF(t_{i-1}, t_i))$, kde δ predstavuje navýšenie, resp. zníženie, tržnej úrokovej sadzby.

2. Ďalším príkladom môže byť dlhopis, u ktorého premenlivá sadzba odpovedajúca úrokovému obdobiu nie je vyplácaná na konci tohoto obdobia, ale priamo na jeho začiatku. Vychádzajúc z nášho označenia a používajúc spojité úročenie teda v čase t_i dochádza u dlhopisu s jednotkovým nominálom k úrokovej platbe $R_j(t_i, t_{i+1})\, AF(t_i, t_{i+1})$; $i = 1, \ldots, n$.

3. Inou možnosťou je, že úroková sadzba nekorešponduje s daným úrokovým obdobím. Napríklad môže dochádzať k polročným platbám, ktoré sú však odvodené od iných ako polročných tržných úrokových platieb. Presnejšie povedané, v čase t_i môže byť platba pri jednotkovom nominále vyjadrená ako $R_j(t_i, t)\, AF(t_i, t_{i+1})$, pričom $t > t_i$ a $t \neq t_{i+1}$; $i = 1, \ldots, n$. Ďalšou alternatívou je, že platba bude vykonaná až na konci úrokového obdobia, tj. k platbe vyššie uvedeného kupónu dôjde až v čase t_{i+1}.

4. Ako posledný príklad uvedieme dlhopis, u ktorého platby sú odvodené od swapových sadzieb na trhu[1]. Nech $S(t, k)$ značí hodnotu spotovej swapovej sadzby v čase t pre k-ročný klasický úrokový swap. V tomto prípade je výška premenlivej platby dlhopisu s nominálnou hodnotou jedna v čase t_{i+1} definovaná ako $S(t_i, k)\, AF(t_i, t_{i+1})$.[2]

Samozrejme, existuje nepreberné množstvo možností, ako počítať kupónovú platbu na základe tržných sadzieb u dlhopisu s premenlivým kupónom. Vyššie uvedené príklady si preto v žiadnom prípade nerobia nárok na úplnosť. Vo všeobecnosti je ocenenie takýchto dlhopisov zložitejšie ako u klasického bezrizikového dlhopisu s premenlivým kupónom.

Začneme prvým prípadom. Predpokladajme, že máme dlhopis s premenlivým výnosom, u ktorého dochádza v čase t_i ku kupónovej platbe vo výške $N\,(R_j(t_{i-1}, t_i) + \delta)\, AF(t_{i-1}, t_i))$, kde N je nominálna hodnota dlhopisu, t_{i-1} je začiatok úrokového obdobia, t_i je jeho koniec, $R_j(t_{i-1}, t_i)$ je spotová jednoducho úročená sadzba vzťahujúca

[1] Bližšie o swapových sadzbách v 2.5

[2] Takýto dlhopis tvorí premenlivú časť swapu s konštantnou splatnosťou, ako uvidíme ďalej.

sa k úrokovému obdobiu a δ je vopred dohodnutý nadvýnos. Pritom $i = 1, \ldots, n$. Zrejme je možné tieto platby rozložiť na platbu klasického premenlivého dlhopisu vo výške $N\,R_j(t_{i-1}, t_i)\ \ AF(t_{i-1}, t_i)$ a nadvýnos $N\,\delta\,AF(t_{i-1}, t_i)$. Platby nadvýnosu sú vopred známe, preto ich hodnota je daná vzťahom (2.10). Hodnota zvyšných platieb je daná vzťahom (2.11) pre ocenenie dlhopisu s premenlivým kupónom.

U ďalších príkladov je situácia komplikovanejšia. Na ich oceňovanie je potrebné používať stochastické finančné modely. Preto v ďalšej podkapitole najprv zavedieme pojmy, označenia a princípy, ktoré budeme pri oceňovaní potrebovať.

2.3 Oceňovanie derivátov

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a časový interval $[0, T]$. Definujme $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$ ako σ-algebru javov, o ktorých vieme v čase t rozhodnúť, či nastali alebo nenastali. Neklesajúcu sústavu javových polí $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t,\, t \in [0, T]\}$ potom môžme interpretovať ako nárast informácií v čase. $\mathcal{F}$ býva často označovaná ako filtrácia, z anglického filtration.

Budeme definovať hodnotu jednej peňažnej jednotky investovanej v čase 0, ktorú v každom okamihu zhodnocujeme bezrizikovou mierou, tj.

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s\ ds\right), \qquad B(0) = 1, \qquad t \in [0, T], \tag{2.12}$$

kde $\{r_t\}_{t \in [0,T]}$ je proces okamžitej úrokovej intenzity. Tento proces pritom môže byť i stochastický. Predpokladajme, že existuje jediná pravdepodobnostná miera Q ekvivalentná s P, pri ktorej je diskontovaná cena ľubovoľného aktíva S daná vzťahom $B(t)^{-1}\,S(t)$ martingalom. Teda platí

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left(B(t)^{-1}\,S(t) | \mathcal{F}_s\right) = B(s)^{-1}\,S(s), \qquad s < t, \qquad s, t \in [0, T]. \tag{2.13}$$

V takomto svete je možné pre každú dohodnutú výplatu derivátu V_T v čase T, závisiacu od hodnoty aktív na trhu, zostrojiť samofinancujúce replikačné portfólio zložené z aktív na trhu a peňažnej hotovosti, ktoré zaručuje v čase T práve výplatu V_T. To, že je takéto portólio možné zostrojiť, plynie z predpokladanej úplnosti trhu. Hodnota takéhoto derivátu v čase $t \in [0, T]$ je potom daná ako

$$V(t) = B(t)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left(B(T)^{-1} V(T) | \mathcal{F}_t\right) \tag{2.14}$$

Hodnotu peňažnej jednotky B_t v tomto prípade nazývame referenčným aktívom, v angličtine numéraire. Podľa [8] je však možné ako referenčné aktívum použiť ľubovoľné aktívum nevyplácajúce počas života dividendy. Predpokladajme, že pri pravdepodobnostnej miere Q sú diskontované ceny aktív $B(t)^{-1}\,S(t)$ martingalmi. Nech $\{N_t\}_{t \in [0,T]}$ je referenčné aktívum neplatiace počas života žiadne dividendy také, že $N_t \neq 0$, $t \in [0, T]$.

V [8] je dokázaná existencia takej pravdepodobnostnej miery Q_N definovanej Radon-Nikodýmovou deriváciou ako

$$\frac{d\mathsf{Q}_N}{d\mathsf{Q}}(T)\bigg|\mathcal{F}_t = \frac{N(T)\,B(t)}{N(t)\,B(T)}, \tag{2.15}$$

pre ktorú platí, že

- miery Q a Q_N sú ekvivalentné,
- relatívne ceny $S(t)/N(t)$ udávajúce cenu aktíva S v jednotkách podkladového aktíva sú martingalmi pri miere Q_N,
- ak je možné oceniť výplatu derivátu V vzhľadom k pravdepodobnostnej miere Q a referenčnému aktívu B, potom je to možné aj vzhľadom k miere Q_N a aktívu N. Pritom ceny i replikačné portfóliá spočítané oboma spôsobmi sú rovnaké.

Platí teda, že

$$V(t) = B(t)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left(B(T)^{-1}V(T)|\mathcal{F}_t\right) = N(t)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_N}\left(N(T)^{-1}V(T)|\mathcal{F}_t\right), \ \ t \in [0,T]. \tag{2.16}$$

Pri ľubovoľnej zmene z referenčného aktíva X na referenčné aktívum Y platí, pri analogickom označení pravdepodobnostných mier:

$$\frac{d\mathsf{Q}_Y}{d\mathsf{Q}_X}(T)\bigg|\mathcal{F}_t = \frac{X(T)\,Y(t)}{X(t)\,Y(T)} \tag{2.17}$$

a

$$V(t) = X(t)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_X}\left(X(T)^{-1}V(T)|\mathcal{F}_t\right) = Y(t)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_Y}\left(Y(T)^{-1}V(T)|\mathcal{F}_t\right), \ \ t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

Ukážme si teraz praktické použitie vyššie vyloženého pri ocenení dlhopisov s premenlivým kupónom z časti 2.2.

Príklad 2.1. Uvažujme dlhopis, u ktorého dochádza k zafixovaniu a výplate premenlivej sadzby v ten istý deň. Dochádza teda k n výplatám v časoch $t_1 < \cdots < t_n$. Pritom v čase $t_i,\ i = 1,\ldots,n$, je výška výplaty $R_j(t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})$, R_j a AF sú definované v 2.2. Hodnota takéhoto dlhopisu je daná vzťahom (2.14):

$$\begin{aligned} V(t) &= B(t)\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left(\sum_{i=1}^{n} B(t_i)^{-1}R_j(t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})\bigg|\mathcal{F}_t\right) && (2.19)\\ &= \sum_{i=1}^{n} B(t)\,\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left(B(t_i)^{-1}R_j(t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})|\mathcal{F}_t\right), \qquad t < t_1. && (2.20) \end{aligned}$$

Zmeníme referenčné aktívum na cenu bezrizikového dlhopisu s maturitou v t_i, vo vzťahu (2.16) teda volíme $N(t) = P(t, t_i)$:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} P(t,t_i)\,\mathsf{E}_{t_i}\left(P(t_i,t_i)^{-1} R_j(t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1}) \middle| \mathcal{F}_t \right) \tag{2.21}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(t,t_i)\,AF(t_i,t_{i+1}) \mathsf{E}_{t_i}\left(R_j(t_i,t_{i+1}) \middle| \mathcal{F}_t \right), \tag{2.22}$$

kde E_{t_i} značí očakávanú hodnotu pri ekvivalentnej rizikovo neutrálnej miere definovanej referenčným aktívom $P(t, t_i)$. Pri úprave sme využili fakt, že $P(t_i, t_i) = 1$, $t_i > 0$ a tiež to, že $AF(t_i, t_{i+1})$ je konštanta a preto je $\mathcal{F}_t$ merateľná.

Označme ako $F_j(t, S, T)$ jednoducho úročenú forwardovú sadzbu v čase t platnú pre obdobie (S, T). To znamená sadzbu, ktorá je definovaná vzťahom

$$1 + F_j(t,S,T)\,AF(S,T) = \frac{P(t,S)}{P(t,T)}, \tag{2.23}$$

$$F_j(t,S,T) = \frac{1}{AF(S,T)} \left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)} - 1 \right), \qquad 0 < t < S < T. \tag{2.24}$$

Pri rizikovo neutrálnej miere T, ktorá je definovaná vzhľadom k referenčnému aktívu $P(t, T)$ je hodnota dlhopisu maturujúceho v čase S v pomere k referenčnému aktívu martingalom. Preto platí

$$\mathsf{E}_{\mathsf{T}}\left(F_j(t,S,T) | \mathcal{F}_u \right) = \mathsf{E}_{\mathsf{T}}\left(\frac{1}{AF(S,T)} \left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)} - 1 \right) \middle| \mathcal{F}_u \right) \tag{2.25}$$

$$= \frac{1}{AF(S,T)} \left(\mathsf{E}_{\mathsf{T}}\left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)} \middle| \mathcal{F}_u \right) - 1 \right) \tag{2.26}$$

$$= \frac{1}{AF(S,T)} \left(\frac{P(u,S)}{P(u,T)} - 1 \right) \tag{2.27}$$

$$= F_j(u,S,T). \tag{2.28}$$

Ukázali sme teda, že pri pravdepodobnostnej miere T je $F_j(t, S, T)$ martingalom. Upravíme ešte výraz $\mathsf{E}_{t_i}\left(R_j(t_i, t_{i+1}) \middle| \mathcal{F}_t\right)$ z (2.22). Znovu pri tom využijeme zmenu referenčného aktíva:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{t_i}\left(R_j(t_i,t_{i+1})\big|\mathcal{F}_t\right) &= \mathsf{E}_{t_i}\left(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})\big|\mathcal{F}_t\right) && (2.29)\\
&= \mathsf{E}_{t_{i+1}}\left(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})\frac{P(t_i,t_i)\,P(t,t_{i+1})}{P(t,t_i)\,P(t_i,t_{i+1})}|\mathcal{F}_t\right) && (2.30)\\
&= \mathsf{E}_{t_{i+1}}\left(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})\frac{1+F_j(t_i,t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})}{1+F_j(t,t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})}\bigg|\mathcal{F}_t\right) && (2.31)\\
&= \frac{\mathsf{E}_{t_{i+1}}\left(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})|\mathcal{F}_t\right)+AF(t_i,t_{i+1})\,\mathsf{E}_{t_{i+1}}(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})^2|\mathcal{F}_t)}{1+F_j(t,t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})}\\
&= \frac{F_j(t,t_i,t_{i+1})+AF(t_i,t_{i+1})\,\mathsf{E}_{t_{i+1}}(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})^2|\mathcal{F}_t)}{1+F_j(t,t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})} && (2.32)
\end{aligned}$$

Zostáva určiť hodnotu výrazu $\mathsf{E}_{t_{i+1}}(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})^2|\mathcal{F}_t)$. Za predpokladu logaritmicko-normálneho rozdelenia veličiny $F_j(t_i,t_i,t_{i+1})$ pri rizikovo neutrálnej miere určenej cenou dlhopisu $P(t,t_{i+1})$ sa dá odvodiť, že

$$\mathsf{E}_{t_{i+1}}(F_j(t_i,t_i,t_{i+1})^2|\mathcal{F}_t) = F_j(t,t_i,t_{i+1})^2\,\mathrm{e}^{\sigma_i^2 t_i}, \tag{2.33}$$

kde σ^2 je volatilita procesu $F_j(t,t_i,t_{i+1})$, $0<t<t_i$ daného Blackovým modelom pri tejto miere. Odvodenie vzťahu (2.33) viz napríklad v [20]. Na záver dosadíme zo vzťahov (2.33) a (2.32) do (2.22) dospievame k výsledku:

$$V(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} P(t,t_i)\,AF(t_i,t_{i+1})\frac{F_j(t,t_i,t_{i+1})+AF(t_i,t_{i+1})\,F_j(t,t_i,t_{i+1})^2\,\mathrm{e}^{\sigma_i^2 t_i}}{1+F_j(t,t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})}\right) \tag{2.34}$$

Príklad 2.2. Uveďme ešte v krátkosti postup výpočtu ceny dlhopisu s jednotkovým nominálom, ktorý v čase t_{i+1} generuje platbu $S(t_i,t_{i+1})\,AF(t_i,t_{i+1})$, kde $S(t_1,t_2)$ značí hodnotu spotovej swapovej sadzby v čase t_1 pre swap začínajúci v čase t_2 a generujúci pevné kupónové platby v časoch $t_2+1,\ \ldots,\ t_2+k$. Zrejme platí

$$\begin{aligned}
S(t_0,t_0)\,A(t_0)+P(t_0,t_n) &= 1, && (2.35)\\
S(t_0,t_0) &= \frac{1-P(t_0,t_n)}{A(t_0)}, && (2.36)
\end{aligned}$$

kde $A(t)=\sum_{i=1}^{n} AF(t_{i-1},t_i)P(t,t_i)$. Ak volíme A za referenčné aktívum, dostávame rizikovo neutrálnu mieru vzhľadom k tomuto aktívu, ktorú označíme A. Platí, že pri tejto miere je swapová sadzba $S(t,t_0)$ martingalom:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{A}}\left(S(t,t_0)|\mathcal{F}_u\right) = S(u,t_0). \tag{2.37}$$

Uvažujme jednotlivú platbu generovanú oceňovaným dlhopisom v čase t_i. Úvahami podobnými ako v predchádzajúcom príklade (viz. [20]) je možné dospieť k vyjadreniu hodnoty tejto platby v čase t:

$$V(t) = AF(t_{i-1}, t_i) \left(S(t, t_{i-1}) + \frac{A(0)}{P(0, t_i)} \operatorname{cov}_{\mathsf{A}} \left[S(t_{i-1}, t_{i-1}), \frac{P(t_{i-1}, t_i)}{A(t_{i-1})} \right] \right) P(0, t_i), \tag{2.38}$$

kde $\operatorname{cov}_{\mathsf{A}}$ značí kovarianciu pri rizikovo neutrálnej miere A. Odvodenie tohoto vzťahu je možné nájsť napríklad v [20]. Pre výpočet kovariancie však potrebujeme poznať združené rozdelenie veličín $S(t_{i-1}, t_{i-1})$ a $\frac{P(t_{i-1}, t_i)}{A(t_{i-1})}$.

Pristúpme teraz k prehľadu niektorých dôležitých finančných derivátov. Budeme tiež popisovať všeobecne akceptované spôsoby oceňovania jednotlivých nástrojov. Podkladom k nasledujúcemu textu boli knihy [7], [11], [12] a [13], v ktorých je možné nájsť prípadné upresňujúce informácie.

2.4 Forwardy

V tejto časti sa budeme venovať forwardovým nástrojom. Forwardový nástroj sa dá obecne popísať ako dohoda dvoch strán na výmenu podkladových aktív k nejakému budúcemu dátumu. Jedným z týchto aktív môže byť napríklad aj pevne daná suma v hotovosti, v tomto prípade sa teda jedná o nákup (resp. predaj) podkladového aktíva za vopred dohodnutú realizačnú cenu, k nejakému budúcemu temínu označovanému často ako splatnosť či maturita forwardu. Kupovaným podkladovým aktívom potom môžu byť najrôznejšie finančné aktíva – dlhopisy, akcie, pevne dané sumy v cudzej mene, pohyblivé sumy v cudzej i domácej mene a podobne. Strana, ktorá sa zaväzuje podkladové aktívum v budúcom termíne kúpiť, sa nazýva kupujúcim forwardu a zaujíma dlhú pozíciu vo forwardovom nástroji. Podobne druhá strana je predávajúcim forwardu a zaujíma krátku pozíciu.

Uvažujme investora, ktorý zaujíma dlhú i krátku pozíciu vo forwardoch s rovnakým podkladovým aktívom, rovnakou forwardovou cenou i maturitou. V dobe maturity bude mať toto portfolio nulovú hodnotu. Preto, za predpokladu neexistencie arbitráže, majú zrejme dlhá a krátka forwardová pozícia rovnakú hodnotu až na znamienko. Ak označíme ako f hodnotu dlhej pozície forwardu, hodnota krátkej pozície je potom $-f$.

Najjednoduchším príkladom forwardu je forward na aktívum, ktoré neprodukuje žiadne finančné toky počas doby trvania forwardového kontraktu. Príkladom môže byť napríklad akcia nevyplácajúca dividendy, bezkupónový dlhopis, prípadne dlhopis, ktorý vypláca kupón až po maturite forwardu. Označme T dobu maturity forwardového kontraktu, S spotovú cenu podkladového aktíva v čase t, K realizačnú cenu. Cena forwardu P_t v čase $t < T$ je potom daná ako

$$P_t = S_t - K\mathrm{e}^{-R(t,T)\ (T-t)}. \tag{2.39}$$

Vzťah (2.39) sa dá zdôvodniť nasledujúcou úvahou. Nech je napríklad $P_t > S_t - K\mathrm{e}^{-R(t,T)\ (T-t)}$, $t < T$. Uvažujme investora, ktorý v čase t:

- zaujal krátku pozíciu vo forwardovom kontrakte,
- kúpil jednotku podkladového aktíva a
- požičal si hotovosť $K\mathrm{e}^{-R(t,T)\ (T-t)}$ na dobu $T-t$ za bezrizikovú úrokovú mieru.

V čase T má toto portfolio hodnotu 0. Forward totiž zaväzuje investora predať držané podkladové aktívum za cenu K, čo je presne suma, ktorú musí použiť na splatenie pôžičky. Podotknime, že investor za realizáciu transakcií v čase 0 inkasoval $P_t - S_t + K\mathrm{e}^{-R(t,T)\ (T-t)} > 0$ a realizoval teda zisk, čo je v rozpore s predpokladom o neexistencii arbitráže. Obdobne by sa ukázalo, že nemôže byť ani $P_t < S_t - K\mathrm{e}^{-R(t,T)\ (T-t)}$. Tým je dokázaný vzťah (2.39).

V prípade, že podkladové aktívum produkuje počas doby trvania kontraktu vopred známe finančné toky, je cena forwardu daná vzťahom

$$P_t = S_t - V_t - K\mathrm{e}^{-R(t,T)\ (T-t)}, \tag{2.40}$$

kde V_t je hodnota v čase t platieb plynúcich z podkladového aktíva počas trvania kontraktu. Vzťah by sa odvodil analogicky ako vzťah (2.39).

Podotknime ešte, že realizačná cena forwardu je určená tak, aby v čase zjednania forwardu bola jeho cena nulová. Takúto realizačnú cenu nazveme forwardovou cenou podkladového nástroja pre čas T.

Dohoda o forwardovej úrokovej miere

U dohody o forwardovej úrokovej miere (Forward Rate Agreement, FRA) je podkladovým aktívom pohyblivá úroková sadzba. Táto sadzba nie je známa v dobe zjednania kontraktu (inak by samozrejme nešlo o forwardový kontrakt). Podstatou FRA je výmena pohyblivej úrokovej platby za vopred dohodnutú pevnú úrokovú platbu medzi dvoma zmluvnými stranami. Úrokové platby sú denominované v rovnakej mene a vzťahujú sa k nejakému obdobiu v budúcnosti, nazývanému tiež úrokové obdobie a dohodnutej istine. Platby sú vysporiadané čisto k dátumu začiatku úrokového obdobia. Ceny, resp. pevné úrokové sadzby, sú pravidelne kótované bankami. Jedno z používaných značení tohto typu kontraktu je FRA_{ZxK}, čo znamená dohodu o forwardovej úrokovej miere, ktorej úrokové obdobie začína v čase Z a končí v čase K (tieto hodnoty bývajú udávané v mesiacoch). Napríklad FRA_{2X5} znamená dohodu o forwardovej úrokovej miere s úrokovým obdobím o dĺžke tri mesiace, začínajúcim o dva mesiace.

Ocenenie dohody o forwardovej úrokovej miere vychádza z princípov uvedených vyššie. Uvažujme FRA, ktorého úrokové obdobie je časový interval (t_1, t_2) s jednotkovou istinou a dohodnutou pevnou úrokovou mierou r_f. Pokiaľ v uvažovanom kontrakte zaujímame dlhú pozíciu, jeho cena P_t v čase t je daná vzťahom

$$P_t = (F(t,t_1,t_2) - r_f)\,\mathrm{e}^{-R(t,t_2)\,(t_2-t)}, \qquad t \le t_1 < t_2. \tag{2.41}$$

Menový forward

Menový forward je kontrakt zaručujúci zmluvným stranám výmenu vopred dohodnutej čiastky v jednej mene za dohodnutú čiastku v inej mene k nejakému budúcemu dátumu. V angličtine sa používajú označenia currency forward, foreign exchange forward či FX forward.

Predstavme si, že nám protistrana navrhne v čase t dohodu na výmenu českých korún za eurá v čase $T > t$ pri kurze $F(t,T)$ CZK/EUR. Pritom v súčasnosti je spotový menový kurz S_t CZK/EUR a odpovedajúce spotové úrokové miery v eurách a korunách na obdobie (t,T) nech sú postupne $R^{eur}(t,T)$ a $R^{czk}(t,T)$. Potom, na základe predpokladu o neexistencii arbitráže, musí nutne platiť

$$F(t,T) = S_t\, \mathrm{e}^{(T-t)\,(R^{czk}(t,T)-R^{eur}(t,T))}, \qquad t < T. \tag{2.42}$$

Ak by totiž neplatila rovnosť v tomto vzťahu, tak by jedna zo strán bola schopná realizovať zisk pri nulových počiatočných nákladoch. Rovnica (2.42) je tzv. rovnicou úrokovej parity, hodnota $F(t,T)$ sa nazýva forwardový menový kurz pre dané obdobie.

Ocenenie dlhej pozície v menovom forwarde je opäť aplikáciou (2.39):

$$P_t = (F(t,T) - F)\mathrm{e}^{-(T-t)\,R^{czk}(t,T)}, \qquad t < T, \tag{2.43}$$

kde: P_t je hodnota menového forwardu v čase t,
T je doba maturity forwardu,
$F(t,T)$ je forwardový kurz CZK/EUR v čase t na obdobie (t,T),
F je dohodnutý forwardový menový kurz CZK/EUR,
$R^{czk}(t,T)$ je česká bezriziková úrokova sadzba na obdobie (t,T).

Akciový forward

Akciový forward je nástroj, na základe ktorého dôjde k výmene vopred dohodnutej čiastky za akciu, akciový index, prípadne iný akciový nástroj v budúcnosti. Ak je podkladovým aktívom akciový nástroj nenesúci počas doby života forwardu žiadne finančné toky, ocenenie vychádza zo vzorca (2.39):

$$P_t = S_t - F\mathrm{e}^{-(T-t)\,R(t,T)}, \qquad t < T, \tag{2.44}$$

kde: P_t je cena forwardu v čase t,
T je doba maturity forwardu,
S_t je spotová cena podkladového akciového nástroja v čase t,
F je dohodnutá forwardová cena akciového nástroja.

Pri akciovom nástroji nesúcom vopred známe peňažné toky by sa na ocenenie použil vzťah (2.40).

2.5 Swapy

Swap je derivát, na základe ktorého dochádza k výmene finančných tokov medzi zmluvnými stranami vo viacerých okamihoch v budúcnosti. Forwardy sú špeciálnym prípadom swapov, keď dochádza k iba jednej výmene finančných tokov. Podobne, každý swap je možné rozložiť na sériu forwardových nástrojov. Swap je preto možné oceniť na základe princípov uvedených v predchádzajúcej podkapitole. Podľa charakteru vymieňaných platieb rozoznávame viacero druhov swapov. V nasledujúcej časti uvedieme prehľad najčastejšie používaných swapov.

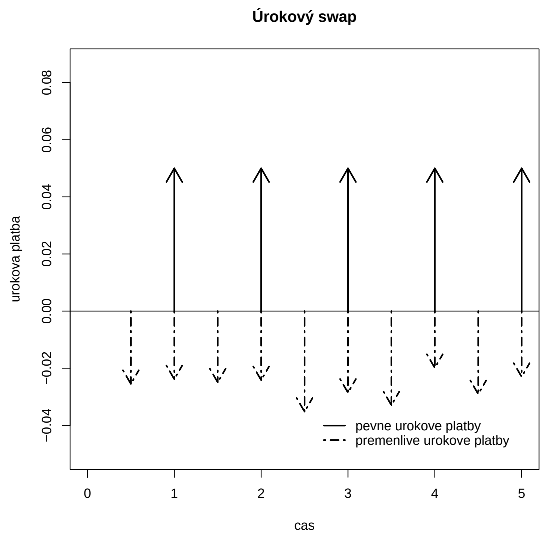
Úrokový swap

Ide o swap, u ktorého dochádza k výmene dohodnutých platieb za sériu iných platieb. Ako už napovedá názov tohoto derivátu, vymieňané platby majú charakter úrokových platieb, či už pevných alebo pohyblivých. Všetky platby sú pritom denominované v tej istej mene. Existuje viacero druhov úrokových swapov:

- Klasický úrokový swap
  V angličtine sa používa označenie classic interest rate swap, fixed-floating interest rate swap. Jedná sa o kontrakt na výmenu pevných úrokových platieb v jednej mene za sériu vopred neznámych platieb v tej istej mene. Premenlivé sadzby sú najčastejšie odvodené od nejakej tržnej úrokovej sadzby (napr. PRIBOR) a od dohodnutej nominálnej hodnoty. Pevné a premenlivé platby pritom nemusia nastávať v rovnakých okamihoch. Príkladom môže byť napríklad swap, odvodený od sadzby PRIBOR 6M. U tohto swapu dochádza k premenlivým platbám každých 6 mesiacov. Vždy na začiatku úrokového obdobia dochádza k zafixovaniu premenlivej PRIBOR sadzby. O 6 mesiacov potom dochádza k výplate príslušnej úrokovej platby a zároveň k fixácii PRIBOR sadzby pre ďalšie úrokové obdobie. V čase zjednania úrokového swapu teda k premenlivej platbe nedochádza. Na druhej strane, pevné platby sú splácané len raz ročne. Dodajme ešte, že nominálne hodnoty nie sú vyplácané. Danú situáciu ilustruje obrázok 2.1.

  U swapových kontraktov nie je jednoznačne ustálená terminológia označujúca jednotlivé strany kontraktu. V niektorej literatúre (napr. v [13]) je strana prijímajúca premenlivú platbu označená ako kupujúci swapu. Naopak strana platiaca premenlivú platbu je označená ako predávajúci. My budeme, aby nedochádzalo k zámenám, označovať jednu stranu ako platcu premenlivej resp. príjemcu pevnej časti. Druhú stranu budeme analogicky značiť ako príjemcu premenlivej resp. platcu pevnej časti úrokového swapu.

  Uveďme ešte princípy, na základe ktorých sú úrokové swapy oceňované. Ako bolo uvedené vyššie, swap je sériou forwardových kontraktov. Je preto možné ho na takéto kontrakty rozložiť a oceniť každý z nich nezávisle. Hodnota swapu je potom súčtom hodnôt jednotlivých forwardových podkontraktov. My na tomto mieste uvedieme iný spôsob ocenenia úrokového swapu. Swap je totiž možné



Obrázok 2.1: Platby pri klasickom úrokovom swape

chápať aj ako portfólio dvoch dlhopisov - jedného s pevným a druhého s premenlivým výnosom. Pritom v jednom z dlhopisov zaujímame dlhú a v druhom krátku pozíciu. Pripomeňme ešte, že oba spôsoby ocenenia vedú k rovnakým výsledkom.

Predstavme si, že sme vsúpili do kontraktu, v ktorom sme platcami premenlivej úrokovej sadzby. Hodnota swapu $V(t)$ v čase t je pre nás potom

$$V(t) = B_t^{fix} - B_t^{float}, \tag{2.45}$$

kde: B_t^{fix} je cena podkladového dlhopisu s pevným kupónom v čase t,
B_t^{float} je cena podkladového dlhopisu s premenlivým kupónom v čase t.

Metódy výpočtu cien dlhopisov sú uvedené v kapitole 2.2.

Podotknime ešte, že klasický úrokový swap býva najčastejšie zjednávaný tak, že v čase zjednania je jeho hodnota nulová. Predpokladajme teda, že zjednávame swap v čase 0. Podľa (2.45) musí platiť:

$$0 = V(0) = B_0^{fix} - B_0^{float}. \tag{2.46}$$

Keďže však máme $B_0^{float} = 1$, dospeli sme k vzťahu

$$1 = B_0^{fix}. \tag{2.47}$$

Týmto vzťahom je jednoznačne určená kupónová sadzba podkladového dlhopisu s pevným výnosom. Túto sadzbu nazveme swapovou sadzbou. Swapové sadzby pre rôzne splatnosti sú v Českej Republike denne kótované významnými finančnými spoločnosťami, ktoré so swapmi aktívne obchodujú.

- Bázický úrokový swap
  V tomto prípade dochádza k výmene premenlivých úrokových platieb odvodených od nejakej tržnej úrokovej sadzby a príslušnej nominálnej hodnoty za sériu platieb odvodených od inej tržnej úrokovej sadzby. Pritom k výmene nominálnej hodnoty nedochádza a všetky platby sú v rovnakej mene. V angličtine sa tento druh swapov označuje ako basis interest rate swap, prípadne floating-floating interest rate swap.

  Podkladovými dlhopismi sú v tomto prípade dva dlhopisy s rôznymi premenlivými sadzbami. Ocenenie swapu preto vychádza z ocenenia takýchto dlhopisov, ktoré bolo uvedené v kapitole 2.2.

- Swap s konštantnou splatnosťou

  U swapu s konštantnou splatnosťou dochádza k výmene pevne dohodnutej úrokovej sadzby na jednej strane za premenlivú swapovú sadzbu na strane druhej. Premenlivý podkladový dlhopis bol bližšie opísaný v príklade 2.2. Ocenenie potom opäť vychádza z oceňovania podkladových dlhopisov, ktoré bolo vysvetlené v kapitole 2.2. V angličtine tento druh swapov označujeme ako constant maturity swaps.

Menový swap

U menového swapu dochádza k výmene platieb v jednej mene za sériu platieb v inej mene. V tomto prípade k výmene nominálnej hodnoty na začiatku a konci života swapu môže, ale aj nemusí dochádzať – závisí to na dohodnutých podmienkach kontraktu. Podľa charakteru vymieňaných platieb je možné tieto swapy ďalej rozdeliť na

- Klasické menové swapy
  V tomto prípade dochádza k výmene pevných (a vopred dohodnutých) platieb v jednej mene za pevné platby v inej mene. V anglickej terminológii je potom označovaný ako classic currency swap resp. fixed-fixed currency swap. Špeciálnym prípadom je swap, u ktorého dochádza len k dvom výmenám platieb, a to na začiatku a na konci obdobia. Tento druh swapu sa v Českej republike označuje ako devízový swap.

- Krížové menové swapy
  U týchto swapov dochádza k výmene pevných platieb v jednej mene za premenlivé platby v inej mene. V anglickej terminológii býva takýto nástroj označovaný ako cross currency swap alebo fixed-floating currency swap.

- Bázické menové swapy
  Tretím prípadom sú swapy, u ktorých dochádza k výmene vopred neznámych

platieb v jednej mene za neznáme platby v inej mene. Anglicky sa tieto swapy označujú ako basis currency swaps alebo floating-floating currency swaps.

Ocenenie je analogické ako u úrokových swapov. Predpokladajme, že podkladovými dlhopismi sú dlhopis v domácej mene, ktorého hodnota v čase t je $D(t)$ CZK a dlhopis denominovaný v zahraničnej mene (napr. EUR), ktorého hodnota v čase t je $C(t)$ EUR. Nech $S(t)$ značí spotový menový kurz CZK/EUR v čase t. Potom hodnota menového swapu v čase t v korunách pre platcu korunovej časti swapu musí byť (na základe predpokladu o neexistencii arbitráže)

$$V(t) = C(t)\,S(t) - D(t). \tag{2.48}$$

Akciový swap

Akciový swap je kontrakt, na základe ktorého dochádza k výmene pevných či pohyblivých platieb v hotovosti za platby plynúce z nejakého akciového nástroja. Platbami plynúcimi z akciového nástroja sa pritom myslia dividendy, zvýšenie, prípadne zníženie ciem akcií.

Vyplácanie často prebieha v poločistej forme. To znamená, že akciový platca platí akciovému príjemcovi dividendy a zvýšenia cien akciového nástroja. Na druhej strane akciový príjemca platí akciovému platcovi dohodnuté pevné či premenlivé platby hotovosti a zníženia cien akcií.

Uviedli sme tu len zopár príkladov swapových kontraktov, s ktorými je možné stretnúť sa na trhu. Samozrejme, tento výpočet nemôže byť úplný, pretože druhov swapových kontraktov je nepreberné množstvo. Uveďme ešte v stručnosti napríklad úbytkový úrokový swap (amortising interest rate swap), u ktorého dochádz počas doby jeho trvania k postupnému znižovaniu jeho nominálnej hodnoty. Opakom úbytkového je swap prírastkový, u ktorého naopak dochádza k postupnému navyšovaniu nominálnej hodnoty.

Ďalším príkladom múže byť inverzný floaterový swap (inverse floater swap), u ktorého dochádza k výmene premenlivých úrokov za pevné úroky znížené o premenlivé úroky. Na tomto mieste uvedieme príklad takéhoto swapu, ktorý bol ukázaný v [13]. Predstavme si inverzný floaterový swap, pri ktorom je pevná úroková sadzba nastavená na 15% a v ktorom sme platcami premenlivej sadzby. Pri premenlivej úrokovej sadzbe na úrovni $7,5\%$ obdržíme od protistrany $15\% - 7,5\% = 7,5\%$. Prijímaná i platená suma sa teda rovnajú. V prípade, že premenlivá sadzba stúpne o 1% na 8.5% nám protistrana zaplatí $15\% - 8,5\% = 6,5\%$. Naša čistá platba teda bude vo výške $8,5\% - 6,5\% = 2\%$. Vidíme, že pri premenlivej sadzby o 1% došlo k zmene našej čistej platby o 2%. Dá sa teda povedať, že inverzný swap reaguje na zmeny podkladového aktíva dvakrát citliejšie ako je tomu u bežných swapov.

2.6 Opcie

Opcia je derivát, ktorý oprávňuje kupujúceho opcie k výmene podkladových aktív k nejakému budúcemu dátumu – k tzv. maturite opcie. V prípade, že jedným z podkladových aktív je vopred dohodnutá suma peňazí, hovoríme o práve majiteľa opcie predať, prípadne kúpiť podkladové aktívum za túto dohodnutú cenu, ktorá býva často označovaná aj ako realizačná cena. Protistrana (predávajúci, vystaviteľ opcie) je v prípade požiadavky držiteľa opcie na kúpu (resp. predaj) podkladového aktíva zaviazaná tento jeho požiadavok naplniť.

Opcie je možné deliť z viacerých hľadísk. Ak opcia oprávňuje jej majiteľa ku kúpe podkladového aktíva od protistrany, hovoríme o call opcii. V opačnom prípade, tj. keď majiteľ opcie má právo predať, hovoríme o put opcii. Niektoré opcie umožňujú majiteľovi uplatniť práva z opcie plynúce len v okamihu maturity opcie – tieto opcie sa označujú ako európske opcie. Na druhej strane americké opcie umožňujú majiteľovi uplatniť svoje právo kedykoľvek počas života kontraktu.

V okamihu zjednávania kontraktu platí obvykle kupujúci predávajúcemu takzvanú opčnú prémiu. Samozrejme, v rámci podmienok kontraktu je možné zjednať aj iný okamih (prípadne viac okamihov), ku ktorým bude opčná prémia splatená. Najčastejšie býva týmto dátumom okamih maturity kontraktu.

V závislosti na výške realizačnej ceny označujeme opcie ako in-the-money, at-the-money, prípadne out-of-the-money. Call opcia, ktorej realizačná cena je vyššia ako súčasná tržná cena podkladového aktíva je označená ako out-of-the-money. V prípade rovnosti týchto cien ju označíme ako at-the-money. A nakoniec v prípade, že je realizačná cena nižšia ako spotová cena, bude opcia označená ako in-the-money. U put opcií je situácia opačná. Put opciu, ktorej realizačná cena je vyššia ako spotová cena podkladového aktíva, označíme ako in-the-money. V prípade rovnosti týchto cien pôjde o at-the-money opciu. Ako out-of-the-money označíme put opciu v prípade, že jej realizačná cena je nižšia ako spotová cena podkladového aktíva.

Najznámejším modelom pri oceňovaní európskych opcií je Black-Scholesov model. Stručne ho na tomto mieste popíšeme. Predpokladajme pre vývoj ceny podkladového aktíva S, že

$$d\,S_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, DW_t, \tag{2.49}$$

kde: S_t je cena podkladového aktíva v čase t,
μ, σ sú konštanty a
W_t je Wienerov proces.

Uvažujme európsku call opciu na toto aktívum s maturitou v čase T a realizačnou cenou K. Túto opciu je možné v čase t oceniť na základe (2.14) ako

$$V_t = B_t \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} \left(B_T^{-1} V_T | \mathcal{F}_t \right), \tag{2.50}$$

kde: B_t je reinvestovaná peňažná jednotka a
Q je ekvivalentná, rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera vzhľadom k tomuto referenčnému aktívu a
V_T je výplata plynúca z opcie v čase T. Vzhľadom k nami uvažovanej opcii pritom máme $V_T = (S_T - K)_+$.

V Black-Scholesovom modeli pritom predpokladáme konštantnú spotovú úrokovú intenzitu r. Preto platí

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right) = \exp\left(\int_0^t r\, ds\right) = \mathrm{e}^{t\,r}. \tag{2.51}$$

Preto môžeme ďalej písať

$$V_t = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left((S_T - K)_+|\mathcal{F}_t\right). \tag{2.52}$$

Dá sa ukázať (viz. napr. [11]), že pri pravdepodobnostnej miere Q je

$$S_T = S_t\, \mathrm{e}^X, \tag{2.53}$$

kde

$$X \sim \mathsf{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right). \tag{2.54}$$

Využitím tejto vlastnosti v (2.52) dostávame po niekoľkých úpravách

$$\begin{aligned} V_t &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left((S_t\, \mathrm{e}^X - K)_+|\mathcal{F}_t\right) && (2.55)\\ &= S_t\,\Phi(d_1) - \mathrm{e}^{-r\,(T-t)}\,K\,\Phi(d_2), && (2.56)\end{aligned}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.57}$$

a Φ je distribučná funkcia $\mathsf{N}(0,1)$ rozdelenia. Vzťah (2.56) je známym vzorcom pre oceňovanie call opcií.

Medzi cenou call a put opcií s rovnakým podkladovým aktívom S, maturitou T i realizačnou cenou K pritom existuje súvislosť. Nech spotová úroková intenzita je v čase konštantná na úrovni r. Uvažujme dve portfóliá v čase 0. Prvé portfólio nech obsahuje call opciu a hotovosť $K\,\mathrm{e}^{-r\,T}$. V druhom portfóliu budeme uvažovať put opciu a jednu jednotku podkladového aktíva. V čase T pritom bude hodnota obidvoch portfólií rovnaká, a síce $\max(S_T,\ K)$. Preto, za predpokladu, že na trhu neexistuje arbitráž, sa musí nutne rovnať aj hodnota týchto portfólií v súčasnosti. Teda

$$c + K\,\mathrm{e}^{-rT} = p + S_0, \tag{2.58}$$

kde: c značí hodnotu call opcie v čase 0,
p je hodnota put opcie v čase 0 a
S_0 je hodnota podkladového aktíva v čase 0.

Ako vidíme, v prípade, že poznáme hodnotu jednej z dvojice opcií, je možné jednoducho určiť i hodnotu tej druhej.

V ďalšom texte uvedieme stručný prehľad niektorých druhov opcií. Pri ich oceňovaní budeme uvádzať formule vychádzajúce z tzv. Blackovho modelu oceňovania opcií. Ten na rozdiel od vyloženého Black-Scholesovho modelu nepožaduje konštantnú úrokovú intenzitu, ani nešpecifikuje vývoj ceny podkladového aktíva. Jedinou podmienkou na spotovú cenu podkladového aktíva S v tomto modeli je logaritmicko-normálne rozloženie tejto ceny v čase t, pričom platí $\mathsf{var}\ \ln S_t = \sigma^2 t$. Zvykne sa hovoriť, že S má logaritmicko-normálne rozloženie s volatilitou σ.

Úrokové opcie

Tieto opcie sú opciami na platby odvodené od budúcej spotovej úrokovej sadzby. Rozoznávame dva základné druhy úrokových opcií – capy a floory.

Cap je opcia, ktorá zaručuje držiteľovi výplaty úmerné rozdielu budúcej spotovej úrokovej sadzby a realizačnej sadzby vo viacerých okamihoch v budúcnosti odvodené od príslušného nominálu. Cap je v skutočnosti portfóliom úrokových opcií, tzv. capletov. Uvažujme jeden z týchto capletov príslušný k úrokovému obdobiu (t_1, t_2). Takýto caplet potom zaručuje držiteľovi opcie výplatu v čase t_2 vo výške

$$L\,AF(t_1, t_2)\ \max(R_j(t_1, t_2) - R,\ 0), \tag{2.59}$$

kde: R je realizačná úroková sadzba capletu,
$R_j(t_1, t_2)$ je spotová, jednoducho úročená sadzba v čase t_1 platná pre úrokové obdobie (t_1, t_2),
L je dohodnutá nominálna hodnota a
$AF(t_1, t_2)$ je akruálny faktor vyjadrujúci dĺžku obdobia (t_1, t_2) v rokoch podľa použitej konvencie počítania dní.

Je dôležité uvedomiť si, že k realizácii tohoto capletu dochádza v čase t_1 (preto tento čas budeme nazývať i maturitou floorletu), avšak k skutočnej platbe dochádza až na konci príslušného obdobia, teda až v čase t_2 (čas t_2 preto budeme nazývať časom výplaty opcie). Ocenenie capletu vychádza z Blackovho modelu. Ak predpokladáme logaritmico-normálne rozloženie hodnoty $R_j(t_1, t_2)$ s volatilitou σ, je možné hodnotu capletu vyjadriť v čase 0 ako (viz. [11])

$$L\,AF(t_1,t_2)\,P(0,t_2)\,\left(F_j(0,t_1,t_2)\,\Phi(d_1)-R\,\Phi(d_2)\right), \tag{2.60}$$

kde

$$d_1=\frac{\ln\frac{F_j(0,t_1,t_2)}{R}+\frac{\sigma^2 t_1}{2}}{\sigma\sqrt{t_1}} \quad \text{a} \quad d_2=\frac{\ln\frac{F_j(0,t_1,t_2)}{R}-\frac{\sigma^2 t_1}{2}}{\sigma\sqrt{t_1}}=d_1-\sigma\sqrt{t_1}. \tag{2.61}$$

$F_j(0,t_1,t_2)$ pritom značí jednoducho úročenú forwardovú sadzbu v čase 0 pre obdobie (t_1,t_2). Hodnota celého capu je potom súčtom hodnôt jednotlivých capletov. Dodajme ešte, že realizačné sadzby jednotlivých capletov nemusia byť nutne rovnaké.

Floory sú analógiou capov. Ide tiež o portfólio úrokových opcií, nazývaných floorlety. Jeden floorlet zaručuje (pri zachovaní označenia zavedeného u capov) platbu

$$L\,AF(t_1,t_2)\,\max(R-R_j(t_1,t_2),\ 0) \tag{2.62}$$

v čase t_2. Hodnota floorletu je potom za predpokladu log-normálneho rozloženia budúcej spotovej sadzby daná ako

$$L\,AF(t_1,t_2)\,P(0,t_2)\,\left(-F_j(0,t_1,t_2)\,\Phi(-d_1)+R\,\Phi(-d_2)\right), \tag{2.63}$$

kde d_1 a d_2 sú zavedené v (2.61).

Menové opcie

Menová opcia oprávňuje držiteľa k výplate odvodenej od rozdielu budúceho spotového menového kurzu a dohodnutého (tzv. realizačného) menového kurzu. Nech K je dohodnutý realizačný menový kurz (CZK/EUR) a K_t je budúci spotový menový kurz v čase $t>0$. Uvažujme opciu na nákup EUR v objeme L v čase t. Táto opcia zaručuje jej držiteľovi výplatu v čase t vo výške

$$L\,\max(K_t-K,\ 0). \tag{2.64}$$

Jej hodnota v čase 0 je potom, za predpokladu log-normálneho rozdelenia budúceho spotového menového kurzu, daná ako

$$L\,P(0,t)\,\left(F(0,t)\,\Phi(d_1)-K\,\Phi(d_2)\right), \tag{2.65}$$

kde

$$d_1=\frac{\ln\frac{F(0,t)}{K}+\frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \quad \text{a} \quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{t} \tag{2.66}$$

a $F(0,t)$ je aktuálny forwardový menový kurz definovaný vzťahom (2.42). V tomto prípade šlo zrejme o call opciu s právom kúpiť L EUR v čase t za dohodnutú realizačnú cenu. Na druhej strane stoja put menové opcie. Ich výplata v čase t je definovaná (pri zachovaní zavedeného označenia ako)

$$L \max(K - K_t,\ 0). \tag{2.67}$$

Hodnota v čase nula je potom

$$L\, P(0,t)\ \left(-F(0,t)\, \Phi(-d_1) + K\, \Phi(-d_2)\right), \tag{2.68}$$

kde d_1 a d_2 sú definované v (2.66).

Akciové opcie

U akciových opcií je podkladovým aktívom nejaký akciový nástroj, najčastejšie ide o akcie, prípadne o akciové indexy. Budeme predpokladať, že z uvažovaného akciového nástroja neplynú počas uvažovaného obdobia žiadne dividendy. Uvažujme call opciu na akciu s maturitou v čase t, realizačnou cenou S, ktorá sa vzťahuje na n kusov podkladovej akcie. V čase t vedie táto opcia k výplate

$$n \max(S_t - S,\ 0), \tag{2.69}$$

kde S_t ja aktuálna forwardová cena akcie. Cena tejto call opcie v čase 0 je potom daná ako

$$n\, P(0,t)\ \left(S(0,t)\, \Phi(d_1) - S\, \Phi(d_2)\right), \tag{2.70}$$

kde $S(0,t)$ je forwardová cena akcie v čase 0 a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(0,t)}{S} + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \qquad \text{a} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}. \tag{2.71}$$

Analogicky, put akciová opcia vedie k výplate v čase t vo výške

$$n \max(S - S_t,\ 0) \tag{2.72}$$

a jej hodnota v čase 0 je daná ako

$$n\, P(0,t)\ \left(-S(0,t)\, \Phi(-d_1) + S\, \Phi(-d_2)\right), \tag{2.73}$$

kde d_1 a d_2 sú definované v (2.71).

Kapitola 3

Úrokové deriváty v Hull-White modeli

V tejto kapitole uvedieme spôsob ocenenia a výpočtu citlivostí u niektorých typov úrokových derivátov v Hull-Whiteovom (HW) modeli úrokových mier. Venovať sa budeme opciám na dlhopis, swapciám a floorom (resp. capom). Citlivosťami budeme rozumieť citlivosti týchto nástrojov na paralelné pohyby výnosových kriviek, teda duráciu a konvexitu. O definícii týchto citlivostí a niektorých ich vlastnostiach je bližšie pojednané v dodatku A. Východiskom pre nás bude práca [9], ktorej závery stručne zhrnieme a budeme ich aplikovať na skúmané deriváty.

3.1 Ocenenie úrokových derivátov v HW modeli

V článku [9] boli odvodené analytické vzorce pre ocenenie opcií na dlhopis a opcií na swap v rámci jednofaktorového Heath-Jarrow-Mortonovho (HJM) modelu úrokových mier, za splnenia určitých dodatočných podmienok na tento model. Budeme pracovať v rámci pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Zároveň predpokladáme filtráciu $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ generovanú štandardným Brownovým pohybom $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ v tomto pravdepodobnostnom priestore.

Nech $A = \{(s,u) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0,T] \ \wedge \ s \in [0,u]\}$. Predpokladajme, že sa vývoj úrokových mier riadi jednofaktorovým HJM modelom. Presnejšie, že existuje funkcia $\sigma : [0,T]^2 \to \mathbb{R}_0^+$ merateľná a ohraničená, taká, že $\sigma = 0$ na $[0,T]^2 \setminus A$. Pre σ ďalej platí, že forwardové úrokové intenzity $f(t,u)$ sú dané vzťahom

$$df(t,u) = \sigma(t,u) \left(\int_t^u \sigma(t,s)\,ds \right) dt - \sigma(t,u)\,dW_t. \tag{3.1}$$

Pre spotovú úrokovú intenzitu r_t pritom podľa kapitoly 2.1 máme

$$r_t = f(t,t). \tag{3.2}$$

Definujme ďalej hodnotu reinvestovanej peňažnej jednotky (táto bude v našich ďalších úvahách reprezentovať referenčné aktívum) vzťahom

$$N_t = \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right), \qquad t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Ďalším predpokladom, ktorý bude spĺňať σ v rámci nášho HJM modelu bude

$$P^{\mathsf{N}}(t,u) = P^{\mathsf{N}}(t,u)\left(\int_t^u \sigma(t,s)\,ds\right) dW_t, \qquad 0 \le t \le u \le T, \tag{3.4}$$

kde $P^{\mathsf{N}}(t,u)$ reprezentuje hodnotu dlhopisu $P(t,u)$ vyjadrenú v jednotkách referenčného aktíva, tj.

$$P^{\mathsf{N}}(t,u) = N_t^{-1}\,P(t,u). \tag{3.5}$$

Na záver predpokladajme existenciu pravdepodobnostnej miery N, ekvivalentnej s mierou P, takej, že je rizikovo neutrálnou mierou vzhľadom k referenčnému aktívu N_t. To inými slovami znamená, že každý replikovateľný záväzok na vyplatenie V_T v čase T sa dá v čase t oceniť vzťahom (viz. (2.16))

$$V_t = N_t\,\mathsf{E}_{\mathsf{N}}\left(V_T\,N_T^{-1}|\mathcal{F}_t\right). \tag{3.6}$$

Pre jednoduchosť zápisu ešte zavedieme nasledujúce označenie:

$$\nu(s,t) \overset{ozn.}{=} \int_s^t \sigma(s,u)\,du. \tag{3.7}$$

Pred formulovaním vety o ocenení opcií v rámci takéhoto HJM modelu ešte vyslovíme jeden technický predpoklad o funkcii ν. Pre funkciu ν platí pre všetky $s \le t_1 \le t_2$, že

$$\nu(s,t_2) - \nu(s,t_1) = h(t_1,t_2)\,g(s), \tag{3.8}$$

kde g je kladná funkcia. Tento technický predpoklad je splnený napríklad pre Hull-Whiteov model, s ktorým budeme v ďalšom texte pracovať. Hull-Whiteov model je totiž zároveň aj HJM modelom úrokových mier. Vývoj spotovej úrokovej intenzity v rámci HW modelu sa riadi rovnicou

$$d\,r_t = (\widetilde{\theta}(t) - \widetilde{a}\,r_t)\,d\,t + \widetilde{\sigma}\,d\,W_t, \tag{3.9}$$

kde: $\widetilde{a}$, $\widetilde{\sigma}$ sú parametre HW modelu (konštanty),
$\widetilde{\theta}$ je nenáhodná funkcia a

W_t je Wienerov proces.

Dá sa ukázať (viz. napr. [3]), že tento model sa dá prepísať v rámci HJM metodológie do tvaru (3.1), kde

$$\sigma(s,u) = \widetilde{\sigma}\, \exp\left(-\widetilde{a}(u-s)\right). \tag{3.10}$$

V prípade HW modelu preto ďalej máme

$$\nu(s,t) = \int_s^t \widetilde{\sigma}\, \exp\left(-\widetilde{a}(u-s)\right)\, du = \frac{\widetilde{\sigma}}{\widetilde{a}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\widetilde{a}(t-s)}\right), \tag{3.11}$$

čo nám umožňuje písať

$$\nu(s,t_2) - \nu(s,t_1) = \left(\mathrm{e}^{-\widetilde{a}t_1} - \mathrm{e}^{-\widetilde{a}t_2}\right) \frac{\widetilde{\sigma}\,\mathrm{e}^{\widetilde{a}s}}{\widetilde{a}}, \tag{3.12}$$

a teda predpoklad (3.8) je pre HW model splnený.

Pristúpme teda k formulovaniu vety o oceňovaní opcií na dlhopisy v rámci HJM modelu.

Veta 3.1. *[9] Nech $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_{m-1} \le t_m < t_{m+1} \le \cdots \le t_n < T$ a $0 \le \theta \le t_m$. Uvažujme dlhopis, ktorý v čase t_i vypláca $c_i > 0$, kde $1 \le i \le n,\ i \ne m$. Potom v HJM modeli úrokových mier, ktorý zároveň splňa podmienku (3.8), je cena európskej call opcie s maturitou v θ na tento dlhopis s realizačnou cenou $c_m < 0$ splatnou v čase t_m daná v čase 0 ako*

$$\sum_{i=m}^{n} c_i\, P(0,t_i)\, \Phi(\kappa + \alpha_i), \tag{3.13}$$

kde

$$\alpha_i^2 = \int_0^\theta \left(\nu(s,t_i) - \nu(s,\theta)\right)^2 ds \tag{3.14}$$

a κ je jediné riešenie rovnice

$$\sum_{i=m}^{n} c_i\, P(0,t_i)\, \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_i^2 - \alpha_i\kappa\right) = 0. \tag{3.15}$$

Cena európskej put opcie na takýto dlhopis je daná ako

$$-\sum_{i=m}^{n} c_i\, P(0,t_i)\, \Phi(-\kappa - \alpha_i). \tag{3.16}$$

Pre dôkaz tejto vety sa odkážeme na [9]. V rámci dôkazu je tiež dokázaná jednoznačnosť riešenia (3.15). V mnohých prípadoch však nie je možné toto riešenie spočítať analyticky. Možnosťou je potom numerické riešenie tejto rovnice. Pre úplnosť ešte odvodíme hodnoty α_i zo vzťahu (3.14) pre HW model. Využijeme pritom vzťah (3.11):

$$\alpha_i^2 = \int_0^\theta (\nu(s,t_i) - \nu(s,\theta))^2 \, ds \tag{3.17}$$

$$= \frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{a}^2} \int_0^\theta \left(\mathrm{e}^{-\widetilde{a}(\theta-s)} - \mathrm{e}^{-\widetilde{a}(t_i-s)}\right)^2 ds \tag{3.18}$$

$$= \frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{a}^2} \left(\mathrm{e}^{-\widetilde{a}\theta} - \mathrm{e}^{-\widetilde{a}t_i}\right)^2 \int_0^\theta \mathrm{e}^{2\widetilde{a}s} ds \tag{3.19}$$

$$= \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2\widetilde{a}^3} \left(\mathrm{e}^{-\widetilde{a}\theta} - \mathrm{e}^{-\widetilde{a}t_i}\right)^2 \left(\mathrm{e}^{2\widetilde{a}\theta} - 1\right). \tag{3.20}$$

Aplikáciou vety 3.1 je možné oceniť tiež opcie na swapy a rovnako aj capy a floory. Tieto aplikácie si ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 3.2. Opcie na swapy (swapcie)

Uvažujme call opciu s maturitou v $\theta \le t_m$ na klasický úrokový swap s jednotkovou nominálnou hodnotou, so swapovou sadzbou R, začiatkom v čase t_m, úrokovými platbami v časoch $t_{m+1}, \ldots, t_n$ vo výške $AF_i\, R$, v ktorom by sme boli platcami premenlivej úrokovej sadzby. Pritom AF_i udáva dĺžku časového úseku (t_{i-1}, t_i) v rokoch podľa použitej kovencie počítania dní. Hodnota takejto opcie je zrejme totožná s hodnotou call opcie na dlhopis, pre ktorý je $c_1 = c_2 = \cdots = c_{m-1} = 0$, $c_m = -1$, $c_i = AF_i\, R$ pre $i = m+1, \ldots,\ n-1$ a $c_n = 1 + AF_n\, R$, pri použití označenia zavedeného vo vete 3.1. Cena takejto opcie je potom daná jednoduchou aplikáciou vety 3.1 ako

$$\sum_{i=m}^{n} c_i\, P(0,t_i)\, \Phi(\kappa + \alpha_i) = -P(0,t_m)\, \Phi(\kappa + \alpha_m) + \sum_{i=m+1}^{n} c_i\, P(0,t_i)\, \Phi(\kappa + \alpha_i), \tag{3.21}$$

kde κ je riešením

$$\sum_{i=m+1}^{n} c_i\, P(0,t_i)\, \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_i^2 - \alpha_i\kappa\right) = P(0,t_m)\, \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_m^2 - \alpha_m\kappa\right) \tag{3.22}$$

a α_i sú definované vzťahom (3.14).

Príklad 3.3. Floory

Uvažujme jeden floorlet z úrokového flooru, ktorý nám v časovom období (t_m, t_{m+1}) zaručuje výnos vo výške R pri jednotkovej nominálnej hodnote. Pritom maturita tohoto floorletu je v čase $\theta \le t_m$. Hodnota tohoto floorletu je zrejme rovná hodnote call opcie na swap so začiatkom v t_m a jedinou pevnou platbou $1 + AF_m\,R$ v čase t_{m+1}. Pritom v tomto swape by sme boli platcami premenlivej úrokovej sadzby (viz. predchádzajúci príklad). Floorlet i opcia na swap totiž zhodne garantujú úrokovú sadzbu vo výške R v odpovedajúcom období pri jednotkovom nomináli. Použitím vety 3.1 teda pre hodnotu floorletu v čase 0 dostávame

$$\sum_{i=m}^{m+1} c_i\,P(0,t_i)\,\Phi(\kappa+\alpha_i) = -P(0,t_m)\,\Phi(\kappa+\alpha_m) + (1+R\,AF_m)P(0,t_{m+1})\,\Phi(\kappa+\alpha_{m+1}), \tag{3.23}$$

kde κ je riešením

$$(1+R\,AF_m)\,P(0,t_{m+1})\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_{m+1}^2 - \alpha_{m+1}\kappa\right) = P(0,t_m)\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_m^2 - \alpha_m\kappa\right) \tag{3.24}$$

a α_i, pre $i = m,\ m+1$, sú definované vzťahom (3.14). Najčastejšie sú pritom na trhu obchodované floory, pre ktorých jednotlivé floorlety platí $\theta = t_m$, tj. maturita floorletu je zároveň začiatkom úrokového obdobia. V tom prípade je, ako plynie z (3.14), $\alpha_m = 0$ a rovnicu (3.24) je možné jednoducho vyriešiť. Platí totiž

$$(1+R\,AF_m)\,P(0,t_{m+1})\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_{m+1}^2 - \alpha_{m+1}\kappa\right) = P(0,t_m), \tag{3.25}$$

a teda

$$\kappa = \frac{1}{\alpha_{m+1}}\left(-\ln\frac{P(0,t_m)}{(1+R\,AF_m)\,P(0,t_{m+1})} - \frac{1}{2}\,\alpha_{m+1}^2\right) \tag{3.26}$$

Floory, u ktorých je $\theta = t_m$, sme teda schopní v HJM modeli splňujúcom (3.8) (a teda aj v HW modeli) oceniť analyticky.

Príklad 3.4. Capy

Analogicky ako v predchádzajúcom príklade je možné ukázať, že jeden caplet je ekvivalentný put opcii na odpovedajúci swap s jednou výmenou úrokových platieb, v ktorom sme príjemcami pevných platieb. Uvažujme caplet pre obdobie (t_m, t_{m+1}) so sadzbou R. Použitím vety 3.1 teda pre hodnotu capletu v čase 0 dostávame

$$-\sum_{i=m}^{m+1} c_i\,P(0,t_i)\,\Phi(-\kappa-\alpha_i) = P(0,t_m)\,\Phi(-\kappa-\alpha_m) - (1+R\,AF_m)P(0,t_{m+1})\,\Phi(-\kappa-\alpha_{m+1}), \tag{3.27}$$

kde κ je riešením (3.24) a α_i sú definované v (3.14). Analogicky ako u floorletov je možné rovnicu definujúcu κ jednoducho riešiť v prípade, že $\theta = t_m$ (viz. (3.26)).

3.2 Citlivosti opcií na paralelné posuny výnosovej krivky

V tejto časti odvodíme vzťahy pre duráciu a konvexitu[1] opcií v uvažovanom HJM modeli. Východiskom pritom pre nás bude veta 3.1. Citlivosti na jednotlivé úrokové sadzby r_t boli odvodené v [10]. My v nasledujúcom texte odvodíme citlivosti na paralelný posun celej výnosovej krivky. Označme hodnotu call opcie z (3.13) ako V. Platí teda

$$V = \sum_{i=m}^{n} c_i\, P(0,t_i)\, \Phi(\kappa + \alpha_i). \tag{3.28}$$

Naším cieľom je spočítať duráciu tejto opcie, tj.

$$D = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \delta}, \tag{3.29}$$

kde $V(\delta)$ značí hodnotu opcie pri paralelnom posune výnosovej krivky o δ a $V = V(0)$. Potrebujeme preto spočítať hodnotu parciálnej derivácie $\frac{\partial V}{\partial \delta}$. S využitím retiazkového pravidla máme

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial \delta}, \tag{3.30}$$

kde pre jednoduchosť zápisu používame označenie $P_i = P(0,t_i)$. Keďže platí $\frac{\partial P_i}{\partial \delta} = -t_i\, P_i$, ako je ukázané v dodatku A, zostáva nám dopočítať $\frac{\partial V}{\partial P_i}$. S využitím vety o implicitných funkciách (viz. napr. [4]) sa dá ukázať existencia parciálnej derivácie $\frac{\partial \kappa}{\partial P_i}$. Preto môžeme písať

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = c_i\, \Phi(\kappa + \alpha_i) + \sum_j c_j\, P_j\, \Phi'(\kappa + \alpha_j)\frac{\partial \kappa}{\partial P_i}. \tag{3.31}$$

Keďže

$$\Phi'(\kappa + \alpha_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\kappa + \alpha_j)^2}{2}\right), \tag{3.32}$$

upravujeme ďalej

[1] Citlivosti derivátov na úrokové miery bývajú často označované ako delta a gamma. My v tejto práci budeme pracovať s duráciou a konvexitou týchto nástrojov tak, ako boli zavedené v dodatku A.

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = c_i\,\Phi(\kappa+\alpha_i) + \frac{\exp\left(-\frac{\kappa^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial\kappa}{\partial P_i}\sum_j c_j\,P_j\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_j^2-\alpha_j\kappa\right). \tag{3.33}$$

S ohľadom na (3.15) je potom druhý člen rovný nule a môžme preto písať

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = c_i\,\Phi(\kappa+\alpha_i) \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = -\sum_i c_i\,t_i\,P_i\,\Phi(\kappa+\alpha_i). \tag{3.35}$$

Záverom teda môžme pre duráciu písať

$$D = \frac{1}{V}\sum_i c_i\,t_i\,P_i\,\Phi(\kappa+\alpha_i). \tag{3.36}$$

Pre put opcie sa dá analogicky odvodiť, že

$$D = -\frac{1}{V}\sum_i c_i\,t_i\,P_i\,\Phi(-\kappa-\alpha_i). \tag{3.37}$$

Ostáva ešte odvodiť vzťah pre konvexitu. Postup opäť vyložíme pre call opcie. Opätovným derivovaním (3.35) máme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} = -\sum_i c_i\,t_i\,\frac{\partial P_i}{\partial\delta}\,\Phi(\kappa+\alpha_i) - \sum_i c_i\,t_i\,P_i\,\Phi'(\kappa+\alpha_i)\frac{\partial\kappa}{\partial\delta} \tag{3.38}$$

$$= -\sum_i c_i\,t_i\,\frac{\partial P_i}{\partial\delta}\,\Phi(\kappa+\alpha_i) - \sum_i c_i\,t_i\,P_i\,\Phi'(\kappa+\alpha_i)\sum_j\frac{\partial\kappa}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial\delta}. \tag{3.39}$$

Keďže platia predpoklady vety o implicitnej funkcii, je možné spočítať $\frac{\partial\kappa}{\partial P_j}$. Podľa (3.15) máme

$$\sum_{i=m}^{n} c_i\,P_i\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_i^2-\alpha_i\kappa\right) = 0. \tag{3.40}$$

Derivovaním tohoto vzťahu podľa P_j dostávame

$$c_j\,\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_j^2-\alpha_j\,\kappa\right) - \frac{\partial\kappa}{\partial P_j}\sum_{i=m}^{n}\alpha_i\,c_i\,P_i\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha_i^2-\alpha_i\kappa\right) = 0, \tag{3.41}$$

a teda

$$\frac{\partial \kappa}{\partial P_j} = \frac{c_j \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_j^2 - \alpha_j \kappa\right)}{\sum_i \alpha_i c_i P_i \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_i^2 - \alpha_i \kappa\right)}. \tag{3.42}$$

Dosadením do (3.39), opätovným využitím vzťahu $\frac{\partial P_i}{\partial \delta} = -t_i P_i$ a niekoľkými ďalšími úpravami dostávame

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} = \sum_i c_i t_i^2 P_i \Phi(\kappa + \alpha_i) + \tag{3.43}$$

$$+ \frac{\exp\left(-\frac{\kappa^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(\sum_i t_i c_i P_i \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_i^2 - \alpha_i \kappa\right)\right)^2}{\sum_i \alpha_i c_i P_i \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_i^2 - \alpha_i \kappa\right)}. \tag{3.44}$$

Konvexitu opcie je potom možné spočítať dosadením do vzorca

$$C = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2}. \tag{3.45}$$

Pre put opcie sa dá analogicky odvodiť, že

$$C = -\frac{1}{V} \sum_i c_i t_i^2 P_i \Phi(-\kappa - \alpha_i) + \tag{3.46}$$

$$+ \frac{\exp\left(-\frac{\kappa^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\, V} \frac{\left(\sum_i t_i c_i P_i \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_i^2 - \alpha_i \kappa\right)\right)^2}{\sum_i \alpha_i c_i P_i \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_i^2 - \alpha_i \kappa\right)}. \tag{3.47}$$

Príklad 3.5. Floorlet v HW modeli

Ako bolo ukázané v príklade 3.3, u floorletu, ktorého dátum maturity je zároveň začiatkom úrokového obdobia, je možné κ spočítať analyticky. Následne je možné analyticky spočítať hodnotu tohoto floorletu i jeho duráciu a konvexitu v rámci Hull-Whiteovho modelu úrokových mier. Budeme uvažovať Hull-Whiteov model úrokových mier s parametrami $\widetilde{a} = 0,1$ a $\widetilde{\sigma} = 0,015$. Pri oceňovaní použijeme výnosovú krivku ku koncu roka 2005, spočítanú z kótovaných českých swapových sadzieb[2] podľa odborného doporučenia [16]. Avšak s tým rozdielom, že namiesto odporúčaného Nelsonovho-Siegelovho modelu[3] na interpoláciu sadzieb použijeme Svenssonov model[4], ktorý je jeho rozšírením.

S použitím odvodených vzorcov pre cenu opcií i pre ich durácie a konvexity potom spočítame hodnoty floorletu s dátumom realizácie za 2 roky, s úrokovým obdobím

[2] Zdrojom týchto sadzieb je agentúra Bloomberg.
[3] Viz. [15].
[4] Viz. [19].

o dĺžke 1 rok a floorovou sadzbou 2%, a to aj pri paralelných posunoch výnosovej krivky. Spočítané hodnoty uvádzame v tabuľke 3.1. Graficky nám tieto hodnoty približujú obrázky 3.1 a 3.2. Ako vidíme, citlivosť takéhoto floorletu na pohyb výnosovej krivky je značne vyššia ako je tomu u bežných dlhopisov, čo je vyjadrené hodnotou durácie približne 96,8.

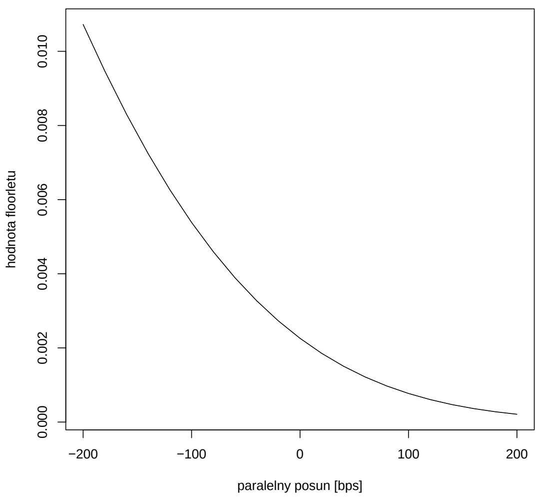
posun	hodnota	durácia	konvexita
-2,00%	0,010725182	60,8	2 188,2
-1,80%	0,009467557	63,9	2 511,8
-1,60%	0,008304983	67,1	2 871,9
-1,40%	0,007237781	70,4	3 270,8
-1,20%	0,006265101	73,9	3 710,4
-1,00%	0,005385363	77,4	4 192,8
-0,80%	0,004595885	81,1	4 719,9
-0,60%	0,003893106	84,9	5 293,6
-0,40%	0,003272699	88,7	5 915,6
-0,20%	0,002729683	92,7	6 587,6
0,00%	0,002258562	96,8	7 311,1
0,20%	0,001853476	100,9	8 087,5
0,40%	0,001508346	105,1	8 918,3
0,60%	0,001217034	109,5	9 804,8
0,80%	0,000973470	113,9	10 748,0
1,00%	0,000771784	118,3	11 749,0
1,20%	0,000606400	122,9	12 809,0
1,40%	0,000472121	127,5	13 928,8
1,60%	0,000364184	132,1	15 109,3
1,80%	0,000278298	136,9	16 351,3
2,00%	0,000210653	141,6	17 655,7

Tabuľka 3.1: Hodnoty, durácie a konvexity uvažovaného floorletu pri paralelných posunoch výnosovej krivky.

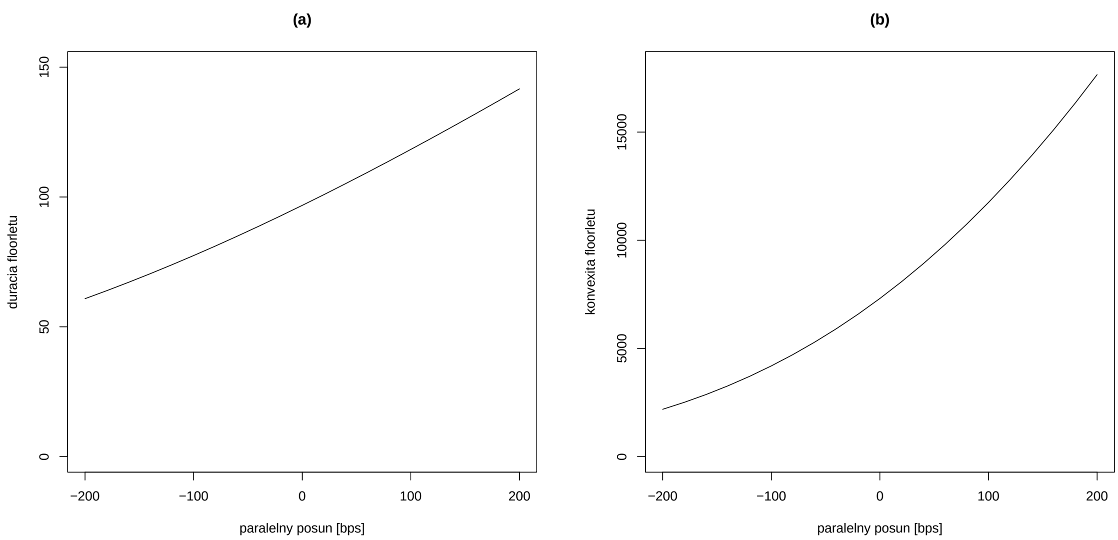
V ďalšej časti využijeme odvodené vzťahy pri aplikácii na situáciu v životnej poisťovni. Pokúsime sa nákupom vhodných úrokových opcií minimalizovať riziko plynúce z paralelných pohybov výnosovej krivky.

3.3 Aplikácia v životnej poisťovni

Na základe vyššie vyloženého sme schopní analyticky oceniť úrokové floory a capy. Tiež sme schopní analyticky spočítať ich duráciu a konvexitu. Ako bolo ukázané na príklade, citlivosť hodnoty týchto derivátov na paralelný posun výnosovej krivky je podstatne



Obrázok 3.1: Hodnota floorletu v závislosti na paralelnom posune výnosovej krivky.



Obrázok 3.2: (a) Durácia floorletu pri paralelných posunoch výnosovej krivky. (b) Konvexita floorletu pri paralelných posunoch výnosovej krivky.

vyššia ako citlivosť hodnoty dlhopisov na tieto posuny. Prvou zrejmou aplikáciou je preto ich využitie pri cieľovaní durácie a konvexity.

Ako bolo ukázané v [14], pri nízkych úrovniach výnosovej krivky môže durácia poistných záväzkov v životnej poisťovni[5] dosahovať veľmi vysoké hodnoty (podľa [14] hodnota durácie v týchto prípadoch môže byť dokonca vyššia ako 20). Na druhej strane, dlhopisy dostupné na českom trhu takéto hodnoty zďaleka nedosahujú. Ak chce spoločnosť zosúladiť duráciu aktív a pasív, môže byť vhodnou voľbou nákup vhodných úrokových derivátov. Pri nízkom objeme investícií je takto možné výrazne zvýšiť duráciu aktív spoločnosti. Samozrejme, tieto deriváty spoločnosť nemôže klasifikovať ako zaisťovacie, preto je vždy nutné zvážiť všetky nevýhody[6] plynúce z investovania do týchto nástrojov.

My na tomto mieste ukážeme iný spôsob využitia úrokových opcií pri zaisťovaní proti paralelným pohybom výnosovej krivky. Označme ako I indexovú množinu obsahujúcu úrokové opcie dostupné na trhu. Ďalej označíme ako L_j hodnotu pasív spoločnosti pri j-tom paralelnom pohybe výnosovej krivky a analogicky označíme ako A_j hodnotu aktív spoločnosti pri j-tom paralelnom pohybe výnosovej krivky, $j \in J$. Označíme ako b_j zmenu hodnoty aktív a pasív spoločnosti pri j-tom posune. Potom zrejme

$$b_j = L_j - {}_0L + A_j - {}_0A \tag{3.48}$$

kde: ${}_0L$ je aktuálna hodnota pasív spoločnosti a
${}_0A$ je aktuálna hodnota aktív spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je nakúpiť úrokové opcie na trhu za čo najnižšiu cenu tak, aby bola zaistená proti uvažovaným pohybom výnosovej krivky. Označme ďalej ako $\Delta_{j\,i}$ zmenu hodnoty i-tej opcie pri j-tom paralelnom posune výnosovej krivky a c_i, $i \in I$, hodnotu i-tej opcie. Spoločnosť teda stojí pred úlohou lineárneho programovania

$$\min \mathbf{x}^T \mathbf{c} \tag{3.49}$$

za podmienok

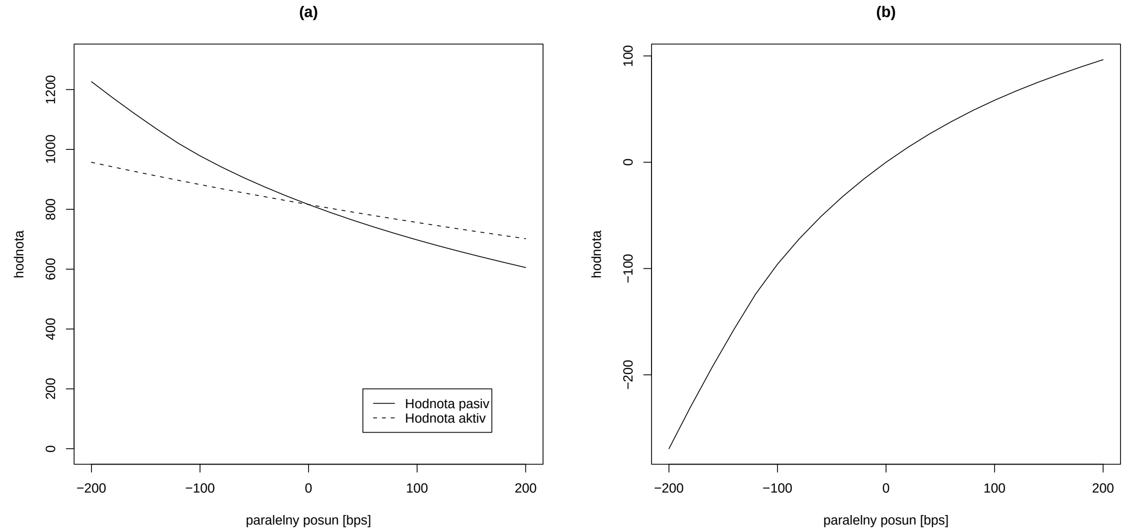
$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}\,\mathbf{x} &= -\mathbf{b}, & (3.50)\\ \mathbf{x} &\geq 0, & (3.51) \end{aligned}$$

kde $\mathbf{\Delta} = \{\Delta_{j\,i}\}$ je matica a $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ sú príslušné vektory. Podmienka $\mathbf{x} \geq 0$ pritom značí, že spoločnosť nemôže opcie predávať, ale iba nakupovať. Pre detaily ohľadom riešenia úloh lineárneho programovania sa odkazujeme na [5].

Riešenie tejto úlohy závisí od aktuálnej situácie na trhu, množstve dostupných úrokových opcií, a tiež od skladby aktív a pasív spoločnosti.

[5] Jedná sa tu predovšetkým o kontrakty s garantovanou technickou úrokovou mierou a s pripisovaním podielov na zisku.

[6] Bližšie boli vyložené v kapitole 1.1.



Obrázok 3.3: (a) Hodnota aktív a pasív modelovej spoločnosti v závislosti na paralelných posunoch výnosovej krivky. (b) Celková zmena bilancie spoločnosti v závislosti na paralelných posunoch výnosovej krivky.

Situáciu vyložíme na fiktívnom portfóliu poistných kontraktov. Pripomíname, že pre náš výklad v tomto momente nie je dôležitá konkrétna skladba portfólia aktív ani pasív, ako skôr ich výsledná citlivosť na paralelné pohyby výnosovej krivky. Našou snahou pritom je osvetliť princíp, na základe ktorého je možné používať úrokové opcie na minimalizovanie rizík plynúcich zo zmien úrokových sadzieb v životných poisťovniach. Preto nebudeme podrobne popisovať model na projekciu a ocenenie pasív ani aktív.

Budeme uvažovať modelovú spoločnosť, ktorá v rokoch 1995 až 2000 uzatvárala s klientami zmiešané životné poistky na 20 rokov s poistnou čiatkou 100 000 a s technickou úrokovou mierou vo výške 4%. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že v každom roku uzatvorila práve 1000 poistných zmlúv s mužmi vo veku 20, 30, 40 a 50 rokov. V každom z uvažovaných rokov teda bolo uzatvorených 4000 poistných zmlúv. Poistné uvažujeme platené ročne, vždy na začiatku roka. Zmluvy ďalej zaručujú klientom pripisovanie podielov na zisku vo výške 90 % z nadvýnosu, ktorý poisťovňa dosiahla investovaním nad úrovňou technickej úrokovej miery.

Pri modelovaní poistných kontraktov a ich oceňovaní bol použitý model zmiešaného poistenia popísaný v [21]. Predpoklady o nákladoch, stornách a úmrtnosti boli pritom volené podľa aktuálnej situácie na českom poistnom trhu. Prirážky na riziko a neurčitosť sme zvolili podľa odbornej smernice České společnosti aktuárů [17].

Hodnotu portfólia sme určovali k 31.12.2004. Tržná výnosová bezkupónová krivka bola spočítaná zo swapových sadzieb k tomuto dátumu na základe Svenssonovho modelu (viz. [19]). Boli určené hodnoty portfólia záväzkov pri paralelných posunoch výnosovej krivky a tiež hodnoty efektívnej durácie pri týchto posunoch. Výsledky sú zhrnuté v tabuľke 3.2, graficky je závislosť hodnoty záväzkov na paralelných posunoch zachytená

paralelný posun	hodnota poistných záväzkov	durácia poistných záväzkov	zmena hodnoty pasív	hodnota aktív	durácia aktív	zmena hodnoty aktív	celková zmena hodnoty
-2,00%	-1226,4	23,0	-410,6	957,0	8,2	141,1	-269,5
-1,80%	-1171,4	23,0	-355,5	941,4	8,2	125,6	-230,0
-1,60%	-1118,7	23,0	-302,9	926,2	8,1	110,4	-192,5
-1,40%	-1068,4	23,0	-252,6	911,3	8,1	95,5	-157,1
-1,20%	-1020,5	22,2	-204,7	896,8	8,0	80,9	-123,8
-1,00%	-978,5	20,2	-162,6	882,6	8,0	66,7	-95,9
-0,80%	-940,8	19,1	-124,9	868,6	7,9	52,8	-72,1
-0,60%	-906,1	18,4	-90,3	855,0	7,9	39,2	-51,1
-0,40%	-874,0	17,7	-58,2	841,7	7,8	25,8	-32,3
-0,20%	-844,0	17,2	-28,1	828,6	7,8	12,8	-15,4
0,00%	-815,8	16,7	0,0	815,8	7,7	0,0	0,0
0,20%	-789,4	16,2	26,4	803,3	7,7	-12,5	13,9
0,40%	-764,5	15,8	51,3	791,1	7,7	-24,7	26,6
0,60%	-741,0	15,4	74,9	779,1	7,6	-36,7	38,1
0,80%	-718,7	15,1	97,1	767,4	7,6	-48,5	48,7
1,00%	-697,6	14,7	118,2	755,9	7,5	-60,0	58,3
1,20%	-677,5	14,5	138,3	744,6	7,5	-71,2	67,1
1,40%	-658,4	14,2	157,4	733,6	7,4	-82,2	75,2
1,60%	-640,1	14,0	175,7	722,8	7,4	-93,0	82,7
1,80%	-622,5	13,9	193,4	712,2	7,3	-103,6	89,8
2,00%	-605,4	13,8	210,4	701,9	7,3	-114,0	96,5

Tabuľka 3.2: Hodnoty (v mil. Kč) a durácie záväzkov a aktív modelovej spoločnosti pri paralelných posunoch výnosovej krivky.

na obrázku 3.3 (a).

Na strane finančného umiestnenia predpokladáme investície do českých dlhopisov v hodnote záväzkov spoločnosti. Podotknime ešte, že durácia dlhopisov na českom trhu je vo všeobecnosti podstatne nižšia ako durácia záväzkov, ktorá je pre modelové portfólio na úrovni 16,7. My v tomto príklade zvolíme pre ilustráciu portfólio dlhopisov s duráciou 7,7.[7] Hodnoty tohoto portfólia a jeho durácie pri paralelných posunoch výnosovej krivky sú tiež zhrnuté v tabuľke 3.2 a na obrázku 3.3 (a).

Predpokladajme, že spoločnosť sa rozhodne nakúpiť úrokové opcie tak, aby pohyb hodnoty aktív a pasív bol rovnaký pri paralelných posunoch výnosovej krivky o ±100 bps a ±200 bps. Máme preto v našom prípade $J = \{\pm 100, \pm 200\}$ a

[7] Situácia, keď je durácia aktív podstatne nižšia než durácia pasív nie je na českom poistnom trhu ničím nezvyčajným. Zvolené portfóliá a ich citlivosti sú preto dobrou ilustráciou súčasnej situácie na tomto trhu.

$$\mathbf{b} = 10^6 \,(-269,5;\ -95,9;\ 58,3;\ 96,5)^T.$$

Na trhu sú pritom dostupné 4 úrokové floory (presnejšie ide iba o floorlety) s nasledujúcimi parametrami:

1. floor s maturitou za 1 rok, dĺžkou úrokového obdobia 2 roky a sadzbou 1%,
2. floor s maturitou za 4 roky, dĺžkou úrokového obdobia 1 rok a sadzbou 4%,
3. floor s maturitou za 4 roky, dĺžkou úrokového obdobia 1 rok a sadzbou 5%,
4. floor s maturitou za 8 rokov, dĺžkou úrokového obdobia 1 rok a sadzbou 8%.

Všetky z uvedených floorov majú pritom jednotkovú nominálnu hodnotu. Floory sme schopní na základe výsledkov v tejto kapitole analyticky oceniť v rámci HW modelu úrokových mier. Sme teda schopní dopočítať $\mathbf{c}$ i $\mathbf{\Delta}$ z našej optimalizačnej úlohy. Pri oceňovaní sme použili rovnakú výnosovú krivku ako pri ocenení pasív a parametre HW modelu sme opäť volili ako $\widetilde{\sigma} = 0,015$ a $\widetilde{a} = 0,1$. Dostávame

$$\mathbf{c} = (0,000250331;\ 0,006938;\ 0,0113893;\ 0,022698)^T,$$

$$\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} 0,005765665 & 0,012293163 & 0,015427708 & 0,020067588 \\ 0,001279341 & 0,005157798 & 0,006785077 & 0,009068373 \\ -0,000225125 & -0,003357685 & -0,004884325 & -0,007222237 \\ -0,000248817 & -0,005295723 & -0,008048492 & -0,012713695 \end{pmatrix}.$$

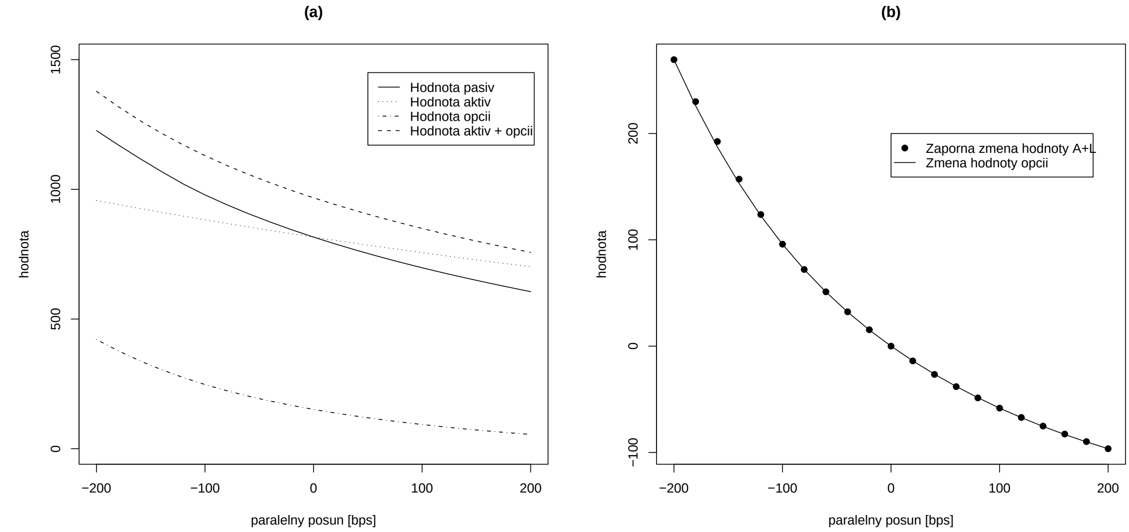
Riešením vyššie definovanej úlohy lineárnej optimalizácie[8] dospievame k výsledku

$$\mathbf{x} = (18\,430\,023\,454,\ 1\,557\,388\,000,\ 4\,426\,194\,209,\ 3\,776\,550\,983)^T.$$

To znamená, že do kúpy derivátov by naša modelová spoločnosť musela investovať $\mathbf{x}^T\,\mathbf{c} = 151\,549\,580$. Táto suma sa môže zdať príliš vysoká, je však nutné si uvedomiť obrovský rozdiel v durácii aktív a pasív pred zaisťovacou operáciou. Hodnotu derivátov pri paralelných posunoch výnosovej krivky uvádzame v tabuľke 3.3. Rovnako je možné v poslednom stĺpci tabuľky nájsť výsledok našej operácie. Ako vidíme, kúpou opcií sa spoločnosť veľmi dobre zaistila proti prípadným paralelným pohybom výnosovej krivky. Zaujímavé je zistenie, že aj napriek tomu, že sme pri optimalizácii počítali len so štyrmi pohybmi výnosovej krivky (o ±100 bps a ±200 bps), spoločnosť sa veľmi dobre zaistila aj proti iným pohybom v celom rozsahu ±200 bps.

Naša modelová spoločnosť má teda možnosť zakúpením úrokových opcií minimalizovať riziko plynúce z pohybov výnosovej krivky. Kúpu týchto opcií však musí realizovať z vlastných zdrojov, keďže hodnotu aktív vo finančnom umiestnení nesmie znižovať.

[8]Naša úloha je veľmi jednoduchá. Množina prípustných riešení obsahuje práve jeden prvok, ktorý je preto aj optimálnym riešením.



Obrázok 3.4: (a) Hodnota jednotlivých portfólií v závislosti na paralelných posunoch výnosovej krivky. (b) Zmena hodnoty zakúpených opcií v porovnaní so zápornou zmenou hodnoty aktív a pasív v závislosti na paralelných posunoch výnosovej krivky.

Hodnota opcií, ktoré spoločnosť zakúpi pritom môže byť veľmi vysoká (v našom príklade to bolo vyše 18% objemu pasív spoločnosti). Jej výška zrejme závisí od rozdielu durácií aktív a pasív spoločnosti, ale aj od množstva a typu ponúkaných opcií na trhu. Musíme tiež zdôrazniť, že v prípade poklesu výnosovej krivky by došlo k nedostatočnosti hodnoty finančného umiestnenia a spoločnosť by bola nútená navýšenie finančného umiestnenia financovať buď z vlastných zdrojov alebo odpredajom časti zakúpených opcií.[9]

Záverom dodajme, že náš príklad bol značne zjednodušujúci, aj napriek tomu však dostatočne ilustruje možnosti použitia opcií pri zaisťovaní sa proti rizikám plynúcim z pohybov úrokových sadzieb v životných poisťovniach.

[9] Tento problém bol diskutovaný už v príklade 1.1.

paralelný posun	hodnota opcií	zmena hodnoty opcií	zmena hodnoty A+L	zmena hodnoty A+L+O
-2,00%	421,0	269,5	-269,5	0,0
-1,80%	377,6	226,1	-230,0	3,9
-1,60%	338,9	187,4	-192,5	5,1
-1,40%	304,6	153,1	-157,1	4,0
-1,20%	274,3	122,7	-123,8	1,0
-1,00%	247,4	95,9	-95,9	0,0
-0,80%	223,7	72,1	-72,1	0,0
-0,60%	202,5	51,0	-51,1	0,2
-0,40%	183,7	32,1	-32,3	0,2
-0,20%	166,8	15,2	-15,4	0,1
0,00%	151,5	0,0	0,0	0,0
0,20%	137,7	-13,8	13,9	-0,1
0,40%	125,1	-26,4	26,6	-0,2
0,60%	113,6	-37,9	38,1	-0,2
0,80%	103,0	-48,5	48,7	-0,1
1,00%	93,3	-58,3	58,3	0,0
1,20%	84,3	-67,2	67,1	0,1
1,40%	76,1	-75,5	75,2	0,3
1,60%	68,5	-83,1	82,7	0,4
1,80%	61,5	-90,1	89,8	0,3
2,00%	55,1	-96,5	96,5	0,0

Tabuľka 3.3: Hodnoty (v mil. Kč) kúpených opcií. V poslednom stĺpci je celková zmena hodnoty portólia záväzkov, aktív i dokúpených opcií.

Záver

Poistné kontrakty sú nástroje obsahujúce často veľké množstvo vložených opcií a derivátov. Citlivosť týchto derivátov na pohyby podkladových tržných parametrov pritom môže značne prevyšovať citlivosť nederivátových aktív dostupných na trhu na tieto pohyby. Je preto prirodzené, ak majú poisťovne snahu zaisťovať poistné kontrakty finančnými derivátmi na aktívnej strane. Už v úvode bol spomenutý prípad japonskej poistnej spoločnosti, ktorá v dôsledku nesprávnej voľby finančných investícií skrachovala.

Právne prostredie v Českej republike však nepovoľuje používať deriváty na zaistenie pohybov poistných záväzkov v rámci finančného umiestnenia technických rezerv. Možnosťou pre poisťovne je nakupovať deriváty z vlastných zdrojov do vlastného kapitálu. V práci bolo ukázané, že takýto postup má stále svoje obmedzenia plynúce zo súčasnej právnej úpravy. V prvom rade môže byť veľmi finančne náročný, v niektorých prípadoch môže dokonca viesť k zvýšenej volatilite hospodárskeho výsledku spoločnosti, ako bolo ukázané v kapitole 1.1.

Záverom dodajme, že je pravdepodobné, že tlak poistného sektora v ČR na zmenu legislatívnych právnych úprav bude zrejme v budúcnosti narastať. Súvisí to so stále rastúcim dôrazom na ocenenie poistných záväzkov fér hodnotou a uvedomovaním si citlivosti tejto hodnoty na pohyby podkladových tržných parametrov.

Dodatok A

Durácia a konvexita

A.1 Macaulayova durácia a konvexita

Koncept durácie bol prvýkrát navrhnutý Macaulayom pre fixné dlhopisy. Jeho cieľom bolo navrhnúť vhodnú mieru pre citlivosť ceny dlhopisu (resp. vo všeobecnosti citlivosť hodnoty série vopred známych finančných tokov) na úrokové miery. Macaulayova durácia MD je definovaná ako vážený priemer splatností jednotlivých finančných tokov dlhopisu:

$$MD = \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j \, CF_j \, \mathrm{e}^{-t_j \, i}}{P} = \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j \, CF_j \, \mathrm{e}^{-t_j \, i}}{\sum_{j=1}^{n} CF_j \, \mathrm{e}^{-t_j \, i}}, \tag{A.1}$$

kde: n je počet finančných tokov,
$CF_1, \dots, CF_n$ sú jednotlivé finančné toky,
$t_1, \dots, t_n$ sú splatnosti týchto finančných tokov,
i je spojito úročený výnos do splatnosti dlhopisu,
P je súčasná hodnota dlhopisu.

Zderivovaním môžeme spočítať, že

$$\frac{\partial P}{\partial i} = -\sum_{j=1}^{n} t_j \, CF_j \, \mathrm{e}^{-t_j \, i}, \tag{A.2}$$

a teda

$$MD = -\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial i}. \tag{A.3}$$

Durácia je teda vážená parciálna derivácia súčasnej hodnoty podľa výnosu do splatnosti.[1]

Uvažujme na chvíľu plochú výnosovú krivku, tj. $r_t = r = \mathit{konšt.}$, $t > 0$. V tomto prípade zrejme platí pre výnos do platnosti dlhopisu, že $i = r$. Vychádzajúc zo vzťahu (A.3), je potom durácia mierou citlivosti hodnoty dlhopisu na úroveň výnosovej krivky. Pri paralelnom posune výnosovej krivky o δ je teda možné aproximovať zmenu hodnoty dlhopisu ako

$$\Delta P \doteq -MD\, P\, \delta. \tag{A.4}$$

Posledný vzťah sa dá zapísať aj ako $\Delta P/P \doteq -MD\,\delta$. Tento vzťah ilustruje jedno z najdôležitejších použití durácie. Vyplýva z neho totiž, že dva dlhopisy s rovnakou duráciou reagujú na malý posun výnosovej krivky rovnakou percentuálnou zmenou svojej hodnoty. To sa využíva pri riadení rizík pri tzv. imunizácii.

Durácia je vhodnou veličinou na popis zmien dlhopisu pri malých zmenách výnosu do splatnosti (resp. úrovne plochej výnosovej krivky), ako bolo ukázané vo vzťahu (A.4). V prípade väčších posunov výnosu do splatnosti je častokrát nutné použiť pri aproximácii aj deriváciu druhého rádu. Tomu odpovedá koncept konvexity. Macaulayovu konvexitu fixného dlhopisu definujeme ako

$$MC \overset{def.}{=} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} t_j^2\, CF_j\, \mathrm{e}^{-t_j\, i}}{P} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial\, i^2}. \tag{A.5}$$

S využitím ďalšieho člena Taylorovho rozvoja potom dostávame

$$\Delta P \doteq -MD\, P\, \delta + \frac{1}{2}\, MC\, P\, \delta^2. \tag{A.6}$$

A.2 Obecnejšia definícia durácie a konvexity

U finančných nástrojov, kde vopred nepoznáme hodnoty finančných tokov, prípadne čas ich realizácie nie sú vyššie uvedené koncepty durácie dosť dobre použiteľné. Ďalší problém nastáva, ak chceme zisťovať citlivosť nástroja na paralelné posuny výnosovej krivky a pritom táto krivka nie je plochá. V týchto prípadoch budeme používať odlišnú definíciu durácie a konvexity, než aká bola navrhnutá Macaulayom.

Definujme $P(\delta)$ ako súčasnú hodnotu finančného nástroja pri paralelnom posune výnosovej krivky o δ. Označme $P \overset{ozn.}{=} P(0)$, tj. P značí súčasnú hodnotu finančného nástroja pri aktuálnej výnosovej krivke. Potom duráciu definujeme nasledovne:

[1] Podotknime, že pri použití zloženého úročenia je situácia trochu odlišná. V tomto prípade definujeme tzv. modifikovanú duráciu vzťahom $D_{mod} = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial i}$ a tzv. Macaulayho duráciu ako vážený priemer splatností finančných tokov $MD = (\sum_{j=1}^{n} t_j\, CF_j\, (1+i)^{-t_j})/P$. Dá sa potom odvodiť, že $(1+i)D_{mod} = D$. V prípade spojitého úročenia bolo vyššie ukázané, že $D_{mod} = MD$.

$$D = -\frac{1}{P}\,\frac{\partial\, P}{\partial\,\delta}(0). \tag{A.7}$$

Pri tomto chápaní durácie je tiež možné spočítať duráciu finančného nástroja aj pri paralelnom posune výnosovej krivky o x:

$$D(x) = -\frac{1}{P(x)}\,\frac{\partial\, P}{\partial\,\delta}(x). \tag{A.8}$$

Hodnota $D(x)$ teda udáva duráciu finančného nástroja v prípade, ak by došlo k posunu výnosovej krivky o x. Analogicky je potom možné definovať aj konvexitu:

$$C(x) = \frac{1}{P(x)}\,\frac{\partial^2\, P}{\partial\,\delta^2}(x). \tag{A.9}$$

A.3 Efektívna durácia a konvexita

Často však derivácie zo vzťahov (A.8) a (A.9) nie je možné spočítať. Preto sa u komplikovanejších finančných nástrojov používa tzv. efektívna durácia a konvexita. Ide o numerické priblíženie presnej durácie a konvexity definovaných vyššie. Pri zachovaní označenia zavedeného vyššie potom definujeme efektívnu duráciu finančného nástroja pri posune výnosovej krivky o x ako

$$ED(x) = \frac{P(x-\delta) - P(x+\delta)}{2\,\delta\, P(x)}, \qquad \delta > 0, \tag{A.10}$$

pre dostatočne malé δ, napríklad 1 bázický bod (t.j. 0,01%). Efektívna konvexita je definovaná analogicky ako

$$EC(x) = \frac{P(x-\delta) + P(x+\delta) - 2\,P(x)}{\delta^2\, P(x)}. \tag{A.11}$$

Príklad A.1. Durácia a konvexita bezkupónového dlhopisu

Pre cenu bezkupónového dlhopisu s jednotkovým nominálom máme

$$P = \mathrm{e}^{-r\,t}, \tag{A.12}$$

kde r je odpovedajúca spojito úročená sadzba a t je doba maturity dlhopisu. Pri paralelnom pohybe výnosovej krivky o x by bolo

$$P(x) = \mathrm{e}^{-(r+x)\,t}. \tag{A.13}$$

Potom

$$\frac{\partial P}{\partial \delta}(x) = \left(\mathrm{e}^{-(r+x)\,t}\right)' = -t\,\mathrm{e}^{-(r+x)\,t} = -t\,P(x), \tag{A.14}$$

a preto pre duráciu bezkupónového dlhopisu platí

$$D(x) = -\frac{1}{P(x)}\,\frac{\partial\,P}{\partial\,\delta}(x) = t. \tag{A.15}$$

Ďalším derivovaním vzťahu (A.14) dostávame

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \delta^2}(x) = -t\,\frac{\partial P}{\partial \delta}(x) = t^2\,P(x). \tag{A.16}$$

Preto pre konvexitu bezkupónového dlhopisu máme

$$C(x) = \frac{1}{P(x)}\,\frac{\partial^2\,P}{\partial\,\delta^2}(x) = t^2. \tag{A.17}$$

Príklad A.2. Portfólio finančných nástrojov

Uvažujme dva finančné nástroje s cenami P_1 a P_2. Vzhľadom na linearitu derivácie máme pre portfólio zložené z týchto nástrojov $P = P_1 + P_2$:

$$\frac{\partial P}{\partial \delta} = \frac{\partial P_1}{\partial \delta} + \frac{\partial P_2}{\partial \delta}. \tag{A.18}$$

Pre duráciu portfólia potom platí

$$\begin{aligned} D(x) &= -\frac{1}{P(x)}\,\frac{\partial\,P}{\partial\,\delta}(x) = -\frac{1}{P(x)}\,\frac{\partial\,P_1}{\partial\,\delta}(x) - \frac{1}{P(x)}\,\frac{\partial\,P_2}{\partial\,\delta}(x) && \text{(A.19)}\\ &= \frac{P_1(x)}{P(x)}\,D_1(x) + \frac{P_2(x)}{P(x)}\,D_2(x). && \text{(A.20)} \end{aligned}$$

Teda durácia portfólia dvoch finančných nástrojov je váženým priemerom durácií jednotlivých nástrojov v portfóliu. Váhami sú pritom pomerné zastúpenia nástrojov v portfóliu. Pre portfólio skladajúce sa z n nástrojov, $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$, sa dá potom indukciou odvodiť, že

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{P(x)} D_i(x). \tag{A.21}$$

Analogické vzťahy platia i pre kovexitu portfólia finančných nástrojov.

Literatúra

[1] Anděl J. (2005): Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha.

[2] Asset–Liability Management for Insurers. *sigma* **6**, Swiss Re (2000).

[3] Baxter M., Rennie A. (1996): Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Došlá Z., Došlý O. (2003): Diferenciální počet funkcí více proměnných. Masarykova univerzita, Brno.

[5] Dupačová J. (1982): Lineární programování. SPN, Praha.

[6] Elton E. J., Gruber M. J., Agrawal D., Mann Ch. (2001): Explaining the Rate Spread on Corporate Bonds. *Journal of Finance* **56**, 247–277.

[7] Fabozzi F. J. (1997): The Handbook of Fixed Income Securities. McGraw-Hill.

[8] Geman H., El Karoui N., Rochet J. (1995): Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing. *Journal of Applied Probability* **32**, 443–458.

[9] Henrard M. (2003): Explicit Bond Option and Swaption Formula in One Factor Heath-Jarrow-Merton Model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **6**, 57–62.

[10] Henrard M. (2004): Semi-explicit Delta and Gamma for European Swaptions in Hull-White One Factor Model. EconWPA Working paper.

[11] Hull J. C. (2003): Options, Futures and Other Derivative Securities. Prentice Hall, New Jersey.

[12] Jílek J. (2004): Finanční a komoditní deriváty. Grada Publishing, Praha.

[13] Jílek J. (2005): Finanční a komoditní deriváty v praxi. Grada Publishing, Praha.

[14] Kořistka J. (2004): Durace závazků životní pojišťovny. *Pojistné rozpravy* **16**, 95–104.

[15] Nelson Ch. R., Siegel A. F. (1987): Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business* **60**, 473–489.

[16] Odborné doporučení České společnosti aktuárů č. 1: Stanovení bezrizikové výnosové křivky. www.actuaria.cz.

[17] Odborná směrnice České společnosti aktuárů č. 3: Test postačitelnosti technických rezerv životních pojištění. www.actuaria.cz.

[18] Sedláček T. (2004): Finanční a komoditní derivát. *Právní rádce* **7**, 45–49.

[19] Svensson L. E. O. (1994): Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. Working Paper No. 4871. National Bureau of Economic Research, Cambridge.

[20] Šelić N. (2003): An Examination of the Convexity Adjustment Technique in the Pricing of Constant Maturity Swaps.

[21] Šrámek J. (1997): Implicitní hodnota životní pojišťovny. Diplomová práce, MFF UK, Praha.