POSUDEK DOKTORSKÉ PRÁCE “USING ALGEBRA IN GEOMETRY”

PAVEL PATÁK

Stručný obsah práce:: Práci lze rozdělit do dvou relativně nezávislých částí z nichž první pokrývá kapitoly 2 až 4 a druhá kapitoly 5 a 6. Nejprve je v kapitole 2 ukázáno následující zájimavé tvrzení: Buď dán afinní prostor $\mathbb{A}$ dimenze n. Potom lze z každé alespoň $nr + r - n$ prvkové podmnožiny C prostoru $\mathbb{A}$ vybrat r po dvou disjunktních množin takových, že průnik jejich afinních obalů je neprázdný. Tato věta je dále zobecněna tak, že do hry vstupuje ještě obarvení množiny C a požadavek, aby každá z vybraných množin obsahovala nejvýše jeden prvek každé barvy.

Tato tvrzení jsou aplikována hned v následující kapitole, kde je ukázáno, že každé spojité zobrazení $|\Delta_n^{(k)}| \to M$ z k-kostry n-dimenzionálního simpliciálního komplexu do variety M lze pro dostatečně velké n (vzhledem ke k, vlastnostem variety M a danému $s \geq 2k$) zvednout *skoro-vnořením* (viz. Definice 3.23) $g\colon |\Delta_s^{(k)}| \to |\Delta_n^{(k)}|$ tak, že $(f \circ g)_*$ je triviální. Navíc lze požadovat další vlastnosti zobrazení g (Věty 3.25 a 3.26).

Dané tvrzení umožňuje využít výsledky A. Volovnikova k důkazu neexistuje skoro-vnoření simpliciálního komlexu $\Delta_n^{(k)}$ do $2k$-dimenzionální varety M (s daným omezením k-tého $\mathbb{Z}_2$-Bettiho čísla) pro dostatečně velké n. tak dostaneme horní odhad Kühnelovy hypotézy.

Poslední dvě kapitoly práce studují varianty klasické Hellyho věty: Systém $\mathcal{F}$ konvexních podmnožin prostoru $\mathbb{R}^d$ má neprázdný průnik pokud má každý $d+1$ prvkový podsystém $\mathcal{F}$ neprázdný průnik. Touto větou je motivována definice Hellyho čísla systému množin $\mathcal{F}$ jako nejmenšího n takového, že existuje n-prvková $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ jejíž průnik je prázdný, ale průnik každé neprázdné vlastní podmnožiny $\mathcal{G}$ je neprázdný. Označme ještě $\tilde{\beta}_i(X)$ i-té redukované Bettiho číslo prostoru X. Je ukázáno, že existuje funkce $h\colon \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ taková, že je-li $\mathcal{F}$ konečný systém podmnožin $\mathbb{R}^d$ splňující $\tilde{\beta}_i(\bigcap \mathcal{G}) \leq b$ pro každé $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$ a každé $0 \leq i \leq d/2 - 1$, potom má $\mathcal{F}$ Hellyho číslo nejvýše $h(b, d)$ a je konkrétně odhadnuta funkce $h(0, d)$.

Hodnocení:: Výsledky práce jsou netriviální, publikované v několika článcích. Vysoce hodnotím formální i stylickou úroveň práce i preciznost, se kterou je napsána. Práci lze nepochybně uznat jako práci doktorskou.

Mgr. Pavel Růžička, Ph.D.