Posudek na magisterksou práci Marka Posíšila

Většinu textu magisterské práce kolegy Pospíšila zabírá přehled variačních principů a jejich vzájemných vztahů: Principu Ekelandova, Danešovy věty o kapce, Bishopovy-Phelpsovy věty, principu Browdera-Brézise, věty o oqětí a Caristiho principu. Autor se zejména soustřeďuje na možnosti snadného odvozování jednoho tvrzení z tvrzení jiného. Dále je pak studována vlastnost kapky Banachova prostoru. Předložené důkazy čerpají z celé řady článků, které musel kandidát prostudovat.

Druhým topikem, kterým se práce zabývá je pojem mikroskopických množin. Již na reálné ose je to pojem (ostře) jemnější, než jsou množiny první kategorie, lebesgueovsky malé či mající Hausdorfovu míru 0. Na konci práce se zavádějí mikroskopické množiny v Banachových prostorech a pak mikroskopická vlastnost kapky. Zpracovávají se zejména výsledky ze zdroje [12]. Dostává se nakonec pěkné propojení tohoto konceptu s vlastností kapky: V reflexivním prostoru pro nekompaktní konvexní uzavřenou množinu je ekvivalentní: C má vlastnost kapky; C má mikroskopickou vlastnost kapky; a C má neprázdný vnitřek a jistou vlastnost (α).

Práce má však i řadu nedostatků, viz jejich neúplný seznam níže. Někdy není jasné, co autor udělal sám a co převzla z literatury. Rovněž kulturu psaní bylo možné vylepšit. Našel jsem i řadu překlepů. Práci doporučuji k obhajobě. Navrhuji však známku "dobře" (3).

Seznam připomínek

Strana 8:

Hned na začátku ve větě 3.1 (Bishopově-Phelpsově) asi chybí předpoklad, že C je konvexní. Vskutku, sám Phelps ve své knize LNM No. 1364 tento předpoklad má. Vlastně dle hlubokého výsledku Huffa a Morrise v každém nedentabilním prostoru existuje uzavřená omezená množina, na které žádný nenulový spojitý funkcionál nenabývá svého suprema. (V prostoru c-0 se takováto množina snadno zkontruuje.) Ostatně v důkazu věty 3.1 konvexita C je poněkud potřeba pro Hahn-Banachovské oddělování na straně 9.

Pochybuji, že důkaz lemmy 3.2 patří Johnsonovi a Lindesntruassovi; dál pak odkaz na [4] je poněkud k ničemu, když uvážíme, že toto je tlustý sborník mnoha statí. Je potřeba uvádět stránku!

Důkaz lemmy 3.2 potřebuje doladit: Autor asi nezná pojem "chain" – to je množina M v prostoru s částečným uspořádáním $\prec$ taková, že pro každé $a, b \in M$ je buď $a \prec b$ nebo $b \prec a$. Ne každá chain je rostoucí posloupností! Takže nebyly ověřeny předpoklady Zornova lemmatu.

Dále: Nekonvergentnost posloupnosti není ekvivalentní s tím, že vzdálenost sousedních členů je odražena od 0! Vskutku, Cauchyho podmínka vypadá jinak.

Poznámka. Původně se BP-věta i Ekelandův princip dokazovaly přes zavedení částečného uspořádání a Zornova lemmatu. Od tohoto se pak později ustoupilo k přímějším důkazům pomoci tzv. 1/2-argumentu sestávajícího ze spočetně mnoha kroků.

Strana 12, 13:

Obávám se, že větu 3.5 nedokážete, jak je zde předváděno. Protože, jednoduše, Vaše C nemusí být konvexní množina (ledaže f je konvexní, což se ale u Ekelanda obvykle nepředpokládá).

Ve větě 3.6 má asi být $y \in A$ a $\backslash\{x_0\}$. Smyslu věty ale ani tak moc nerozumím. Tato přeci triviálně plyne z věty 3.4 – stačí si uvědomit, že A je úplný metrický prostor. Proč tedy tak složitý důkaz?

Strana 17
α by snad mělo být z (0,1)?
Dole, 4-řádková formule se snad dá zapsat do dvou řádek?

Strana 21
Dole asi má být "$g(x_0) \leq \sup \cdots$"
Obávám se, že poslední odtsavec není v pořádku. Místo conv (C) musíte brát uzávěr této. Pak ale nemáte vyjádření pro z, viz stranu 22. Naštěstí BP-věta neplatí pro každou nekonvexní množinu C! Platí myslím, že: X není dentabilní prostor (equivalentně, nemá Radonovu-Nikodýmovu vlastnost) právě když existuje v něm uzavřená omezená množina C, že žádný spojitý lineární funkcionál nenabývá na ní svého suprema. Je to založeno na hlubších výsledcích Huffa a Morrise, viz knihu Diestla a Uhla, Jr., strany 207-208.

Strana 25
Trochu elegantnější zavedení množiny $\mathcal{U}$ bych rád viděl zde. Asi by se měla brát $\mathrm{int} B_T$.

Strana 27
Opnent zná RR-vlastnost jako Kadecovu-Kleeovu vlastnost. Odkud jste vzal jméno Radon-Riesz?

Strana 32
V definici 12, má být F konvexní? (Spíše "drop property" se zavádí jenom pro konvexní C.)

Strana 33
Asi ma být, že "$a \in D(C, x) \cap A$"
Je opravdu (d_n) decreasing?
Strana 35
Doplnit ve věte 5.7, že C ma být konvexní.

Závěrečný dotaz: Proč je práce psaná anglicky?

September 1rst, 2015

Doc. RNDr. Marián Fabian, DrSc.
Matematický ústav AV ČR