Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Dominik Šulc

Problém tří jezer

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Název práce: Problém tří jezer

Autor: Dominik Šulc

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Cílem této práce je nalezení řešení problému tří jezer a podrobný důkaz jeho správnosti. Problém tří jezer (Lakes of Wada) je úloha, která spočívá v sestrojení tří otevřených souvislých množin v rovině, které se neprotínají a mají společnou hranici. Ukážeme, že takové množiny existují a že kromě uvedených vlastností mohou být dokonce obloukově souvislé.

Klíčová slova: hranice, otevřená množina, souvislá množina

Title: Three lakes problem

Author: Dominik Šulc

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Department of mathematical analysis

Abstract: The aim of this thesis is to find a solution of the three lakes problem and to prove its correctness. Three lakes problem (Lakes of Wada) consists in construction of three open connected sets in plane, which are disjoint and have the same boundary. We will show the existence of such sets and moreover we will prove, that it is even possible for these sets to be path connected.

Keywords: boundary, open set, connected set

Rád bych poděkoval svému školiteli doc. RNDr. Stanislavu Henclovi, Ph.D. za věnovaný čas a za pomoc, kterou mi poskytl při psaní této práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Znění hlavní věty

Cílem práce je ukázat, že v rovině existují tři neprázdné otevřené souvislé disjunktní množiny, které mají společnou hranici. Toto tvrzení je známé, viz [3] a [4], my zde uvádíme kompletní důkaz. Tvrzení hlavní věty však uvedeme s pojmem obloukové souvislosti. Jelikož oblouková souvislost implikuje obyčejnou souvislost, dokážeme dokonce silnější tvrzení.

Věta 1. *Existují neprázdné množiny $A, B, C \subset \mathbf{R}^2$ takové, že platí: A, B, C jsou otevřené a obloukově souvislé, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ a zároveň*

$$\partial A = \partial B = \partial C.$$

Nejprve definujme uvedené pojmy a pak stručně popišme myšlenku důkazu.

Definice 2. *Nechť X je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že množina M je souvislá, pokud platí: kdykoliv $A \subset X, B \subset X$ jsou disjunktní otevřené množiny v M takové, že $A \cup B = M$, pak $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$.*

Definice 3. *Nechť X je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že množina M je obloukově souvislá, pokud pro každé dva body $x, y \in M$ existuje spojitá křivka $s : [0, 1] \to M$ taková, že $s(0) = x, s(1) = y$.*

Důkaz Věty 1 bude konstruktivní. Budeme postupovat tak, že nejprve vhodně zvolíme tři množiny A_1, B_1, C_1 a ty budeme pak dále rozšiřovat. Vzdálenost množiny C_1 od množin A_1 a B_1 bude nějaké kladné ε a vzdálenost množin A_1 a B_1 bude větší než ε. Množinu A_1 rozšíříme na obloukově souvislou A_2 tak, aby každý bod hranice B_1 i C_1 měl od množiny A_2 vzdálenost $\varepsilon/3$. Poté množinu B_1 rozšíříme na obloukově souvislou B_2 tak, aby každý bod hranice A_2 i C_1 měl od množiny B_2 vzdálenost $\varepsilon/9$. Poté množinu C_1 rozšíříme na obloukově souvislou C_2 tak, aby každý bod hranice A_2 i B_2 měl od množiny C_2 vzdálenost $\varepsilon/27$. Dále budeme postupovat indukcí. Například množinu A_k rozšíříme na obloukově souvislou A_{k+1} tak, aby každý bod hranice B_k i C_k měl od množiny A_{k+1} vzdálenost $\varepsilon/3^{3k-2}$. Nakonec položíme

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad C := \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

a využijeme toho, že sjednocení otevřených množin je otevřená množina a sjednocení obloukově souvislých do sebe zanořených množin je obloukově souvislá množina. Aby bylo možné uvedenou konstrukci provést, je třeba zajistit, aby doplněk $(A_i \cup B_j \cup C_k)$ byl vždy obloukově souvislý.

1.2 Značení a použité věty

Značení:

- symbolem $\mathbf{N}$ značíme množinu přirozených čísel
- symbolem $\mathbf{R}$ značíme množinu reálných čísel
- symbolem $\mathbf{C}$ značíme množinu komplexních čísel
- $\|.\|_\infty$ je supremová norma definovaná takto $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, $x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$
- ρ_∞ je supremová metrika, což je metrika indukovaná supremovou normou a definuje se takto $\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$, $x, y \in [0,1]^2$
- $\mathrm{dist}(x, y)$ je vzdálenost bodů x a y, tedy $\mathrm{dist}(x, y) = \rho_\infty(x, y), x, y \in [0,1]^2$
- $\mathrm{dist}(x, A)$ je vzdálenost bodu $x \in [0,1]^2$ od množiny $A \subset [0,1]^2$, tedy $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\rho_\infty(x, y), y \in A\}$
- pro $A, B \subset [0,1]^2$ je $\mathrm{dist}(A, B)$ vzdálenost množiny A od množiny B, tedy $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho_\infty(x, y), x \in A, y \in B\}$
- symbolem $B(x, r)$ značíme uzavřenou krychli o středu x a poloměru r, tj. $B(x, r) = \left\{y \in [0,1]^2, \quad \mathrm{dist}(x, y) \leq r\right\}$, pro $x \in [0,1]^2$ a $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$
- symbolem $U(x, r)$ značíme otevřenou krychli o středu x a poloměru r, tj. $U(x, r) = \left\{y \in [0,1]^2, \quad \mathrm{dist}(x, y) < r\right\}$, pro $x \in [0,1]^2$ a $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$
- $\mathrm{int}(A)$ značí vnitřek množiny A, $\mathrm{int}(A) := \{x \in A, \text{existuje}\, r > 0 : U(x, r) \subset A\}$
- pro $A \subset [0,1]^2$ značíme symbolem ∂A hranici množiny A, tedy $\partial A := \left\{x \in [0,1]^2, \text{pro každé } r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset, B(x, r) \cap ([0,1]^2 \setminus A) \neq \emptyset\right\}$
- komponenta souvislosti množiny M je každá maximální (vzhledem k inkluzi) obloukově souvislá podmnožina M

Použité věty:

- **Věta 6 (Riemannova).** *Nechť $G \subset \mathbf{C}$ je neprázdná otevřená obloukově souvislá množina, pro kterou platí, že množina $\mathbf{C} \setminus G$ je také obloukově souvislá, potom G je homeomorfní množině $D := \{z \in \mathbf{C}, \quad | z | < 1\}$.*

  Důkaz lze najít zde [1].

- **Věta 7.** *Nechť X je metrický prostor a $G_n \subset X$ je posloupnost obloukově souvislých množin takových, že platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$, potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je obloukově souvislá množina.*

Důkaz: Nechť $x, y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ a $z \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ jsou libovolné body. Najdeme $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $x \in G_m$ a $y \in G_n$. Množina G_m je obloukově souvislá a platí, že $x, z \in G_m$, tedy existuje spojitá křivka $s_x : [0,1] \to G_m$ taková, že $s_x(0) = x, s_x(1) = z$. Podobně množina G_n je obloukově souvislá a platí, že $y, z \in G_m$, tedy existuje spojitá křivka $s_y : [0,1] \to G_n$ taková, že $s_y(0) = z, s_y(1) = y$. Definujeme-li křivku s následujícím způsobem

$$s(t) = \begin{cases} s_x(2t) & t \in [0, 1/2] \\ s_y(2t-1) & t \in (1/2, 1] \end{cases},$$

potom $s : [0,1] \to \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je spojitá křivka, pro kterou platí, že $s(0) = x, s(1) = y$. Jelikož x, y byly zvoleny libovolně, množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je obloukově souvislá.

□

- **Věta 8.** *Nechť $G \subset \mathbf{R^2}$ je omezená souvislá množina a $\mathbf{R^2} \setminus G$ je také souvislá, potom ∂G je souvislá množina.*

Tato věta je uvedena jeko důsledek 1 věty 17 v textu [2].

- **Věta 9.** *Nechť X je metrický prostor a $G_n \subset X$ je posloupnost otevřených množin, potom platí, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je otevřená množina.*

Důkaz: Nechť $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Potom existuje $k \in \mathbf{N}$ takové, že $x \in G_k$. Množina G_k je otevřená, tedy existuje $r > 0$ takové, že $U(x,r) \subset G_k$. Platí tedy, že $U(x,r) \subset G_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, takže $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je otevřená.

□

Kapitola 2

Důkaz

2.1 Konstrukce výchozích množin

Uvažujme metrický prostor $([0,1]^2, \rho_\infty)$, kde $[0,1]^2$ je jednotkový uzavřený čtverec a ρ_∞ je supremová metrika. Mějme přirozené číslo k a uvažujme na $([0,1]^2, \rho_\infty)$ čtvercovou síť $S := \{s_1, s_2, ..., s_{k^2}\}$, jejíž uzavřené čtverce $s_1, s_2, ..., s_{k^2}$ mají délku strany $1/k$. Kvůli snadnějšímu popisu přiřaďme každému čtverci z množiny S souřadnice $(i,j), \quad i,j \in \mathbf{N}, 1 \leq i,j \leq k$. Přiřazení proveďme tak, že $s(i,j)$ bude čtverec v řádku i a sloupci j, přičemž číslování řádků a sloupců je stejné jako u matic, tedy začíná v levém horním rohu. Zvolme $k := 10$ a definujme množiny A_1, B_1, C_1 tímto způsobem:

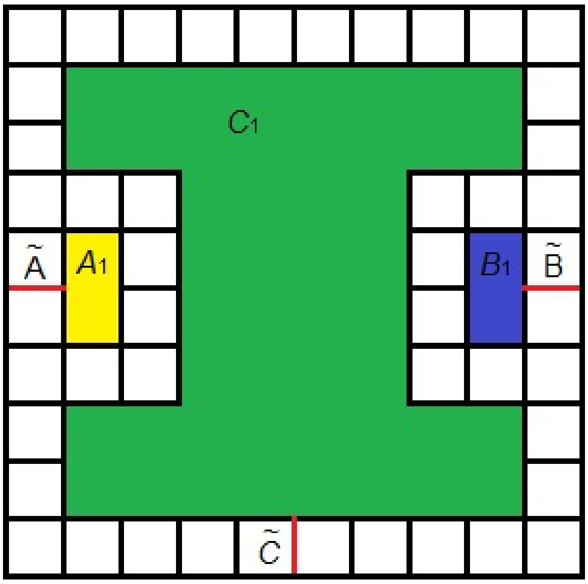
$$A_1 := \mathrm{int}(s(5,2) \cup s(6,2)), \quad B_1 := \mathrm{int}(s(5,9) \cup s(6,9)),$$

$$C_1 := \left\{x \in [0,1]^2,\ \mathrm{dist}(x, A_1) > 1/10,\ \mathrm{dist}(x, B_1) > 1/10,\ \mathrm{dist}(x, \partial\, [0,1]^2) > 1/10\right\}.$$

Nyní ještě definujme pomocné množiny $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ takto:

$$\tilde{A} := s(5,1) \cap s(6,1), \quad \tilde{B} := s(5,10) \cap s(6,10), \quad \tilde{C} := s(10,5) \cap s(10,6).$$

Zkonstruované množiny jsou znázorněny na obrázku 2.1. Množině A_1 odpovídá žlutá barva, množině B_1 modrá a množině C_1 zelená. Množiny $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ jsou červené.



Obrázek 2.1: Množiny $A_1, B_1, C_1, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$

Každá z množin $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ je úsečka délky 1/10, jejíž jeden krajní bod leží na hranici $([0,1]^2, \rho_\infty)$ a druhý krajní bod leží na hranici jedné z množin A_1, B_1, C_1.

2.2 Požadované vlastnosti

Pro A_n, B_n, C_n, $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ a $n = 1, k = 10$ nyní zřejmě platí následující:

(1) A_n, B_n, C_n jsou neprázdné

(2) A_n, B_n, C_n jsou otevřené

(3) $(A_n \cap \mathrm{int}(s_j) \neq \emptyset$, pro nějaké $j \in \{1, 2, ..., k^2\}) \Rightarrow \mathrm{int}(s_j) \subset A_n$,
$(B_n \cap \mathrm{int}(s_j) \neq \emptyset$, pro nějaké $j \in \{1, 2, ..., k^2\}) \Rightarrow \mathrm{int}(s_j) \subset B_n$,
$(C_n \cap \mathrm{int}(s_j) \neq \emptyset$, pro nějaké $j \in \{1, 2, ..., k^2\}) \Rightarrow \mathrm{int}(s_j) \subset C_n$

(4) $\mathrm{dist}(A_n, B_n) > 0, \quad \mathrm{dist}(A_n, C_n) > 0, \quad \mathrm{dist}(B_n, C_n) > 0$

(5) $\mathrm{dist}(A_n, \partial\,[0,1]^2) > 0, \quad \mathrm{dist}(B_n, \partial\,[0,1]^2) > 0, \quad \mathrm{dist}(C_n, \partial\,[0,1]^2) > 0$

(6) A_n, B_n, C_n jsou obloukově souvislé

(7) $([0,1]^2 \setminus A_n)$ je obloukově souvislá,
$([0,1]^2 \setminus B_n)$ je obloukově souvislá,
$([0,1]^2 \setminus C_n)$ je obloukově souvislá

(8) $([0,1]^2 \setminus (A_n \cup \tilde{A}))$ je obloukově souvislá,
$([0,1]^2 \setminus (B_n \cup \tilde{B}))$ je obloukově souvislá,
$([0,1]^2 \setminus (C_n \cup \tilde{C}))$ je obloukově souvislá

S těmito vlastnostmi budeme dále pracovat a odkazovat na ně jako (1)-(8).

2.3 Indukční krok

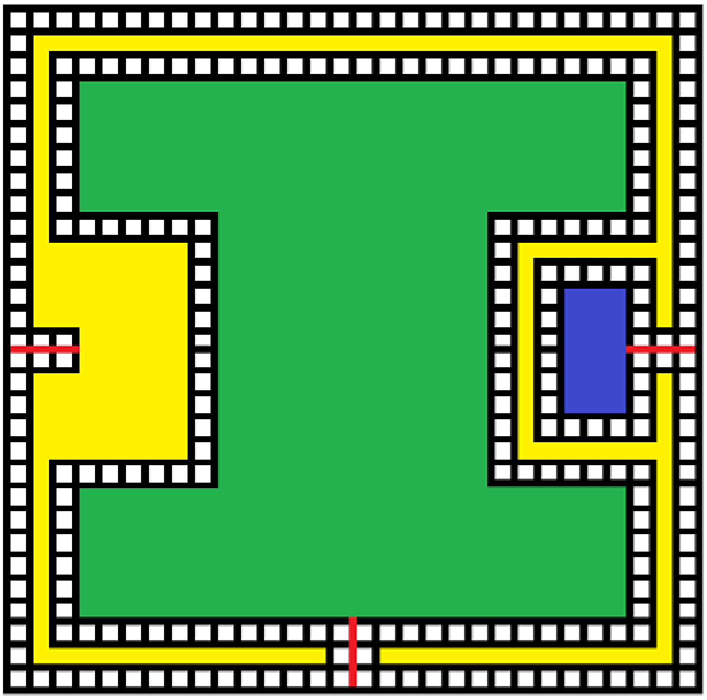
Nyní předpokládejme, že máme přirozená čisla n a $k = 10 \cdot 3^{(3n-3)}$ a tři množiny A_n, B_n, C_n takové, že platí (1)-(8). To, že $k = 10 \cdot 3^{(3n-3)}$ znamená, že nyní pracujeme se čtvercovou síťí S s délkou strany čtverce $\frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-3)}}$. Pro dokončení indukčního kroku stačí definovat množinu A_{n+1} a ukázat, že trojice A_{n+1}, B_n, C_n má uvedené vlastnosti také. Důkaz toho, že i trojice A_{n+1}, B_{n+1}, C_n a $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ mají takové vlastnosti, lze poté provést zcela analogicky.
Z vlastností (4) a (5) najdeme kladné ε takové, že platí:

- $\mathrm{dist}(A_n, B_n) \geq \varepsilon$
- $\mathrm{dist}(B_n, C_n) \geq \varepsilon$
- $\mathrm{dist}(A_n, C_n) \geq \varepsilon$
- $\mathrm{dist}(A_n, \partial [0,1]^2) \geq \varepsilon$
- $\mathrm{dist}(B_n, \partial [0,1]^2) \geq \varepsilon$
- $\mathrm{dist}(C_n, \partial [0,1]^2) \geq \varepsilon$

Je zřejmé, že pro ε rovné délce strany čtverce příslučné čtvercové sítě to platí. Uvažujme tedy toto $\varepsilon = \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-3)}}$ a čtvercovou síť $\tilde{S}$ na $([0,1]^2, \rho_\infty)$ s délkou strany čtverce $\varepsilon/3 = \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-2)}}$ a definujme množinu A_{n+1} takto:

$$A_{n+1} := A_n \cup \left\{ x \in [0,1]^2 : \mathrm{dist}(x, \partial [0,1]^2 \cup \tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C}) > \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-2)}} \right\}.$$

Na obrázku 2.2 je zobrazena situace pro $n = 1$.



Obrázek 2.2: Množiny $A_2, B_1, C_1, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$

2.4 Vlastnosti množin A_n, B_n, C_n

Pro usnadnění důkazu Věty 1 přidejme k vlastnostem (1)-(8) ještě následující vztah, který označíme jako vlastnost (9). Pro $A_n, B_n, C_n, A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, n \in \mathbf{N}$ platí:

(9) pro každé $x \in \partial B_n \cup \partial C_n$ existuje $y \in \partial A_{n+1}$ takové, že $\rho_\infty(x, y) \leq \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-2)}}$,
pro každé $x \in \partial A_{n+1} \cup \partial C_n$ existuje $y \in \partial B_{n+1}$ takové, že $\rho_\infty(x, y) \leq \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-1)}}$,
pro každé $x \in \partial A_{n+1} \cup \partial B_{n+1}$ existuje $y \in \partial C_{n+1}$ takové, že $\rho_\infty(x, y) \leq \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n)}}$

Nyní ukažme, že množiny A_{n+1}, B_n, C_n mají vlastnosti (1)-(8) a nakonec ukažme platnost (9). Písmeno k ve vlastnosti (3) je převrácená hodnota délky strany čtverce příslušné čtvercové sítě, takže v indukčním kroku je třeba pracovat s $k = 10 \cdot 3^{(3n-2)}$ pro případ množiny A_{n+1}, $k = 10 \cdot 3^{(3n-1)}$ v případě B_{n+1} a $k = 10 \cdot 3^{(3n)}$ pro C_{n+1}.

Vlastnost (1)

Množiny B_n a C_n jsou neprázdné dle indukčního předpokladu a platí, že $A_n \subset A_{n+1}$. Jelikož A_n je neprázdná, A_{n+1} je také neprázdná.

□

Vlastnost (2)

Množiny B_n a C_n jsou otevřené opět podle indukčního předpokladu. Díky tomu, že v definici A_{n+1} je ostrá nerovnost a metrika ρ_∞ je spojité zobrazení z $[0,1]^2 \times [0,1]^2$ do $[0,\infty)$, je otevřená i množina A_{n+1}.

$\square$

Vlastnost (3)

Nechť s je prvek čtvercové sítě s délkou strany čtverce $\frac{1}{10\cdot 3^{(3n-2)}}$ a uvažujme množiny A_n, B_n, C_n. Tvrzení lze snadno nahlédnout rozborem možností. Buď $\operatorname{int}(s) \subset (B_n \cup C_n)$ a potom zřejmě totéž platí i po konstrukci A_{n+1}. Pokud platí

$$\operatorname{int}(s) \subset [0,1]^2 \setminus (B_n \cup C_n) \quad \text{a} \quad \operatorname{dist}(s, B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C} \cup \partial\,[0,1]^2) = 0,$$

pak zřejmě $\operatorname{int}(s) \subset [0,1]^2 \setminus (A_{n+1} \cup B_n \cup C_n)$. Pokud

$$\operatorname{dist}(s, B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C} \cup \partial\,[0,1]^2) > 0$$

znamená to, že

$$\operatorname{dist}(s, B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C} \cup \partial\,[0,1]^2) \geq \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-2)}}.$$

V případě, že zároveň $\operatorname{dist}(s, \tilde{A}) > 0$, pak $\operatorname{int}(s) \subset A_{n+1}$. V případě, že $\operatorname{dist}(s, \tilde{A}) = 0$ a $\operatorname{int}(s) \subset A_n$, potom $\operatorname{int}(s) \subset A_{n+1}$. Pokud $\operatorname{dist}(s, \tilde{A}) = 0$ a $\operatorname{int}(s)$ není podmnožinou A_n, pak $\operatorname{int}(s) \subset [0,1]^2 \setminus (A_{n+1} \cup B_n \cup C_n)$.

$\square$

Vlastnost (4)

Podle předpokladu platí $\operatorname{dist}(B_n, C_n) > 0$ a platnost

$$\operatorname{dist}(A_{n+1}, B_n) > 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{dist}(A_{n+1}, C_n) > 0$$

plyne přímo z konstrukce množiny A_{n+1}.

$\square$

Vlastnost (5)

Množiny B_n a C_n mají vlastnost (5) opět podle předpokladu a $\operatorname{dist}(A_{n+1}, \partial\,[0,1]^2) > 0$ je součástí definice A_{n+1}.

$\square$

Vlastnost (6)

Protože množina $A_n \subset A_{n+1}$ je obloukově souvislá, stačí dokázat, že pro každý bod $x \in A_{n+1}$ existuje spojitá křivka $s : [0,1] \to A_{n+1}$ taková, že $s(0) = x$, $s(1) \in A_n$. Pokud $x \in A_n$, zřejmě stačí zvolit $s(t) = x$, $t \in [0,1]$. Pokud $x \in A_{n+1} \setminus A_n$, použijeme následující tvrzení.

Tvrzení 4. *Množina* $[0,1]^2 \setminus (\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C})$ *je obloukově souvislá.*

Nyní budeme předpokládat platnost tohoto tvrzení a dokončíme důkaz vlastnosti 6 a poté ukážeme, že Tvrzení 4 opravdu platí. Označme c_i^j spojnici středů čtverců s_i, s_j a definujme množinu K následujícím způsobem:

$$K := \bigcup_{i,j=1}^{k^2} \Big\{ c_i^j : s_i, s_j \in S, \mathrm{int}(s_i), \mathrm{int}(s_j) \subset [0,1]^2 \setminus (B_n \cup C_n),$$

$$|s_i \cap s_j| > 1,\ s_i \cap s_j \not\subset \Big\{ \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} \Big\} \Big\}.$$

Zde $|s_i \cap s_j|$ značí velikost množiny $s_i \cap s_j$, tedy $|s_i \cap s_j| > 1$ znamená, že s_i a s_j mají společnou stranu. Potom zřejmě množina K je obloukově souvislá, jelikož $[0,1]^2 \setminus (\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C})$ je obloukově souvislá množina, kterou lze napsat jako sjednocení čtverců z S a $\mathrm{dist}(B_n, C_n) > 0$. Protože vzdálenost každého bodu množiny K od $(\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C})$ je větší než $\varepsilon/3$, platí, že $K \subset A_{n+1}$. Nyní již snadno zkonstruujeme příslušnou spojitou křivku. Pro naše $x \in A_{n+1} \setminus A_n$ najdeme $i \in \{1,..,k^2\}$ takové, že $x \in s_i$. Potom zřejmě platí, že $\mathrm{int}\, s_i \subset [0,1]^2 \setminus (\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C})$, takže $s_i \cap K \neq \emptyset$. Z vlastnosti (3) a z definice množiny A_{n+1} plyne, že $s_i \cap A_{n+1}$ je obloukově souvislá množina, a tedy existuje spojitá křivka $p_1 : [0,1] \to A_{n+1}$ taková, že $p_1(0) = x, \quad p_1(1) = s_i^s$, kde s_i^s je střed čtverce s_i. Díky tomu, že množina K je obloukově souvislá a zřejmě má neprázdný průnik s A_n, existuje spojitá křivka $p_2 : [0,1] \to A_{n+1}$ taková, že $p_2(0) = s_i^s, \quad p_2(1) \in A_n$. Definujme křivku p následujícím způsobem:

$$p(t) = \begin{cases} p_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ p_2(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Potom $p : [0,1] \to A_{n+1}$ je spojitá a platí, že $p(0) = x, \quad p(1) \in A_n$. Množiny B_n, C_n jsou obloukově souvislé podle předpokladu. Nyní dokažme Tvrzení 4.

Důkaz Tvrzení 4: Nejdříve pro názornost uveďme zdůvodnění, které není formálním důkazem a jehož význam je ilustrativní a poté provedeme důkaz. Pro množinu $M \in \{B_n, C_n\}$ platí, že M je neprázdná otevřená obloukově souvislá a $[0,1]^2 \setminus M$ je také obloukově souvislá. Podle Věty 6 tedy platí, že M je homeomorfní jednotkové otevřené kouli. Snadno tedy nahlédneme, že náš problém je homeomorfní obrázku 2.3. Na něm je snadno vidět, že příslušný doplněk je obloukově souvislý, a tedy díky zmíněnému homeomorfismu platí i Tvrzení 4.

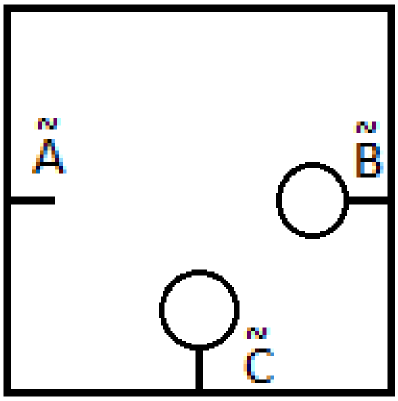
Nyní proveďme formální důkaz. Nechť $x, y \in [0,1]^2 \setminus (\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C})$ jsou libovolné body. Definujme nejprve

$$d := \min \Big\{ \varepsilon, \mathrm{dist}(x,\tilde{A}), \mathrm{dist}(x,\tilde{B}), \mathrm{dist}(x,\tilde{C}), \mathrm{dist}(y,\tilde{A}), \mathrm{dist}(y,\tilde{B}), \mathrm{dist}(y,\tilde{C}) \Big\}$$

a poté definujme množiny α, β, γ takto:

$$\alpha := \Big\{ x \in [0,1]^2, \quad \mathrm{dist}(x,\tilde{A}) < d/2 \Big\},$$

$$\beta := B_n \cup \Big\{ x \in [0,1]^2, \quad \mathrm{dist}(x,\tilde{B}) < d/2 \Big\},$$



Obrázek 2.3: Množina H_2 - homeomorfní obraz množiny $(\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C})$

$$\gamma := C_n \cup \left\{ x \in [0,1]^2, \quad \mathrm{dist}(x, \tilde{C}) < d/2 \right\}.$$

Připomeňme, že ε v těchto definicích je rovno délce strany čtverce naší sítě S, tedy platí $\varepsilon = \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-3)}}$. Množiny α, β, γ jsou tedy otevřené a $x, y \notin (\alpha \cup \beta \cup \gamma)$. Dále platí, že α, β, γ jsou obloukově souvislé. Oblouková souvislost α je zřejmá, dokažme tedy, že β je obloukově souvislá a oblouková souvislost γ se ukáže analogicky. Protože $\mathrm{dist}(B_n, \tilde{B}) = 0$, platí, že

$$B_n \cap \left\{ x \in [0,1]^2, \quad \mathrm{dist}(x, \tilde{B}) < d/2 \right\} \neq \emptyset,$$

a tedy stačí použít Větu 7 a vlastnost (6) pro B_n.

Nechť $p : [0,1] \to [0,1]^2$ je libovolná spojitá křivka taková, že $p(0) = x, \quad p(1) = y$. Označme

$$S := \sup \left\{ t \in [0,1], \quad p(s) \notin (\alpha \cup \beta \cup \gamma) \, \mathrm{pro} \, s \in [0,t] \right\},$$

$$I := \inf \left\{ t \in [0,1], \quad p(s) \notin (\alpha \cup \beta \cup \gamma) \, \mathrm{pro} \, s \in [t,1] \right\}.$$

Pokud $S = 1, I = 0$, tedy pokud křivka p neprotíná žádnou z množin α, β, γ, neprotíná ani $(\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C})$ a jsme hotovi. Pokud $S < 1$ a tedy také $I > 0$, ukážeme pomocí následujícího lemmatu, že křivku p lze předefinovat na maximálně třech vhodných intervalech tak, že výsledná křivka bude dokazovat Tvrzení 4. Poznamenejme také, že volba d zaručuje, že $S \neq -\infty$ a $I \neq \infty$.

Lemma 5. *Množiny* $[0,1]^2 \setminus \alpha, \quad [0,1]^2 \setminus \beta, \quad [0,1]^2 \setminus \gamma$ *jsou obloukově souvislé.*

Důkaz : Ukažme například, že $[0,1]^2 \setminus \beta$ je obloukově souvislá, ostatní se dokáže analogicky. Nechť $x_1, x_2 \in [0,1]^2 \setminus \beta$ jsou libovolné body. Platí tedy, že $x_1, x_2 \in [0,1]^2 \setminus (B_n \cup \tilde{B})$. Množina $[0,1]^2 \setminus (B_n \cup \tilde{B})$ je podle (8) obloukově souvislá, najdeme tedy spojitou křivku $s : [0,1] \to [0,1]^2 \setminus (B_n \cup \tilde{B})$ takovou, že $s(0) = x_1, \quad s(1) = x_2$. Jestliže obraz této křivky neprotíná β, jsme hotovi.

V opačném případě protíná množinu $\beta \setminus (B_n \cup \tilde{B})$. Tato množina zjevně sestává ze dvou komponent souvislosti K_1, K_2. Tyto komponenty jsou obdélníky, které jsou vymezeny z jedné strany částí $\partial [0,1]^2$, z jedné strany množinou $\tilde{B}$ a z jedné strany částí množiny ∂B_n. Označme k_1 zbývající stranu obdélníka K_1 a k_2 zbývající stranu obdélníka K_2. Uvažme nejmenší (vzhledem k inkluzi) interval $[a,b] \subset [0,1]$ takový, že $s([0,1]) \cap K_1 \subset s([a,b])$. Pokud je $[a,b]$ neprázdný, zřejmě platí, že $s(a), s(b) \in k_1$. Křivku s předefinujeme na intervalu $[a,b]$ tak, že $s|_{[a,b]}$ bude spojitá křivka taková, že $s([a,b]) \subset k_1$. Podobně najdeme nejmenší (vzhledem k inkluzi) interval $[c,d] \subset [0,1]$ takový, že $s([0,1]) \cap K_2 \subset s([c,d])$. Jestliže je $[c,d]$ neprázdný, platí, že $s(c), s(d) \in k_2$. Pokud křivku s předefinujeme na intervalu $[c,d]$ tak, že $s|_{[c,d]}$ bude spojitá křivka taková, že $s([c,d]) \subset k_2$, potom $s : [0,1] \to [0,1]^2 \setminus (B_n \cup \tilde{B})$ bude spojitá křivka spojující body x a y.

$\square$

Křivka p je spojitá, takže $I, S \in (\partial\alpha \cup \partial\beta \cup \partial\gamma)$. Jelikož α, β, γ jsou obloukově souvislé a podle Lemmatu 5 jsou obloukově souvislé i jejich doplňky, platí podle Věty 8, že $\partial_{\mathbf{R}^2}\alpha, \partial_{\mathbf{R}^2}\beta, \partial_{\mathbf{R}^2}\gamma$ jsou souvislé množiny, zde $\partial_{\mathbf{R}^2}$ značí hranici množiny vzhledem k metrickému prostoru $\mathbf{R}^2$. Jelikož $\partial_{\mathbf{R}^2}\alpha, \partial_{\mathbf{R}^2}\beta, \partial_{\mathbf{R}^2}\gamma$ lze napsat jako konečná sjednocení úseček, jsou tedy i obloukově souvislé. Díky tomu, že α, β a γ jsou složeny ze čtverců, dostaneme dokonce, že příslušné hranice vzhledem k $[0,1]^2$, tedy

$$\partial\alpha = \partial_{\mathbf{R}^2}\alpha \cap (0,1)^2,\ \partial\beta = \partial_{\mathbf{R}^2}\beta \cap (0,1)^2,\ \partial\gamma = \partial_{\mathbf{R}^2}\gamma \cap (0,1)^2$$

jsou obloukově souvislé.

Pokud platí, že S, I leží na hranici stejné množiny, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $S, I \in \partial\alpha$, stačí křivku p předefinovat, podobně jako v Lemmatu 5, na intervalu $[S, I]$ tak, aby zůstala spojitá a aby platilo, že $p([S,I]) \subset \partial\alpha$, což je možné díky obloukové souvislosti množiny $\partial\alpha$. Pokud S, I leží na hranici různých množin, postupujeme následovně. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $S \in \partial\alpha$, $I \in \partial\gamma$ a definujme

$$S_\alpha := \sup\{t \in [0,1], \quad p(s) \notin \alpha \, \mathrm{pro} \, s \in [0,t]\},$$

$$I_\alpha := \inf\{t \in [0,1], \quad p(s) \notin \alpha \, \mathrm{pro} \, s \in [t,1]\}$$

a na intervalu $[S_\alpha, I_\alpha]$ opět křivku p předefinujeme tak, aby zůstala spojitá a aby obraz tohoto intervalu ležel na hranici množiny α. Dále označme

$$S_{\beta,\gamma} := \sup\{t \in [I_\alpha, 1], \quad p(s) \notin \beta \cup \gamma \, \mathrm{pro} \, s \in [I_\alpha, t]\}.$$

Pokud $S_{\beta,\gamma} \in \partial\gamma$, předefinujeme p na intervalu $[S_{\beta,\gamma}, I]$ tak, aby zůstala spojitá a aby obraz tohoto intervalu ležel na hranici množiny γ a jsme hotovi. V případě, že $S_{\beta,\gamma} \in \partial\beta$, označme

$$I_\beta := \inf\{t \in [0,1], \quad p(s) \notin \beta \, \mathrm{pro} \, s \in [t,1]\},$$

$$S_\gamma := \sup\{t \in [I_\beta, 1], \quad p(s) \notin \gamma \, \mathrm{pro} \, s \in [I_\beta, t]\}$$

a předefinujme p na intervalu $[S_{\beta,\gamma}, I_\beta]$ tak, aby zůstala spojitá a aby obraz tohoto intervalu ležel na hranici množiny β a nakonec předefinujme p na intervalu $[S_\gamma, I]$ tak, aby zůstala spojitá a aby obraz tohoto intervalu ležel na hranici množiny γ. Takto definovaná křivka p je tedy spojitá, $p(0) = x, p(1) = y$ a platí, že

$$p([0,1]) \subset [0,1]^2 \setminus (\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C}),$$

takže $([0,1]^2 \setminus (\tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C}))$ je obloukově souvislá množina.

$\square$

Vlastnost (7)

Zřejmě platí, že $\partial\,[0,1]^2$ je obloukově souvislá množina taková, že $\partial\,[0,1]^2 \cap A_{n+1} = \emptyset$. Pokud $[0,1]^2 \setminus A_{n+1}$ není obloukově souvislá, pak existuje komponenta souvislosti M množiny $[0,1]^2 \setminus A_{n+1}$, která neobsahuje $\partial\,[0,1]^2$. Jelikož množiny $B_n, C_n, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ jsou souvislé, platí alespoň jedna z následujících inkluzí

$$B_n \subset M, \quad C_n \subset M, \quad \tilde{A} \subset M, \quad \tilde{B} \subset M, \quad \tilde{C} \subset M,$$

protože jinak bychom dostali spor s definicí množiny A_{n+1}, jak dále vysvětlíme.

Pokud by žádná z těchto inkluzí neplatila, znamenalo by to, že

$$M \cap (B_n \cup C_n \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}) = \emptyset.$$

Nechť platí

$$\partial M \cap (\partial B_n \cup \partial C_n \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}) \neq \emptyset,$$

mějme například $\partial M \cap \partial B_n \neq \emptyset$. Pak lze místo M vzít $M \cup B_n$ a máme větší komponentu souvislosti $[0,1]^2 \setminus A_{n+1}$, což je spor.

Platí tedy

$$\partial M \cap (\partial B_n \cup \partial C_n \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}) = \emptyset,$$

a tedy vzdálenost příslušných uzavřených množin musí být kladná. Množiny B_n, C_n a M jsou složené ze čtverců (M z uzavřených) o straně $\varepsilon/3$, a tedy dokonce

$$\operatorname{dist}(M, (\partial\,[0,1]^2 \cup B_n \cup C_n \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C})) \geq \varepsilon/3.$$

Vzhledem ke kladné vzdálenosti M od všech ostatních množin dostáváme, že M je obklopena pouze čtverci z A_{n+1}. Pokud platí $\operatorname{dist}(M, \tilde{A}) > \varepsilon/3$, pak body $y \in A_{n+1}$ obklopující M splňují

$$\operatorname{dist}(y, \partial\,[0,1]^2 \cup B_n \cup C_n \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}) > \frac{\varepsilon}{3},$$

a tedy tato nerovnost platí i pro body z M, tedy $M \subset A_{n+1}$ nám opět dává spor.

Ukažme nyní sporem, že $\operatorname{dist}(M, \tilde{A}) > \varepsilon/3$. Kdyby toto neplatilo, existoval by čtverec $s \in \tilde{S}, \operatorname{int}(s) \subset A_{n+1}$ takový, že $s \cap M \neq \emptyset$ a zároveň $s \cap \tilde{A} \neq \emptyset$. Dokonce můžeme předpokládat, že existuje strana a čtverce s splňující $a \subset M$, a tedy neprotíná množinu $\tilde{A}$. Existuje tedy strana $b \neq a$ čtverce s taková, že $b \cap \tilde{A} \neq \emptyset$. Zaroveň však zřejmě platí, že pro každé přirozené číslo n, množinu A_n a jí příslušnou čtvercovou síť existují právě dva čtverce, které protínají $\tilde{A}$ (a to v koncovém bodě $\tilde{A}$) a jejichž vnitřek leží v A_n. Pro množinu A_1 to jsou čtverce $s(5,2)$ a $s(6,2)$ a pro A_n, kde $n \geq 2$, jsou to dva ze čtverců obsažených v $s(5,2) \cup s(6,2)$, které protínají společnou stranu $s(5,2)$ a $s(6,2)$. Každý takový čtverec (kromě $s(5,2), s(6,2)$, které ale splňují $s(5,2), s(6,2) \neq s$) však má nejvýše jednu stranu, která není obsažena v A_n, což je spor s existencí různých stran a a b čtverce s. Jinými slovy neexistuje čtverec sítě $\tilde{S}$, který by protínal množinu M a zároveň $\tilde{A}$ a splňoval $\operatorname{int}(s) \subset A_{n+1}$, což znamená, že $\operatorname{dist}(M, \tilde{A}) > \varepsilon/3$.

Tedy skutečně platí alespoň jedna z následujících inkluzí

$$B_n \subset M, \quad C_n \subset M, \quad \tilde{A} \subset M, \quad \tilde{B} \subset M, \quad \tilde{C} \subset M.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $B_n \subset M$. Množina $B_n \cup \tilde{B}$ je obloukově souvislá díky vlastnosti (6) a má neprázdný průnik s množinou $\partial\, [0,1]^2$, tedy i $M \cap \partial\, [0,1]^2 \neq \emptyset$, což je spor, tedy $[0,1]^2 \setminus A_{n+1}$ je obloukově souvislá. Oblouková souvislost $[0,1]^2 \setminus B_n$ a $[0,1]^2 \setminus C_n$ je součástí předpokladu a důkazy obloukové souvislosti $[0,1]^2 \setminus B_{n+1}$ a $[0,1]^2 \setminus C_{n+1}$ jsou analogické.

$\square$

Vlastnost (8)

Opět stačí ukázat, že například množina $[0,1]^2 \setminus (A_{n+1} \cup \tilde{A})$ je obloukově souvislá. V ostatních případech se postupuje obdobně. Nechť $x, y \in [0,1]^2 \setminus (A_{n+1} \cup \tilde{A})$ jsou libovolné body. Vlastnost (7) množiny A_{n+1} říká, že existuje spojitá křivka

$$s : [0,1] \to [0,1]^2 \setminus A_{n+1}, \quad s(0) = x, \quad s(1) = y.$$

Pokud s neprotíná množinu $\tilde{A}$, jsme hotovi. V opačném případě definujme množinu L předpisem

$$L := \left\{ x \in [0,1]^2 \setminus (A_{n+1} \cup \tilde{A}), \quad \operatorname{dist}(x, \partial\, [0,1]^2 \cup \tilde{A}) < \varepsilon/2 \right\},$$

kde $\varepsilon = \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-2)}}$ je délka strany čtverce sítě $\tilde{S}$. Zřejmě platí, že $L \subset [0,1]^2 \setminus (A_{n+1} \cup \tilde{A})$ a z vlastnosti (5) množiny A_{n+1} plyne, že L je obloukově souvislá. Uvažujme body $z_1, z_2 \in [0,1]$ takové, že

$$z_1 = \inf \left\{ t \in [0,1], \quad s(t) \in \tilde{A} \right\},$$

$$z_2 = \sup \left\{ t \in [0,1], \quad s(t) \in \tilde{A} \right\}.$$

Jelikož křivka s je spojitá, existují $t_1, t_2 \in [0,1]$ taková, že $s(t) \in L$ pro $t \in [t_1, z_1) \cup (z_2, t_2]$. Množina L je obloukově souvislá, tedy existuje spojitá křivka

$$p : [0,1] \to L, \quad p(0) = s(t_1), \quad p(1) = s(t_2).$$

Definujme

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} s(t) & t \in [0, t_1] \\ p(\frac{x - t_1}{t_2 - t_1}) & t \in (t_1, t_2) \\ s(t) & t \in [t_2, 1] \end{cases}$$

a dostaneme spojitou křivku, která neprotíná $A_{n+1} \cup \tilde{A}$ a pro kterou platí $\tilde{s}(0) = x$ a $\tilde{s}(1) = y$. Množiny $[0,1]^2 \setminus (B_n \cup \tilde{B})$ a $[0,1]^2 \setminus (C_n \cup \tilde{C})$ jsou obloukově souvislé opět podle indukčního předpokladu.

$\square$

Vlastnost (9)

Nechť $x \in \partial B_n \cup \partial C_n$ a nechť $s \in S$ je nějaký čtverec, pro který platí, že $\mathrm{int}(s) \subset (B_n \cup C_n)$ a $x \in s$. Uvažme čtverec s' takový, že $|s \cap s'| > 1$ a $\mathrm{int}(s') \cap (B_n \cup C_n) = \emptyset$. Tedy s a s' jsou čtverce, které mají právě jednu společnou stranu. Tato strana je podmnožinou $\partial B_n \cup \partial C_n$ a leží na ní bod x. Čtverec s se dotýká hranice $(B_n \cup C_n)$ zevnitř a čtverec s' zvenčí. Potom zřejmě také platí, že $\mathrm{int}(s') \cap (B_n \cup C_n \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}) = \emptyset$.

Nechť čtverec s'' je částí čtvercové sítě $\tilde{S}$ s délkou strany čverce $\varepsilon/3$, pro který platí, že $s'' \subset \mathrm{int}(s')$ (tj. s'' leží ve středu čtverce s'). Potom platí, že $\mathrm{dist}(s'', \partial\, [0,1]^2 \cup \tilde{A} \cup B_n \cup \tilde{B} \cup C_n \cup \tilde{C}) = \varepsilon/3$. Dostáváme tedy z definice množiny A_{n+1}, že $\mathrm{int}(s'') \subset A_{n+1}$, a tedy $\mathrm{dist}(x, \partial A_{n+1}) \leq \varepsilon/3$. Protože ∂A_{n+1} je uzavřená množina, existuje bod $z \in \partial A_{n+1}$ takový, že $\mathrm{dist}(x, A_{n+1}) = \mathrm{dist}(x, z)$, a tedy lze volit $y = z$. Zbylé dva vztahy se dokáží podobně.

$\square$

2.5 Konstrukce tří jezer

Nyní můžeme přistoupit k samotnému důkazu Věty 1. Definujme množiny A, B, C následujícím způsobem:

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

a ukažme, že mají vlastnosti uvedené ve Větě 1.

Důkaz Věty 1:

(a) Množiny A, B, C jsou neprázdné : Zřejmě $A \supset A_1 \neq \emptyset, B \supset B_1 \neq \emptyset, C \supset C_1 \neq \emptyset$.

(b) Množiny A, B, C jsou otevřené : Plyne z Věty 9.

(c) Množiny A, B, C jsou obloukově souvislé : Jelikož pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad B_n \subset B_{n+1}, \quad C_n \subset C_{n+1},$$

tvrzení plyne z Věty 7.

(d) Množiny A, B, C jsou po dvou disjunktní : Ukažme sporem, že $A \cap B = \emptyset$, ostatní rovnosti lze dokázat analogicky. Pro $x \in A \cap B$ existují $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $x \in A_m$, $x \in B_n$. Položíme-li $N :=\max(m, n)$, platí, že $x \in A_N \cap B_N$, což znamená, že $\mathrm{dist}(A_N, B_N) = 0$ a dostáváme spor s vlastností (4) množin A_N, B_N.

(e) Množiny A, B, C mají společnou hranici : Nechť $x \in \partial B$. To znamená, že existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $x_n \in \partial B_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Z vlastnosti (9) existuje posloupnost $\{y_n\}$ taková, že $y_n \in \partial A_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a
$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n-2)}}.$$
Platí tedy
$$|y_n - x| \leq |y_n - x_n + x_n - x| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x|.$$
Dostáváme tedy, že
$$\lim_{n\to\infty} y_n = x,$$
což znamená že $x \in \partial A$.

Podobně z vlastnosti (9) najdeme posloupnost $\{z_n\}$ takovou, že $z_n \in \partial C_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ a
$$|x_n - z_n| \leq \frac{1}{10 \cdot 3^{(3n)}},$$
což znamená, že
$$\lim_{n\to\infty} z_n = x,$$
(existence z_1 s příslušnými vlastnostmi z vlastnosti (9) neplyne, ale vzhledem k tomu, že nás zajímá pouze limita této posloupnosti, není třeba z_1 zvlášť definovat) a tedy $x \in \partial C$. Platí tedy, že $\partial B \subset \partial A, \partial B \subset \partial C$ a ostatní inkluze se dokáží zcela analogicky.

$\square$

Literatura

[1] W. Rudin: *Real and complex analisys.* McGraw-Hill, 1987, 283-284

[2] R. E. Basye: *Simply connected sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935), no. 2, 341–356.

[3] Brouwer, L. E. J. (1910), "Zur Analysis Situs", Mathematische Annalen 68 (3): 422–434.

[4] Yoneyama, Kunizô (1917), "Theory of Continuous Set of Points", Tôhoku Mathematical Journal 12: 43–158.