Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Adam Bartoš

Topologie generované přidáváním jednotlivých bodů

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce:	prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematické struktury

Praha 2014

Chtěl bych tímto poděkovat prof. RNDr. Petru Simonovi, DrSc., za zadání tohoto zajímavého tématu, cenné rady při jeho řešení a čas strávený kontrolou pracovního textu. Dále bych chtěl poděkovat svojí rodině za celkovou podporu během studia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 15. 7. 2014 Adam Bartoš

Název práce: Topologie generované přidáváním jednotlivých bodů

Autor: Adam Bartoš, drekin@gmail.com

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Abstrakt: Zavádíme obecný pojem uzávěrového schématu, abychom systematicky studovali třídy Fréchetových, sekvenciálních, (pseudo)radiálních, (slabě) (diskrétně) Whyburnových a (slabě) diskrétně generovaných prostorů. Nejprve dokážeme několik obecných tvrzení o uzávěrových schématech a zachovávání přidružených vlastností vzhledem k topologickým konstrukcím. Tato poté využijeme při systematickém shrnutí vlastností výše uvedených tříd. Dále se zaměříme na podrobný přehled inkluzí mezi jednotlivými třídami v obecném případě, na Hausdorffových prostorech a za dodatečných podmínek jako kompaktnost a spočetná kompaktnost. Platné inkluze mezi třídami jsou zobrazeny v přehledných diagramech, neplatné inkluze demonstrovány na množství protipříkladů.

Klíčová slova: Fréchetovy prostory, radiální prostory, diskrétně generované prostory, Whyburnovy prostory, kardinální invarianty, pokrývací vlastnosti

Title: Topologies generated by adding single points

Author: Adam Bartoš, drekin@gmail.com

Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Abstract: We define a general notion of closure scheme to systematically study the classes of Fréchet, sequetial, (pseudo)radial, (weakly) (discretely) Whyburn, and (weakly) discretely generated spaces. First, several general propositions on closure schemes and preservation of induced properties under topological constructions are proved and later applied when we systematically summarize the properties of the classes mentioned above. Next, we focus on a detailed overview of inclusions between the classes in the general case, in the case of Hausdorff spaces, and under additional conditions like compactness and countable compactness. Valid inclusions between the classes are summarized in well arranged diagrams, invalid inclusions are demonstrated by several counterexamples.

Keywords: Fréchet spaces, radial spaces, discretely generated spaces, Whyburn spaces, cardinal invariants, covering properties

Obsah

Úvod

Existují topologické prostory, ve kterých lze každý bod přírůstku do uzávěru dané množiny získat jako hromadný bod jisté vhodné podmnožiny, a navíc je každý jiný bod uzávěru této podmnožiny již obsažen v původní množině – naše podmnožina přidává do uzávěru původní množiny jediný bod. Považujeme-li za vhodné podmnožiny konvergentní posloupnosti, získáme třídu Fréchetových prostorů. Uvažujeme-li transfinitní posloupnosti, dostáváme třídu radiálních prostorů. Pro diskrétní podmnožiny dostáváme diskrétně Whyburnovy prostory a pro libovolné podmnožiny Whyburnovy prostory. Každá z těchto čtyř tříd má ještě zeslabenou variantu. Po řadě jsou to sekvenciální, pseudoradiální, slabě diskrétně Whyburnovy a slabě Whyburnovy prostory.

Cílem práce je systematicky shrnout a porovnat vlastnosti těchto tříd a dále se zaměřit na vztahy mezi jednotlivými třídami. To znamená shrnout obecně platné inkluze, na příkladech ukázat, že jednotlivé třídy v obecné situaci nesplývají, a naopak podat některé dodatečné podmínky, které již splynutí dvou tříd zaručí.

Za tímto účelem v první kapitole zavádíme obecný pojem uzávěrového schématu, vycházející z pojmu uzávěrového operátoru, a jím indukovanou $\mathcal{C}$-generovanost – vlastnost topologických prostorů, které jsou výše uvedené třídy příkladem. Ve druhé kapitole studujeme zachovávání $\mathcal{C}$-generovanosti vzhledem topologickým konstrukcím – podprostorům a induktivním konstrukcím jako je suma a kvocient. Třetí kapitola potom aplikuje obecná tvrzení z druhé kapitoly na konkrétních uzávěrových schématech a dále systematicky zkoumá vztahy mezi nimi v obecné situaci. Ve čtvrté kapitole se zabýváme dodatečnými podmínkami pro splynutí dvou tříd, především kompaktností. Poslední, pátá, kapitola je souborem příkladů, na kterých je jednak demonstrována obecná teorie a které naopak slouží jako protipříklady při budování této teorie.

1. Základní pojmy, uzávěrová schémata

Značení 1.1.

- **On** značí třídu všech ordinálů. **Cn** značí třídu všech kardinálů. **Top** značí třídu všech topologických prostorů.
- ω značí první nekonečný ordinál a též první nekonečný kardinál; ω_1 značí první nespočetný ordinál, resp. kardinál; $\mathfrak{c}$ značí mohutnost kontinua. Kofinalitu ordinálu α značíme $\mathrm{cf}(\alpha)$.
- Uzávěr podmnožiny A topologického prostoru X značíme $\overline{A}^X$, případně jen $\overline{A}$, je-li prostor zřejmý. Podobně $\mathrm{int}_X(A)$, resp. $\mathrm{int}(A)$, značí vnitřek A v X.
- Mohutnost množiny X značíme $|X|$. Množinu všech podmnožin množiny X značíme $\mathcal{P}(X)$, množinu všech κ-prvkových podmnožin množiny X pak $[X]^\kappa$. Analogicky používáme značení $[X]^{<\kappa}$ a $[X]^{\leq\kappa}$.
- Pro zobrazení $f\colon X \to Y$ a $A \subseteq X$ značí $f[A] := \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$ obraz množiny A. Pro $B \subseteq Y$ značí $f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$ vzor množiny B. Dále $\mathrm{dom}(f)$ značí definiční obor zobrazení f, v našem případě tedy $\mathrm{dom}(f) = X$; $\mathrm{rng}(f)$ značí obor hodnot zobrazení f, tedy $\mathrm{rng}(f) = f[X] \subseteq Y$.

Definice 1.2 (uzávěrový operátor, uzavřená množina)**.** Nechť X je množina. Řekneme, že C je *uzávěrový operátor* na X, pokud $C\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ a platí následující podmínky:

- $\forall A, B \subseteq X\colon\ A \subseteq B \implies C(A) \subseteq C(B)$ (monotonie),
- $\forall A \subseteq X\colon\ A \subseteq C(A)$ (extenzivita).

Rozlišujeme také následující podmínky a případně řekneme, že uzávěrový operátor C je *tranzitivní*, *přízemní*, resp. *aditivní*.

- $\forall A \subseteq X\colon\ C(C(A)) \subseteq C(A)$ (tranzitivita),
- $C(\emptyset) = \emptyset$ (přízemnost),
- $\forall A, B \subseteq X\colon\ C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ (aditivita).

Dále řekneme, že množina $A \subseteq X$ je C-*uzavřená*, pokud $C(A) \subseteq A$ (díky extenzivitě ekvivalentně $C(A) = A$).

Poznámka 1.3. Pojem uzávěrového operátoru definuje Čech v [Če, 14 A.1, s. 237], požaduje však podmínky přízemnosti a aditivity už v základní definici. Takovým operátorům říkáme *pretopologické*. Zřejmě aditivita implikuje monotonii a monotonie implikuje jednu inkluzi v podmínce aditivity. Známé tvrzení (např. [En, 1.2.7, s. 22] nebo [Če, 15 A.6, s. 252]) říká, že přízemní aditivní tranzitivní uzávěrové operátory na dané množině jsou v přirozené 1 : 1 korespondenci s topologiemi na této množině. Daný uzávěrový operátor pak splývá s topologickým uzávěrem indukované topologie. Takovým operátorům tedy můžeme říkat *topologické*.

Název „tranzitivní uzávěrový operátor" odpovídá tomu, že $C(A) \supseteq B$ spolu s $C(B) \supseteq D$ implikuje $C(A) \supseteq D$. Používá se i název „idempotentní uzávěrový operátor", který odpovídá faktu $C \circ C = C$ (snadno dokazatelnému z tranzitivity a extenzivity). V jiných kontextech (např. univerzální algebra) se uzávěrové operátory uvažují automaticky idempotentní/tranzitivní.

Definice 1.4 (uzávěrová posloupnost)**.** Nechť C je uzávěrový operátor na X. Pro $A \subseteq X$ definujme *uzávěrovou posloupnost* následovně:

- $C_0(A) := A$,
- $C_{\alpha+1}(A) := C(C_\alpha(A))$,
- $C_\alpha(A) := \bigcup\{C_\beta(A) : \beta < \alpha\}$ pro α limitní,
- $\overline{C}(A) := \bigcup\{C_\alpha(A) : \alpha \in \mathbf{On}\}$.

Tímto jsme definovali také zobrazení $C_\alpha, \overline{C} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ pro $\alpha \in \mathbf{On}$. Poznamenejme, že definice $\overline{C}$ je korektní, neboť pro každé α máme $C_\alpha(A) \subseteq X$ a uzávěrová posloupnost se zastaví, tj. existuje α, že pro každé $\beta \geq \alpha$ máme $C_\beta(A) = C_\alpha(A)$.

Pozorování 1.5 (základní vlastnosti)**.** *Nechť C je uzávěrový operátor na X.*

(i) *Jsou-li $A_i \subseteq X$, $i \in I$, C-uzavřené, pak množina $\bigcap\{A_i : i \in I\}$ je také C-uzavřená. Tj. libovolný průnik C-uzavřených množin je C-uzavřený. Existuje tedy C-*uzávěr *ve smyslu nejmenší C-uzavřené nadmnožiny.*

(ii) *Všechna zobrazení C_α pro $\alpha \in \mathbf{On}$ jsou uzávěrové operátory na X. Zobrazení $\overline{C}$ je tranzitivní uzávěrový operátor na X.*

(iii) *Pro $A \subseteq X$ je $\overline{C}(A) = \bigcap\{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ je } C\text{-uzavřená}\}$ a A je C-uzavřená, právě když $\overline{C}(A) = A$, tedy C-uzávěr je realizován operátorem $\overline{C}$ a C-uzavřené množiny splývají s $\overline{C}$-uzavřenými.*

(iv) *Uzávěrové operátory na X s operacemi*

$$(\textstyle\bigwedge \mathcal{C})(A) := \bigcap\{C(A) : C \in \mathcal{C}\},$$
$$(\textstyle\bigvee \mathcal{C})(A) := \bigcup\{C(A) : C \in \mathcal{C}\}$$

a uspořádáním $C^1 \leq C^2 \;:\Longleftrightarrow\; \forall A \subseteq X\colon\; C^1(A) \subseteq C^2(A)$ tvoří úplný distributivní svaz.

(v) *Pro $\alpha \leq \beta$ ordinály máme $C_\alpha \leq C_\beta \leq \overline{C}$ a $\overline{C}$ je nejmenší tranzitivní uzávěrový operátor nad C, tedy C je tranzitivní, právě když $C = \overline{C}$. Díky tomu také platí $C^1 \leq C^2 \implies \overline{C^1} \leq \overline{C^2}$.*

(vi) *Je-li C přízemní, resp. aditivní, pak jsou i všechna C_α a $\overline{C}$ přízemní, resp. aditivní. Tedy je-li C pretopologický, je $\overline{C}$ topologický.*

Důkaz.

(i) Plyne snadno z monotonie: $C(\bigcap\{A_i : i \in I\}) \subseteq \bigcap\{C(A_i) : i \in I\} = \bigcap\{A_i : i \in I\}$.

(ii) Monotonie i extenzivita plyne snadno indukcí. Pro každé A existuje ordinál α, že $\overline{C}(A) = C_\alpha(A)$, tedy $C(\overline{C}(A)) = C_{\alpha+1}(A) \subseteq \overline{C}(A)$.

(iii) Pro každé $A \subseteq X$ máme $A \subseteq C(A) \subseteq \overline{C}(A)$, tedy $\overline{C}$-uzavřená množina je C-uzavřená. Naopak, pokud $A = C(A)$, pak je uzávěrová posloupnost konstantní a $\overline{C}(A) = A$. Tedy pro každou $B \supseteq A$ C-uzavřenou máme $\overline{C}(A) \subseteq \overline{C}(B) = B$. Naopak $\overline{C}(A)$ je C-uzavřená, protože $\overline{C}$ je tranzitivní.

(iv) Definice jsou korektní díky monotonii průniku a sjednocení. Struktura svazu se přirozeně přenese ze svazu $\mathcal{P}(X)$.

(v) První část plyne snadno z definice. Je-li C' tranzitivní uzávěrový operátor na X a $C' \geq C$, pak $C(C(A)) \subseteq C'(C'(A)) = C'(A)$. Podobně indukcí $C_\alpha(A) \subseteq C'(A)$, a tedy i $\overline{C}(A) \subseteq C'(A)$.

(vi) Obojí plyne snadno indukcí. □

Tvrzení 1.6. *Nechť C je uzávěrový operátor na X a $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Definujme $C_\mathcal{M}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ předpisem $C_\mathcal{M}(A) := A \cup \bigcup\{C(M) : M \in \mathcal{M},\ M \subseteq A\}$ pro $A \subseteq X$. Potom platí následující.*

(i) *$C_\mathcal{M}$ je uzávěrový operátor na X a $C_\mathcal{M} \leq C$.*

(ii) *Pokud je operátor C aditivní a soubor $\mathcal{M}$ je uzavřený na podmnožiny, je operátor $C_\mathcal{M}$ rovněž aditivní.*

(iii) *Pokud je operátor C tranzitivní a soubor $\mathcal{M}$ je uzavřený na sjednocení souborů velikostí nejvýše* $\sup\{|M| : M \in \mathcal{M}\}$, *je operátor $C_\mathcal{M}$ rovněž tranzitivní.*

Důkaz.

(i) Plyne snadno z definice.

(ii) Pro $M \subseteq A \cup B \subseteq X$, $M \in \mathcal{M}$ platí $C(M) = C((M \cap A) \cup (M \cap B)) = C(M \cap A) \cup C(M \cap B) \subseteq C_\mathcal{M}(A) \cup C_\mathcal{M}(B)$. Ve druhé rovnosti využíváme předpokladu aditivity, v poslední inkluzi faktu, že $M \cap A, M \cap B \in \mathcal{M}$.

(iii) Uvažme situaci $M \subseteq C_\mathcal{M}(A)$, $M \in \mathcal{M}$, $A \subseteq X$. Pro každé $x \in M$ zvolme $M_x \in \mathcal{M}$ splňující $x \in C(M_x)$ a $M_x \subseteq A$. Položme $M' := \bigcup\{M_x : x \in M\}$. Potom $M' \subseteq A$ a dle předpokladu $M' \in \mathcal{M}$. Dále $M \subseteq C(M')$, tedy $C(M) \subseteq C(C(M')) = C(M')$, kde poslední rovnost plyne z předpokládané tranzitivity. □

Následující lemma platné pro standardní topologický uzávěr platí i v obecnějším kontextu uzávěrových operátorů.

Lemma 1.7. *Nechť C je aditivní uzávěrový operátor na množině X. Pak pro každou množinu $A \subseteq X$ a každou C-otevřenou množinu $U \subseteq X$ (tj. doplněk C-uzavřené množiny) platí $C(A) \cap U \subseteq C(A \cap U)$.*

Důkaz. Díky aditivitě $C(A) = C(A \cap U) \cup C(A \setminus U)$. Protože množina $X \setminus U$ je C-uzavřená, platí $C(A \setminus U) \subseteq X \setminus U$, tedy $C(A \setminus U) \cap U = \emptyset$ a $C(A) \cap U = C(A \cap U) \cap U \subseteq C(A \cap U)$. □

Definice 1.8 (uzávěrové schéma)**.** Kolekci $\mathcal{C} = \langle C_X : X \in \mathbf{Top} \rangle$, která každému topologickému prostoru X přiřazuje uzávěrový operátor C_X, nazveme *(topologické) uzávěrové schéma*, pokud platí

- $(\forall h\colon X \to Y \text{ homeomorfismus})(\forall A \subseteq X)\colon\ h[C_X(A)] = C_Y(h[A])$,
- $(\forall X \in \mathbf{Top})(\forall A \subseteq X)\colon\ C_X(A) \subseteq \overline{A}^X$.

Dále rozšíříme pojmy a značení týkající se uzávěrových operátorů na uzávěrová schémata:

- Uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ je tranzitivní, resp. přízemní, resp. aditivní, pokud jsou takové všechny operátory C_X,
- množina $A \subseteq X \in \mathbf{Top}$ je $\mathcal{C}$-uzavřená, pokud je C_X-uzavřená,
- $\mathcal{C}_\alpha := \langle C_{X,\alpha} : X \in \mathbf{Top} \rangle$, $\overline{\mathcal{C}} := \langle \overline{C_X} : X \in \mathbf{Top} \rangle$,
- $\mathcal{C}^1 \leq \mathcal{C}^2$, pokud $C^1_X \leq C^2_X$ pro každé X.

Poznámka 1.9. První podmínka z předchozí definice říká, že uzávěrové schéma je topologický pojem, nezáleží na volbě homeomorfní kopie topologického prostoru. Druhá podmínka pak požaduje $\mathcal{C} \leq \mathrm{cl}$, kde $\mathrm{cl} = \langle \mathrm{cl}_X : X \in \mathbf{Top} \rangle$ je schéma dané standardním topologickým uzávěrem: $\mathrm{cl}_X(A) = \overline{A}^X$. Protože schéma cl je přízemní, jsou díky druhé podmínce všechna uzávěrová schémata přízemní.

Pro každé uzávěrové schéma $\mathcal{C}$, topologický prostor X a $A \subseteq X$ máme $A \subseteq C_X(A) \subseteq \overline{C}_X(A) \subseteq \overline{A}^X$.

Protože obraz při prostém zobrazení zachovává průnik i sjednocení, můžeme za zachování definujících podmínek uzávěrového schématu definovat

$$\bigwedge\{\mathcal{C} : \mathcal{C} \in \mathbf{C}\} := \langle \bigwedge\{C_X : \mathcal{C} \in \mathbf{C}\} : X \in \mathbf{Top} \rangle,$$
$$\bigvee\{\mathcal{C} : \mathcal{C} \in \mathbf{C}\} := \langle \bigvee\{C_X : \mathcal{C} \in \mathbf{C}\} : X \in \mathbf{Top} \rangle$$

a uzávěrová schémata spolu s těmito operacemi tvoří opět úplný distributivní svaz (pomineme-li, že se nejedná o množinu ani třídu). Jeho největším prvkem je díky druhé podmínce v definici topologický uzávěr cl, nejmenším prvkem je $\mathcal{C}^{\mathrm{Id}} := \langle \mathrm{id}_X : X \in \mathbf{Top} \rangle$, kde id_X je identita na X.

Značení 1.10. Pro konkrétní uzávěrová schémata $\mathcal{C}^\square$ budeme v případě potřeby psát $\mathcal{C}^\square(A, X)$ místo $C^\square_X(A)$. Za situace, kdy je prostor X zřejmý z kontextu, můžeme psát také $\mathcal{C}^\square(A)$ místo $C^\square(A)$.

Definice 1.11 ($\mathcal{C}$-generovanost)**.** Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, X topologický prostor.

- Řekneme, že prostor X je *$\mathcal{C}$-generovaný* (přesněji topologie na X je $\mathcal{C}$-generovaná), pokud pro každou podmnožinu $A \subseteq X$ platí $C_X(A) = \overline{A}$, tj. $C_X = \mathrm{cl}_X$.
- Řekneme, že prostor X je *slabě $\mathcal{C}$-generovaný*, pokud je $\overline{\mathcal{C}}$-generovaný, tj. pro každou podmnožinu $A \subseteq X$ platí $\overline{C}_X(A) = \overline{A}$.
- Řekneme, že prostor X je *$\mathcal{C}$-generovaný* v bodě $x \in X$, pokud pro každou množinu $A \subseteq X$ platí $x \in \overline{A} \implies x \in C_X(A)$.
- Řekneme, že prostor X je *slabě $\mathcal{C}$-generovaný* v bodě $x \in X$, pokud je $\overline{\mathcal{C}}$-generovaný v x, tj. pro každou množinu $A \subseteq X$ platí $x \in \overline{A} \implies x \in \overline{C}_X(A)$.

Lemma 1.12. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, X topologický prostor. Pak platí:*

(i) *Prostor X je $\mathcal{C}$-generovaný, právě když je $\mathcal{C}$-generovaný v každém bodě $x \in X$. Totéž platí pro slabou $\mathcal{C}$-generovanost.*

(ii) *Prostor X je slabě $\mathcal{C}$-generovaný, právě když uzavřené množiny jsou právě $\mathcal{C}$-uzavřené, právě když pro každou neuzavřenou množinu $A \subseteq X$ existuje $x \in C_X(A) \setminus A$.*

(iii) *Prostor X je $\mathcal{C}$-generovaný, právě když je slabě $\mathcal{C}$-generovaný a operátor C_X je tranzitivní. Je-li prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v bodě $x \in X$, pak je i slabě $\mathcal{C}$-generovaný v x.*

Důkaz.

(i) Plyne snadno z definice.

(ii) Uzavřené množiny jsou právě $\mathcal{C}$-uzavřené, právě když topologický uzávěr splývá s $\mathcal{C}$-uzávěrem (ve smyslu nejmenší $\mathcal{C}$-uzavřené nadmnožiny), to jest $\forall A \subseteq X\colon\ \overline{A} = \overline{C}_X(A)$. Tedy první ekvivalence platí.

Díky inkluzi $A \subseteq C_X(A) \subseteq \overline{C}_X(A) \subseteq \overline{A}$ je každá uzavřená množina $\mathcal{C}$-uzavřená. Poslední ekvivalentní podmínka je jen kontrapozitivní reformulace opačné implikace: „každá neuzavřená $A \subseteq X$ je $\mathcal{C}$-neuzavřená“.

(iii) Plyne snadno z definic a inkluze $A \subseteq C_X(A) \subseteq \overline{C}_X(A) \subseteq \overline{A}$. Tranzitivita operátoru C_X říká $C_X(A) = \overline{C}_X(A)$ pro každé $A \subseteq X$. □

Příklad 1.13 (Konkrétní uzávěrová schémata)**.** Podívejme se na některá teoretická i klasická uzávěrová schémata.

- Topologický uzávěr cl je tranzitivní přízemní aditivní uzávěrové schéma. Ve svazu uzávěrových schémat tvoří největší prvek. Všechny topologické prostory jsou cl-generované.
- Schéma identity $\mathcal{C}^{\mathrm{Id}} = \langle \mathrm{id}_X : X \in \mathbf{Top} \rangle$ je tranzitivní přízemní aditivní uzávěrové schéma, které tvoří nejmenší prvek ve svazu uzávěrových schémat. $\mathcal{C}^{\mathrm{Id}}$-generované jsou právě diskrétní prostory.
- Kdybychom v definici uzávěrového schématu nepožadovali podmínku $\mathcal{C} \leq \mathrm{cl}$ a uvažovali takto zobecněná uzávěrová schémata, pak by největším prvkem svazu zobecněných přízemních uzávěrových schémat bylo plné schéma $\mathcal{C}^{\mathrm{Full}}$, kde $\mathcal{C}^{\mathrm{Full}}(A, X) := X$ pro každé $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\mathcal{C}^{\mathrm{Full}}(\emptyset, X) := \emptyset$. Toto schéma je tranzitivní, přízemní a aditivní. $\mathcal{C}^{\mathrm{Full}}$-generované jsou právě indiskrétní topologické prostory.
- Uvažme $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}(A, X) := \{x \in X : \exists \{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq A\colon\ \langle x_n \rangle_{n\in\omega} \to x\}$, tj. limity všech posloupností ležících v A. $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$-generovaným prostorům se říká *Fréchetovy* či *Fréchetovy–Urysohnovy*, $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}}$-generovaným prostorům pak *sekvenciální*.
- Uvažme $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}(A, X) := \{x \in X : \exists \{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \subseteq A\colon\ \langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in\kappa} \to x$, pro nějaké $\kappa\}$, tj. limity všech transfinitních posloupností ležících v A. $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}$-generované prostory nazýváme *radiální* a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}}$-generované prostory nazýváme *pseudoradiální*.
- Uvažme $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}(A, X) := \bigcup\{\overline{D} : D \subseteq A,\ D \text{ je diskrétní}\}$. $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$-generované prostory nazýváme *diskrétně generované* a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}}$-generované pak *slabě diskrétně generované*.

- Uvažme $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}(A, X) := A \cup \bigcup\{\overline{M} : M \subseteq A, |\overline{M} \setminus A| = 1\}$. $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$-generovaným prostorům říkáme *Whyburnovy* a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}}$-generovaným potom *slabě Whyburnovy*.

Poznámka 1.14. Nyní jsme v následující situaci. Topologie daného prostoru X určuje uzávěrový operátor daný nějakým schématem $\mathcal{C}$. My zpětně zkoumáme, co nám tento operátor říká o původní topologii. Je-li tento prostor slabě $\mathcal{C}$-generovaný, pak můžeme celou původní topologii zrekonstruovat z operátoru C_X (uzavřené množiny jsou právě $\mathcal{C}$-uzavřené dle lemmatu 1.12).

2. Vlastnosti uzávěrových schémat, zachovávání

2.1 $\mathcal{C}$-dědičná a $\mathcal{C}$-spojitá zobrazení

Definice 2.1. Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, X, Y jsou topologické prostory, $f\colon X \to Y$. Řekneme, že zobrazení f je

- $\mathcal{C}$-*dědičné*, pokud je prosté a platí $f[C_X(A)] \supseteq C_Y(f[A]) \cap \operatorname{rng}(f)$ pro každé $A \subseteq X$;
- $\mathcal{C}$-*spojité*, pokud platí $f[C_X(A)] \subseteq C_Y(f[A])$ pro každé $A \subseteq X$;
- $\mathcal{C}$-*dědičné v bodě* $x \in X$, pokud je prosté a platí $f(x) \in C_Y(f[A]) \implies x \in C_X(A)$ pro každé $A \subseteq X$;
- $\mathcal{C}$-*spojité v bodě* $x \in X$, pokud platí $x \in C_X(A) \implies f(x) \in C_Y(f[A])$ pro každé $A \subseteq X$.

Názvy tradičních uzávěrových schémat použijeme i pro pojmenování $\mathcal{C}$-spojitých a $\mathcal{C}$-dědičných zobrazení. Takže např. místo „$\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$-spojité“ můžeme psát „Fréchet-spojité“ a místo „$\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}}$-spojité“ můžeme psát „sekvenciálně spojité“.

Pozorování 2.2. *Snadno nahlédneme následující pozorování.*

- *Zobrazení je $\mathcal{C}$-spojité, právě když je $\mathcal{C}$-spojité v každém bodě. Podobně zobrazení je $\mathcal{C}$-dědičné, právě když je $\mathcal{C}$-dědičné v každém bodě.*
- *Spojitost (v bodě) je totéž co* cl-*spojitost (v bodě).*
- *$\mathcal{C}$-spojitá i $\mathcal{C}$-dědičná zobrazení jsou uzavřená na skládání.*

Lemma 2.3. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma. Je-li zobrazení $\mathcal{C}$-spojité, pak vzor každé $\mathcal{C}$-uzavřené množiny je $\mathcal{C}$-uzavřená množina. Je-li $\mathcal{C}$ navíc tranzitivní, pak platí i opačná implikace.*

Důkaz. Nechť zobrazení $f\colon X \to Y$ je $\mathcal{C}$-spojité a množina $B \subseteq Y$ je $\mathcal{C}$-uzavřená. Ukážeme, že množina $A := f^{-1}[B]$ je $\mathcal{C}$-uzavřená. Z předpokladů máme $f[C_X(A)] \subseteq C_Y(f[A]) \subseteq C_Y(B) = B$, a tedy $C_X(A) \subseteq f^{-1}[B] = A$.

Nechť je naopak vzor každé $\mathcal{C}$-uzavřené množiny $\mathcal{C}$-uzavřený, $\mathcal{C}$ je tranzitivní a $A \subseteq X$ je libovolná podmnožina. Pak množina $B := C_Y(f[A])$ je díky tranzitivitě schématu $\mathcal{C}$-uzavřená, a proto i $f^{-1}[B]$ je $\mathcal{C}$-uzavřená. Tedy z $A \subseteq f^{-1}[B]$ máme $C_X(A) \subseteq f^{-1}[B]$ a $f[C_X(A)] \subseteq B = C_Y(f[A])$. $\square$

Lemma 2.4. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, X, Y topologické prostory, $f\colon X \to Y$.*

(i) *Pokud je zobrazení f $\mathcal{C}$-spojité, pak je i $\overline{\mathcal{C}}$-spojité.*

(ii) *Pokud je zobrazení f $\mathcal{C}$-dědičné, pak je i $\overline{\mathcal{C}}$-dědičné, je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

- *$f[X]$ je $\mathcal{C}$-uzavřený podprostor Y,*
- *$f[X]$ je $\mathcal{C}$-otevřený podprostor Y a $\mathcal{C}$ je aditivní na Y.*

Důkaz. Někdy budeme psát $C(A)$, místo $C_X(A)$, bude-li prostor X zřejmý z kontextu, totéž pro Y. V následujícím je A libovolná podmnožina X.

(i) Indukcí

$$f[C_{\alpha+1}(A)] = f[C(C_\alpha(A))] \subseteq C(f[C_\alpha(A)]) \subseteq C(C_\alpha(f[A])) = C_{\alpha+1}(f[A]);$$
$$f[C_\alpha(A)] = f[\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta(A)] = \bigcup_{\beta<\alpha} f[C_\beta(A)] \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta(f[A]) = C_\alpha(f[A]),$$

pro α limitní. Dále existuje ordinál α, že $\overline{C}_X(A) = C_{X,\alpha}(A)$ a $\overline{C}_Y(f[A]) = C_{Y,\alpha}(f[A])$, a tedy tvrzení platí.

(ii) Označme $Z := \operatorname{rng}(f)$. V obou případech platí inkluze $C(C_\alpha(f[A])) \cap Z \subseteq C(C_\alpha(f[A]) \cap Z)$ pro každé α. V uzavřeném případě je totiž $C_\alpha(f[A]) \subseteq Z$ pro každé α, v otevřeném aditivním případě užijeme lemma 1.7. Indukcí tedy dostáváme

$$C_{\alpha+1}(f[A]) \cap Z = C(C_\alpha(f[A]) \cap Z) \cap Z \subseteq C(f[C_\alpha(A)]) \cap Z \subseteq f[C_{\alpha+1}(A)];$$
$$C_\alpha(f[A]) \cap Z = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta(f[A]) \cap Z \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} f[C_\beta(A)] = f[C_\alpha(A)],$$

pro α limitní. Tvrzení plyne podobně jako v prvním bodě. □

Tvrzení 2.5 (vztah spojitosti a $\mathcal{C}$-spojitosti)**.** *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, X, Y topologické prostory, $f\colon X \to Y$, $x \in X$.*

(i) *Pokud je zobrazení f $\mathcal{C}$-spojité v bodě x a prostor X je $\mathcal{C}$-generovaný v x, pak f je spojité v bodě x. Tedy $\mathcal{C}$-spojité zobrazení z $\mathcal{C}$-generovaného prostoru je spojité.*

(ii) *Pokud je zobrazení f spojité v bodě x a prostor Y je $\mathcal{C}$-generovaný v bodě $f(x)$, pak f je $\mathcal{C}$-spojité v x. Tedy spojité zobrazení do $\mathcal{C}$-generovaného prostoru je $\mathcal{C}$-spojité.*

(iii) *Pokud je zobrazení f $\mathcal{C}$-dědičné, prostor Y je $\mathcal{C}$-generovaný a množina* $\operatorname{rng}(f)$ *je $\mathcal{C}$-uzavřená, potom je f uzavřené zobrazení (připomeňme, že zobrazení je uzavřené, je-li obraz libovolné uzavřené množiny uzavřená množina).*

(iv) *Pokud je zobrazení f uzavřené a prosté a prostor X je $\mathcal{C}$-generovaný, potom je f $\mathcal{C}$-dědičné zobrazení.*

Důkaz. V následujícím je A libovolná podmnožina X.

(i) Máme $x \in \overline{A} \implies x \in C_X(A) \implies f(x) \in C_Y(f[A]) \subseteq \overline{f[A]}$. První implikace plyne z $\mathcal{C}$-generovanosti prostoru X v x, druhá implikace z $\mathcal{C}$--spojitosti zobrazení f v x.

(ii) Máme $x \in C_X(A) \subseteq \overline{A} \implies f(x) \in \overline{f[A]} \implies f(x) \in C_Y(f[A])$. První implikace plyne ze spojitosti v x, druhá plyne z $\mathcal{C}$-generovanosti prostoru Y v $f(x)$.

(iii) Nechť $A \subseteq X$ je uzavřená, pak je i $\mathcal{C}$-uzavřená. Potom z $\mathcal{C}$-dědičnosti máme $C_Y(f[A]) \cap \operatorname{rng}(f) \subseteq f[C_X(A)] = f[A]$. Přitom $C_Y(f[A]) \subseteq C_Y(\operatorname{rng}(f)) = \operatorname{rng}(f)$. Celkem $f[A]$ je $\mathcal{C}$-uzavřená, a tedy z předpokladu i uzavřená.

(iv) $f[C_X(A)] = f[\overline{A}]$, což je uzavřená, a tedy i $\mathcal{C}$-uzavřená množina, která obsahuje $f[A]$. Celkem $f[C_X(A)] \supseteq C_Y(f[A])$. □

Příklad 2.6 (Heineho věta)**.** Připomeňme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *Heine-spojitá v bodě* $x \in X$, pokud $\langle x_n : n \in \omega\rangle \to x \implies \langle f(x_n) : n \in \omega\rangle \to f(x)$, kde $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ je posloupnost v X. A je *Heine-spojitá*, pokud je Heine-spojitá v každém bodě.

Zřejmě je každá Heine-spojitá funkce v bodě také Fréchet-spojitá v bodě, a tedy dle lemmatu 2.4 je Heine-spojitá funkce sekvenciálně spojitá. Předchozí tvrzení nám tedy ihned dává Heineho větu: Máme-li $f\colon X \to Y$, $x \in X$, f je Heine-spojitá v x a X je Fréchétův v x, pak f je spojitá v x. A máme-li $f\colon X \to Y$ Heine-spojitou a X je sekvenciální, pak f je spojitá.

Poznamenejme, že toto tvrzení platí i bez spočetného axiomu výběru. Ten je v klasické verzi pro metrické prostory potřeba k implikaci „X má spočetný charakter (v bodě) $\implies$ X je Fréchetův (v bodě)“.

2.2 Zachovávání na podprostory, dědičnost

Věta 2.7 (bodová dědičnost)**.** *Ať $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma a zobrazení $f\colon X \to Y$ je $\mathcal{C}$-dědičné v bodě $x \in X$ a spojité v x. Potom je-li prostor Y $\mathcal{C}$-generovaný v bodě $f(x)$, pak je prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x.*

Důkaz. Nechť $x \in \overline{A}$ pro libovolnou množinu $A \subseteq X$, pak ze spojitosti v x máme $f(x) \in \overline{f[A]}$ a z $\mathcal{C}$-generovanosti prostoru Y v bodě $f(x)$ platí $f(x) \in C_Y(f[A])$. Protože zobrazení f je $\mathcal{C}$-dědičné v bodě x, máme požadované $x \in C_X(A)$. □

Věta 2.8 (globální dědičnost)**.** *Ať $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma a zobrazení $f\colon X \to Y$ je $\mathcal{C}$-dědičné a spojité.*

(i) *Je-li prostor Y $\mathcal{C}$-generovaný, pak je prostor X $\mathcal{C}$-generovaný.*

(ii) *Je-li prostor Y slabě $\mathcal{C}$-generovaný, pak je prostor X slabě $\mathcal{C}$-generovaný, pokud je $\operatorname{rng}(f)$ $\mathcal{C}$-otevřená množina v Y a schéma $\mathcal{C}$ je aditivní na Y nebo pokud je $\operatorname{rng}(f)$ $\mathcal{C}$-uzavřená množina v Y.*

Důkaz.

(i) Plyne ihned z bodové varianty aplikované na libovolný bod $x \in X$.

(ii) Plyne z prvního bodu pro schéma $\overline{\mathcal{C}}$. Dodatečné předpoklady nám s použitím lemmatu 2.4 dávají, že zobrazení f je $\overline{\mathcal{C}}$-dědičné. □

Důsledek 2.9. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma.*

(i) *Jsou-li vnoření podprostorů $\mathcal{C}$-dědičná zobrazení, pak je $\mathcal{C}$-generovanost dědičná na podprostory.*

(ii) *Jsou-li vnoření uzavřených podprostorů $\mathcal{C}$-dědičná zobrazení, pak je slabá $\mathcal{C}$-generovanost dědičná na uzavřené podprostory.*

(iii) *Jsou-li vnoření otevřených podprostorů $\mathcal{C}$-dědičná zobrazení a je-li schéma $\mathcal{C}$ aditivní, pak je slabá $\mathcal{C}$-generovanost dědičná na otevřené podprostory.*

Tvrzení 2.10. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, $f\colon X \to Y$ je otevřené zobrazení (tj. obraz otevřené množiny je otevřená množina), $x \in X$. Pokud prostor X je $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x a zobrazení f je $\mathcal{C}$-spojité v bodě x, pak prostor Y je $\mathcal{C}$-generovaný v bodě $f(x)$.*

Důkaz. Nechť $f(x) \in \overline{B}$ pro nějakou $B \subseteq Y$. Označme $A := f^{-1}[B]$. Kdyby $x \in X \setminus \overline{A}$, pak $f(x) \in f[X \setminus \overline{A}]$, což je dle předpokladu otevřená množina disjunktní s B, a tedy i s $\overline{B}$, což je spor. Tedy máme $x \in \overline{A}$ a z $\mathcal{C}$-generovanosti $x \in C_X(A)$ a z $\mathcal{C}$-spojitosti $f(x) \in C_Y(f[A]) \subseteq C_Y(B)$. □

Důsledek 2.11 (lokální charakter $\mathcal{C}$-generovanosti)**.** *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma takové, že vnoření otevřených podprostorů jsou $\mathcal{C}$-spojitá a $\mathcal{C}$-dědičná. Potom pro každý prostor X a každý jeho bod x platí: X je $\mathcal{C}$-generovaný v x, právě když existuje $U \subseteq X$ (ne nutně otevřené) okolí bodu x, které je $\mathcal{C}$-generované v bodě x.*

Důkaz. Uvažme otevřenou množinu O splňující $x \in O \subseteq U$. Vnoření O do U a do X jsou otevřená, spojitá, $\mathcal{C}$-spojitá a $\mathcal{C}$-dědičná zobrazení. Pokud je prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v x, pak dle věty o bodové dědičnosti (2.7) je prostor O $\mathcal{C}$-generovaný v x a dle předchozího tvrzení je i prostor U $\mathcal{C}$-generovaný v x. Naopak pokud je prostor U $\mathcal{C}$-generovaný v x, pak z 2.7 je i prostor O $\mathcal{C}$-generovaný v x a dle předchozího tvrzení je prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v x. □

Definice 2.12 (dědičná $\mathcal{C}$-generovanost)**.** Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma. Řekneme, že topologický prostor je *dědičně $\mathcal{C}$-generovaný*, je-li každý jeho podprostor $\mathcal{C}$-generovaný. Podobně definujeme *dědičnou $\mathcal{C}$-generovanost v bodě* a *dědičnou slabou $\mathcal{C}$-generovanost (v bodě)*.

Tvrzení 2.13. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, X je prostor dědičně slabě $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x. Pokud jsou vnoření všech podprostorů prostoru X obsahujících bod x $\mathcal{C}$-spojitá v x, pak je prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x.*

Důkaz. Volme libovolnou množinu $A \subseteq X$, že $x \in \overline{A}$. Uvažme podprostor $Y := A \cup \{x\}$. Protože $x \in \overline{A}$, není množina A uzavřená v Y. Z předpokladu platí $x \in \overline{C}_Y(A)$. Tedy nutně $x \in C_Y(A)$, protože $Y \setminus A = \{x\}$. Z $\mathcal{C}$-spojitosti vnoření Y do X máme $x \in C_X(A)$. □

Důsledek 2.14. *Pokud je $\mathcal{C}$ uzávěrové schéma takové, že všechna vnoření podprostorů jsou $\mathcal{C}$-dědičná i $\mathcal{C}$-spojitá, pak $\mathcal{C}$-generovanost splývá s dědičnou slabou $\mathcal{C}$-generovaností.*

Důkaz. Dle důsledku 2.9 je $\mathcal{C}$-generovanost dědičná na podprostory a zřejmě $\mathcal{C}$-generovaný prostor je slabě $\mathcal{C}$-generovaný. Celkem $\mathcal{C}$-generovaný prostor je dědičně slabě $\mathcal{C}$-generovaný. Naopak dědičně slabě $\mathcal{C}$-generovaný prostor je $\mathcal{C}$-generovaný dle předchozího tvrzení. □

Příklad 2.15 (aplikace na $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$)**.** Protože konvergence posloupností je absolutní, jsou všechna vnoření $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$-dědičná i $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$-spojitá. Protože spojitá zobrazení zachovávají limity posloupností, jsou všechna spojitá zobrazení $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$-spojitá. Aplikací důsledku 2.9 a předchozího důsledku dostáváme, že libovolný podprostor Fréchetova prostoru je Fréchetův, uzavřený nebo otevřený podprostor sekvenciálního prostoru je sekvenciální a že prostor je Fréchetův, právě když je dědičně sekvenciální.

2.3 Zachovávání na induktivní konstrukce

Induktivními konstrukcemi máme na mysli např. topologickou sumu a kvocient, které vycházejí z pojmu induktivního generování.

Definice 2.16 (induktivní generování)**.**

- Řekneme, že topologie na X je *induktivně generovaná souborem zobrazení* $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$, pokud je to nejjemnější topologie, při které jsou všechna zobrazení f_i spojitá.
- Řekneme, že topologie na X je *dědičně induktivně generovaná souborem* $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$, pokud pro každý podprostor $Y \subseteq X$ je topologie na Y induktivně generovaná souborem $\{f_i\colon f_i^{-1}[Y] \to Y\}_{i\in I}$.

Tvrzení 2.17 (charakterizace induktivního generování)**.** *Mějme soubor zobrazení mezi topologickými prostory $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *Topologie na X je induktivně generovaná souborem $\{f_i : i \in I\}$.*

(ii) *Pro každou množinu $F \subseteq X$ platí: F je uzavřená, právě když $f_i^{-1}[F]$ je uzavřená v X_i pro každé $i \in I$.*

(iii) *Všechna zobrazení f_i jsou spojitá a pro každé zobrazení $f\colon X \to Y$ platí: f je spojité, právě když všechna složení $f \circ f_i$ jsou spojitá.*

Důkaz. Označme $\tau := \{U \subseteq X : f_i^{-1}[U] \text{ je otevřená pro každé } i \in I\}$. Z definice τ musí být každá topologie, při které jsou všechna f_i spojitá, obsažena v τ. Díky vlastnostem vzoru je τ topologie, a je to tedy hledaná jednoznačně určená induktivně generovaná topologie. Přechodem ke komplementu dostáváme ekvivalenci (i) a (ii).

(i), (ii) $\implies$ (iii): Z bodu (i) jsou všechna zobrazení f_i spojitá, a tedy pro každé spojité zobrazení $f\colon X \to Y$ jsou spojitá všechna složení $f \circ f_i$. Jsou-li naopak spojitá všechna složení $f \circ f_i$, pak pro libovolnou uzavřenou množinu $F \subseteq Y$ máme, že $(f \circ f_i)^{-1}[F] = f_i^{-1}[f^{-1}[F]]$ je uzavřená pro každé $i \in I$. Z bodu (ii) plyne, že $f^{-1}[F]$ je uzavřená, tedy f je spojité zobrazení.

(iii) $\implies$ (i): Nechť τ je aktuální topologie na X, pro kterou platí (iii), a nechť τ' je induktivně generovaná topologie na X. Uvažme $\mathrm{id}_X\colon (X,\tau) \to (X,\tau')$. Z definice τ' plyne, že všechna zobrazení $f_i\colon X_i \to (X,\tau')$ jsou spojitá, a tedy podle bodu (iii) je id_X spojité zobrazení, tedy $\tau \supseteq \tau'$. Na druhou stranu z bodu (iii) plyne, že všechna zobrazení $f_i\colon X_i \to (X,\tau)$ jsou spojitá, a τ' je dle definice nejjemnější topologie s touto vlastností, tedy $\tau \subseteq \tau'$. Celkem $\tau = \tau'$. □

Lemma 2.18. *Nechť X, Y jsou množiny, $f\colon X \to Y$. Platí*

$$(\forall A \subseteq X)(\forall B, C \subseteq Y)\colon\ B \subseteq f[A] \implies B \cap C \subseteq f[A \cap f^{-1}[C]].$$

Důkaz. Pro libovolné $y \in B \cap C$ existuje $x \in A$, že $f(x) = y \in C$, tedy $x \in f^{-1}[C]$, tedy $y = f(x) \in f[A \cap f^{-1}[C]]$. □

Tvrzení 2.19 (charakterizace dědičného induktivního generování)**.** *Mějme soubor zobrazení mezi topologickými prostory $\{f_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *Topologie na X je dědičně induktivně generovaná souborem $\{f_i : i \in I\}$.*

(ii) *Všechna zobrazení f_i jsou spojitá a pro každou množinu $A \subseteq X$ platí $\overline{A} \setminus A \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i[\overline{f_i^{-1}[A]}]$.*

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Mějme $x \in \overline{A} \setminus A$ dáno libovolně. Označme $Y := A \cup \{x\}$ a $Y_i := f_i^{-1}[Y]$ pro $i \in I$, pak topologie na Y je z předpokladu induktivně generovaná souborem $\{f_i \colon Y_i \to Y\}_{i\in I}$. Množina A není z definice uzavřená v Y, a tedy existuje $i \in I$, že množina $f_i^{-1}[A]$ není uzavřená v Y_i. Volme $x' \in \overline{f_i^{-1}[A]}^{Y_i} \setminus f_i^{-1}[A]$, pak $f_i(x') \in Y \setminus A$, tedy $f_i(x') = x$. Zároveň $x' \in \overline{f_i^{-1}[A]}$, tedy $x \in f_i[\overline{f_i^{-1}[A]}]$.

(ii) $\implies$ (i): Vol $Y \subseteq X$. Chceme ukázat, že pro každou množinu $A \subseteq Y$ platí: A je uzavřená v Y, právě když $f_i^{-1}[A]$ je uzavřená v $f_i^{-1}[Y]$ pro každé $i \in I$. „$\Rightarrow$“ plyne z předpokládané spojitosti f_i. Předpokládejme naopak, že $f_i^{-1}[A]$ je uzavřená v $f_i^{-1}[Y]$ pro každé $i \in I$. Máme $\overline{A} \setminus A \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i[\overline{f_i^{-1}[A]}]$, a tedy dle předchozího lemmatu $\overline{A}^Y \setminus A \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i[\overline{f_i^{-1}[A]} \cap f_i^{-1}[Y]] = \bigcup_{i\in I} f_i[f_i^{-1}[A]] \subseteq A$, tedy A je uzavřená v Y. □

Věta 2.20 (bodová varianta zachovávání)**.** *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, prostor X je dědičně induktivně generovaný souborem zobrazení $\{f_i \colon X_i \to X\}_{i\in I}$, $x \in X$. Pokud jsou všechny prostory X_i $\mathcal{C}$-generované ve všech vzorech bodu x při všech zobrazeních f_i a všechna zobrazení f_i jsou $\mathcal{C}$-spojitá ve všech těchto vzorech, pak prostor X je $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x.*

Důkaz. Mějme libovolné $A \subseteq X$, $x \in \overline{A} \setminus A$, chceme ukázat, že $x \in C_X(A)$. Z předpokladu dědičné induktivní generovanosti existuje $i \in I$, že $x \in f_i[\overline{f_i^{-1}[A]}]$, tedy existuje $x' \in \overline{f_i^{-1}[A]}$, že $f_i(x') = x$. Dle předpokladu je prostor X_i $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x' a zobrazení f_i je $\mathcal{C}$-spojité v x'. Tedy $x' \in C_{X_i}(f_i^{-1}[A])$ a $x = f_i(x') \in C_X(f_i[f_i^{-1}[A]]) \subseteq C_X(A)$. □

Poznámka 2.21. Kdybychom v předchozí větě místo dědičného induktivního generovaní požadovali otevřenost všech zobrazení f_i, pak by stačila existence vzoru x' bodu x při nějakém f_i tak, že X_i je $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x' a f_i je $\mathcal{C}$-spojité v x'. Viz tvrzení 2.10.

Dále vzhledem k tvrzení 2.5 je podmínka $\mathcal{C}$-spojitosti nutná.

Věta 2.22 (globální varianta zachovávání)**.** *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, prostor X je induktivně generovaný souborem $\mathcal{C}$-spojitých zobrazení $\{f_i \colon X_i \to X\}_{i\in I}$ a všechny prostory X_i jsou $\mathcal{C}$-generované. Pak prostor X je $\mathcal{C}$-generovaný, je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek.*

(i) *Uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ je tranzitivní.*

(ii) *Prostor X je dokonce dědičně induktivně generovaný souborem $\{f_i : i \in I\}$.*

Důkaz.

(i) Mějme libovolnou $\mathcal{C}$-uzavřenou množinu $A \subseteq X$. Díky tranzitivitě stačí dle lemmatu 1.12 ukázat, že je uzavřená. Pokud není, tak z induktivního generování existuje $i \in I$, že $f_i^{-1}[A]$ není uzavřená. Přitom je ale $\mathcal{C}$-uzavřená z $\mathcal{C}$-spojitosti f_i (lemma 2.3). Tedy X_i není $\mathcal{C}$-generovaný prostor, což je spor.

(ii) Plyne jako důsledek bodové varianty v předchozí větě. □

Důsledek 2.23. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma a prostor X je induktivně generovaný souborem $\mathcal{C}$-spojitých zobrazení $\{f_i \colon X_i \to X\}_{i \in I}$. Jsou-li všechny prostory X_i slabě $\mathcal{C}$-generované, pak je i prostor X slabě $\mathcal{C}$-generovaný.*

Důkaz. Plyne ihned z předchozí věty aplikované na schéma $\overline{\mathcal{C}}$, uvědomíme-li si, že zobrazení f_i jsou $\overline{\mathcal{C}}$-spojitá (lemma 2.4). □

Definice 2.24. Připomeňme některé speciální typy zobrazení. Nechť $f \colon X \to Y$ je zobrazení mezi topologickými prostory. Zobrazení f nazveme

- *otevřené*, pokud je obraz každé otevřené množiny otevřený;
- *uzavřené*, pokud je obraz každé uzavřené množiny uzavřený;
- *kvocientové*, pokud je na a topologie na Y je jím induktivně generovaná (z čehož plyne, že je spojité);
- *dědičně kvocientové*, pokud pro každý podprostor $Z \subseteq Y$ je zobrazení $f \colon f^{-1}[Z] \to Z$ kvocientové, ekvivalentně je na a topologie na Y je jím dědičně induktivně generovaná;
- *otevřené kvocientové*, je-li otevřené a kvocientové, ekvivalentně je spojité, otevřené a na;
- *uzavřené kvocientové*, je-li uzavřené a kvocientové, ekvivalentně je spojité, uzavřené a na.

Poznámka 2.25. Pojem dědičně kvocientového zobrazení a jeho charakterizace obdobná tvrzení 2.17 je k nalezení v [En, 2.4.F, s. 97].

Lemma 2.26. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, prostor X je induktivně generovaný souborem zobrazení $\mathcal{F} = \{f_i \colon X_i \to X\}_{i \in I}$.*

(i) *Jsou-li všechna zobrazení f_i otevřená, pak je prostor X dědičně induktivně generovaný souborem $\mathcal{F}$. Speciálně otevřený kvocient je dědičný kvocient.*

(ii) *Jsou-li všechna zobrazení f_i uzavřená a $\{\operatorname{rng}(f_i) : i \in I\}$ je lokálně konečný soubor v prostoru X, pak je X dědičně induktivně generovaný souborem $\mathcal{F}$. Speciálně uzavřený kvocient je dědičný kvocient.*

Důkaz. Volme libovolně $A \subseteq X$. Ukážeme, že $\overline{A} \setminus A \subseteq B := \bigcup\{f_i[\overline{f_i^{-1}[A]}] : i \in I\}$. Nejprve si uvědomme, že $Y := \bigcup\{\operatorname{rng}(f_i) : i \in I\}$ je z induktivního generování obojetná podmnožina X, jejíž doplněk je diskrétní, a tedy $\overline{A} \setminus A \subseteq \overline{A \cap Y} \subseteq Y$.

(i) Uvažme $U := \bigcup\{f_i[X_i \setminus \overline{f_i^{-1}[A]}] : i \in I\}$, to je z předpokladu otevřená podmnožina X disjunktní s A. Protože $B \cup U = Y$, máme $B \supseteq Y \setminus U$, což je uzavřená množina obsahující $A \cap Y$. Celkem $B \supseteq Y \setminus U \supseteq \overline{A \cap Y} \supseteq \overline{A} \setminus A$.

(ii) Z předpokladu pro každou kolekci uzavřených množin $\{A_i \subseteq X_i : i \in I\}$ platí, že množina $\bigcup\{f_i[A_i] : i \in I\}$ je uzavřená v X. Tedy množina B je uzavřená a obsahuje $A \cap Y$. Tvrzení plyne stejně jako v prvním bodě. □

Lemma 2.27. *Nechť $\mathcal{D} = \langle \mathcal{O}, \mathcal{M} \rangle$ je diagram v kategorii topologických prostorů a $\langle X, \{f_O \colon O \to X\}_{O \in \mathcal{O}} \rangle$ je kolimita diagramu $\mathcal{D}$. Pak platí $\bigcup\{f_O[O] : O \in \mathcal{O}\} = X$ a topologie na X je induktivně generovaná souborem $\{f_O : O \in \mathcal{O}\}$.*

Důkaz. Řekneme, že $\langle X', \{f'_O \colon O \to X'\}_{O \in \mathcal{O}}\rangle$ je *kandidát na kolimitu* $\mathcal{D}$, pokud jsou všechna zobrazení f'_O spojitá a pro každý morfismus $m \in \mathcal{M} \colon O_1 \to O_2$ platí $f'_{O_1} = f'_{O_2} \circ m$. Soubor $\langle X, \{f_O : O \in \mathcal{O}\}\rangle$ je jakožto kolimita takový kandidát, že pro každého dalšího kandidáta $\langle X', \{f'_O : O \in \mathcal{O}\}\rangle$ existuje jednoznačně spojité zobrazení $f \colon X \to X'$ takové, že pro každý objekt $O \in \mathcal{O}$ platí $f'_O = f \circ f_O$.

Nejprve ukážeme, že kolekce $\{f_O : O \in \mathcal{O}\}$ je na X ve smyslu $Y := \bigcup\{f_O[O] : O \in \mathcal{O}\} = X$. Označme $i \colon Y \hookrightarrow X$ inkluzi podprostoru. Zřejmě $\langle Y, \{f'_O : O \in \mathcal{O}\}\rangle$, kde $f_O = i \circ f'_O$, je kandidát na kolimitu. Existuje tedy spojité zobrazení $f \colon X \to Y$, že $f \circ f_O = f'_O$ pro každý objekt O. Pak $i \circ f \circ f_O = i \circ f'_O = f_O$ pro každý objekt O, a tedy $i \circ f \colon X \to X$ je dosvědčující zobrazení pro kolimitu a z jeho jednoznačnosti plyne $i \circ f = \mathrm{id}_X$, tedy i je na.

Označme nyní τ aktuální topologii na X a τ' nějakou alternativní topologii na X. Tj. $\langle (X, \tau), \{f_O : O \in \mathcal{O}\}\rangle$ je naše kolimita a $\langle (X, \tau'), \{f_O : O \in \mathcal{O}\}\rangle$ je kandidát na kolimitu, právě když jsou všechna $f_O \colon O \to (X, \tau')$ spojitá. Je-li $\langle (X, \tau') : \{f_O : O \in \mathcal{O}\}\rangle$ kandidát na kolimitu, pak existuje spojité $f \colon (X, \tau) \to (X, \tau')$ takové, že $f \circ f_O = f_O$ pro všechny objekty O. Protože $\bigcup\{f_O[O] : O \in \mathcal{O}\} = X$, musí být $f = \mathrm{id}_X$ a ze spojitosti máme $\tau \supseteq \tau'$. Tedy τ je nejjemnější topologie na X taková, že všechna zobrazení f_O jsou spojitá. $\square$

Důsledek 2.28 (zachovávání na induktivní konstrukce)**.** *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma.*

(i) *Jsou-li vnoření obojetných podprostorů $\mathcal{C}$-spojitá, pak je topologická suma (slabě) $\mathcal{C}$-generovaných prostorů (slabě) $\mathcal{C}$-generovaný prostor.*

(ii) *Jsou-li dědičně (resp. otevřená, uzavřená) kvocientová zobrazení $\mathcal{C}$-spojitá, pak je dědičný (resp. otevřený, uzavřený) kvocient (slabě) $\mathcal{C}$-generovaného prostoru (slabě) $\mathcal{C}$-generovaný.*

(iii) *Jsou-li kvocientová zobrazení $\mathcal{C}$-spojitá, pak je kvocient slabě $\mathcal{C}$-generovaného prostoru slabě $\mathcal{C}$-generovaný.*

(iv) *Jsou-li všechna spojitá zobrazení $\mathcal{C}$-spojitá, pak jsou všechny kolimity slabě $\mathcal{C}$-generovaných prostorů slabě $\mathcal{C}$-generované.*

(v) *Jsou-li všechna otevřená spojitá zobrazení $\mathcal{C}$-spojitá, pak kolimita (slabě) $\mathcal{C}$-generovaných prostorů realizovaná kolekcí otevřených zobrazení je (slabě) $\mathcal{C}$-generovaný prostor.*

Důkaz. Plyne aplikací tvrzení, která jsme v této podkapitole budovali. $\square$

Poznámka 2.29. Obdoba posledního bodu předchozího důsledku pro uzavřená spojitá zobrazení neplatí, viz příklad 5.7. Předpoklad lokální konečnosti z lemmatu 2.26 nelze vynechat.

Příklad 2.30 (aplikace na $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$)**.** V příkladu 2.15 jsme si uvědomili, že všechna spojitá zobrazení jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$-spojitá, a tedy i $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}}$-spojitá. Předchozí důsledek nám říká, že třída Fréchetových prostorů je uzavřená na kolimity realizované otevřenými zobrazeními (speciálně sumy) a dědičné kvocienty a že třída sekvenciálních prostorů je uzavřená na všechny kolimity a kvocienty.

2.4 Gradace uzávěrových schémat

V této podkapitole definujeme pojem gradace uzávěrového schématu a indukované kardinální invarianty. Tyto pojmy nám umožní sjednotit definice některých konkrétních kardinálních invariantů vycházejících z konkrétních uzávěrových schémat. Také nám umožní stručnější vyjadřování v dalších kapitolách.

Definice 2.31. Řekneme, že $\mathcal{G} = \langle \mathcal{G}_\kappa : \kappa \in \mathbf{Cn} \rangle$ je *gradace uzávěrového schématu*, pokud každé $\mathcal{G}_\kappa$ je uzávěrové schéma a pro $\kappa \leq \kappa'$ platí $\mathcal{G}_\kappa \leq \mathcal{G}_{\kappa'}$.

Pokud navíc pro uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ platí $\bigvee\{\mathcal{G}_\kappa : \kappa \in \mathbf{Cn}\} = \mathcal{C}$, pak řekneme, že $\mathcal{G}$ je gradace uzávěrového schématu $\mathcal{C}$ a značíme to $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$.

Lemma 2.32. *Nechť $\mathcal{G}$ je gradace uzávěrového schématu, pak pro každý topologický prostor X existuje κ_0, že $\bigvee\{\mathcal{G}_\kappa : \kappa \in \mathbf{Cn}\} = \mathcal{G}_{\kappa_0}$ na X. Tedy $\bigvee\{\mathcal{G}_\kappa : \kappa \in \mathbf{Cn}\}$ je vždy uzávěrové schéma.*

Důkaz. Pro $A \subseteq X$ se v posloupnosti $\langle G_{\kappa,X}(A) : \kappa \in \mathbf{Cn} \rangle$ může objevit nejvýše $|\mathcal{P}(X)|$ různých množin, a protože je to posloupnost monotónní, je od jistého κ_0 konstantní. □

Definice 2.33. Podobně jako při přechodu od uzávěrových operátorů k uzávěrovým schématům (definice 1.8) můžeme přirozeně přenést názvosloví a operace z uzávěrových schémat na jejich gradace:

- Řekneme, že gradace $\mathcal{G}$ je tranzitivní, resp. aditivní, pokud jsou taková všechna schémata $\mathcal{G}_\kappa$.
- Definujeme tranzitivní uzávěr $\overline{\mathcal{G}} := \langle \overline{\mathcal{G}_\kappa} : \kappa \in \mathbf{Cn} \rangle$.
- $\mathcal{G}^1 \leq \mathcal{G}^2$, pokud $\mathcal{G}^1_\kappa \leq \mathcal{G}^2_\kappa$ pro každé κ, pro gradace $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$.
- Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi topologickými prostory je $\mathcal{G}$-dědičné resp. $\mathcal{G}$-spojité (v bodě), pokud je takové vzhledem ke všem schématům $\mathcal{G}_\kappa$.

Pozorování 2.34. *Mějme gradaci $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$.*

- *Platí $\overline{\mathcal{G}} \to \overline{\mathcal{C}}$, čili $\overline{\mathcal{G}}$ je gradace $\overline{\mathcal{C}}$.*
- *Je-li zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi topologickými prostory $\mathcal{G}$-dědičné, resp. $\mathcal{G}$-spojité (v bodě), je f takové i vzhledem k $\mathcal{C}$.*

Důkaz. Plyne ihned z předchozího lemmatu. □

Pozorování 2.35. *Podobně jako pro uzávěrová schémata platí $\mathcal{C}^1 \leq \mathcal{C}^2 \implies \overline{\mathcal{C}^1} \leq \overline{\mathcal{C}^2}$, platí i pro gradace $\mathcal{G}^1 \leq \mathcal{G}^2 \implies \overline{\mathcal{G}^1} \leq \overline{\mathcal{G}^2}$. Dále zřejmě platí $\mathcal{G} \leq \overline{\mathcal{G}}$ pro každou gradaci $\mathcal{G}$.*

Definice 2.36 (indukované kardinální invarianty)**.** Mějme gradaci $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$ a topologický prostor X. Definujme následující kardinální invarianty.

$$\lambda_{\mathcal{G}}(x, A, X) := \min\{\kappa : x \in G_{\kappa,X}(A)\} \quad \text{pro } x \in C_X(A),\ A \subseteq X;$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{G}}(x, X) &:= \min\{\kappa : (\forall A \subseteq X)\ x \in C_X(A) \implies x \in G_{\kappa,X}(A)\} \\ &= \sup\{\lambda_{\mathcal{G}}(x, A, X) : x \in C_X(A),\ A \subseteq X\} \quad \text{pro } x \in X;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{G}}(X) &:= \min\{\kappa : \mathcal{C} = \mathcal{G}_\kappa \text{ na } X\} \\ &= \sup\{\lambda_{\mathcal{G}}(x, X) : x \in X\} \\ &= \sup\{\lambda_{\mathcal{G}}(x, A, X) : x \in C_X(A),\ A \subseteq X\}.\end{aligned}$$

Pro konkrétní gradaci $\mathcal{G}^\square$ můžeme zápis $\lambda_{\mathcal{G}^\square}$ zkrátit na $\lambda^\square$ a podobně místo $\lambda_{\overline{\mathcal{G}^\square}}$ můžeme psát $\overline{\lambda^\square}$.

Pozorování 2.37. *Mějme gradaci $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$. Je-li topologický prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x, pak $\lambda_{\mathcal{G}}(x, X) = \min\{\kappa : X \text{ je } \mathcal{G}_\kappa\text{-generovaný v } x\}$. Je-li prostor X $\mathcal{C}$-generovaný, pak $\lambda_{\mathcal{G}}(X) = \min\{\kappa : X \text{ je } \mathcal{G}_\kappa\text{-generovaný}\}$.*

Tvrzení 2.38. *Mějme dvě gradace $\mathcal{G}^1 \to \mathcal{C}^1$, $\mathcal{G}^2 \to \mathcal{C}^2$ a topologický prostor X.*

(i) *Pokud $\mathcal{G}^1 \le \mathcal{G}^2$ na X, pak $\lambda^1(x, A, X) \ge \lambda^2(x, A, X)$ pro každé $x \in C^1_X(A)$, $A \subseteq X$.*

(ii) *Pokud navíc $(\forall A \subseteq X)\colon\ x \in C^2_X(A) \implies x \in C^1_X(A)$ pro pevný bod $x \in X$ (speciálně pokud X je $\mathcal{C}^1$-generovaný v x), pak $\lambda^1(x, X) \ge \lambda^2(x, X)$.*

(iii) *Pokud ještě navíc podmínka výše platí pro každý bod $x \in X$, tj. $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}^2$ na X (speciálně pokud X je $\mathcal{C}^1$-generovaný), pak $\lambda^1(X) \ge \lambda^2(X)$.*

Důkaz.

(i) Protože $\mathcal{G}^1 \le \mathcal{G}^2$ na X, platí i $\mathcal{C}^1 \le \mathcal{C}^2$, a tedy za našeho předpokladu $x \in C^1_X(A)$ je i $x \in C^2_X(A)$ a kardinál $\lambda^2(x, A, X)$ je definován. Protože $x \in G^1_{\kappa,X}(A) \implies x \in G^2_{\kappa,X}(A)$, platí dokazovaná nerovnost.

(ii) Za dodatečného předpokladu platí $\{A \subseteq X : x \in C^1_X(A)\} = \{A \subseteq X : x \in C^2_X(A)\} =: \mathcal{A}$. Tedy $\lambda^i(x, X) = \sup\{\lambda^i(x, A, X) : A \in \mathcal{A}\}$ pro $i \in \{1, 2\}$ a dokazovaná nerovnost plyne z předchozího bodu.

(iii) Plyne ihned z definice a předchozího bodu, protože bodová nerovnost platí v každém bodě. $\square$

Důsledek 2.39. *Mějme dvě gradace $\mathcal{G}^1 \to \mathcal{C}^1$, $\mathcal{G}^2 \to \mathcal{C}^2$. Pokud $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}^2$ na topologickém prostoru X a $\mathcal{G}^1 \le \mathcal{G}^2$ na X, pak*

$$\begin{aligned} \lambda^1(x, A, X) &\ge \lambda^2(x, A, X) && \text{pro } x \in C^1_X(A) = C^2_X(A),\ A \subseteq X, \\ \lambda^1(x, X) &\ge \lambda^2(x, X) && \text{pro } x \in X, \\ \lambda^1(X) &\ge \lambda^2(X). \end{aligned}$$

Pozorování 2.40. *Pro gradaci $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$ a topologický prostor X platí $\lambda_{\overline{\mathcal{G}}}(X) \le \lambda_{\mathcal{G}}(X)$, protože pokud $\mathcal{C} = \mathcal{G}_\kappa$ na X, pak také $\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{G}_\kappa}$ na X.*

Tvrzení 2.41. *Mějme gradaci $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$ a zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi topologickými prostory.*

(i) *Je-li zobrazení f $\mathcal{G}$-dědičné v bodě $x \in X$ a $\mathcal{C}$-spojité v x, pak $\lambda_{\mathcal{G}}(x, X) \le \lambda_{\mathcal{G}}(f(x), Y)$.*

(ii) *Je-li zobrazení f $\mathcal{G}$-dědičné a $\mathcal{C}$-spojité, pak $\lambda_{\mathcal{G}}(X) \le \lambda_{\mathcal{G}}(Y)$.*

Důkaz.

(i) Postupujeme jako v důkazu věty 2.7 s $\mathcal{G}_\kappa$, $\mathcal{C}$ namísto $\mathcal{C}$, cl.

(ii) Plyne ihned z předchozího bodu. $\square$

Příklad 2.42. Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma. Uvažme $\mathcal{G}^{\mathrm{Trans}}(\mathcal{C}) := \langle \mathcal{C}_\kappa : \kappa \in \mathbf{Cn} \rangle$, kde $\mathcal{C}_\kappa$ chápeme ve smyslu definice uzávěrové posloupnosti (1.4). Získáváme gradaci $\mathcal{G}^{\mathrm{Trans}} \to \overline{\mathcal{C}}$. Kardinální invarianty λ^{Trans} měří, kolik iterací je potřeba k dosažení $\overline{\mathcal{C}}$-uzávěru.

Další konkrétní příklady gradací nalezneme u příslušných uzávěrových schémat v následující kapitole.

3. Konkrétní uzávěrová schémata a vztahy mezi nimi

V této kapitole systematicky projdeme uvažovaná konkrétní uzávěrová schémata, jejich vlastnosti a základní vztahy mezi nimi. Zaměříme se především na schémata $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$ v obecné situaci a na Hausdorffových prostorech, kde uzávěr v $\mathcal{C}$-generovaných topologiích skutečně vzniká přidáváním jednotlivých bodů. Odtud název práce.

Máme-li dvě uzávěrová schémata $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, můžeme rozlišovat tři úrovně vztahu „$\mathcal{C}^1$ je silnější než $\mathcal{C}^2$“. Zaprvé $\mathcal{C}^1 \leq \mathcal{C}^2$, zadruhé bodová $\mathcal{C}^1$-generovanost implikuje bodovou $\mathcal{C}^2$-generovanost a zatřetí $\mathcal{C}^1$-generovanost implikuje $\mathcal{C}^2$-generovanost. Tvrzení o takovémto vztahu dvou schémat budeme formulovat v nejsilnější dostupné podobě.

Zřejmým vztahem pro libovolné schéma $\mathcal{C}$ je $\mathcal{C}^{\mathrm{Id}} \leq \mathcal{C} \leq \overline{\mathcal{C}} \leq \mathrm{cl}$, speciálně $\mathcal{C}$-generované prostory jsou slabě $\mathcal{C}$-generované a diskrétní prostory jsou $\mathcal{C}$-generované pro libovolné schéma $\mathcal{C}$. Dále $\mathcal{C}^1 \leq \mathcal{C}^2 \implies \overline{\mathcal{C}^1} \leq \overline{\mathcal{C}^2}$.

Podívejme se nyní na jednotlivá uzávěrová schémata, jejich gradace a základní vztahy mezi nimi.

3.1 Těsnota, gradace velikostí množin

Definice 3.1. Pro uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ a kardinál κ definujeme schéma $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$:

$$C^{\leq\kappa}_X(A) := A \cup \bigcup\{C_X(B) : B \in [A]^{\leq\kappa}\} \quad \text{pro } A \subseteq X \in \mathbf{Top}.$$

Dále definujeme gradaci velikostí zdrojových množin: $\mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}) := \langle \mathcal{C}^{\leq\kappa} : \kappa \in \mathbf{Cn}\rangle$. Podmínku $A \subseteq C^{\leq\kappa}_X(A)$ zajišťujeme explicitně pouze proto, abychom dostali $\mathcal{C}^{\leq 0} = \mathcal{C}^{\mathrm{Id}}$.

Tvrzení 3.2. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma.*

(i) *Pro každý kardinál κ je $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$ uzávěrové schéma a máme gradaci $\mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. Pokud je navíc schéma $\mathcal{C}$ tranzitivní nebo aditivní, jsou taková i schémata $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$ (pro $\kappa \geq \omega$) a gradace $\mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C})$. (Mluvíme-li o celé gradaci, můžeme si z praktických důvodů dovolit vynechat členy odpovídající konečným kardinálům.)*

(ii) *Je-li zobrazení mezi topologickými prostory $f\colon X \to Y$ $\mathcal{C}$-dědičné, resp. $\mathcal{C}$--spojité (v bodě), potom je f takové i vzhledem ke všem schématům $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$, a tedy i vzhledem ke gradaci $\mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C})$.*

Důkaz.

(i) $\mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C})$ je zřejmě gradace schématu $\mathcal{C}$, neboť $\mathcal{C}^{\leq|X|} = \mathcal{C}$ na prostoru X. Schéma $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$ (pro κ nekonečné) je tranzitivní, je-li takové $\mathcal{C}$, protože sjednocení $\leq \kappa$ množin mohutnosti $\leq \kappa$ má mohutnost $\leq \kappa$. Totéž platí pro aditivitu, protože $[A \cup B]^{\leq\kappa} = \{A' \cup B' : A' \in [A]^{\leq\kappa}, B' \in [B]^{\leq\kappa}\}$. Podrobněji v tvrzení 1.6.

(ii) Zobrazení $f: X \to Y$ $\mathcal{C}$-spojité v bodě $x \in X$ je $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$-spojité v x pro každé κ. Totiž pro $x \in C_X(B)$, kde $B \in [X]^{\leq\kappa}$, máme $f(x) \in C_Y(f[B])$ a $|f[B]| \leq \kappa$. Tedy $\mathcal{C}$-spojitá zobrazení jsou $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$-spojitá.

Je-li zobrazení f $\mathcal{C}$-dědičné, pak je i $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$-dědičné. Pokud $f(x) \in C_Y(f[B])$, pak z $\mathcal{C}$-dědičnosti i $x \in C_X(B)$. Přitom $|f[B]| = |B|$, protože zobrazení f je prosté. □

Pozorování 3.3. *Jsou-li $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$ uzávěrová schémata a $\mathcal{C}^1 \leq \mathcal{C}^2$ (na prostoru X), pak $(\mathcal{C}^1)^{\leq\kappa} \leq (\mathcal{C}^2)^{\leq\kappa}$ (na X) pro každé κ a $\mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^1) \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^2)$ (na X).*

Definice 3.4. Definujme gradaci $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}} := \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathrm{cl}) = \langle \mathrm{cl}^{\leq\kappa} : \kappa \in \mathbf{Cn} \rangle \to \mathrm{cl}$. Indukovaný invariant λ^{Sets} splývá s tradičně definovanou *těsnotou topologického prostoru (v bodě (vzhledem k množině))* a proto ho budeme značit $t(X)$, resp. $t(x, X)$, resp. $t(x, A, X)$. Variantě $t(x, A, X)$ pro $x \in \overline{A}$, $A \subseteq X$ se někdy říká *primitivní těsnota bodu x vzhledem k A* a značí se $pt(x, A, X)$.

$\mathrm{cl}^{\leq\kappa}$-uzavřeným množinám tradičně říkáme *κ-uzavřené*.

Pozorování 3.5 (vlastnosti gradace $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$)**.**

- *Gradace $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ je tranzitivní a aditivní, protože je takové schéma* cl.
- *Prostor X je zřejmě $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_\kappa$-generovaný v bodě x, právě když $t(x, X) \leq \kappa$.*
- *Spojitá zobrazení (v bodě) jsou $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$-spojitá (v bodě) a vnoření podprostorů jsou $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$-dědičná.*

Tvrzení 3.6 (vlastnosti těsnoty)**.** *Nechť $f: X \to Y$ je zobrazení mezi topologickými prostory a $x \in X$.*

- *Pokud f je vnoření podprostoru, pak $t(x, X) \leq t(f(x), Y)$ a $t(X) \leq t(Y)$.*
- *Pokud f je vnoření otevřeného podprostoru, pak $t(x, X) = t(f(x), Y)$.*
- *Pokud f je kvocientové zobrazení, pak $t(X) \geq t(Y)$.*

Důkaz. Plyne ihned užitím věty 2.7, důsledku 2.11, resp. 2.28 pro tranzitivní schémata $\mathrm{cl}^{\leq\kappa}$ a užitím předchozího pozorování. □

Tvrzení 3.7 (vztah $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$ a $\mathcal{C} \wedge \mathrm{cl}^{\leq\kappa}$)**.** *I když obecně $\mathcal{C}^{\leq\kappa} \neq (\mathcal{C} \wedge \mathrm{cl}^{\leq\kappa})$, platí $\mathcal{C}^{\leq\kappa} \leq (\mathcal{C} \wedge \mathrm{cl}^{\leq\kappa})$ a $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$-generovanost (v bodě) splývá s $(\mathcal{C} \wedge \mathrm{cl}^{\leq\kappa})$-generovaností (v bodě).*

Důkaz. Zřejmě $\mathcal{C}^{\leq\kappa} \leq \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}^{\leq\kappa} \leq \mathrm{cl}^{\leq\kappa}$. Dále pokud je prostor X $(\mathcal{C} \wedge \mathrm{cl}^{\leq\kappa})$-generovaný v bodě x a $x \in \overline{A}$ pro nějakou množinu $A \subseteq X$, pak existuje $B \in [A]^{\leq\kappa}$ s $x \in \overline{B}$, a tedy $x \in \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}^{\leq\kappa}(A)$. □

Tvrzení 3.8 (vztah $\overline{\mathcal{C}^{\leq\kappa}}$ a $(\overline{\mathcal{C}})^{\leq\kappa}$)**.** *Platí $\overline{\mathcal{C}^{\leq\kappa}} \leq (\overline{\mathcal{C}})^{\leq\kappa}$, ale obecně ani nesplývá $\overline{\mathcal{C}^{\leq\kappa}}$-generovanost s $(\overline{\mathcal{C}})^{\leq\kappa}$-generovaností.*

Důkaz. Protože $\mathcal{C} \leq \overline{\mathcal{C}}$, platí i $\mathcal{C}^{\leq\kappa} \leq (\overline{\mathcal{C}})^{\leq\kappa}$. A protože schéma $(\overline{\mathcal{C}})^{\leq\kappa}$ je tranzitivní, dostáváme požadovanou nerovnost. Nesplývá např. $\overline{(\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}})^{\leq\omega}}$-generovanost (tj. sekvencialita) a $(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}})^{\leq\omega}$-generovanost (tj. pseudoradialita spočetné těsnoty), viz 3.27. □

Tvrzení 3.9. *Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma a $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C})$.*

(i) *Platí $\mathcal{G} \leq \overline{\mathcal{G}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$.*

(ii) *Pokud je prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x, pak $t(x, X) = \lambda_{\overline{\mathcal{G}}}(x, X) = \lambda_{\mathcal{G}}(x, X)$.*

(iii) *Pokud je celý prostor X $\mathcal{C}$-generovaný, pak $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ na X.*

(iv) *Pokud je prostor X slabě $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x, pak $t(x, X) \leq \lambda_{\overline{\mathcal{G}}}(x, X)$.*

(v) *Pokud je celý prostor X slabě $\mathcal{C}$-generovaný, pak $t(X) \leq \lambda_{\overline{\mathcal{G}}}(X) \leq \lambda_{\mathcal{G}}(X)$.*

Důkaz.

(i) Nerovnosti $\mathcal{G} \leq \overline{\mathcal{G}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ snadno plynou z pozorování 2.35 a 3.3 a z tranzitivity gradace $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$.

(ii) Z předchozího bodu plyne, že pokud je prostor X $\mathcal{C}$-generovaný v bodě x, pak $x \in \overline{A} \implies x \in \overline{C}_X(A) \implies x \in C_X(A)$ pro každou množinu $A \subseteq X$, a tedy dle tvrzení 2.38 máme $t(x, X) \leq \lambda_{\overline{\mathcal{G}}}(x, X) \leq \lambda_{\mathcal{G}}(x, X)$. Na druhou stranu pokud $x \in \overline{B}$ pro $B \in [A]^{\leq\kappa}$, pak z $\mathcal{C}$-generovanosti $x \in C_X(B) \subseteq C^{\leq\kappa}(A)$, a tedy $\lambda_{\mathcal{G}}(x, X) \leq t(x, X)$.

(iii) Když $\mathcal{C} = \mathrm{cl}$ na X, pak $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}) = \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathrm{cl}) = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ na X.

(iv) Plyne analogicky jako ve druhém bodě.

(v) Z předchozího bodu máme $t(X) \leq \lambda_{\overline{\mathcal{G}}}(X)$ a z pozorování 2.40 máme nerovnost $\lambda_{\overline{\mathcal{G}}}(X) \leq \lambda_{\mathcal{G}}(X)$. □

3.2 Schémata založená na konvergenci

Definice 3.10. Nechť $\mathcal{I}$ je neprázdná třída usměrněných množin (tj. kvasiuspořádaných množin, kde navíc každé dva body mají společnou horní závoru). Pak definujeme uzávěrové schéma $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\mathcal{I})$ následovně:

$$C_X(A) := A \cup \{x \in X : (\exists I \in \mathcal{I})(\exists \Phi\colon I \to A \ \text{ net})\colon \ \Phi \to x\},$$

tj. přidáváme limity všech netů v X s hodnotami v A nějakého tvaru $I \in \mathcal{I}$. Podmínku $A \subseteq C_X(A)$ zajišťujeme explicitně pouze proto, aby pro triviální případy platilo $\mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\emptyset) = \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\{\emptyset\}) = \mathcal{C}^{\mathrm{Id}}$.

Máme $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} = \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\{\omega\})$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}} = \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\mathbf{On})$, kde na ordinálech uvažujeme jejich uspořádání. Dále $\mathrm{cl} = \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\mathcal{I})$, pro $\mathcal{I}$ třídu všech usměrněných množin. Připomeňme, že $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$-generovaným prostorům říkáme *Fréchetovy*, $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}}$-generovaným *sekvenciální*, $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}$-generovaným *radiální* a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}}$-generovaným *pseudoradiální*.

Pozorování 3.11. *Pro každou neprázdnou třídu usměrněných množin $\mathcal{I}$ platí následující.*

- *$\mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\mathcal{I})$ je aditivní uzávěrové schéma, protože pro každý net $\Phi\colon I \to A \cup B$ je alespoň jedna z množin $\Phi^{-1}[A]$, $\Phi^{-1}[B]$ kofinální v I.*
- *Všechna spojitá zobrazení (v bodě) jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\mathcal{I})$-spojitá (v bodě), neboť spojitá zobrazení zachovávají konvergenci netů.*

- *Všechna vnoření podprostorů jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\mathcal{I})$-dědičná, neboť konvergence netů je absolutní.*
- *(Slabá) $\mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\mathcal{I})$-generovanost je tedy zachovávána stejným způsobem jako Fréchetovost (sekvencialita), viz příklady 2.15 a 2.30.*

Podívejme se nyní na některé vlastnosti Fréchetových prostorů.

Pozorování 3.12. *Má-li nějaký bod $x \in X$ spočetný charakter, pak je prostor X Fréchetův v bodě x. Prostory spočetného charakteru jsou Fréchetovy. Opačná implikace však neplatí, protipříkladem je sekvenciální vějíř S_κ pro $\kappa \geq \omega$.*

Důkaz. Je-li $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ klesající báze v bodě x, pak libovolný prvek $\prod \langle U_n \cap A : n \in \omega \rangle$ je posloupnost v $A \subseteq X$ konvergující k x pro $x \in \overline{A}$. Protipříklad k opačné implikaci viz 5.4. □

Definice 3.13. Řekneme, že prostor X je *sekvenciálně koherentní v bodě $x \in X$*, pokud kdykoliv je x hromadný bod nějaké posloupnosti v X, pak je limitou nějaké její podposloupnosti. Dále prostor X je *sekvenciálně koherentní*, je-li sekvenciálně koherentní v každém bodě, tj. každý hromadný bod každé posloupnosti je limitou nějaké její podposloupnosti.

Tvrzení 3.14. *Prostor X je Fréchetův v bodě x, právě když v něm má spočetnou těsnotu a je v něm sekvenciálně koherentní. Fréchetovy jsou právě sekvenciálně koherentní prostory spočetné těsnoty.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že je-li prostor X Fréchetův v bodě x a x je hromadný bod posloupnosti $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ (tj. $x \in \overline{\bigcap \{x_n : n \geq k\}}$ pro každé $k \in \omega$), pak existuje podposloupnost $\langle x_{n_k} : k \in \omega \rangle \to x$. Označme $I := \{n \in \omega : x \in \overline{\{x_n\}}\}$, tj. množinu indexů všech prvků posloupnosti, od kterých nelze bod x oddělit. Je-li I kofinální v ω, pak jsme hotovi, není-li, pak je konečná a odpovídající počáteční segment posloupnosti můžeme odstranit, tj. bez újmy na obecnosti lze x oddělit od každého členu posloupnosti. x je hromadný bod posloupnosti, speciálně $x \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ a z předpokladu Fréchetovosti existuje posloupnost $\langle y_m : m \in \omega \rangle \to x$ v oboru hodnot původní posloupnosti. Budeme induktivně definovat ostře rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\langle n_k : k \in \omega \rangle$, $\langle m_k : k \in \omega \rangle$ takové, že $\langle x_{n_k} : k \in \omega \rangle = \langle y_{m_k} : k \in \omega \rangle$. To bude hledaná podposloupnost $\langle x_n \rangle$, která je i podposloupností $\langle y_m \rangle$, a tedy konverguje k x. Volme n_0, m_0 splňující $x_{n_0} = y_{m_0}$ libovolně. Máme-li n_k, m_k, pak jistě existuje $n_{k+1} > n_k$, že $x_{n_{k+1}} \in \{y_m : m > m_k\}$, jinak pro každé $n > n_k$ máme $x_n \in \{y_m : m \leq m_k\}$, a tedy x je v uzávěru této konečné množiny, což je spor s předpokladem, že x lze oddělit od každého členu posloupnosti $\langle x_n \rangle$.

Naopak má-li prostor X spočetnou těsnotu v x a je-li v x sekvenciálně koherentní, pak je v x Fréchetův. Je-li $x \in \overline{A}$ pro nějakou množinu $A \subseteq X$, můžeme z předpokladu spočetné těsnoty předpokládat, že A je spočetná. Uvažme posloupnost $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ v množině A takovou, že se v ní každý prvek množiny A opakuje nekonečněkrát. Potom $\overline{\{x_n : n \geq k\}} = \overline{A}$ pro každé $k \in \omega$, a tedy x je hromadný bod této posloupnoti. Z předpokladu sekvenciální koherence existuje její podposloupnost konvergující k x, která dosvědčuje, že prostor X je Fréchetův v x. □

Nyní na uvažovaných uzávěrových schématech zavedeme přirozené gradace a nahlédneme vztahy mezi nimi. Podíváme se také na nerovnosti mezi indukovanými kardinálními invarianty a jejich vztah k těsnotě na daném prostoru.

Definice 3.15. Definujme gradace

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} &:= \langle \mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_\kappa : \kappa \in \mathbf{Cn} \rangle, \quad \text{kde } \mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_\kappa := \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\{\alpha \in \mathbf{On} : \alpha \leq \kappa\}),\\
\mathcal{G}^{\mathrm{Nets}} &:= \langle \mathcal{G}^{\mathrm{Nets}}_\kappa : \kappa \in \mathbf{Cn} \rangle, \quad \text{kde } \mathcal{G}^{\mathrm{Nets}}_\kappa := \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\{I : I \text{ usměrněná a } |I| \leq \kappa\}).
\end{aligned}$$

Indukovanému kardinálnímu invariantu $\overline{\lambda^{\mathrm{Seqs}}}$ se někdy tradičně říká *chain-net charakter* a značí se σ_c (viz [JMSW]) nebo také *radiální charakter* se značkou $R\chi$. Invariant $\overline{\lambda^{\mathrm{Nets}}}$ je někdy nazýván *net charakter* se značkou σ ([JMSW]) nebo *divergence* se značkou *div*.

Lemma 3.16 (o kvalitě posloupností)**.** *Nechť X je topologický prostor a $\Phi = \langle x_\alpha : x \in \kappa \rangle \to x$ je konvergentní posloupnost v X.*

(i) *Posloupnost Φ obsahuje podposloupnost regulární délky. Tedy $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_\kappa = \mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_{\mathrm{cf}(\kappa)}$ pro každé κ, $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}} = \mathcal{C}^{\mathrm{Nets}}(\{\kappa \in \mathbf{Cn} : \kappa \text{ regulární}\})$ a invarianty λ^{Seqs} a $\overline{\lambda^{\mathrm{Seqs}}}$ nabývají pouze regulárních hodnot.*

(ii) *Posloupnost Φ obsahuje prostou podposloupnost nebo konstantní podposloupnost. Ve druhém případě tedy existuje $\alpha \in \kappa\colon\ x \in \overline{\{x_\alpha\}}$, speciálně pokud je prostor X T_1 a $x \notin \mathrm{rng}(\Phi)$, pak druhý případ nenastane. Dalším důsledkem je $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}})$.*

Důkaz.

(i) Zřejmě stačí uvážit ostře rostoucí kofinální zobrazení $f\colon \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$. Potom $\Phi \circ f$ je hledaná podposloupnost.

(ii) Dle prvního bodu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že κ je regulární. Definujme induktivně $\gamma_\alpha := \min\{\gamma : x_\gamma \notin \{y_\beta : \beta < \alpha\}\}$, $y_\alpha := x_{\gamma_\alpha}$. Pokud indukce nemůže pokračovat v kroku $\alpha \in \kappa$, znamená to, že $\{y_\beta : \beta < \alpha\} = \mathrm{rng}(\Phi)$. Protože $\kappa = \bigcup\{\Phi^{-1}[\{y\}] : y \in \mathrm{rng}(\Phi)\}$ a z předchozího $|\mathrm{rng}(\Phi)| < \kappa$, existuje z regularity κ bod $y \in \mathrm{rng}(\Phi)\colon\ |\Phi^{-1}[\{y\}]| = \kappa$, tedy y má v naší posloupnosti kofinální výskyt, který realizuje konstantní podposlopnost. V opačném případě dá induktivní konstrukce prostou podposloupnost.

Díky předchozímu, pokud $|\mathrm{rng}(\Phi)| = \lambda$, pak pak existuje posloupnost délky nejvýše λ s hodnotami v $\mathrm{rng}(\Phi)$ konvergující k x. Odtud $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}})$. $\square$

Pozorování 3.17 (charakterizace $\mathcal{G}^{\mathrm{Nets}}$)**.** *Nechť X je topologický prostor, $A \subseteq X$, $x \in X$.*

- *Pokud $\Phi\colon I \to A$ je konvergentní net s $\Phi \to x$ a $|I| \leq \kappa$, pak $\mathcal{F} := \{\{\Phi(j) : j \geq i\} : i \in I\}$ je báze filtru na A konvergujícího k x, $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ a $\mathcal{F} \subseteq [A]^{\leq\kappa}$.*
- *Pokud $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ je báze filtru s $\mathcal{F} \to x$ a $|\mathcal{F}| \leq \kappa$, pak zobrazení $\Phi\colon \mathcal{F} \to A$ splňující $\Phi(F) \in F$ je net s $\Phi \to x$ a $|\mathrm{dom}(\Phi)| \leq \kappa$.*

Tedy schéma $\mathcal{G}_\kappa^{\mathrm{Nets}}$ definované pomocí konvergence netů velikosti $\leq \kappa$ je ekvivalentně popsáno konvergencí bází filtrů velikosti $\leq \kappa$ a též ekvivalentně konvergencí bází filtrů velikosti $\leq \kappa$ tvořených navíc množinami velikosti $\leq \kappa$.

Tvrzení 3.18 (vlastnosti gradací založených na konvergenci)**.**

(i) *Platí $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}$ a $\mathcal{G}^{\mathrm{Nets}} \to \mathrm{cl}$, a tedy i pro tranzitivní varianty $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} \to \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}}$ a $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Nets}}} \to \mathrm{cl}$.*

(ii) *Platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} = \mathcal{G}_\omega^{\mathrm{Seqs}} = \mathcal{G}_\omega^{\mathrm{Nets}}$. Tedy existence konvergentní ω-posloupnosti je ekvivalentní existenci spočetného konvergentního netu. Díky tomu platí, že prostor X je Fréchetův v bodě x, právě když $\lambda^{\mathrm{Nets}}(x, X) \leq \omega$, a je sekvenciální v bodě x, právě když $\overline{\lambda^{\mathrm{Nets}}}(x, X) \leq \omega$.*

(iii) *Platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} \leq \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}} \leq \mathrm{cl}^{\leq\omega}$. Tedy Fréchetovy prostory jsou sekvenciální a sekvenciální prostory mají spočetnou těsnotu.*

(iv) *Platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}$. Tedy Fréchetovy prostory jsou radiální a sekvenciální prostory jsou pseudoradiální.*

(v) *Platí $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Nets}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$, a tedy i $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} \leq \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Nets}}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$. Odtud dostáváme obecně platné nerovnosti $t(x, X) \leq \overline{\lambda^{\mathrm{Nets}}}(x, X) \leq \lambda^{\mathrm{Nets}}(x, X)$ pro každý bod $x \in X$ a dále $\overline{\lambda^{\mathrm{Seqs}}}(X) \leq \lambda^{\mathrm{Seqs}}(X)$ pro každý prostor X.*

(vi) *Pro X pseudoradiální v x platí $t(x, X) \leq \overline{\lambda^{\mathrm{Nets}}}(x, X) \leq \overline{\lambda^{\mathrm{Seqs}}}(x, X)$.*

(vii) *Pro X radiální v x platí rovnosti*

$$t(x, X) = \overline{\lambda^{\mathrm{Nets}}}(x, X) = \lambda^{\mathrm{Nets}}(x, X) = \overline{\lambda^{\mathrm{Seqs}}}(x, X) = \lambda^{\mathrm{Seqs}}(x, X).$$

Speciálně radiální prostor spočetné těsnoty (v bodě) je Fréchetův (v bodě).

(viii) *Pro X radiální platí $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}} = \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Nets}}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Nets}} = \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}$. Tedy podmínka $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ na X charakterizuje radialitu prostoru X.*

Důkaz.

(i) $\mathcal{G}^{\mathrm{Nets}} \to \mathrm{cl}$, neboť ke každému bodu uzávěru lze dokonvergovat netem či ekvivalentně (3.17) filtrem. Pro $x \in \overline{A}$ je $\{U \cap A : U \text{ okolí x}\}$ filtr v A konvergující k x. Ostatní je jasné.

(ii) Je-li $\Phi\colon I \to A$ net konvergující k x s $|\Phi| \leq \omega$, pak Φ obsahuje kofinální ω-posloupnost. Pro $I = \{i_n : n \in \omega\}$ volme $j_n \geq i_n, j_{n-1}$ a položme $x_n := \Phi(j_n)$. Potom $\langle x_n : n \in \omega\rangle \to x$ je hledaná posloupnost v A.

(iii) Plyne ihned z definic.

(iv) Plyne ihned z definic.

(v) Plyne z definic a prvního bodu, nerovnosti dostáváme z důsledku 2.39 a pozorování 2.40.

(vi) První nerovnost dostáváme z předchozího bodu, druhá plyne z předpokladu a tvrzení 2.38.

(vii) Z předpokladu a tvrzení 2.38 dostáváme, že ze všech uvažovaných hodnot je $t(x, X)$ nejmenší a $\lambda^{\mathrm{Seqs}}(x, X)$ největší. Tvrzení 3.9 potom dává $t(x, X) = \lambda^{\mathrm{Seqs}}(x, X)$.

(viii) Obecně je z uvažovaných gradací $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}$ nejmenší a $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ největší. Fakt, že $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}})$ (3.16) a tvrzení 3.9 dávají jejich rovnost na prostoru X. □

Definice 3.19. Připomeňme definici následujících pojmů. Řekneme, že kolekce otevřených množin $\mathcal{B}$ je *pseudobáze v bodě* $x \in X$, pokud $\bigcap \mathcal{B} = \{x\}$. *Pseudocharakter v bodě* x je potom definován jako $\psi(x, X) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ pseudobáze v $x\}$ a *pseudocharakter prostoru* X jako $\psi(X) := \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$.

Tradiční definici výše lehce zobecníme, abychom nemuseli na uvažovaných prostorech požadovat žádnou separaci.

Definice 3.20. Pro bod v topologickém prostoru $x \in X$ definujme množinu $x^\circ := \bigcap\{U : U$ okolí $x\}$. Dále řekneme, že kolekce otevřených množin $\mathcal{B}$ je *zobecněná pseudobáze v bodě* x, pokud $\bigcap \mathcal{B} = x^\circ$. Analogicky předchozí definici definujeme *zobecněný pseudocharakter v bodě* x jako $\psi^\circ(x, X) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ zobecněná pseudobáze v $x\}$ a *zobecněný pseudocharakter prostoru* X jako $\psi^\circ(X) := \sup\{\psi^\circ(x, X) : x \in X\}$.

Pozorování 3.21. *Pokud $x^\circ = \{x\}$ pro nějaký bod $x \in X$, pak pseudobáze v x je totéž, co zobecněná pseudobáze, v opačném případě pseudobáze v x neexistuje. Speciálně na T_1 prostorech platí $\psi = \psi^\circ$.*

Pozorování 3.22. *Pro libovolný prostor X platí $\psi^\circ(X) \le |X|$. Dále $\psi^\circ(x, X) \le \chi(x, X)$ a $\psi^\circ(X) \le \chi(X)$, kde χ značí charakter.*

Důkaz. Pro $x, y \in X$ splňující $x \notin \overline{\{y\}}$ položme $U_{x,y} := X \setminus \overline{\{y\}}$. Potom platí $x^\circ = \bigcap\{U_{x,y} : x \notin \overline{\{y\}}, y \in X\}$, tedy $\psi^\circ(X) \le |X|$. Dále báze v bodě je zřejmě zobecněná pseudobáze v bodě, a proto platí i druhá nerovnost. □

Lemma 3.23. *Nechť $\langle x_\alpha : \alpha \in \kappa\rangle \to x$ je konvergentní posloupnost v X. Pokud $\psi^\circ(x, X) < \mathrm{cf}(\kappa)$, pak $(\exists \alpha_0 \in \kappa)(\forall \alpha \ge \alpha_0)\colon\ x \in \overline{\{x_\alpha\}}$.*

Důkaz. Volme $\mathcal{B}$ zobecněnou pseudobázi v x minimální velikosti. Pro každé $U \in \mathcal{B}$ volme $\alpha_U \in \kappa$, že $\{x_\alpha : \alpha \ge \alpha_U\} \subseteq U$. Z předpokladu není množina $\{\alpha_U : U \in \mathcal{B}\}$ kofinální v κ, a tedy existuje $\alpha_0 \in \kappa$ nad všemi α_U. Pak pro každé $\alpha \ge \alpha_0$ máme $(\forall U \in \mathcal{B})\colon\ x_\alpha \in U$, tedy $x_\alpha \in x^\circ$, tj. $x \in \overline{\{x_\alpha\}}$. □

Důsledek 3.24. *Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Platí $\lambda^{\mathrm{Seqs}}(x, X) \le \psi^\circ(x, X)$ a dále $\overline{\lambda^{\mathrm{Seqs}}}(X) \le \lambda^{\mathrm{Seqs}}(X) \le \psi^\circ(X)$. Pokud je prostor X pseudoradiální, platí $t(X) \le \psi^\circ(X)$. Pokud je X radiální v x, pak $t(x, X) \le \psi^\circ(x, X)$.*

Důkaz. Nechť $\langle x_\alpha : \alpha \in \kappa\rangle \to x$ je posloupnost v množině $A \subseteq X$. Dle lemmatu 3.16 můžeme předpokládat, že κ je regulární. Buďto $\kappa \le \psi^\circ(x, X)$, a pak $\lambda^{\mathrm{Seqs}}(x, A, X) \le \psi^\circ(x, X)$, anebo $\kappa > \psi^\circ(x, X)$ a díky předchozímu lemmatu dostaneme stejný výsledek. Zbytek plyne z tvrzení 3.18. □

Podívejme se nyní na třídu semiradiálních prostorů, která leží mezi radiálními a pseudoradiálními prostory a přirozeně doplňuje obrázek vztahů mezi jednotlivými třídami.

Definice 3.25. Řekneme, že topologický prostor X je *semiradiální*, pokud pro každý kardinál κ a každou množinu $A \subseteq X$, která není κ-uzavřená, existuje posloupnost $\Phi\colon \lambda \to A$ s $\Phi \to x \notin A$ a $\lambda \leq \kappa$. Tj. z každé κ-neuzavřené množiny lze vykonvergovat posloupností délky nejvýše κ.

Tvrzení 3.26 (vlastnosti semiradiality)**.**

(i) *Topologický prostor X je semiradiální, právě když $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ na X.*

(ii) *Každý radiální prostor je semiradiální a každý semiradiální prostor je pseudoradiální.*

(iii) *Každý sekvenciální prostor je semiradiální.*

(iv) *Na semiradiálním prostoru X platí $t(x, X) = \overline{\lambda^{\mathrm{Seqs}}}(x, X)$ pro každý bod $x \in X$, speciálně semiradiální prostor spočetné těsnoty je sekvenciální.*

(v) *Třída semiradiálních prostorů je uzavřená na topologické sumy, uzavřené a otevřené podprostory.*

Důkaz.

(i) Definice semiradiality říká, že každá množina, která není $\mathrm{cl}^{\leq\kappa}$-uzavřená, není ani $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_\kappa$-uzavřená, tj. každá $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_\kappa$-uzavřená množina je $\mathrm{cl}^{\leq\kappa}$-uzavřená, ekvivalentně $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_\kappa} \geq \mathrm{cl}^{\leq\kappa}$ pro každé κ, tj. $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} \geq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$. Protože opačný odhad platí vždy, máme požadované.

(ii) Protože radialita je charakterizována podmínkou $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$ (viz tvrzení 3.18) a máme obecně platnou nerovnost $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} \leq \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$, dává předchozí bod, že každý radiální prostor je semiradiální. Protože $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}} \to \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}}$ a $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}} \to \mathrm{cl}$, platí $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}} \implies \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}} = \mathrm{cl}$, tedy každý semiradiální prostor je pseudoradiální.

(iii) Obecně platí $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}} \leq \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_\kappa} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_\kappa \leq \mathrm{cl}$ pro každé nekonečné κ. Na sekvenciálním prostoru platí $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}} = \mathrm{cl}$, a tedy $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$. Pokud bychom chtěli uvažovat i konečná κ, pak pro $1 \leq n < \omega$ platí $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_n = \mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_1 = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_1 = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_n$ a $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_0 = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_0 = \mathcal{C}^{\mathrm{Id}}$.

(iv) Plyne ihned z prvního bodu a důsledku 2.39.

(v) Uvažme $X = \sum_{i \in I} X_i$, $A \subseteq X$, $A_i = A \cap X_i$ pro $i \in I$. Platí

$$\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_{\kappa,X}(A) = \bigcup\nolimits_{i\in I} \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_{\kappa,X_i}(A_i) = \bigcup\nolimits_{i\in I} \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_{\kappa,X_i}}(A_i) \subseteq \bigcup\nolimits_{i\in I} \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_{\kappa,X}}(A_i) \subseteq \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_{\kappa,X}}(A)$$

První rovnost zřejmě platí z vlastností topologického uzávěru cl, druhá plyne z předpokladu. Protože vnoření všech podprostorů X_i jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}$-spojitá, jsou i $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}$-spojitá (3.2, 3.16) a $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}}$-spojitá (2.4), odtud plyne následující inkluze. Poslední inkluze je zřejmá.

Uvažme $f\colon X \to Y$ vnoření uzavřeného nebo otevřeného podprostoru. Zobrazení f je $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$-spojité (3.5). Zobrazení f je $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}$-dědičné, a tedy i $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}$-dědičné a $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}}$-dědičné (jako výše 3.2, 3.16, 2.4). Pro $A \subseteq X$ máme

$$f[\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_{\kappa,X}(A)] \subseteq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_{\kappa,Y}(f[A]) \cap \mathrm{rng}(f) = \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_{\kappa,Y}}(f[A]) \cap \mathrm{rng}(f) \subseteq f[\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_{\kappa,X}}(A)].$$

První inkluze plyne z $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$-spojitosti zobrazení f, rovnost plyne z předpokladu a poslední inkluze plyne z $\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}}$-dědičnosti zobrazení f. Celkem máme $\mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}_{\kappa,X}(A) \subseteq \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}_{\kappa,X}}(A)$, protože zobrazení f je prosté. $\square$

Shrňme nyní vztahy mezi dosud uvažovanými uzávěrovými schématy následující větou.

Věta 3.27. *Obrázek 1 věrně shrnuje vztahy mezi uvedenými třídami prostorů, tyto třídy jsou charakterizovány uvedenými podmínkami (na daném prostoru). Všechny implikace platí bez jakýchkoli dodatečných předpokladů. Dále je obrázek dolním polosvazem v následujícím smyslu: pokud je třída C infimem (v obrázku při uspořádání inkluzí) tříd A, B, pak $A \cap B = C$. Toto polosvazové chování rovněž platí bez jakýchkoli dodatečných předpokladů. Žádné dvě třídy v obrázku nesplývají a protipříklady lze nalézt i mezi T_2 prostory.*

Důkaz. Implikace v obrázku plynou z tvrzení 3.18 a 3.26. Pro polosvazové chování stačí dokázat, že vlastnost v pravém sloupci obrázku spolu se spočetnou těsnotou dává odpovídající vlastnost v levém sloupci. Ostatní možnosti již plynou z předchozího nebo jsou triviální. Radiální prostor spočetné těsnoty je Fréchetův dle tvrzení 3.18, semiradiální prostor spočetné těsnoty je sekvenciální dle tvrzení 3.26, dle tvrzení 3.7 je prostor pseudoradiální spočetné těsnoty, právě když je $(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}})^{\leq\omega}$-generovaný.

Nyní odkážeme na T_2 příklady prostorů, které dosvědčují, že žádné dvě třídy prostorů nesplývají. Prostor $(\omega_1 + 1)$ je radiální, ale nemá spočetnou těsnotu (viz příklad 5.5), tedy žádná třída v pravém sloupci není obsažena v žádné třídě v levém sloupci. Pokud nesplývají žádné dvě třídy v levém sloupci, pak díky polosvazovému chování nesplývají ani žádné dvě třídy v levém sloupci. Arensův prostor (příklad 5.7) je sekvenciální, ale není Fréchetův. Existuje pseudoradiální prostor spočetné těsnoty, který není sekvenciální (viz příklad 5.8). Redukovaný Arensův prostor (5.7) má spočetnou těsnotu, ale není pseudoradiální. □

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Fréchetův}\\(\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} = \mathrm{cl})\end{array} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{radiální}\\(\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}} = \mathrm{cl},\\ \mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}})\end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{sekvenciální}\\(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}} = \mathrm{cl})\end{array} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{semiradiální}\\(\overline{\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}} = \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}})\end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{pseudoradiální spočetné těsnoty}\\(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}} \wedge \mathrm{cl}^{\leq\omega} = \mathrm{cl},\\ (\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}})^{\leq\omega} = \mathrm{cl})\end{array} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{pseudoradiální}\\(\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}} = \mathrm{cl})\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{spočetné těsnoty}\\(\mathrm{cl}^{\leq\omega} = \mathrm{cl})\end{array} &
\end{tikzcd}$$

Obrázek 1: Vztahy mezi uzávěrovými schématy založenými na konvergenci.

3.3 Diskrétní generovanost

Definice 3.28. Řekneme, že podmnožina D prostoru X je *silně diskrétní*, pokud existuje funkce $\langle U_d : d \in D \rangle$, která jednotlivým bodům D přiřazuje jejich vzájemně disjunktní otevřená okolí.

Definujeme schémata $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$ vztahy

$$\mathcal{C}^{\mathrm{D}}(A, X) := \bigcup\{\overline{D} : D \subseteq A \text{ diskrétní}\},$$
$$\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}(A, X) := \bigcup\{\overline{D} : D \subseteq A \text{ silně diskrétní}\},$$

pro $A \subseteq X \in \mathbf{Top}$. $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$-generovanosti říkáme *diskrétní generovanost*, $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}}$-generovanosti říkáme *slabá disrétní generovanost* a $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$-generovanosti říkáme *silně diskrétní generovanost*. Krkolomný pojem *slabé silně diskrétní generovanosti* nepotřebujeme, protože schéma $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$ je tranzitivní, viz tvrzení 3.31.

Dále definujme gradace těchto schémat $\mathcal{G}^{\mathrm{D}} := \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^{\mathrm{D}})$ a $\mathcal{G}^{\mathrm{SD}} := \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^{\mathrm{SD}})$.

Tvrzení 3.29. *Uzávěrová schémata $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$, $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}}$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$ jsou aditivní.*

Důkaz. Aditivita schémat $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$ plyne aplikací tvrzení 1.6, kde za $\mathcal{M}$ volíme diskrétní resp. silně diskrétní podmnožiny. Aditivita schématu $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}}$ plyne ihned z aditivity schématu $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$ (viz 1.5). □

Pozorování 3.30. *Všechna vnoření podprostorů jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$-dědičná i $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$-spojitá, neboť diskrétnost je absolutní. Diskrétní generovanost je tedy dědičná, slabá diskrétní generovanost je dědičná na uzavřené a na otevřené podprostory, diskrétní generovanost je totéž co dědičná slabá diskrétní generovanost a (slabá) diskrétní generovanost se zachovává topologickou sumou.*

Všechna vnoření podprostorů jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$-dědičná, vnoření otevřených podprostorů jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$-spojitá. Silně diskrétní generovanost je tedy dědičná a je zachovávána sumou.

Tvrzení 3.31. *Uzávěrové schéma $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$ je tranzitivní, a tedy i gradace $\mathcal{G}^{\mathrm{SD}}$ je tranzitivní.*

Důkaz. Nechť $A \subseteq X$ je libovolná podmnožina libovolného topologického prostoru, $x \in \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}(\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}(A))$. Pak existuje silně diskrétní $D \subseteq \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}(A)$ s $x \in \overline{D}$ a k ní $\langle U_d : d \in D \rangle$, které každému bodu přiřazuje otevřené okolí disjunktní s ostatními. Protože $D \subseteq \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}(A)$, existuje ke každému $d \in D$ silně diskrétní množina $D_d \subseteq A$ s $d \in \overline{D_d}$ a $\langle U_{d,d'} : d' \in D_d \rangle$ dosvědčující její silnou diskrétnost. Uvažme $S := \bigcup\{U_d \cap D_d : d \in D\} \subseteq A$. Pro každé $s \in S$ existuje jednoznačně $d_s \in D$, že $s \in U_{d_s} \cap D_{d_s}$. Množina S je silně diskrétní a dosvědčuje to přiřazení $\langle U_{d_s} \cap U_{d_s,s} : s \in S \rangle$. Navíc $x \in \overline{S}$. Totiž pro V okolí x existuje $d \in V \cap D$, a tedy $\emptyset \neq V \cap U_d \cap D_d \subseteq V \cap S$, protože $V \cap U_d$ je okolí d. Díky množině S máme $x \in \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}(A)$ □

Definice 3.32. Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že kolekce $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *celulární*, je-li to disjunktní kolekce neprázdných otevřených množin. Připomeňme definice invariantů

$$c(X) := \sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ celulární kolekce}\},$$
$$s(X) := \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ diskrétní podprostor}\}.$$

Invariant $c(X)$ se nazývá *celularita* nebo také *Suslinovo číslo*. Pro invariant $s(X)$ se také používá značka $hc(X)$ a název *dědičná celularita*, protože $s(X)$ skutečně splývá s dědičnou variantou $c(X)$. Zřejmě platí $c(X) \leq s(X)$.

Pozorování 3.33.

- *Platí $\mathcal{G}^{\mathrm{SD}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{D}} \leq \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{D}}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Sets}}$. Speciálně silně diskrétně generované prostory jsou diskrétně generované a diskrétně generované prostory jsou slabě diskrétně generované.*
- *Pro topologický prostor X platí $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}} = \mathcal{G}^{\mathrm{SD}}_{c(X)}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{D}} = \mathcal{G}^{\mathrm{D}}_{s(X)}$ a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}} = \overline{\mathcal{G}^{\mathrm{D}}}_{s(X)}$, a tedy platí $\lambda^{\mathrm{SD}}(X) \leq c(X)$ a $\overline{\lambda^{\mathrm{D}}}(X) \leq \lambda^{\mathrm{D}}(X) \leq s(X)$.*
- *Pro slabě diskrétně generovaný prostor X platí $t(X) \leq \overline{\lambda^{\mathrm{D}}}(X) \leq \lambda^{\mathrm{D}}(X) \leq s(X)$. Je-li X dokonce silně diskrétně generovaný, platí dokonce*

$$t(X) = \overline{\lambda^{\mathrm{D}}}(X) = \lambda^{\mathrm{D}}(X) = \lambda^{\mathrm{SD}}(X) \leq c(X) \leq s(X).$$

  Gradace $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$, resp. $\mathcal{G}^{\mathrm{D}}$ má tedy k celularitě, resp. dědičné celularitě podobný vztah jako gradace $\mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}$ k pseudocharakteru (viz důsledek 3.24).

Důkaz. Druhý bod plyne z faktu, že velikost silně diskrétních množin je omezena celularitou a velikost diskrétních množin dědičnou celularitou. Třetí bod plyne z druhého a z tvrzení 3.9. Ostatní je jasné. □

Lemma 3.34. *Nechť X je T_2 prostor, $S = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$, $\langle x_n : n \in \omega \rangle \to x \in X$ a $x \notin S$. Pak množina S je silně diskrétní a $\overline{S} \setminus S = \{x\}$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti je funkce $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ prostá. Totiž protože X je Hausdorffův a $x \notin S$, vyskytne se každý prvek S v posloupnosti konečněkrát, a tedy stačí zachovat pouze jeho první výskyt.

Je-li $y \in \overline{S} \setminus S$, $y \neq x$, uvažme disjunktní otevřené U, V s $x \in U$, $y \in V$. Protože U obsahuje z konvergence všechny prvky S až na konečně mnoho, máme $y \in \overline{\{x_n : n \leq n_0\}} = \{x_n : n \leq n_0\} \subseteq S$ pro nějaké n_0, což je spor.

Budeme induktivně definovat množiny $U_{k,n}$, $k \in \omega$, $n \geq k$ splňující

- $U_{k,n}$ je otevřené okolí bodu x_n,
- pro $k \leq k' \leq n$, platí $U_{k,n} \supseteq U_{k',n}$,
- pro $n < n'$ platí $U_{n,n} \cap U_{n,n'} = \emptyset$.

Tedy přiřazení $\langle x_n \mapsto U_{n,n} : n \in \omega \rangle$ bude dosvědčovat, že množina S je silně diskrétní. Mějme požadované množiny $U_{k-1,n}$ pro $n \geq k-1$ (uvažme $U_{-1,n} = X$). Existují disjunktní otevřené množiny U, V s $x_k \in U$, $x \in V$. Pro $n \geq k$ splňující $x_n \in V$ položme $U_{k,n} = U_{k-1,n} \cap V$. Pro ostatní $n \geq k$, kterých je jen konečně mnoho a je mezi nimi k, uvažme disjunktní otevřené množiny W_n s $x_n \in W_n$ a položme $U_{k,n} = U_{k-1,n} \cap W_n$ pro $n \neq k$ a $U_{k,k} = U_{k-1,k} \cap W_k \cap U$. Tím dostáváme požadované. □

Důsledek 3.35 ([DTTW, Theorem 3.9])**.** *Na T_2 prostorech platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$, a tedy díky tranzitivitě schématu $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$ i $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$. Speciálně Hausdorffovy sekvenciální prostory jsou silně diskrétně generované.*

Tvrzení 3.36 ([BS, Lemma 1]). *Na T_2 prostorech platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{D}}$, tedy Hausdorffovy radiální prostory jsou diskrétně generované a Hausdorffovy pseudoradiální prostory jsou slabě diskrétně generované.*

Důkaz. Nechť $S \subseteq X$ je transfinitní posloupnost konvergující k bodu $x \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|S|$ je regulární kardinál (3.16). Budeme induktivně definovat posloupnost $\langle x_\alpha, U_\alpha, V_\alpha : \alpha \rangle$ splňující: $U_\alpha, V_\alpha \subseteq X$ jsou disjunktní otevřené množiny, $x_\alpha \in U_\alpha$, $x \in V_\alpha$, $x_\alpha \in (S \setminus \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}) \cap \bigcap\{V_\beta : \beta < \alpha\}$ pro každé α. Mějme $\langle x_\beta, U_\beta, V_\beta : \beta < \alpha \rangle$. Uvažme $D_\alpha := \{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq S$. To je díky našim požadavkům diskrétní množina. Pokud $x \in \overline{D_\alpha}$, jsme hotovi. V opačném případě D_α nemůže být kofinální v tranfinitní posloupnosti S, která k x konverguje, tedy $|\alpha| < |S|$ a $(S \setminus \overline{D_\alpha}) \cap \bigcap\{V_\beta : \beta < \alpha\}$ obsahuje koncovou část posloupnosti S, ve které můžeme zvolit bod x_α a k němu z Hausdorffovosti disjunktní otevřené množiny U_α, V_α. Induktivní konstrukce se někdy musí zastavit, a tedy tvrzení platí. □

Lemma 3.37. *Nechť X je regulární (ne nutně T_0) prostor. Potom je každá spočetná diskrétní podmnožina silně diskrétní.*

Důkaz. Uvažme prostě očíslovanou množinu $A = \{x_n : n \in I\} \subseteq X$, kde I je počáteční úsek ω. Mějme disjunktní otevřené množiny V_k, $k < n \in I$ takové, že $\overline{V_k} \cap A = \{x_k\}$. Z předpokladu diskrétnosti existuje otevřená množina $U \subseteq X$, že $U \cap A = \{x_n\}$. Dále z regularity existuje otevřená V_n, že platí $x \in V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq U \cap \bigcap\{X \setminus \overline{V_k} : k < n\}$. Pak máme $x_n \in \overline{V_n} \cap A \subseteq U \cap A = \{x_n\}$ a $V_n \cap V_k = \emptyset$ pro $k < n$. Tato induktivní konstrukce dává požadované. □

Důsledek 3.38. *[DTTW, Theorem 3.8] Na regulárních prostorech spočetné těsnoty platí $\mathcal{C}^{\mathrm{D}} = \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$, a tedy z tranzitivity $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$ i $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}} = \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$. Slabě diskrétně generovaný regulární prostor spočetné těsnoty je silně diskrétně generovaný.*

3.4 Whyburnova vlastnost

Definice 3.39. Řekneme, že podmnožina F prostoru X je *skorouzavřená*, pokud $|\overline{F} \setminus F| \leq 1$. Pro uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ definujeme jeho *Whyburnovu variantu* $\mathcal{W} := \mathcal{W}h(\mathcal{C})$:

$$W_X(A) := A \cup \bigcup\{C_X(F) : F \subseteq A \text{ skorouzavřená v } X\},$$

pro $A \subseteq X \in \mathbf{Top}$. Máme $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}} = \mathcal{W}h(\mathrm{cl})$. $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$-generovaným prostorům říkáme *Whyburnovy* a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}}$-generovaným *slabě Whyburnovy*. Dále definujeme $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}} := \mathcal{W}h(\mathcal{C}^{\mathrm{D}})$. $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$-generovaným prostorům říkáme *diskrétně Whyburnovy* a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}}$-generovaným *slabě diskrétně Whyburnovy*.

Dále uvažme $\mathcal{G}^{\mathrm{Wh}} := \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}})$ a $\mathcal{G}^{\mathrm{DWh}} := \mathcal{G}^{\mathrm{Card}}(\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}})$, gradace právě definovaných schémat.

Pozorování 3.40.

- *Průnik skorouzavřené množiny a uzavřené množiny je skorouzavřená množina. Vzor skorouzavřené množiny při prostém spojitém zobrazení (speciálně při topologickém vnoření) je skorouzavřená množina. Obraz skorouzavřené množiny při uzavřeném zobrazení je skorouzavřená množina.*

- *Je-li vnoření $\mathcal{C}$-dědičné (v bodě), pak je i $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$-dědičné (v bodě). Je-li uzavřené zobrazení $\mathcal{C}$-spojité (v bodě), pak je i $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$-spojité (v bodě).*
- *Všechna vnoření jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$-dědičná a spojitá uzavřená zobrazení (speciálně vnoření uzavřených podprostorů a uzavřená kvocientová zobrazení) jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$-spojitá. Tedy je-li prostor (slabě) Whyburnův, je i každý jeho (uzavřený) podprostor (slabě) Whyburnův. Sumy a uzavřené kvocienty (slabě) Whyburnových prostorů jsou (slabě) Whyburnovy.*
- *Všechna vnoření jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$-dědičná a vnoření uzavřených podprostorů jsou $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$-spojitá. Je-li prostor (slabě) diskrétně Whyburnův, je i každý jeho (uzavřený) podprostor (slabě) diskrétně Whyburnův. Sumy (slabě) diskrétně Whyburnových prostorů jsou (slabě) diskrétně Whyburnovy.*

Poznámka 3.41. Schémata $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$ nejsou aditivní, a to ani na Hausdorffových prostorech (viz příklad 5.9). Mezi protipříklady, které nejsou Hausdorffovy, patří trojbodový indiskrétní prostor a topologie kokonečných množin na ω (příklad 5.3). Tato skutečnost ale nebrání důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.42. *Nechť $\mathcal{C}$ je aditivní uzávěrové schéma, X regulární prostor, U jeho otevřená podmnožina. Potom pro každou množinu $A \subseteq X$ platí $\mathcal{W}h(\mathcal{C})(A) \cap U \subseteq \mathcal{W}h(\mathcal{C})(\overline{A \cap U})$. Jsou-li otevřená vnoření do regulárních prostorů $\mathcal{C}$-dědičná, pak jsou i $\overline{\mathcal{W}h(\mathcal{C})}$-dědičná a slabá $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$-generovanost regulárních prostorů je dědičná na otevřené podprostory. Speciálně otevřený podprostor slabě (diskrétně) Whyburnova regulárního prostoru je slabě (diskrétně) Whyburnův.*

Důkaz. Nechť $x \in \mathcal{W}h(\mathcal{C})(A) \cap U$. Potom existuje $F \subseteq A$ skorouzavřená s $x \in C(F)$. Dále z regularity existuje otevřená množina V splňující $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Platí $x \in C(F) \cap V \subseteq C(F \cap V) \subseteq C(F \cap \overline{V}) \subseteq \mathcal{W}h(\mathcal{C})(A \cap U)$, přičemž první inkluze plyne z lemmatu 1.7 a poslední z toho, že množina $F \cap \overline{V}$ je skorouzavřená.

Je-li otevřené vnoření do regulárního prostoru $\mathcal{C}$-dědičné, pak je $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$ dědičné a díky právě dokázané vlastnosti i $\overline{\mathcal{W}h(\mathcal{C})}$-dědičné. Postupujeme jako v důkazu lemmatu 2.4. Nakonec použijeme větu 2.8. □

Pro každé uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ máme k dispozici tyto operace: $\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}^{\leq\kappa}$ a $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$. Následující tvrzení vyjasňují, jak $\mathcal{W}h$ interaguje s ostatními operacemi, a doplňují tak tvrzení 3.7 a 3.8.

Tvrzení 3.43. *Pro každé uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ a každou skorouzavřenou množinu F platí $C(F) = \overline{C}(F)$, tedy $\mathcal{W}h(\overline{\mathcal{C}}) = \mathcal{W}h(\mathcal{C})$.*

Důkaz. Máme $F \subseteq C(F) \subseteq \overline{C}(F) \subseteq \overline{F}$ a $|\overline{F} \setminus F| \leq 1$, a pokud je F $\mathcal{C}$-uzavřená, pak je i $\overline{\mathcal{C}}$-uzavřená. □

Tvrzení 3.44 (vztah $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$ a $\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$)**.** *Platí $\mathcal{W}h(\mathcal{C}) \leq \mathcal{C} \wedge \mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$, ale rovnost obecně neplatí. Je-li prostor X slabě $\mathcal{C}$-generovaný (v bodě x) a Whyburnův (v bodě x), pak je $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$-generovaný (v bodě x), speciálně je $\mathcal{C}$-generovaný (v bodě x). Je-li prostor X slabě $\mathcal{C}$-generovaný a slabě Whyburnův, pak je slabě $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$-generovaný.*

Důkaz. První nerovnost zřejmě platí. Je-li prostor X slabě $\mathcal{C}$-generovaný v x a Whyburnův v x a $x \in \overline{A}$, pak existuje $F \subseteq A$ skorouzavřená s $x \in \overline{F} = \overline{C}(F)$, tedy $x \in \mathcal{W}h(\overline{\mathcal{C}})(A) = \mathcal{W}h(\mathcal{C})(A)$. Poslední rovnost plyne z předchozího tvrzení.

Je-li množina $A \subseteq X$ $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$-uzavřená a $F \subseteq A$ je skorouzavřená, pak $\overline{F} = \overline{C}(F) = C(F) \subseteq A$. První rovnost plyne ze slabé $\mathcal{C}$-generovanosti, druhá z předchozího tvrzení a inkluze plyne z $\mathcal{W}h(\mathcal{C})$-uzavřenosti množiny A. Ukázali jsme, že A je $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$-uzavřená, a tedy je uzavřená, protože prostor X je slabě Whyburnův. □

Tvrzení 3.45 (vztah $(\mathcal{W}h(\mathcal{C}))^{\leq\kappa}$ a $\mathcal{W}h(\mathcal{C}^{\leq\kappa})$). *Platí $(\mathcal{W}h(\mathcal{C}))^{\leq\kappa} \leq \mathcal{W}h(\mathcal{C}^{\leq\kappa})$ a $(\mathcal{W}h(\mathcal{C}))^{\leq\kappa}$-generovanost (v bodě) splývá s $\mathcal{W}h(\mathcal{C}^{\leq\kappa})$-generovaností (v bodě).*

Důkaz. $x \in (\mathcal{W}h(\mathcal{C}))^{\leq\kappa}(A)$ znamená, že existuje $B \subseteq A$, $|B| \leq \kappa$ a $F \subseteq B$ skorouzavřená splňující $x \in C(F)$. To je ekvivalentní existenci $F \subseteq A$ skorouzavřené splňující $|F| \leq \kappa$ a $x \in C(F)$. $x \in \mathcal{W}h(\mathcal{C}^{\leq\kappa})(A)$ znamená, že existuje $F \subseteq A$ skorouzavřená a $B \subseteq F$, $|B| \leq \kappa$ splňující $x \in C(B)$. To je ekvivalentní existenci $F \subseteq A$ skorouzavřené splňující $d(F) \leq \kappa$ a $x \in C(F)$, kde d značí hustotu. Tedy požadovaná nerovnost platí.

Pokud prostor X je $\mathcal{W}h(\mathcal{C}^{\leq\kappa})$-generovaný v bodě x, pak je Whyburnův v x, $\mathcal{C}$-generovaný v x a $t(x, X) \leq \kappa$. Dle předchozího tvrzení a tvrzení 3.7 je X $(\mathcal{W}h(\mathcal{C}))^{\leq\kappa}$-generovaný v x. □

Podívejme se na vztahy v této podkapitole definovaných schémat a schémat definovaných dříve.

Pozorování 3.46.

- *Pro uzávěrové schéma $\mathcal{C}$ platí $\mathcal{W}h(\mathcal{C}) \leq \mathcal{C}$. Speciálně $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{D}}$ a prostor (slabě) diskrétně Whyburnův (v bodě) je (slabě) diskrétně generovaný (v bodě).*
- *Pro dvě uzávěrová schémata $\mathcal{C}^1 \leq \mathcal{C}^2$ platí $\mathcal{W}h(\mathcal{C}^1) \leq \mathcal{W}h(\mathcal{C}^2)$. Speciálně $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$ a prostor (slabě) diskrétně Whyburnův (v bodě) je (slabě) Whyburnův (v bodě).*

Tvrzení 3.47. *Na T_2 prostorech platí nerovnosti $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$ a $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}} \leq \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}}$, tedy Hausdorffovy Fréchetovy prostory (v bodě) jsou diskrétně Whyburnovy (v bodě) a Hausdorffovy sekvenciální prostory (v bodě) jsou slabě diskrétně Whyburnovy (v bodě).*

Důkaz. Z lemmatu 3.34 plyne, že každá netriviální konvergentní posloupnost v T_2 prostoru je jako množina silně diskrétní a skorouzavřená, a tedy platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$. Ostatní tvrzení jsou přímým důsledkem. □

Lemma 3.48. *Máme-li posloupnost $\langle x_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle \to x$ v T_2 prostoru X, pak x je jediným hromadným bodem naší posloupnosti. Speciálně každý bod $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}} \setminus \{x\}$ již leží v uzávěru nějakého počátečního úseku $\{x_\alpha : \alpha < \alpha_0\}$.*

Důkaz. Uvažme bod $y \neq x$. Existují disjunktní otevřené množiny U, V splňující $x \in U$, $y \in V$. Přitom U obsahuje nějaký koncový úsek $\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}$, a tedy y není v jeho uzávěru a není to hromadný bod naší posloupnosti. Speciálně pokud y je v uzávěru naší posloupnosti, pak máme $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}} = \overline{\{x_\alpha : \alpha < \alpha_0\}} \cup \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}}$, a tedy $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \alpha_0\}}$. □

Tvrzení 3.49. *Na T_2 prostorech platí následující. Semiradiální prostor je slabě diskrétně Whyburnův (též [Be, Proposition 1]). Radiální prostor je dědičně slabě diskrétně Whyburnův, ale nemusí být Whyburnův.*

Důkaz. Nechť A je neuzavřená podmnožina semiradiálního prostoru X. Ukážeme, že není Whyburn-uzavřená. Nechť κ je nejmenší kardinál takový, že A není κ-uzavřená. Potom ze semiradiality a minimality κ existuje v A posloupnost $\langle x_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ konvergující k bodu $x \notin A$. Uzávěry všech počátečních úseků této posloupnosti neopustí množinu A díky minimalitě κ, a tedy dle předchozího lemmatu je skorouzavřená množina $\overline{\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}} \setminus \{x\}$ obsažena v A. Ukázali jsme, že prostor X je slabě Whyburnův. Tvrzení 3.26 a 3.36 dávají, že je i slabě diskrétně generovaný. Dle tvrzení 3.44 je X slabě diskrétně Whyburnův.

Radialita je dědičná na podprostory a každý radiální prostor je semiradiální (3.26), tedy z předchozího je každý T_2 radiální prostor dědičně slabě diskrétně Whyburnův. Příkladem radiálního prostoru, který není Whyburnův je $(\omega_1 + 1)$, viz 5.5. □

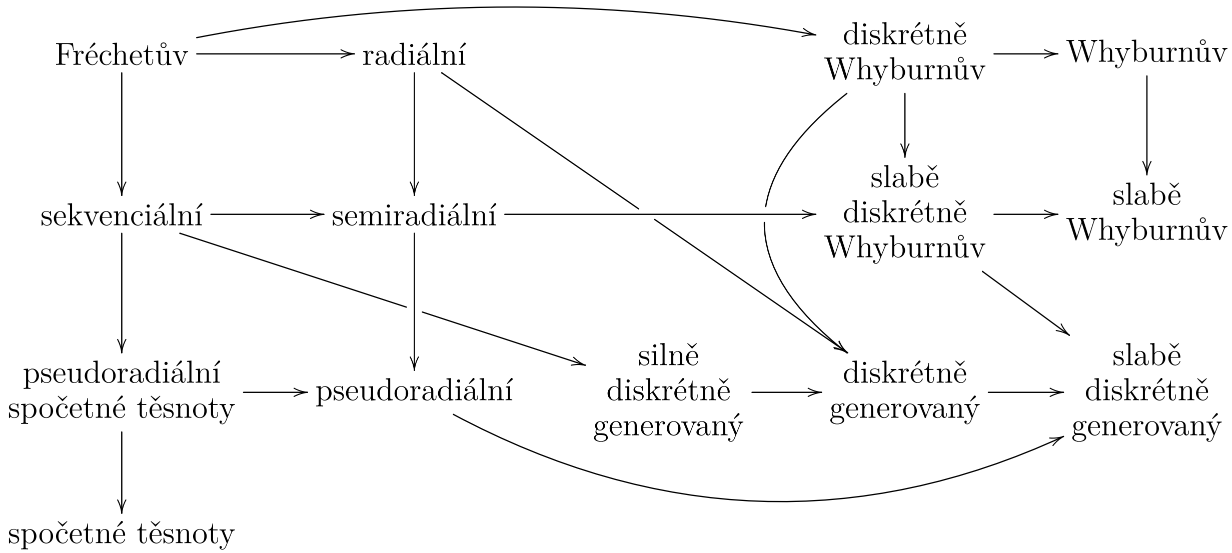
3.5 Celkový obraz

Věta 3.50. *Obrázek 2 věrně popisuje vztahy mezi uvedenými třídami prostorů za předpokladu T_2. Žádné dvě třídy nesplývají.*

Důkaz. Rozdělme obrázek na dvě části: levou část, která je podrobně popsaná ve větě 3.27, a pravou část zachychující schémata založená na diskrétních množinách a Whyburnově vlastnosti. Implikace naznačené v pravé části platí (tvrzení 3.33 a 3.46) a platí zde i částečné polosvazové chování (tvrzení 3.44).

Fréchetovy prostory jsou diskrétně Whyburnovy dle 3.47. Sekvenciální prostory jsou silně diskrétně generované dle 3.35. Radiální prostory jsou diskrétně generované a pseudoradiální prostory jsou slabě diskrétně generované dle 3.36. Semiradiální prostory jsou slabě diskrétně Whyburnovy dle 3.49. Tím jsme vyjasnili implikace mezi oběma částmi.

Prostory Y_κ v příkladu 5.7 splňují všechny vlastnosti v pravé části, ale nejsou ani pseudoradiální. Žádná kombinace vlastností v pravé části tedy neimplikuje žádnou vlastnost v levé části. Příklad 5.9 dává silně diskrétně generovaný prostor spočetné těsnoty, který není ani pseudoradiální, ani slabě Whyburnův. Příklad 5.11 dává spočetný Whyburnův prostor, který není ani slabě diskrétně generovaný. Dle tvrzení 3.49 nemusí být radiální prostor Whyburnův. Silná diskrétní generovanost a diskrétní generovanost spolu nesplývají dle příkladu 5.10, diskrétní generovanost a slabá diskrétní generovanost nesplývají dle 5.12. □



Obrázek 2: Vztahy mezi uzávěrovými schématy na T_2 prostorech.

4. Vztahy mezi uzávěrovými schématy za dodatečných podmínek

V této kapitole se podíváme na to, jak se obecně platné vztahy mezi uzávěrovými schématy, zkoumané v minulé kapitole, změní, budeme-li předpokládat nějakou dodatečnou podmínku. Zaměříme se na podmínky založené na kompaktnosti, jmenovitě na kompaktnost, spočetnou kompaktnost a jejich lokální varianty.

Definice 4.1. Nechť κ je kardinál. Řekneme, že topologický prostor X je $\leq\kappa$-*-kompaktní*, pokud pro každé $\mathcal{U}$ pokrytí prostoru X otevřenými množinami s $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ existuje $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ konečné podpokrytí. Nebo ekvivalentně, pokud pro každou klesající posloupnost uzavřených množin $\langle F_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ s $\lambda \leq \kappa$ a každou otevřenou $U \supseteq \bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ existuje α splňující $U \supseteq F_\alpha$. Analogicky můžeme definovat $<\kappa$*-kompaktní* prostory.

Poznámka 4.2. Zřejmě je každý prostor $<\omega$-kompaktní. $\leq\omega$-kompaktním prostorům se tradičně říká *spočetně kompaktní* a prostory, které jsou $\leq\kappa$-kompaktní pro každé κ, jsou *kompaktní*.

Tvrzení 4.3. *Nechť X je $\leq\kappa$-kompaktní regulární prostor. Pokud pro bod $x \in X$ platí $\psi^\circ(x, X) \leq \kappa$, pak $\psi^\circ(x, X) = \chi(x, X)$. Speciálně pro kompaktní prostor X platí $\forall x \in X\colon\ \psi^\circ(x, X) = \chi(x, X)$ a $\psi^\circ(X) = \chi(X)$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B}$ je zobecněná pseudobáze v bodě x velikosti $\leq \kappa$. Z regularity volme ke každé $U \in \mathcal{B}$ otevřenou množinu V_U splňující $x \in V_U \subseteq \overline{V_U} \subseteq U$ a položme $\mathcal{B}' := \{V_U : U \in \mathcal{B}\}$.

Nechť V je libovolné okolí x. Máme $x \in \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}'\} \subseteq \bigcap \mathcal{B} \subseteq V$. Z $\leq\kappa$-kompaktnosti existuje $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}'$ konečná, že $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{F}\} \subseteq V$. Tedy $\mathcal{B}'$ je subbáze v bodě x a $\chi(x, X) \leq |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$. □

Tvrzení 4.4. *Nechť X je nekonečný $\leq\psi^\circ(X)$-kompaktní regulární prostor, pak $w(X) \leq |X|$. Speciálně spočetný T_2 kompakt má spočetnou váhu, a tedy je $\mathcal{C}$-generovaný pro všechna schémata $\mathcal{C}$ uvažovaná ve větě 3.50.*

Důkaz. Platí $w(X) \leq \chi(X) \cdot |X| = \psi^\circ(X) \cdot |X| \leq |X|^2 = |X|$. První rovnost plyne z předchozího tvrzení, druhá nerovnost plyne z pozorování 3.22. □

Lemma 4.5 ([ATW, Lemma 2.3])**.** *Nechť $\{F_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ je klesající posloupnost neprázdných uzavřených množin v prostoru X. Pak existuje diskrétní množina $D \subseteq F_0$ splňující $\overline{D} \cap F_\alpha \neq \emptyset$ pro každé $\alpha \in \kappa$.*

Důkaz. Budeme indukcí podle $\alpha \leq \kappa$ definovat body $x_\alpha \in F_0$ a diskrétní množiny $D_\alpha := \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ splňující $\overline{D_\alpha} \cap F_\beta \neq \emptyset$ pro každé $\beta < \alpha$. Máme-li množinu D_α pro nějaké $\alpha < \kappa$, definujme $\gamma_\alpha := \min\{\gamma \leq \kappa : \overline{D_\alpha} \cap F_\gamma = \emptyset\}$, kde $F_\kappa := \emptyset$. Pak buď $\gamma_\alpha = \kappa$, čili $\overline{D_\alpha} \cap F_\gamma \neq \emptyset$ pro každé $\gamma \in \kappa$ a jsme hotovi, nebo $\gamma_\alpha < \kappa$ a pokračujme v indukci volbou bodu $x_\alpha \in F_{\gamma_\alpha}$.

Pro každé definované D_α a $\beta < \alpha$ platí $x_\beta \in D_\alpha \cap F_{\gamma_\beta} \subseteq \overline{D_\alpha} \cap F_\beta$ a indukcí $\gamma_\alpha \geq \alpha$. Tedy konstrukce se zastaví nejpozději po κ krocích. Dále všechny definované množiny D_α jsou diskrétní. Totiž pro $\alpha < \kappa$ je bod x_α oddělen od všech předchozích množinou $\overline{D_\alpha}$ a od všech následujících množinou $F_{\gamma_{\alpha+1}}$. □

Tvrzení 4.6. *Pro každý kardinál κ je prostor X $\leq\kappa$-kompaktní, právě když $\overline{D}$ je $\leq\kappa$-kompaktní pro každou diskrétní množinu $D \subseteq X$.*

Důkaz. Implikace zleva doprava platí, protože $\leq\kappa$-kompaktnost je dědičná na uzavřené podprostory. Pro opačnou implikaci uvažme $\langle F_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ klesající posloupnost uzavřených množin v X s $\lambda \leq \kappa$ a $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \lambda\} = \emptyset$. Pro spor předpokládejme, že jsou všechny neprázdné. Potom dle předchozího lemmatu existuje diskrétní množina D splňující $\overline{D} \cap F_\alpha \neq \emptyset$ pro každé $\alpha \in \lambda$, tedy $\langle \overline{D} \cap F_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ je klesající posloupnost uzavřených množin v $\leq\kappa$-kompaktním prostoru $\overline{D}$ s prázdným průnikem. Z definice kompaktnosti existuje $\alpha \in \lambda$: $\overline{D} \cap F_\alpha = \emptyset$, což je spor. □

Poznámka 4.7. Předchozí tvrzení pro kompaktní případ dokázal poprvé Tkachuk v článku [Tk].

Tvrzení 4.8 (první část též [DTTW, Proposition 4.1]). *Každý Hausdorffův kompakt X je slabě diskrétně generovaný a $t(X) \leq s(X)$.*

Důkaz. Uvažme diskrétně uzavřenou množinu $A \subseteq X$. Pro každou diskrétní množinu $D \subseteq A$ máme $\overline{D} \subseteq A$ a $\overline{D}$ je kompaktní. Z předchozího tvrzení máme, že A je kompaktní, a díky tomu, že X je Hausdorffův, je množina A uzavřená. Odhad $t(X) \leq s(X)$ plyne z pozorování 3.33. □

Poznámka 4.9. Existuje Hausdorffův kompaktní prostor, který není diskrétně generovaný. Viz příklad 5.12.

Tvrzení 4.10 (též [DTTW, Theorem 4.2]). *Každý Hausdorffův kompakt spočetné těsnoty je silně diskrétně generovaný.*

Důkaz. Hausdorffův kompaktní prostor je regulární, můžeme tedy použít důsledek 3.38. □

Následující tvrzení zobecňuje [Be, Proposition 2] či [Do, Proposition 2.1].

Tvrzení 4.11. *Nechť X je regulární $\leq\kappa$-kompaktní prostor. Pak pro každé $\lambda \leq \kappa$ platí $\mathcal{G}_\lambda^{\mathrm{Wh}} \leq \mathcal{G}_\lambda^{\mathrm{Seqs}}$ na X.*

Důkaz. Uvažme $x \in \mathcal{G}_\lambda^{\mathrm{Wh}}(A, X)$ pro nějakou množinu $A \subseteq X$. Tedy existuje $B \subseteq A$ s $|B| \leq \lambda$ a $x \in \mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}(B, X)$ a k ní skorouzavřená podmnožina $F \subseteq B$ s $\overline{F} \setminus F = \{x\}$ a $|F| \leq \lambda$. Uvažme zobecněnou pseudobázi $\{U_\alpha : \alpha \in \mu\}$ v bodě x prostoru $\overline{F}$ s minimálním μ. Jistě $\mu \leq \lambda$ (protože $\psi^\circ(\overline{F}) \leq |\overline{F}|$, viz pozorování 3.22). Díky regularitě můžeme předpokládat, že $\bigcap\{\overline{U_\alpha} : \alpha \in \mu\} \subseteq x^\circ$. Označíme-li $F_\alpha := \bigcap\{\overline{U_\beta} : \beta < \alpha\}$ pro $\alpha \in \mu$, získáme klesající posloupnost délky μ uzavřených množin v $\leq\mu$-kompaktním prostoru. Díky tomu existuje pro každé U okolí bodu x nějaké $\alpha \in \mu$ splňující $F_\alpha \subseteq U$, protože $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \mu\} = x^\circ \subseteq U$. Stačí zvolit $x_\alpha \in F_\alpha \setminus \{x\} \subseteq F$ pro každé $\alpha \in \mu$ a potom $\langle x_\alpha : \alpha \in \mu \rangle \to x$. Množiny $F_\alpha \setminus \{x\}$ jsou neprázdné, neboť z minimality μ máme $F_\alpha \supsetneq x^\circ$. □

Důsledek 4.12.

- *Je-li X regulární kompaktní prostor, pak platí $\mathcal{G}^{\mathrm{Wh}} \leq \mathcal{G}^{\mathrm{Seqs}}$ na X. Speciálně pokud je X Whyburnův (v bodě), pak je radiální (v bodě). A pokud je X slabě Whyburnův (v bodě), pak je pseudoradiální (v bodě).*
- *Je-li X regulární spočetně kompaktní prostor, pak platí $\mathcal{G}^{\mathrm{Wh}}_\omega \leq \mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$ na X. Speciálně pokud je X Whyburnův (v bodě) a má spočetnou těsnotu (v bodě), pak je Fréchetův (v bodě).*

Definice 4.13. Řekneme, že topologický prostor X je *preregulární*, pokud pro každé dva body $x, y \in X$, ke kterým existuje otevřená množina U splňující $|U \cap \{x, y\}| = 1$, existují i disjunktní otevřené množiny U_x, U_y splňující $x \in U_x$ a $y \in U_y$. Tj. každé dva topologicky rozlišitelné body lze oddělit disjunktními okolími.

Poznámka 4.14. Preregularita je vlastně varianta T_2 neimplikující T_0. Každý Hausdorffův a každý regulární prostor je preregulární. Dále každý kompaktní preregulární prostor už je regulární (dokáže se stejně jako pro Hausdorffův prostor, viz [En, 3.1.6, s. 124]). Preregularita je zřejmě dědičná na podprostory.

Tvrzení 4.15 (pro T_2 viz [TY, Theorem 2.2])**.** *Nechť X je preregulární spočetně kompaktní prostor, který je Whyburnův v bodě $x \in X$. Potom X je Fréchetův v bodě x. Speciálně každý preregulární spočetně kompaktní Whyburnův prostor je Fréchetův.*

Důkaz. Mějme $x \in \overline{A} \setminus A$ v prostoru X. Z předpokladu existuje skorouzavřená množina $F \subseteq A$ s $x \in \overline{F}$. Můžeme předpokládat, že množina $\{x\}$ je uzavřená. Jinak existuje $y \in \overline{\{x\}} \cap F$, z preregularity $x \in \overline{\{y\}}$ a jsme hotovi. Uvažme $\mathcal{U}$ maximální disjunktní kolekci otevřených podmnožin prostoru $\overline{F} = F \cup \{x\}$ splňujících $x \notin \overline{U}$ pro každé $U \in \mathcal{U}$.

Můžeme předpokládat, že $x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}}$. Jinak $V := \overline{F} \setminus \overline{\bigcup \mathcal{U}}$ je otevřená podmnožina prostoru $\overline{F}$ splňující $x \in V$. Jistě existuje $y \in V \setminus \{x\} \subseteq F$. Pokud $x \in \overline{\{y\}}$, jsme hotovi, pokud ne, můžeme z preregularity zvolit U_x, U_y disjunktní otevřené v $\overline{F}$ splňující $x \in U_x$, $y \in U_y$. Potom $V \cap U_y$ je neprázdná otevřená množina disjunktní se všemi $U \in \mathcal{U}$ a $x \notin \overline{V \cap U_y}$. To je spor s maximalitou systému $\mathcal{U}$.

Protože $x \in \overline{\bigcup \mathcal{U}}$, existuje díky Whyburnově vlastnosti skorouzavřená množina $H \subseteq \bigcup \mathcal{U} \subseteq F$ s $x \in \overline{H}$. Uvažme nekonečnou prostě očíslovanou podkolekci $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ splňující $H \cap U_n \neq \emptyset$ pro každé n. Taková existuje, jinak by bod x byl v uzávěru sjednocení konečně mnoha množin U, což je ve sporu s definicí $\mathcal{U}$.

Volme body $x_n \in U_n$, položme $Y_n := \overline{\{x_n\}}$ pro $n \in \omega$ a uvažme prostor $Y := \{x\} \cup \bigcup \{Y_n : n \in \omega\} \subseteq \overline{H} \subseteq X$. Prostory Y_n jsou z preregularity indiskrétní. Dále jsou Y_n obojetné podmnožiny Y, protože $Y_n \subseteq U_n$ a $x \notin \overline{U_n}$. Tedy $\bigcup \{Y_n : n \in \omega\}$ je uzavřený podprostor X, a protože předpokládáme i uzavřenost $\{x\}$, je Y uzavřený podprostor X, a tedy je spočetně kompaktní. Díky tomu každé okolí U bodu x obsahuje všechny množiny Y_n až na konečně mnoho, a tedy $\langle x_n : n \in \omega \rangle \to x$. □

Poznámka 4.16. Existuje spočetný T_3 prostor, který je Whyburnův, ale není slabě diskrétně generovaný (příklad 5.11). Tvrzení 4.8 a předchozí tvrzení tedy neplatí pro dědičně Lindelöfovy prostory.

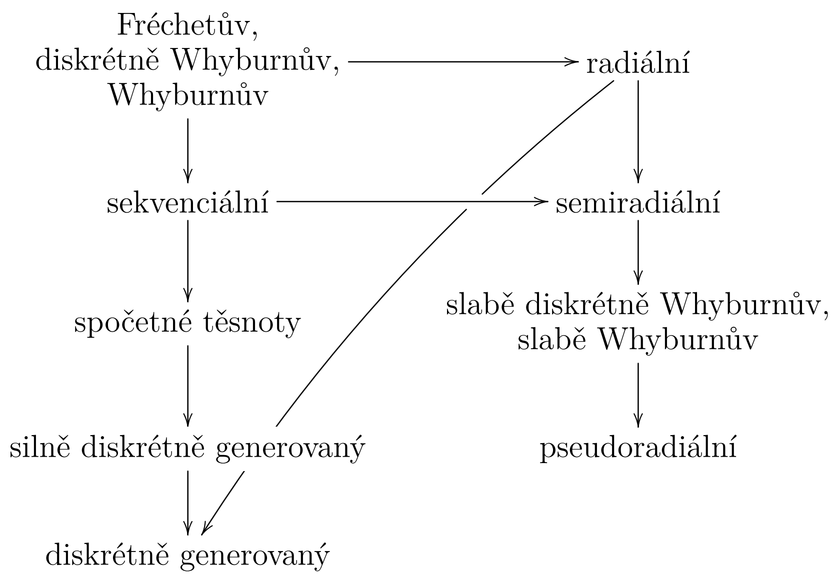
Pozorování 4.17. *Díky důsledku 2.11 o lokálním charakteru $\mathcal{C}$-generovanosti stačí předpoklady předchozích tvrzení uvažovat pouze lokálně. Tedy platí následující tvrzení.*

- *Hausdorffovy lokálně kompaktní prostory jsou slabě diskrétně generované.*
- *Hausdorffovy lokálně kompaktní prostory spočetné těsnoty jsou silně diskrétně generované.*
- *Preregulární lokálně kompaktní slabě Whyburnovy prostory jsou pseudoradiální.*
- *Preregulární lokálně spočetně kompaktní Whyburnovy prostory jsou Fréchetovy.*

Důkaz. Popíšeme pouze důkaz předposledního bodu, kde je třeba vyjasnit přenesení slabé Whyburnovy vlastnosti na uvažované okolí. Zbytek argumentace probíhá ve všech bodech analogicky.

Máme-li bod x uvažovaného prostoru X, existuje jeho kompaktní okolí. Toto okolí nemusí být uzavřené, nicméně z regularity pod ním existuje uzavřené kompaktní okolí. Díky jeho uzavřenosti na něj můžeme přenést slabou Whyburnovu vlastnost z X, a aplikovat na něj příslušné tvrzení dávající Fréchetovu vlastnost tohoto okolí v bodě x, kterou následně přeneseme do prostoru X pomocí důsledku 2.11. $\square$

Kapitolu zakončíme obrázkem shrnujícím vztahy mezi uvažovanými uzávěrovými schématy na Hausdorffových kompaktních prostorech. Naznačené implikace plynou z obecně platných implikací (věta 3.50) nebo z tvrzení této kapitoly.



Obrázek 3: Vztahy mezi uzávěrovými schématy na T_2 kompaktních prostorech.

5. Příklady a protipříklady

V poslední kapitole ukážeme několik konkrétnějších prostorů, tříd prostorů a konstrukcí s ohledem na vlastnosti zkoumané v minulých kapitolách. Získáme tak i několik protipříkladů pro vztahy mezi jednotlivými uzávěrovými schématy, případně jejich kombinacemi.

Příklad 5.1. Každý topologický prostor je $\mathcal{C}$-generovaný v libovolném svém izolovaném bodě pro libovolné uzávěrové schéma $\mathcal{C}$. Totiž pokud $x \in \overline{A}$ je izolovaný bod, pak $x \in A \subseteq C(A)$. Speciálně diskrétní prostory jsou $\mathcal{C}$-generované pro libovolné uzávěrové schéma $\mathcal{C}$.

Příklad 5.2. Všechny prostory, které obsahují jediný neizolovaný bod, jsou automaticky diskrétně Whyburnovy a všechna uzávěrová schémata jsou na těchto prostorech tranzitivní. Totiž je-li $x \in \overline{A} \setminus A$, pak x je onen jediný neizolovaný bod a A je (silně) diskrétní a skorouzavřená.

Příklad 5.3. Nechť X je ω s topologií kokonečných množin. Potom X je spočetný, kompaktní, spočetné váhy, T_1, ale není T_2. Konečné množiny jsou v něm uzavřené a diskrétní, zatímco nekonečné množiny jsou husté, nejsou diskrétní a jako posloupnosti konvergují ke všem bodům. X je tedy Fréchetův, ale není ani slabě diskrétně generovaný, ani slabě Whyburnův. Zvolíme-li dva různé body $x, y \in X$ a označíme-li $A := X \setminus \{x, y\}$, $B := \{y\}$, potom A je Whyburn-uzavřená, B je uzavřená, ale $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}(A \cup B) = \mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}(X \setminus \{x\}) = X$, tedy schémata $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$ nejsou aditivní na X.

Příklad 5.4 (sekvenciální vějíř)**.** Pro libovolný kardinál κ uvažme prostor $S_\kappa := \sum_{\alpha \in \kappa} (\omega + 1)/\sim$, kde $\langle \alpha, \omega \rangle \sim \langle \beta, \omega \rangle$ pro $\alpha, \beta \in \kappa$, tj. κ nezávislých konvergentních posloupností, jejichž limity slepíme do jednoho bodu.

Všechny prostory S_κ jsou Fréchetovy jakožto uzavřené kvocienty sumy Fréchetových prostorů, avšak S_κ má spočetný charakter právě pro κ konečné. Pro κ nekonečné a uvažovanou spočetnou kolekci okolí limitního bodu stačí pro každé okolí vybrat jinou výchozí posloupnost a v ní okolí ostře menší. Touto diagonalizací jsme získali otevřenou množinu ostře menší než všechny množiny v původní kolekci.

Příklad 5.5 (ordinály)**.** Všechny ordinály (se standardní topologií danou uspořádáním) jsou radiální a silně diskrétně generované, speciálně jsou dědičně slabě Whyburnovy. Ordinály $\leq \omega_1$ mají spočetný charakter, speciálně jsou Fréchetovy. Ordinály $> \omega_1$ nejsou Whyburnovy a nemají spočetnou těsnotu.

Důkaz. Vyšetříme nejprve vlastnosti koncového bodu v prostoru $(\alpha + 1)$ pro $\alpha \in \mathbf{On}$. Uvažme $A \subseteq \alpha$ s $\alpha \in \overline{A}$. Potom přímo A je transfinitní posloupnost konvergující k bodu α, tedy $(\alpha + 1)$ je radiální v koncovém bodě.

Jistě $t(\alpha, A, (\alpha + 1)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ a můžeme induktivně definovat $\{x_\beta : \beta \in \mathrm{cf}(\alpha)\}$ kofinální podmnožinu A splňující $x_\beta > \sup\{x_\gamma : \gamma < \beta\}$ pro každé $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$. Potom $\{x_\beta : \beta \in \mathrm{cf}(\alpha)\}$ je silně diskrétní podmnožina množiny A obsahující bod α ve svém uzávěru, tedy $(\alpha + 1)$ je silně diskrétně generovaný v koncovém bodě.

Je-li ordinál α spočetný, pak soubor intervalů $\{(\beta, \alpha] : \beta < \alpha\}$ je spočetná báze okolí v koncovém bodě prostoru $(\alpha + 1)$.

Prostor $(\omega_1 + 1)$ není Whyburnův v koncovém bodě. Uvažme $A := \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ izolovaný}\}$. Pak $\omega_1 \in \overline{A} \setminus \mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}(A)$. Totiž pro libovolnou $B \subseteq A$, je-li $\omega_1 \in \overline{B}$, pak B je nespočetná, a tedy existuje $\alpha \in B$, že $B \cap (\alpha + 1)$ je nekonečná. Přitom ale $(\alpha+1)$ je kompaktní a $B \cap (\alpha+1)$ je nekonečná diskrétní, tedy není uzavřená v $(\alpha + 1)$ a $|\overline{B} \setminus B| \geq 2$.

Protože $(\alpha + 1)$ je obojetný podprostor libovolného většího ordinálu, vyšetřili jsme právě všechny body všech ordinálů a všechna tvrzení jsou dokázána. $\square$

Následující obecná konstrukce některé vlastnosti výchozích prostorů zachovává, zatímco jiné naopak ničí. Její aplikací můžeme získat různé (proti)příklady.

Příklad 5.6 (bodové lepení)**.** Mějme prostor X a funkci $\mathcal{F} = \langle\langle Y_i, y_i, x_i\rangle : i \in I\rangle$, kde Y_i je topologický prostor, $y_i \in Y_i$ není izolovaný a $x_i \in X$ pro každé $i \in I$. Potom definujme $\widehat{X} := \mathrm{PointGlue}(X, \mathcal{F}) := (X \oplus \Sigma_{i\in I} Y_i)/\sim$, kde ekvivalence $\sim$ je generována ztotožněními $y_i \sim x_i$ pro $i \in I$.

Ztotožněme množiny X, Y_i s jejich obrazy v $\widehat{X}$ při kanonických zobrazeních daných naší konstrukcí. Z definice ekvivalence $\sim$ je patrné, že tato zobrazení jsou prostá. Vzhledem k těmto ztotožněním uvažme následující podprostory $\widehat{X}$. Označme $Y := \bigcup_{i\in I} Y_i$. Dále definujme množinu „styčných“ bodů $Z := \{x_i : i \in I\} = \{y_i : i \in I\}$ a „redukované“ podprostory $Y_i' := Y_i \setminus Z = Y_i \setminus \{y_i\}$ pro $i \in I$ a $Y' := Y \setminus Z = \bigcup_{i\in I} Y_i'$. Uvažme ještě zobrazení $q\colon \widehat{X} \to X$ definované předpisy $q \restriction X = \mathrm{id}_X$, $q[Y_i] = \{x_i\}$ pro $i \in I$. Potom platí následující.

(i) Topologie na $\widehat{X}$ je induktivně generovaná inkluzemi prostorů X, Y_i pro $i \in I$. Tyto inkluze jsou vnoření podprostorů. Zobrazení $q\colon \widehat{X} \to X$ je kvocientové.

(ii) Konstrukce PointGlue zachovává separační axiomy T_0, T_1, T_2 a regularitu, tj. splňují-li prostory X, Y_i daný separační axiom, pak ho splňuje i prostor $\widehat{X}$.

(iii) Mějme $A \subseteq \widehat{X}$ a $x \in \overline{A}$. Potom nastane alespoň jedna z následujících situací.

  (a) $x \in X$ a $x \in \overline{A \cap X}$, tedy uzávěrovou situaci jsme přenesli do prostoru X.
  (b) $x \in Y_i$ pro nějaké $i \in I$ a $x \in \overline{A \cap Y_i}$, tedy situaci jsme přenesli do prostoru Y_i.
  (c) $x \in Y_i$ pro nějaké $i \in I$ a $x \in \overline{A \setminus Y_i}$. Potom $x \in \overline{\{y_i\}}$ a $y_i \in \overline{A \setminus Y_i}$.
  (d) $x \in X$ a $x \in \overline{A \cap Y}$. Označíme-li $J := \{i \in I : y_i \in \overline{A \cap Y_i}\}$ a $B := \{y_i : i \in J\} \subseteq Z$, potom $x \in \overline{B}$ a $B \subseteq \overline{A \cap Y}$.

(iv) Platí $t(\widehat{X}) = \sup\{t(X), t(Y_i) : i \in I\}$.

(v) Nechť $\mathcal{C}$ je uzávěrové schéma, vnoření podprostorů jsou $\mathcal{C}$-spojitá a prostory X, Y_i pro $i \in I$ jsou slabě $\mathcal{C}$-generované. Potom je i prostor $\widehat{X}$ slabě $\mathcal{C}$-generovaný. Konstrukce PointGlue tedy zachovává následující vlastnosti: sekvencialita, pseudoradialita, slabá diskrétní generovanost. Jsou-li podprostory X, Y_i uzavřené v $\widehat{X}$ (speciálně jsou-li všechny prostory T_1), pak konstrukce PointGlue zachovává i slabou diskrétně Whyburnovu vlastnost a slabou Whyburnovu vlastnost.

(vi) Konstrukce PointGlue zachovává semiradialitu.

(vii) Je-li množina $D \subseteq X$ diskrétní, resp. silně diskrétní v X, pak je taková i v $\widehat{X}$. Mějme množinu $J \subseteq I$ a pro $i \in J$ (silně) diskrétní množinu D_i v prostoru Y_i. Pokud $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j \in J$ a množina $\{x_i : i \in J\}$ je (silně) diskrétní v X, pak $\bigcup_{i \in J} D_i$ je (silně) diskrétní množina v $\widehat{X}$. Vnoření podprostorů X, Y_i jsou tedy $\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$-spojitá a $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$-spojitá.

(viii) Konstrukce PointGlue zachovává diskrétní generovanost a silnou diskrétní generovanost.

(ix) Platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}(Y', \widehat{X}) \setminus Y' \subseteq Z$. Tedy pokud množina Z není uzavřená v X, pak prostor $\widehat{X}$ není Whyburnův.

(x) Nechť prostory X, Y_i pro $i \in I$ jsou T_1. Potom platí $\mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}(Y', \widehat{X}) \setminus Y' \subseteq Z$. Tedy pokud navíc Z není uzavřená v X, pak prostor $\widehat{X}$ není radiální.

(xi) Mějme nahoru usměrněnou kolekci $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(I)$, která pokrývá I, a označme $D_J := X \cup \bigcup\{Y_i : i \in J\}$. Potom prostor $\widehat{X}$ je kolimitou (které se v tomto případě říká také direktní limita) diagramu $\langle D_J : J \in \mathcal{J} \rangle$ s vazbovými zobrazeními danými inkluzemi podprostorů.

Důkaz.

(i) Induktivní generovaní snadno plyne z definice. Je-li U otevřená podmnožina prostoru X, pak $V := U \cup \bigcup\{Y_i : x_i \in U, i \in I\}$ je otevřená podmnožina $\widehat{X}$ splňující $V \cap X = U$. Tedy X je podprostor $\widehat{X}$. Je-li U otevřená podmnožina prostoru Y_i, potom je i otevřená v $\widehat{X}$, pokud neobsahuje bod y_i. V opačném případě je $V := U \cup X \cup \bigcup\{Y_j : j \neq i\}$ otevřená podmnožina $\widehat{X}$ splňující $V \cap Y_i = U$. Tedy Y_i je podprostor $\widehat{X}$. Zobrazení q je kvocientové, protože je na X a každá množina $U \subseteq X$ je otevřená, právě když množiny $q^{-1}[U] \cap X = U$, $q^{-1}[U] \cap Y_i \in \{\emptyset, Y_i\}$ jsou otevřené.

(ii) Pro U otevřenou podmnožinu X označme $\widehat{U} := U \cup \bigcup\{Y_i : y_i \in U, i \in I\}$ a podobně pro U otevřenou podmnožinu Y_i označme $\widehat{U} := U \cup X \cup \bigcup\{Y_j : j \neq i\}$. Mějme dva různé body $x, y \in \widehat{X}$. Pokud $x, y \in X$, pak je oddělme v X a získané množiny U_x případně U_y rozšiřme na $\widehat{U_x}$ případně $\widehat{U_y}$. Potom tyto rozšířené množiny realizují oddělení v $\widehat{X}$. Pokud $y \in Y_i'$, potom ho oddělme v Y_i od bodu y_i a rozšíření tohoto oddělení bude oddělovat y a x v $\widehat{X}$.

Pro regularitu uvažme F uzavřenou podmnožinu $\widehat{X}$ a bod $x \in \widehat{X} \setminus F$. Definujme $J := \{i \in I : y_i \notin F\}$ a pro $i \in J$ oddělme bod y_i od množiny $F \cap Y_i$ v prostoru Y_i množinami U_i, V_i (v tomto pořadí). Pokud $x \in X$, oddělme x od $F \cap X$ v X množinami U, V. Potom množiny $U \cup \bigcup\{U_i : y_i \in U, i \in I\}$, $V \cup \bigcup\{Y_i : y_i \in V, i \in I\} \cup \bigcup\{V_i : i \in J\}$ oddělují x a F v $\widehat{X}$. Pokud $x \in Y_i'$, oddělme x od $F \cap Y_i$ množinami G_i, W_i. Pokud $y_i \in F$, realizují množiny G_i, $\widehat{W_i}$ oddělení v $\widehat{X}$. Pokud naopak $y_i \notin F$, oddělme podle předchozího y_i od F v $\widehat{X}$ množinami G, W. Potom $G \cup G_i$, $(W \setminus Y_i) \cup (W \cap Y_i \cap W_i)$ realizují hledané oddělení v $\widehat{X}$.

(iii) Protože $\widehat{X} = X \cup \bigcup_{i \in I} Y_i$ a topologický uzávěr je aditivní, nastane alespoň jedna možnost. Buďme v situaci (c). Kdyby $x \notin \overline{\{y_i\}}$, pak by existovalo $U \subseteq Y_i'$ okolí x v $\widehat{X}$. Toto okolí by bylo disjunktní s $A \setminus Y_i$, což je spor. Kdyby $y_i \notin \overline{A \setminus Y_i}$, pak by existovalo V okolí y_i v $\widehat{X}$ disjunktní s $A \setminus Y_i$. Potom $V \cup Y_i$ by bylo okolí x disjunktní s $A \setminus Y_i$, což je rovněž spor.

Buďme v situaci (d). Zřejmě $B \subseteq \overline{A \cap Y}$. Zvolíme-li U_i okolí bodu y_i v Y_i s $U_i \cap A = \emptyset$ pro $i \in I \setminus J$, pak $U := X \cup (\bigcup_{i \in J} Y_i) \cup (\bigcup_{i \notin J} U_i)$ je okolí x v $\widehat{X}$ disjunktní s $A \cap \bigcup_{i \notin J} Y_i$, a tedy $x \in \overline{A \cap \bigcup_{i \in J} Y_i}$. Máme $x = q(x) \in q[\overline{A \cap \bigcup_{i \in J} Y_i}] \subseteq \overline{q[A \cap \bigcup_{i \in J} Y_i]} = \overline{B}$.

(iv) Jistě $t(\widehat{X}) \geq t(X), t(Y_i)$, neboť X a Y_i jsou podprostory $\widehat{X}$ (viz tvrzení 3.6). Pro opačný odhad mějme $A \subseteq \widehat{X}$ a $x \in \overline{A}$ a uvažme jednotlivé případy z bodu (iii). V situaci (a) máme $t(x, A, \widehat{X}) \leq t(x, A \cap X, X) \leq t(X)$. V situaci (b) máme $t(x, A, \widehat{X}) \leq t(x, A \cap Y_i, Y_i) \leq t(Y_i)$. V situaci (c) máme $t(x, A, \widehat{X}) \leq t(y_i, A \setminus Y_i, \widehat{X})$, čímž jsme situaci převedli na ostatní případy. Nakonec v situaci (d) existuje množina $B \subseteq Z$ s $x \in \overline{B}$ a pro každé $z \in B$ existuje $i_z \in I$ s $z \in \overline{A \cap Y_{i_z}}$. Potom $t(x, A, \widehat{X}) \leq t(x, B, X) \cdot \sup\{t(Y_{i_z}) : z \in B\} \leq \sup\{t(X), t(Y_i) : i \in I\}$.

(v) Plyne ihned z důsledku 2.23 a z faktu, že vnoření podprostorů jsou $\mathcal{C}$-spojitá pro $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}, \mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}, \mathcal{C}^{\mathrm{D}}\}$ a že vnoření uzavřených podprostorů jsou $\mathcal{C}$-spojitá pro $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}, \mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}\}$.

(vi) Nechť množina $M \subseteq \widehat{X}$ není κ-uzavřená. Stačí ukázat, že $M \cap X$ či $M \cap Y_i$ pro nějaké $i \in I$ není κ-uzavřená v X, resp. Y_i. Potom lze totiž z dané množiny vykonvergovat posloupností délky $\leq \kappa$ už v podprostoru a stejná posloupnost funguje i v $\widehat{X}$.

Mějme tedy množinu $A \in [M]^{\leq \kappa}$ a bod $x \in \overline{A} \setminus M$ a uvažme jednotlivé možnosti z bodu (iii). V případech (a), (b) se situace rovnou přesouvá do X, resp. Y_i a jsme hotovi. V případě (c) buď $y_i \in M$ a $M \cap Y_i$ není ani 1-uzavřená v Y_i, nebo $y_i \in \overline{A} \setminus M$ a situaci jsme převedli na ostatní případy. V případě (d) pro odpovídající množinu B platí buď $B \subseteq M$ a jsme hotovi, protože $x \in \overline{B} \setminus M$ a $|B| \leq |A| \leq \kappa$, nebo existuje $z \in B \setminus M$ a $z \in \overline{A \cap Y_i} \setminus M$ pro nějaké $i \in I$.

(vii) Pokud kolekce $\langle U_d : d \in D \rangle$ svědčí o (silné) diskrétnosti množiny D v X, pak kolekce $\langle U_d \cup \bigcup \{Y_i : x_i \in U_d, i \in I\} : d \in D \rangle$ svědčí o (silné) diskrétnosti D v $\widehat{X}$.

Nechť kolekce $\langle V_i : i \in J \rangle$ svědčí o (silné) diskrétnosti množiny $\{x_i : i \in J\}$ v X a pro $i \in J$ svědčí kolekce $\langle U_{i,d} : d \in D_i \rangle$ o (silné) diskrétnosti D_i v Y_i. Pro $d \in \bigcup_{i \in J} D_i$ označme $i(d)$ jediné $i \in J$ splňující $d \in D_i$. Pro $d \in \bigcup_{i \in J} D_i$ budeme definovat množiny W_d. Pokud $x_{i(d)} \in U_{i(d),d}$, pak položme $W_d := U_{i(d),d} \cup V_{i(d)} \cup \bigcup \{Y_i : x_i \in V_{i(d)}, i \in I\}$, jinak položme $W_d := U_{i(d),d}$. Potom kolekce $\langle W_d : d \in \bigcup_{i \in J} D_i \rangle$ svědčí o (silné) diskrétnosti množiny $\bigcup_{i \in J} D_i$ v $\widehat{X}$.

$\mathcal{C}^{\mathrm{D}}$-spojitost a $\mathcal{C}^{\mathrm{SD}}$-spojitost vnoření podprostorů X, Y_i plyne z předchozího, v případě prostoru Y_i uvažme $J = \{i\}$ a jedinou (silně) diskrétní množinu v prostoru Y_i.

(viii) Mějme $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}, \mathcal{C}^{\mathrm{SD}}\}$, $A \subseteq \widehat{X}$ a $x \in \overline{A}$. Uvažme jednotlivé případy z bodu (iii). V případech (a), (b) situaci přeneseme do prostoru X, resp. Y_i a z jejich $\mathcal{C}$-generovanosti a $\mathcal{C}$-spojitosti jejich vnoření máme ihned $x \in C_{\widehat{X}}(A)$. V případě (c) máme $y_i \in C_{\widehat{X}}(A)$ a $x \in \overline{\{y_i\}}$. Z definice $\mathcal{C}$ potom $x \in C_{\widehat{X}}(A)$. V případě (d) máme množinu $B \subseteq Z$ splňující $x \in C_X(B)$ a pro každé $z \in B$ existuje $i(z) \in I$ s $z \in C_{Y_{i(z)}}(A \cap Y_{i(z)})$. Existuje tedy $D \subseteq B$ (silně) diskrétní s $x \in \overline{D}$ a pro každé $z \in D$ existuje $D_{i(z)} \subseteq A \cap Y_{i(z)}$ (silně) diskrétní v Y_i s $z \in \overline{D_{i(z)}}$. Máme $x \in \overline{\bigcup_{z \in D} D_{i(z)}}$ a množina $\bigcup_{z \in D} D_{i(z)} \subseteq A$ je dle předchozího bodu (silně) diskrétní v $\widehat{X}$.

(ix) Uvažme množinu $F \subseteq Y'$ skorouzavřenou v $\widehat{X}$ s $\overline{F} \setminus F = \{x\}$ a $x \in X$. Jsme v situaci (d) z bodu (iii), existuje tedy $B \subseteq Z$ s $x \in \overline{B}$ a $B \subseteq \overline{F}$. Potom $B = \{x\}$, protože $B \subseteq \overline{F} \setminus F$ a $B \neq \emptyset$, tedy $x \in Z$. Zbytek plyne z toho, že $\overline{Y'} \supseteq Z$, protože žádný bod y_i není dle předpokladu izolovaný v Y_i.

(x) Nechť $\langle y_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle \to x$ je posloupnost v Y', κ je regulární a pro spor $x \in X \setminus Z$. Potom posloupnost $\langle q(y_\alpha) : \alpha \in \kappa \rangle$ rovněž konverguje k x a dle lemmatu 3.16 a předpokladů existuje prostá podposloupnost $\langle q(y_{\alpha_\beta}) : \beta \in \kappa \rangle$. Pro každé $i \in I$ tedy existuje nejvýše jeden prvek $y_{\alpha_\beta} \in Y'_i$. Pokud pro dané i existuje, můžeme díky T_1 zvolit U_i okolí $q(y_{\alpha_\beta}) = y_i$ v Y_i neobsahující y_{α_β}, v opačném případě položme $U_i := Y_i$. Tím dostáváme $U := X \cup \bigcup\{U_i : i \in I\}$ okolí x disjunktní s naší podposloupností, což je spor.

(xi) Jednoznačnost hledaného zobrazení z definice kolimity plyne z toho, že $\mathcal{J}$ pokrývá I, existence plyne z usměrněnosti $\mathcal{J}$ a spojitost plyne z toho, že topologie na $\widehat{X}$ je induktivně generovaná vnořeními podprostorů X, Y_i pro $i \in I$. □

Příklad 5.7 (Arensův prostor)**.** Pro regulární ordinál κ a topologický prostor X označme $\mathrm{Ar}_\kappa(X) := \mathrm{PointGlue}(X, \langle\langle(\kappa+1), \kappa, x\rangle : x \in I_X\rangle)$, přičemž I_X značí množinu všech izolovaných bodů prostoru X a na $(\kappa+1)$ uvažujeme zjemnění topologie ordinálu, kde všechny body $\alpha < \kappa$ jsou izolované. Konstrukce $\mathrm{Ar}_\kappa(X)$ tedy ke každému izolovanému bodu prostoru X přilepí jinou diskrétní posloupnost délky κ, která k němu konverguje.

Označme $X := \mathrm{Ar}_\omega(\omega+1)$. Získáme *Arensův prostor*, který je tvořen ω konvergentními posloupnostmi, jejichž limity opět tvoří konvergentní posloupnost. Jiná konstrukce tohoto prostoru je k nalezení v [En, 1.6.19, s. 54]. Z rozboru obecné konstrukce bodového lepení v předchozím příkladu ihned dostáváme, že X je spočetný Hausdorffův prostor, který je sekvenciální, ale není radiální ani Whyburnův.

Označíme-li $Y := (\omega \times \omega) \cup \{\omega\} \subseteq X$, tj. podprostor Arensova prostoru tvořený jeho izolovanými body a finální limitou, dostaneme prostor, který můžeme nazývat *redukovaný Arensův*. Y je spočetný Hausdorffův prostor, který je dle příkladu 5.2 silně diskrétně generovaný a diskrétně Whyburnův a který dle předchozího příkladu není pseudoradiální, protože limity posloupností v $(\omega \times \omega)$ jsou právě styčné body a tyto jsme při konstrukci Y z Arensova prostoru odstranili.

Označíme-li $F_n := (\omega+1) \cup \{\langle k, l\rangle : k \leq n,\, l \in \omega\} \subseteq X$, což je výchozí konvergentní posloupnost a prvních n přilepených posloupností, potom dle předchozího příkladu je X direktní limitou posloupnosti inkluzí podprostorů F_n, $n \in \omega$. Přitom prostory F_n jsou zřejmě spočetné, kompaktní, uzavřené v X, a tedy Fréchetovy (4.4), a prostor X není Fréchetův.

Induktivně definujme prostory Z_n, $n \in \omega$. Nechť Z_0 je jednobodový prostor a $Z_{n+1} := \mathrm{Ar}_\omega(Z_n)$. Potom Z_1 je konvergentní posloupnost a Z_2 je Arensův prostor. Aplikace Fréchetova uzávěru $\mathcal{C}^{\mathrm{Seq}}$ na množinu izolovaných bodů prostoru Z_n se zastaví právě po n krocích, protože každou aplikací přibudou pouze styčné body příslušného lepení, jak plyne z rozboru v předchozím příkladu.

Pro κ regulární označme $X_\kappa := \mathrm{Ar}_\kappa(\kappa + 1)$ a $Y_\kappa := (\kappa \times \kappa) \cup \{\kappa\} \subseteq X$, kde na $(\kappa + 1)$ uvažujeme opět zjemnění topologie ordinálu, kde každý bod $\alpha < \kappa$ je izolovaný. Dostáváme prostory analogické Arensovu a redukovanému Arensovu prostoru. Protože náš prostor $(\kappa + 1)$ je radiální, silně diskrétně generovaný, diskrétně Whyburnův a má těsnotu κ, dostáváme ihned, že X_κ je Haudorffův semiradiální, silně diskrétně generovaný prostor, který není radiální ani Whyburnův a má těsnotu κ. A prostor Y_κ je silně diskrétně generovaný, diskrétně Whyburnův, ale není pseudoradiální a má těsnotu κ.

Příklad 5.8 (adjunkce bodu)**.** Pro nespočetný topologický prostor X definujeme prostor $\widehat{X}$. Nosičem je množina $X \cup \{p\}$, kde p je nově přidaný bod neležící v X. Topologie je daná následovně: X je otevřený podprostor a otevřená okolí bodu p jsou právě doplňky spočetných uzavřených podmnožin prostoru X. Aplikací této konstrukce na vhodný prostor X lze získat pseudoradiální prostor spočetné těsnoty, který není sekvenciální (viz [JMSW]).

(i) Díky nespočetnosti X je $p \in \overline{X}$. Dále pro $A \subseteq X$ platí, že $p \in \overline{A}$, právě když $\overline{A}$ je nespočetná.

(ii) Prostor $\widehat{X}$ je T_0, resp. T_1, právě když je takový prostor X. Pokud je X T_2, pak je $\widehat{X}$ sekvenciálně Hausdorffův (tj. posloupnosti mají jednoznačné limity). Prostor $\widehat{X}$ je T_2, právě když je X T_2 a každý bod prostoru X má spočetné uzavřené okolí. Speciálně je $\widehat{X}$ T_2, pokud je X T_3 a lokálně spočetný (tj. každý bod má spočetné okolí).

(iii) Pokud je X T_2 a sekvenciální, pak je X sekvenciálně uzavřená podmnožina prostoru $\widehat{X}$. Pokud je X T_2, pak $\widehat{X}$ není sekvenciální.

(iv) Prostor $\widehat{X}$ je pseudoradiální, právě když je pseudoradiální prostor X.

(v) Prostor $\widehat{X}$ má spočetnou těsnotu, právě když X má spočetnou těsnotu a platí v něm, že každá nespočetná množina obsahuje spočetnou množinu s nespočetným uzávěrem.

(vi) Uvážíme-li prostor reálných čísel se standardní topologií $\mathbb{R}$, dostáváme, že $\widehat{\mathbb{R}}$ je pseudoradiální prostor spočetné těsnoty, který není sekvenciální. Navíc je sekvenciálně Hausdorffův, ale není Hausdorffův.

(vii) Existuje nespočetný prostor X, který je T_3, lokálně spočetný, má spočetný charakter a každá nespočetná množina obsahuje spočetnou podmnožinu s nespočetným uzávěrem. Potom $\widehat{X}$ je příklad Hausdorffova pseudoradiálního prostoru spočetné těsnoty, který není sekvenciální.

Důkaz.

(i) Plyne ihned z definice.

(ii) Zřejmě je-li $\widehat{X}$ T_0, T_1 či T_2, pak je takový i X. Naopak, z definice $\widehat{X}$ je množina $\{p\}$ uzavřená, tedy je-li prostor X T_0 či T_1, je takový i $\widehat{X}$.

Je-li prostor X T_2, pak $\widehat{X}$ je sekvenciálně Hausdorffův. Protože $\widehat{X}$ je T_1, stačí uvažovat posloupnosti v X. Mějme takovou posloupnost s limitou v X. Protože je X T_2, nemá tato posloupnost žádnou jinou limitu v X, a protože je tato posloupnost spolu s limitou kompaktní množina, je uzavřená v X a díky spočetnosti i v $\widehat{X}$. Naše posloupnost tedy nekonverguje ani k bodu p.

Je-li prostor X T_2 a každý bod v něm má spočetné uzavřené okolí, pak lze bod p oddělit disjunktními okolími od libovolného bodu z X. Dvojice bodů z X lze oddělit v $\widehat{X}$ díky tomu, že X je otevřený T_2 podprostor. Celkem $\widehat{X}$ je T_2.

(iii) První část: Pro spor předpokládejme, že $\langle x_n : n \in \omega\rangle \to p$ v $\widehat{X}$ a $A := \{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$. Potom z definice $\widehat{X}$ nemůže být A uzavřená a z předpokladu sekvenciality X existuje posloupnost $\langle y_n : n \in \omega\rangle$ v A konvergující k nějakému bodu $x \in X \setminus A$. Protože X je T_2, je množina $\{y_n : n \in \omega\}$ nekonečná, a tedy $\{x_n : n \geq n_0\} \cap \{y_n : n \geq n_0\} \neq \emptyset$ pro každé $n_0 \in \omega$. Existuje tedy společná podposloupnost obou našich posloupností. Tato konverguje k oběma bodům p, x, což je ve sporu s tím, že $\widehat{X}$ je sekvenciálně Hausdorffův.

Druhá část: Pro spor předpokládejme, že $\widehat{X}$ je sekvenciální. Potom je sekvenciální i X jakožto jeho otevřený podprostor (viz pozorování 3.11). Dle první části je X sekvenciálně uzavřená množina, která ale není uzavřená, což je spor.

(iv) Je-li pseudoradiální prostor $\widehat{X}$, pak je pseudoradiální i X jakožto jeho otevřený podprostor (viz pozorování 3.11). Předpokládejme naopak, že X je pseudoradiální, a mějme libovolnou radiálně uzavřenou množinu $A \subseteq \widehat{X}$. Potom $A \cap X$ je rovněž radiálně uzavřená (lemma 2.3), a tedy díky předpokladu uzavřená v X. Takže v $\widehat{X}$ platí $\overline{A} \setminus A \subseteq \{p\}$. Kdyby $p \in \overline{A} \setminus A$, pak $A \cap X$ musí být nespočetná a jako posloupnost konverguje k p. Totiž každé okolí bodu p je kospočetné, a tedy obsahuje koncový úsek naší nespočetné posloupnosti. Máme $p \in \mathcal{C}^{\mathrm{Rad}}(A) = A$, což je spor. Množina A je tedy uzavřená.

(v) Dle tvrzení 3.6 platí $t(x, X) = t(x, \widehat{X})$ pro každé $x \in X$. Stačí tedy s pomocí prvního bodu nahlédnout, že podmínka $t(p, \widehat{X}) \leq \omega$ je ekvivalentní podmínce v našem tvrzení.

(vi) $\mathbb{R}$ je T_2 a má spočetnou váhu, dle předchozích bodů je tedy $\widehat{\mathbb{R}}$ pseudoradiální spočetné těsnoty, není sekvenciální a je sekvenciálně Hausdorffův. $\widehat{\mathbb{R}}$ ale není T_2, protože $\mathbb{R}$ není lokálně spočetný.

(vii) Prostor X mohutnosti $\mathfrak{c}$ získáme jako jistý podprostor Cantorova prostoru 2^ω, na kterém pomocí induktivní konstrukce délky $\mathfrak{c}$ zjemníme topologii tak, aby byla výsledná topologie lokálně spočetná a lokálně kompaktní a aby byl zachován spočetný charakter a vlastnost „každá nespočetná množina obsahuje spočetnou množinu s nespočetným uzávěrem“. Celá konstrukce je popsaná v [ST]. □

Příklad 5.9 (zjemnění $\beta\omega$)**.** Připomeňme, že na $\beta\omega$ lze pohlížet jako na prostor všech ultrafiltrů na ω s bází tvořenou otevřenými množinami $U_A := \{p \in \beta\omega : A \in p\}$, kde $A \subseteq \omega$. Snadno nahlédneme, že pro $A \subseteq \omega$ a ultrafiltr p platí $p \in \overline{A}$, právě když $A \in p$, a tedy $\overline{A} = U_A$. Dále pro každou nekonečnou $A \subseteq \omega$ je $\overline{A}$ homeomorfní celému $\beta\omega$ (viz [En, 3.6.8, s. 174]). Platí tedy $|\overline{A}| = |U_A| = |\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$ (pro poslední rovnost viz [En, 3.6.12, s. 175]).

Označme nyní X množinu všech ultrafiltrů na ω, ztotožněme ω s hlavními ultrafiltry a uvažme na X následující topologii. Všechny prvky ω jsou izolované, lokální báze ve volném ultrafiltru p je tvořena otevřenými množinami $\{p\} \cup A$ pro $A \in p$. To znamená, že množina $U \subseteq X$ je otevřená, právě když $p \in U \implies U \cap \omega \in p$. X je tedy zjemnění prostoru $\beta\omega$, při kterém je množina $\beta\omega \setminus \omega$ diskrétní. Platí následující vlastnosti.

- X je jakožto zjemnění $\beta\omega$ Hausdorffův.
- Pro $p \in X \setminus \omega$, $A \subseteq \omega$ je zřejmě $p \in \overline{A}$, právě když $A \in p$, tedy $\overline{A}^X = \overline{A}^{\beta\omega}$.
- Pro $x \in \overline{A}$, $A \subseteq X$ platí $x \in \overline{A \cap \omega}$. Tedy X má spočetnou těsnotu a je silně diskrétně generovaný.
- ω je radiálně uzavřená podmnožina X, tedy prostor X není pseudoradiální. Jistě se můžeme omezit na prosté spočetné posloupnosti. Předpokladádejme pro spor, že $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ je prostá posloupnost v ω kovergující k volnému ultrafiltru p. Uvažme $A \in p$, potom A jistě obsahuje nějaký koncový úsek naší posloupnosti a díky její prostotě můžeme A rozložit na A_0, A_1 tak, že $A_i \cap \{x_n : n \in \omega\}$ je nekonečná pro obě $i \in \{0, 1\}$. Tedy ani A_0, ani A_1 neobsahuje koncový úsek naší posloupnosti, což je spor, protože jedna z nich je obsažena v ultrafiltru p.
- ω je Whyburn-uzavřená podmnožina X, tedy prostor X není slabě Whyburnův. Totiž každá konečná podmnožina ω je uzavřená, zatímco každá nekonečná podmnožina ω obsahuje ve svém uzávěru $2^{\mathfrak{c}}$ různých ultrafiltrů, protože tento uzávěr splývá s uzávěrem v $\beta\omega$.
- Mějme $p \in X \setminus \omega$. Označíme-li $A := \omega$, $B := X \setminus (\omega \cup \{p\})$, potom dle předchozího $p \notin \mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}(A) \cup \overline{B}$, ale $p \in \mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}(A \cup B) = \mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}(X \setminus \{p\})$. Schémata $\mathcal{C}^{\mathrm{Wh}}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{DWh}}$ tedy nejsou aditivní na prostoru X.

Příklad 5.10. Uvažme prostor X z předchozího příkladu a zvolme volný ultrafiltr $p \in X$. Nyní pozměníme okolí bodu p tak, že dostaneme jiné zjemnění topologie $\beta\omega$, které realizuje příklad Hausdorffova prostoru, který je diskrétně generovaný, ale ne silně diskrétně generovaný.

Označme $Y := X \setminus \{p\}$ podprostor X. Definujme nový prostor Z s nosičem $Y \cup \{p\}$, přičemž Y bude otevřený podprostor Z a okolí p budou dána následující subbází. Tu tvoří jednak množiny tvaru $\{p\} \cup U$, kde U je otevřená podmnožina Y se spočetným doplňkem, a jednak množiny $U_A = \{q \in X : A \in q\}$ pro $A \in p$ (mějme na paměti ztotožnění ω a hlavních ultrafiltrů na ω). Platí následující vlastnosti.

- Je-li U okolí p v Z z naší subbáze, pak $U \cap Y$ je otevřená podmnožina Y, tedy Y je skutečně otevřený podprostor Z. Množiny U_A pro $A \in \mathcal{P}(\omega)$ tvoří standardní bázi prostoru $\beta\omega$, topologie prostoru Z je tedy zjemnění topologie $\beta\omega$, speciálně Z je T_2.

- Prostor Z je silně diskrétně generovaný ve všech bodech $y \in Y$, protože X je silně diskrétně generovaný a Y je otevřený podprostor X i Z (používáme důsledek 2.11).
- Prostor Z je diskrétně generovaný. Z předchozího bodu stačí ověřit diskrétní generovanost v bodě p. Nechť $p \in \overline{A}$ pro $A \subseteq Y$. Potom $p \in \overline{A \cap \omega} \cup \overline{A \setminus \omega}$, přičemž množiny ω, $(Y \setminus \omega)$ jsou diskrétní.
- Platí $p \in (\overline{Y \setminus \omega}) \setminus \mathrm{cl}^{\leq\omega}(Y \setminus \omega)$, tedy $t(p, Z) > \omega$. Totiž pro každé subbázové okolí bodu p tvaru U_A platí $|U_A| = 2^{\mathfrak{c}}$ (viz předchozí příklad), tedy pro každé bázové okolí tvaru $U_A \cap U$, kde $U \cap Y$ je kospočetná a otevřená v $Y = X \setminus \{p\}$, platí $(U_A \cap U) \cap (Y \setminus \omega) \neq \emptyset$. Tím jsme ukázali $p \in \overline{Y \setminus \omega}$. Druhá část tvrzení platí, protože všechny spočetné podmnožiny $Y \setminus \omega$ jsou uzavřené v Z. To plyne ihned z definice naší topologie a z faktu, že $Y \setminus \omega$ je uzavřená diskrétní podmnožina Y.
- Prostor Z není silně diskrétně generovaný v bodě p. Na jednu stranu totiž $t(p, Z) > \omega$ z předchozího bodu, na druhou stranu je ω hustá podmnožina Y, a tedy i Z, a proto $c(Z) = d(Z) = \omega$. Závěr plyne z pozorování 3.33.

Příklad 5.11 (maximální a submaximální prostory)**.** Připomeňme definice maximálních a submaximálních prostorů:

- Řekneme, že topologický prostor je *maximální*, pokud je jeho topologie maximální (vzhledem k inkluzi) mezi topologiemi bez izolovaných bodů na dané nosné množině.
- Řekneme, že podmnožina topologického prostoru je *lokálně uzavřená*, pokud je to průnik otevřené množiny a uzavřené množiny. Řekneme, že topologický prostor je *submaximální*, pokud je každá jeho podmnožina lokálně uzavřená.

Pro potřeby tohoto příkladu definujme uzávěrová schémata $\mathcal{C}^{\mathrm{Isol}}$ a $\mathcal{C}^{\mathrm{SM}}$:

$$\mathcal{C}^{\mathrm{Isol}}(A, X) := A \cup \overline{A \cap I_X},$$
$$\mathcal{C}^{\mathrm{SM}}(A, X) := A \cup \overline{\mathrm{int}(A)},$$

kde I_X je množina izolovaných bodů prostoru X.

Potom platí následující tvrzení.

(i) Nechť A je podmnožina topologického prostoru X. Pak A je lokálně uzavřená, právě když $\overline{A} \setminus A$ je uzavřená. V tomto případě platí $\mathcal{C}^{\mathrm{SM}}(\overline{X \setminus A}) = \overline{X \setminus A}$.

(ii) Nechť X je topologický prostor, pak následující podmínky jsou ekvivalentní (též [AC, Theorem 1.2]):

(a) X je submaximální,
(b) $\overline{A} \setminus A$ je uzavřená pro každou podmnožinu $A \subseteq X$,
(c) $\overline{A} \setminus A$ je uzavřená a diskrétní pro každou podmnožinu $A \subseteq X$,
(d) X je $\mathcal{C}^{\mathrm{SM}}$-generovaný, tj. $\overline{A} \setminus A \subseteq \overline{\mathrm{int}(A)}$ pro $A \subseteq X$,
(e) každá podmnožina s prázdným vnitřkem je uzavřená,
(f) každá podmnožina s prázdným vnitřkem je uzavřená a diskrétní,
(g) každá hustá podmnožina je otevřená.

(iii) Schémata $\mathcal{C}^{\text{Isol}}$ a $\mathcal{C}^{\text{SM}}$ jsou tranzitivní. Platí $\mathcal{C}^{\text{Isol}} \leq \mathcal{C}^{\text{SM}}$ a $\mathcal{C}^{\text{Isol}} \leq \mathcal{C}^{\text{SD}} \leq \mathcal{C}^{\text{D}} \leq \overline{\mathcal{C}^{\text{D}}}$.

(iv) Na submaximálních prostorech platí $\mathcal{C}^{\text{Isol}} = \overline{\mathcal{C}^{\text{D}}}$. Speciálně silná diskrétní generovanost splývá se slabou diskrétní generovaností. Neprázdný submaximální prostor bez izolovaných bodů není slabě diskrétně generovaný.

(v) Nechť X je regulární prostor, $A \subseteq X$ a $\overline{A} \setminus A$ je diskrétní. Pak $\mathcal{C}^{\text{Wh}}(A) = \overline{A}$. Tedy každý regulární submaximální prostor je Whyburnův ([BY, Proposition 1.3]).

(vi) Dokažme některé vlastnosti maximálních prostorů.

(a) Prostor X je maximální, právě když je bez izolovaných bodů a každá $A \subseteq X$ je buď otevřená, nebo existuje $U \subseteq X$ otevřená splňující $|A \cap U| = 1$.

(b) Každý T_1 maximální prostor je submaximální.

(c) Každý maximální prostor je extremálně nesouvislý (tj. uzávěr každé otevřené množiny je obojetná množina). Tedy každý regulární maximální prostor je nuldimenzionální.

(vii) Existuje neprázdný spočetný T_3 maximální prostor ([vD, Theorem 2.2, Example 3.3]), tento je dle předchozího Whyburnův, ale není slabě diskrétně generovaný. Také je nuldimenzinální.

Důkaz.

(i) Jestliže $A = U \cap F$, kde U je otevřená a F uzavřená, pak $A \subseteq U \cap \overline{A} \subseteq U \cap F = A$, a tedy $\overline{A} \setminus A = \overline{A} \setminus (\overline{A} \cap U) = \overline{A} \setminus U$, což je uzavřená množina. Naopak rovnost $A = \overline{A} \setminus (\overline{A} \setminus A)$ svědčí za předpokladu uzavřenosti $\overline{A} \setminus A$ o lokální uzavřenosti množiny A.

Pro poslední tvrzení označme $B := X \setminus A$. Potom $\overline{B \setminus \text{int}(B)} = \overline{A} \setminus A$, což je dle předpokladu uzavřená množina. Tedy $\overline{B} = \overline{B \setminus \text{int}(B)} \cup \overline{\text{int}(B)} = B \cup \overline{\text{int}(B)}$.

(ii) (a) $\iff$ (b) $\implies$ (d) plyne ihned z předchozího bodu. (d) $\implies$ (e) plyne ihned. (e) $\implies$ (b) plyne ihned z toho, že každý přírůstek $\overline{A} \setminus A$ má prázdný vnitřek. V ekvivalencích (b) $\iff$ (c), resp. (e) $\iff$ (f) platí jeden směr triviálně a druhý dostáváme z toho, že kolekce množin tvaru $\overline{A} \setminus A$, resp. množin s prázdným vnitřkem jsou uzavřené na podmnožiny (v prvním případě pro $M \subseteq \overline{A} \setminus A$ platí $M = \overline{B} \setminus B$ pro $B := \overline{A} \setminus M$). Nakonec (e) $\iff$ (g) dostáváme přechodem k doplňku, protože množina má prázdný vnitřek, právě když je její doplněk hustý.

(iii) Pro každý prostor X a jeho podmnožinu A platí $\overline{A \cap I_X} \cap I_X = A \cap I_X$, protože operace uzávěru zřejmě nemůže přidat nové izolované body. Odtud ihned plyne tranzitivnita schématu $\mathcal{C}^{\text{Isol}}$. Dále pro každou množinu A a uzavřenou množinu F platí $\text{int}(A \cup F) \subseteq \text{int}(A) \cup F$ (např. jako duální varianta lemmatu 1.7 pro $C = \text{cl}_X$). Odtud $\text{int}(\mathcal{C}^{\text{SM}}(A)) \subseteq \overline{\text{int}(A)}$ a $\mathcal{C}^{\text{SM}}(\mathcal{C}^{\text{SM}}(A)) \subseteq \mathcal{C}^{\text{SM}}(A)$. Jistě $A \cap I_X \subseteq \text{int}(A)$, tedy $\mathcal{C}^{\text{Isol}} \leq \mathcal{C}^{\text{SM}}$. Nakonec, každá množina tvořená izolovanými body je zřejmě silně diskrétní, tedy $\mathcal{C}^{\text{Isol}} \leq \mathcal{C}^{\text{SD}}$.

(iv) Je-li D diskrétní podmnožina submaximálního prostoru X, pak ze submaximality plyne $\overline{D} = D \cup \overline{\operatorname{int}(D)}$. Přitom $\operatorname{int}(D)$ je množina izolovaných bodů, tedy $\mathcal{C}^{\mathrm{D}} \leq \mathcal{C}^{\mathrm{Isol}}$ na prostoru X. Z předchozího bodu potom dostáváme $\mathcal{C}^{\mathrm{Isol}} = \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}}$ na X. Pokud je navíc prostor $X \neq \emptyset$ bez izolovaných bodů, pak $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{D}}} = \mathcal{C}^{\mathrm{Isol}} = \mathcal{C}^{\mathrm{Id}}$ na X a přitom X není diskrétní, tedy není slabě diskrétně generovaný.

(v) Mějme $x \in \overline{A} \setminus A$. Z diskrétnosti existuje U otevřená splňující $U \cap \overline{A} \setminus A = \{x\}$. K ní z regularity existuje otevřená množina V splňující $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Protože $\overline{V} \cap \overline{A} \setminus A = \{x\}$, je množina $F := \overline{V} \cap A$ skorouzavřená. Nakonec jistě $x \in \overline{F}$, protože pro W okolí x platí $W \cap F \supseteq W \cap V \cap A \neq \emptyset$.

(vi) (a) Prostor X je maximální, právě když je bez izolovaných bodů a pro libovolnou neotevřenou množinu $A \subseteq X$ obsahuje zjemnění topologie o množinu A izolovaný bod. Báze zjemněné topologie je tvořená množinami $A \cap U$, kde U je otevřená v X. Tedy zjemněná topologie je bez izolovaných bodů, právě když $|A \cap U| \neq 1$ pro žádnou otevřenou U.

(b) Nechť X je T_1 maximální prostor, $D \subseteq X$ hustá podmnožina. Dle bodu (ii) stačí ukázat, že množina D je otevřená. Pro spor předpokládejme, že není. Potom z maximality existuje otevřená množina U a bod x splňující $D \cap U = \{x\}$. Protože X nemá žádné izolované body, můžeme zvolit $y \in U \setminus \{x\}$. Protože X je T_1, existuje otevřená množina V oddělující y od x. Potom ale $D \cap U \cap V = \emptyset$, což je spor s hustotou množiny D.

(c) Nechť U, V jsou otevřené podmnožiny maximálního prostoru X. Když $\overline{U} \cap V = \{x\}$, pak buď $x \in U$ a $U \cap V = \{x\}$, což je spor s maximalitou, nebo $x \notin U$ a $\overline{U} \cap V = U \cap V = \emptyset$, což je také spor. Množina $\overline{U}$ je tedy dle charakterizace maximality otevřená. Pro druhé tvrzení stačí nahlédnout, že regulární extremálně nesouvislý prostor už má bázi tvořenou obojetnými množinami.

(vii) Pro existenci neprázdného spočetného T_3 maximálního prostoru viz [vD, Theorem 2.2, Example 3.3]. □

Příklad 5.12 ([DTTW, Example 4.3])**.** Hausdorffův kompaktní prostor $2^{\mathfrak{c}}$ je slabě diskrétně generovaný (4.8), ale není diskrétně generovaný. Diskrétní generovanost je totiž dědičná (3.30), ale do $2^{\mathfrak{c}}$ lze vnořit van Douwenův maximální prostor X z předchozího příkladu, který není ani slabě diskrétně generovaný. Vnoření $X \hookrightarrow 2^{\mathfrak{c}}$ existuje dle [En, 6.2.16, s. 363], protože X je spočetný T_1 nuldimenzionální prostor.

Závěr

Podařilo se nám podat ucelený výklad pomocné teorie uzávěrových schémat a aplikovat její závěry na konkrétní zkoumaná uzávěrová schémata, ve kterých je uzávěr generován přidáváním jednotlivých bodů. Z hlavních výsledků obecné teorie jmenujme věty o zachovávání $\mathcal{C}$-generovanosti na podprostory (2.7, 2.8) a na induktivní konstrukce (2.20, 2.22), jejichž důsledky umožňují pohodlné vyšetření vlastností konkrétních uzávěrových schémat.

Dále jsme podrobně prozkoumali vztahy mezi jednotlivými uzávěrovými schématy v obecné situaci a na Hausdorffových prostorech. Jejich shrnutí představuje věta 3.50 a obrázek 2. Fakt, že jednotlivé třídy prostorů nesplývají, jsme doložili množstvím příkladů soustředěných v poslední kapitole.

Nakonec jsme podali několik podmínek založených na kompaktnosti, za kterých mezi uvažovanými třídami prostorů platí dodatečné inkluze a některé z těchto tříd splývají. V nejobecnější podobě příslušná tvrzení shrnuje pozorování 4.17. Jak se změní obecný obrázek za přítomnosti kompaktnosti, ukazuje obrázek 3.

Mezi možnosti rozšíření práce patří podrobný rozbor obrázku 3, tj. podobně jako v obecném případě najít protipříklady demonstrující, že žádnou implikaci nelze obrátit, či dokázat platnost dalších implikací, případně ukázat nezávislost těchto otázek na ZFC.

Jinou možností rozšíření je v obecné teorii kromě $\mathcal{C}$-generovanosti, tj. splynutí schématu $\mathcal{C}$ a topologického uzávěru cl na daném prostoru X, uvažovat i splynutí dvou schémat $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$ a zobecnit jednotlivá tvrzení v kapitole 2. S tímto jevem jsme se setkali v důkazu zachovávání semiradiality v tvrzení 3.26.

Další problematiku, kterou se práce nezabývá, představuje otázka zachovávání $\mathcal{C}$-generovanosti na topologické produkty. V této oblasti existuje pro jednotlivá schémata mnoho publikací i otevřených problémů. Nabízí se otázka, dá-li se o zachovávání na produkty říci něco pro obecné uzávěrové schéma $\mathcal{C}$.

Seznam použité literatury

[ATW] Alas, Ofelia T. – Tkachuk, Vladimir V. – Wilson, Richard G. Closures of discrete sets often reflect global properties. *Topology Proceedings*, 2000, vol. 25, s. 27–44. ISSN 0146-4124 (print), ISSN 2331-1290 (online).

[AC] Arhangel'skiĭ, Alexander. V. – Collins, Peter J. On submaximal spaces. *Topology and its Applications*, 1995, vol. 64, s. 219–241. ISSN 0166-8641.

[Be] Bella, Angelo. On spaces with the property of weak approximation by points. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1994, vol. 35, s. 357–360. ISSN 0010-2628 (print), ISSN 1213-7243 (online).

[BS] Bella, Angelo – Simon, Petr. Spaces which are generated by discrete sets. *Topology and its Applications*, 2004, vol. 135, s. 87–99. ISSN 0166-8641.

[BY] Bella, Angelo – Yashchenko, Ivan V. On AP and WAP spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1999, vol. 40, s. 531–536. ISSN 0010-2628 (print), ISSN 1213-7243 (online).

[Če] Čech, Eduard. *Topological spaces*. Revised by Zdeněk Frolík and Miroslav Katětov. Prague: Academia, 1966.

[vD] van Douwen, Eric K. Applications of maximal topologies. *Topology and its Applications*, 1993, vol. 51, s. 125–139. ISSN 0166-8641.

[Do] Dow, Alan. Compact spaces and the pseudoradial property, I. *Topology and its Applications*, 2003, vol. 129, s. 239–249. ISSN 0166-8641.

[DTTW] Dow, A. – Tkachenko, M. G. – Tkachuk, V. V. – Wilson, R. G. Topologies generated by discrete subspaces. *Glasnik Matematički*, 2002, vol. 37, no. 1, s. 189–212. ISSN 0017-095X.

[En] Engelking, Ryszard. *General topology*. Revised and completed edition. Berlin: Heldermann, 1989. Sigma series in pure mathematics; vol. 6. ISBN 3--88538-006-4.

[JMSW] Jané, I. – Meyer, P. R. – Simon, P. – Wilson, R. G. On tightness in chain-net spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1981, vol. 22, s. 809–817. ISSN 0010-2628 (print), ISSN 1213-7243 (online).

[ST] Simon, Petr – Tironi, Gino. Two examples of pseudo-radial spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1986, vol. 27, s. 155–161. ISSN 0010-2628 (print), ISSN 1213-7243 (online).

[Tk] Tkachuk, Vladimir V. Spaces that are projective with respect to classes of mappings. *Transactions of Moscow Mathematical Society*, 1988, vol. 50, s. 139–156. ISSN 0077-1554.

[TY] Tkachuk, Vladimir V. – Yashchenko, Ivan V. Almost closed sets and topologies they determine. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 2001, vol. 42, s. 395–405. ISSN 0010-2628 (print), ISSN 1213-7243 (online).