

POSUDEK OPONENTA DIPLOMOVÉ PRÁCE

Autor práce	Lucie Bejčková
Název práce	Obtíže žáků 7. a 8. ročníku při práci se zápornými čísly
Autor posudku	Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

Cíle (stanovení, splnění, reflexe splnění)

Diplomová práce si kladla za hlavní cíl „identifikovat obtíže a chyby žáků sedmých a osmých ročníků základní školy při počítání se zápornými čísly“ (s. 8). Lze konstatovat, že práce splnila tento cíl vynikajícím způsobem – autorce se podařilo identifikovat široké spektrum nesmírně zajímavých chyb žáků při práci se zápornými čísly. Na s. 44 autorka dodává další cíl: „zjistit pravděpodobnou příčinu vytváření těchto chyb a nějakým způsobem je klasifikovat“. Obávám se, že při hledání příčin chyb a jejich klasifikaci již autorka nebyla do té míry úspěšná jako při samotné identifikaci chyb.

Obsahové části (úplnost, relevance, řazení)

Práce je obsahově mírně nevyvážená. Její silnou stránkou je experimentální část a interpretace experimentálních výsledků, které jsou skutečně na vysoké úrovni. Naproti tomu teoretická část (kap. 1.1 až 1.4) se opírá o jedinou publikaci (Hejný, 2004), která má navíc podle bibliografických údajů – 4 strany (od s. 345 po s. 342). Publikace se záporným počtem stran u práce o záporných číslech sice má určité opodstatnění, ale bylo by vhodné alespoň vzpomenout další literaturu. Na druhé straně kladně hodnotím využití pojmového aparátu Hejného teorie při analýze učebnic (kap. 1.5), což svědčí o jejím zvládnutí a schopnosti používat ji jako pracovní nástroj. Kladně hodnotím také kapitulu 1.7 věnovanou mezinárodním a národním srovnávacím výzkumům. Zde autorka dokázala tvořivě využít materiál z těchto výzkumů pro svůj experiment. Takže celkově je možné konstatovat, že obsahové části práce se vhodně doplňují a tvoří promyšlený celek.

Odborná část (matematika/didaktika: náročnost, správnost, výstavba, konzistence apod.)

Po odborné stránce je práce zajímavá, konzistentní a s dobře promyšlenou výstavbou. Na s. 10 je sice chybný údaj, že „teprve v 17. a 18. století se záporná čísla dostávají do Evropy.“ K tomu nutno poznamenat, že Cardano roku 1545 objevil „první komplexní číslo“, konkrétně $\sqrt{\frac{-100}{27}}$. On ho ještě tak nechápal, ale každopádně pod druhou odmocninou dostal záporný zlomek. Proto záporná čísla nemohla pronikat do Evropy až v 17. století. Uvedená věta je však citována z literatury, takže nesnižuje odborné kvality práce.

Přínos (originalita, použitelnost apod.)

Práce přináší řadu cenných experimentálních výsledků, zasazených do vhodného teoretického rámce. Autorka ukázala schopnost originální tvůrčí výzkumné práce, jejíž výsledky jsou relevantní a prakticky využitelné.

Formální náležitosti (gramatika, styl, typografie, grafické části, odkazy a citace, celková úprava)

Po jazykové stránce je práce uspokojivá. Grafické zpracování je na vysoké úrovni. Práce je přehledná, obsahuje bohatství reprodukováného materiálu žakovských chyb.

Zdroje (reprezentativnost, relevance, použití)

Práce se opírá o dva zahraniční zdroje (v angličtině) o celkovém rozsahu 43 stran. Zbytek použité literatury je v češtině. Česká literatura je však pestrá a obsahuje i zprávy z výzkumu. Přesto si myslím, že literatura by mohla být bohatší.

Další poznámky:

Úlohy zadávané při experimentu mi připadají skvěle zvolené. Jsou technicky nenáročné, takže jasně odhalují konceptuální rovinu žákovského porozumění. U interpretace mnoha výsledků mám jiný názor než autorka. Když zde však napíšu seznam alternativních interpretací žákovských odpovědí, není to myšleno jako kritika ale spíše jako podnět pro diskuzi. Proto *nevyžaduji*, aby na ně autorka odpověděla při obhajobě.

1. s. 47: „*Jako nejzávažnější chybu bych označila špatné zakreslení číselné osy.*“

Podle mého názoru je orientace číselné osy konvence, která je důležitá až v analytické geometrii. V rámci aritmetiky bych neznalost správné konvence při orientaci číselné osy nepovažoval za chybu. Určitě bych na to žáky upozornil, aby si nezafixovali chybný koncept, ale jenom jemně.

2. s. 48: „*17 žáků označilo nulu zároveň za kladné i záporné číslo. Tito žáci dle mého názoru nepochopili správně pojem záporné ani kladné číslo.*“

Podle mého názoru žáci pravděpodobně pochopili všechno správně. Pro ně záporné číslo je asi dominantně číslo, před kterým stojí mínus, před nulou mínus nestojí, takže je kladná. Současně však když je na teploměru nula, mrzne, tedy nula patří k záporným číslům. Netvrdím, že žáci uvažovali přesně takto, ale chci upozornit na to, že to, zda nulu přiřadíme ke kladným anebo k záporným číslům je věc konvence. My máme důvody algebraického charakteru nulu neřadit ani mezi záporná ani mezi kladná čísla. Ale chci upozornit na to, že existují dobré důvody ji tam zařadit. Proto to opět není chyba ale spíše neznalost konvence.

3. s. 49: „*Dalších 10 žáků mělo problém s označením čísla 0,1 a určili ho jako záporné.*“

Tomuto vůbec nerozumím, neumím si představit situaci, ve které číslo 0,1 jako záporné číslo dává smysl. Zajímalo by mě, jestli by to autorka nějak dokázala vysvětlit, co proběhlo žákům hlavou.

4. s. 50: „*59 žáků označilo absolutní hodnotu [z mínus 3] jako záporné číslo.*“

To podle mně opět dává smysl. Jejich úlohou bylo uspořádat čísla. Ve výrazu $|-3|$ číslem je -3 . Absolutní hodnota je vlastností tohoto čísla. Problém je, že my chápeme absolutní hodnotu jako funkci, a tedy $|-3|$ je funkční hodnota funkce $|*|$ v bodě -3 , a tedy číslo 3. Není důvod předpokládat, že žáci chápou absolutní hodnotu jako funkci, tedy jako něco, co tu -3 změní. Je to spíše něco jako barva. Tím, že napíšu -3 zeleným inkoustem, to nepřestává být -3 , a tedy patří nalevo od nuly. Kolik je absolutní hodnota z -3 , je stejná otázka jako otázka, jaká je barva toho čísla. Absolutní hodnota je plus 3, ale to číslo nepřestává být pořád mínus 3. Proto to podle mne není formální uchopení pojmu absolutní hodnota. Doporučuji autorce, aby zjistila, kdy se začal používat symbol pro absolutní hodnotu.

5. s. 52: „*Všichni tito žáci s největší pravděpodobností mají chybně uchopený pojem záporného čísla (nechápu jeho velikost ve vztahu ke kladným číslům)*“

Zde bych byl také shovívavější. Když včera mrzlo -13 a dnes v noci -19 , kdy byl **větší** mráz? Stejně tak, když někdo dluží 10 000 korun a někdo jiný 20 000, kdo má **větší** dluh? V běžném jazyce máme tendenci v případě záporných čísel říkat, že -19 je větší (mráz) než -13 . Samozřejmě, toto použití naráží na rozpory, když máme porovnávat kladná a záporná čísla. Tedy přesně jako autorka píše, nechápou velikost záporného čísla ve vztahu ke kladným číslům. Ale ja si nemyslím, že mají proto chybně uchopený pojem záporného čísla, ale že ho užívají zúženě, ale plně smysluplně.

6. s. 55: „*Cyba se jeví jako závažná, protože její příčina je v neznalosti „znaménkového“ pravidla.*“

Jsem přesvědčen, že v matematice žádné „znaménkové“ pravidlo neexistuje. Když učitel mluví o „znaménkovém“ pravidlu, matematiku již opustil a zabývá se „drezúrou“ žáků.

7. s. 57: „*Předpokládala jsem, že nejčastější chybou se stane nedání přednosti násobení před odčítáním.*“ a s. 58: „*Velmi závažnou chybu pak odhaluje postup 18 žáků, kteří dali přednost odčítání před násobením.*“

Přednost násobení před odčítáním je opět konvence, která nemá matematický obsah. Neexistuje žádný matematický fakt, který by nám bránil upřednostňovat odčítání před násobením. Museli bychom samozřejmě jinak psát formule, ale to není faktická nevyhnutnost. Proto její porušení není matematická chyba (v plném smyslu slova). Samozřejmě, musíme žáky naučit i příslušné konvence, ale to, že je žáci neznají, není chyba, anebo přinejmenším je chybou jiného druhu, než když sčítají zlomky tak, že sečtou jmenovatele a pak sečtou čitatele. Prostě když zlomek označuje, co označuje, a když součet znamená, co znamená, tak je toto pravidlo pro sčítání zlomků chybné. Naproti tomu, když součet znamená, co znamená, a součin znamená, co znamená, tak není nijak rozhodnuto, co má prioritu před čím.

8. s. 59: Chybu na obr. 50 je možné interpretovat i jinak. Je možné, že žák rozumí závorce jako hranici, tedy vše, co je v závorce, patří dohromady, ale stejně tak vše, co je vně závorky. Myslím, že tato interpretace je pravděpodobnější než interpretace autorky, protože uvnitř závorky žák správně dal přednost násobení před odčítáním. Je možné, že čísla stojící před závorkou pochopil jako by byly v závorce (jakoby závorka byla něčím jako hranice, takže na jedné straně leží jeden stát, tj. aritmetický výraz, a na druhé straně hranice jiný stát, tj. aritmetický výraz, a tedy výraz před závorkou je nutné vyčíslit před tím, než se přistoupí ke kombinaci obou států).

9. s. 71. Při vší úctě k práci Bera a Hejného se domnívám, že jejich klasifikace není moc nápomocná. Domnívám se, že úkol klasifikovat chyby při práci žáků se zápornými čísly zůstává otevřený. Autorce se podařilo identifikovat několik (7 nebo 8) skutečně čistých a jasných chyb. Tyto chyby, a ne nějaká schémata převzatá z algebry, by se mohly stát zárodkem kognitivní klasifikace chyb v této oblasti.

Otázky k obhajobě:

1. Rád bych slyšel názor autorky na některý z bodů 1. až 9.

Hodnocení: Práce splňuje podmínky kladené na diplomovou práci. Práci doporučuji k obhajobě.

Datum a podpis autora posudku: 18. srpna 2015