posudek doktorské dizertační práce Mgr. Josefa Žabenského

"On fluids with pressure-dependent viscosity flowing through a porous medium"

Předložená práce sestává z krátkého úvodu a tří kapitol, z nichž každá je samostatným (a již publikovaným) článkem.

Kapitola 1:

"A generalization of the Darcy-Forchheimer equation involving an implicit, pressure-dependent relation between the drag force and the velocity"

(JMAA 2015 -- spoluautoři: M. Bulíček, J. Málek)

Článek se zabývá známým modelem proudění tekutiny porézním prostředím. Klíčovou inovací je implicitní (přesněji však monotónní) vztah mezi hybností m a rychlostí v, který navíc může záviset na tlaku p. Systém je uvažován v Lipschitzovské oblasti s kombinací Neumannových a Dirichletových okrajových podmínek pro rychlost respektive pro tlak.

V první části je ukázána existence silného řešení ve třídě Sobolevovských funkcí, předpokládáme-li polynomiální růsty a koercivitu konstitutivního vztahu. Je zde použito několik standardních aproximací (Galerkin, kvazi-stlačitelná aproximace a shlazení konvolucí) a monotonie (Mintyho trik) v limitním přechodu.

V druhé části je ukázáno, že pro tlak je splněn princip maxima, což umožňuje podstatně rozšířit třídu konstitutivních vztahů v příslušné existenční teorii: stačí v zásadě lokální omezenost vůči tlaku, tj. například modely s exponenciálních růstem viskozity vůči p jsou nyní též zahrnuty.

Kapitola 2:

"On generalized Stokes' and Brinkman's equations with a pressure- and shear-dependent viscosity and drag coefficient"

(NA-RWA 2015 -- spoluautoři: M. Bulíček, J. Málek)

Tento článek se zabývá opět stacionárním prouděním tekutiny v porézním prostředí. Viskozita je monotónní (explicitní) funkcí symetrického gradientu rychlosti s typickým r-růstem, kde $1<r\le 2$. Viskozita navíc může záviset na tlaku, ovšem s malou lipschitzovskou konstantou. Koeficient ,,tahu`` ("drag coefficient") je nezápornou polynomiální funkcí tlaku, absolutní hodnoty rychlosti a opět též jejího symetrického gradientu, s dosti obecnými růstovými podmínkami. Úloha je formulována slabě v omezené Lipschitzovské a souvislé oblasti, pro libovolnou dimenzi $d\ge 2$. Výsledkem je existence slabého řešení (s nulou na kraji pro rychlost v a nulovým průměrem pro tlak p).

Podstatou článku je důkaz zmíněné existenční věty. Kromě Galerkinovské aproximace se zde využívá opět kvazistlačitelná aproximace a posléze seříznutí koeficientu tahu. Klíčovým problémem je jako obvykle limitní přechod v nelineárních členech, přičemž zřejmě nejobtížnějším elementem je tlak, jenž je přítomen v každém členu rovnice a v každém se chová (co do růstu a řádu derivace) jiným způsobem.

V členu viskózních sil se užívá monotonie vůči Dv a ,,kontrakce`` vůči tlaku. Tento argument však nelze rozšířit na koeficient tahu, vůči němuž se tlak chová jinak -- tento je třeba rozdělit na dvě části: silně konvergující a druhou slabě konvergující, avšak více integrovatelnou, jež se, zhruba řečeno, dá opět uplatnit coby testovací funkce a dospět k silně konvergenci z monotonie+kontrakce vůči nejvyššímu členu. --- Samotné jádro důkazu zabírá cca 15 stran dosti hutného materiálu a používá se zde např. Bogovského operátor či Newtonovský potenciál (konstrukce testovacích funkcí) či Div-Curl Lemma (využití struktury rovnice ve slabé limitě) a Biting Lemma + lipschitzovská aproximace Sobolevovských funkcí (pro závěrečný limitní přechod na samé hranici integrovatelnosti).

Kapitola 3:

"Large data existence theory for unsteady flows of fluids with pressure- and shear-dependent viscosities"

(NA:TMA 2015 -- spoluautor: M. Bulíček)

Poslední kapitola se zabývá systémem, který je na rozdíl od předchozích kapitol evoluční. Jde o opět o model ne-Newtonovské tekutiny, kde tenzor napětí závisí polynomiálně ($r\le2$) na symetrickém gradientu rychlosti a je relativní kontrakcí vůči tlaku. Úloha je studována v obecné omezené oblasti s Lipschitzovskou hranicí a Navierovou okrajovou podmínkou. Hlavním výsledkem je opět existenční věta, jež je zde dokázána pro všechna $r > 2d/(d+2)$, což je v jistém smyslu optimální hodnota (pro nižší r totiž konvektivní člen přestává být kompaktní vzhledem k přirozeným L^r odhadům gradientu rychlosti).

Postup důkazu je zde analogický předchozí kapitole, avšak vzhledem k evoluční povaze problému technicky ještě komplikovanější, mj. kvůli nutnosti použít parabolickou variantu metody lipschitzovské aproximace.

Celkové hodnocení: podle mého názoru se jedná o vynikající dizertaci, obsahující vesměs nové netriviální výsledky a svědčící o tom, že uchazeč si osvojil řadu pokročilých technik z teorie nelineárních PDR a zejména je dokáže netriviálním způsobem kombinovat a modifikovat. Co se týče formálního zpracování, tak jde o texty vysoké úrovně a to jak po matematické, tak i jazykové stránce.

O kvalitě práce samozřejmě svědčí i to, že jednotlivé kapitoly jsou reprinty článků již publikovaných v renomovaných časopisech.

Je zřejmé, že předložená práce vypovídá o schopnosti autora k samostatné a tvořivé vědecké práci. Doporučuji, aby předložená práce byla přijata k obhajobě.

V Praze 25.11.2015

D. Pražák

Dalibor Pražák