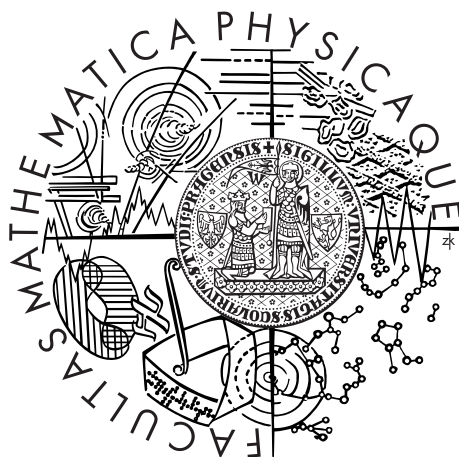


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Dorota Šimonová

Filippovovy dynamické systémy a jejich aplikace

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2015

Ráda bych poděkoval profesoru RNDr. Vladimíru Janovskému za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Filippovy dynamické systémy a jejich aplikace

Autor: Dorota Šimonová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Práce je motivována problémy kontaktní mechaniky, především modely tření. V první kapitole si zavedeme pojmy potřebné k analyzování Filippových systémů, což jsou systémy popsané speciálním případem obyčejných diferenciálních rovnic s nespojitou pravou stranou. Ukážeme též software k jejich řešení. Ostatní kapitoly jsou věnovány aplikacím, jde především o analyzování modelů suchého zipu a modelu kontaktu elastického tělesa s tuhou podložkou s jedním kontaktním uzlem, kterému se říká model Coulombova tření. Při řešení druhého zmíněného modelu je nutno kombinovat software pro řešení Filippových systémů a impaktních oscilátorů. Výsledky analýzy modelu Coulombova tření jsou původní.

Klíčová slova: Filippovy dynamické systémy, model suchého zipu, Coulombovo tření, hybridní dynamické systémy

Title: Filippov dynamical systems with applications

Author: Dorota Šimonová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: The thesis is motivated by problems of contact mechanics with friction. At the beginning we describe a class of piecewise smooth systems with discontinuous vector field called Filippov systems. We also show how to solve them. The rest of this thesis is focused on applications, especially dry friction model and finite element model of Coulomb friction with one contact point. We propose a technique for simulation of the second mentioned model which combines solving methods for Filippov systems and impact oscillators.

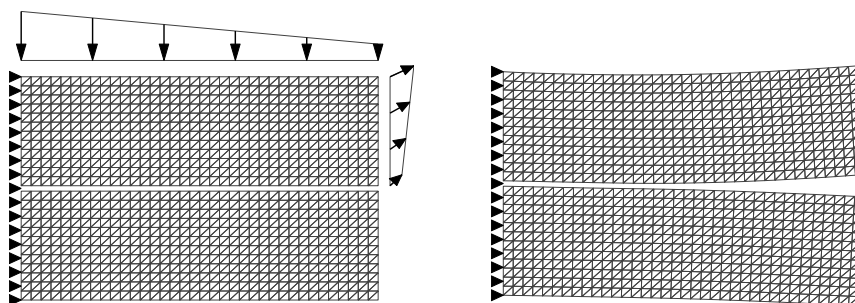
Keywords: Filippov dynamical systems, dry-friction model, Coulomb friction model, hybrid dynamical systems

Obsah

Úvod	2
1 Filippovovy systémy	4
1.1 Dynamický systém	4
1.2 Po částech hladký dynamický systém	5
1.3 Numerická simulace	8
1.4 Příklad: Skákající míč	9
2 Model suchého tření	11
2.1 Filippovův systém	11
2.2 Systém algebro-diferenciálních rovnic	12
2.3 Diferenciální inkluze	19
3 Modely impaktů	20
4 Coulombovo tření	23
4.1 Mód: Kontakt	24
4.2 Mód: Ztráta kontaktu	25
Závěr	30
Literatura	31

Úvod

Naší motivací je řešení (planární) *kontaktní úlohy* elastických těles. Modelujeme podmínky nepronikání a konstituční vztahy tzv. Coulombova modelu tření. Pro diskretizaci problému použijeme smíšenou formulaci metody *konečných prvků*, viz následující příklad:



Obrázek 1: Kontakt dvou elastických těles Ω^1 (horní těleso) a Ω^2 (dolní těleso), s kontaktní hranicí Γ_c . Horní těleso je zatíženo plošnými silami. Diskretizace: Lineární konečné prvky kde $n = 1320$ (počet stupňů volnosti) a $m = 30$ (počet stupňů volnosti na kontaktní hranici). Vpravo: Příslušné deformace obou těles.

Užitečnou abstrakcí je problém kontaktu elastického tělesa a tuhé podložky s jedním kontaktním uzlem ($m=1$), viz obrázek 4.1. Přínosem práce je numerická analýza *dynamického kontaktu* s jedním kontaktním uzlem, která je v kapitole 4. Analyzujeme fungování dynamického systému, který připomíná hoblík.

V Haslinger a kol. (2012) byl analyzován model *statického kontaktu* s jedním kontaktním uzlem. Roli času zde hraje zadaný parametr. Lze modelovat např. parametrickou změnu zatížení. Příslušnou numerickou techniku modelování parametrické změny (tzv. numerickou kontinuaci) lze zobecnit pro úlohy s reálnými aplikacemi jako na obrázku 4.1, viz Haslinger a kol. (2015). Na první pohled bizarní model "hoblíku" může odhalit kvalitativní vlastnosti reálných kontaktních modelů.

V první kapitole si vytvoříme teoretický základ pro analýzu dynamických systémů (t.j. modelů evoluce), které nejsou diferencovatelné. Speciální případ takovýchto systémů jsou Filippovy systémy, u kterých popíšeme software pro jejich řešení.

V následujících kapitolách se budeme zabývat aplikacemi. V kapitole 2 budeme analyzovat model suchého tření neboli *model suchého zipu*. Tento model budeme formulovat a řešit jako Filippovův systém. Alternativně lze model suchého zipu popsat pomocí soustavy tzv. algebro-diferenciálních rovnic, jejichž diskretizací

získáme další algoritmus k řešení modelu suchého zipu. Oba postupy v této kapitole porovnáme.

V kapitole 3 uvedeme dva příklady tzv. *impaktních oscilátorů*, jež nejsou Filippovy systémy. Využijeme příslušný software pro jejich numerickou simulaci.

V kapitole 4 zformulujeme dynamický systém, který jsme pracovně nazvali *model hoblíku*. Model kombinuje dva módy řešení: mód Filippova typu (po částech hladký spojitý systém) a impaktní mód (s nespojitou rychlostí). Model hoblíku lze charakterizovat jako *hybridní dynamický systém*, viz Branicky (2005) a di Bernardo a kol. (2008).

Kapitola 1

Filippovovy systémy

V první sekci této kapitoly definujeme základní pojmy hladkého dynamického systému, od kterého přejdeme k po částech hladkému systému. V další sekci si rozebereme speciální případ po částech hladkého systému, který nazveme Filippovým systémem. K řešení takového systému využijeme software, který je popsán v sekci 1.3. V poslední sekci je uveden příklad modelu impaktu (skákaající míč), jež odkazuje na kapitolu 3.

1.1 Dynamický systém

Následující definice jsou převzaty z Kurzweil (1978).

Definice 1.1. *Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lokálně lipschitzovská funkce, která je definována na neprázdné oblasti $S \subset \mathbb{R}^n$. Autonomní diferenciální rovnice (ODR) je tvaru*

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in I_{x_0}$$

s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = x_0 \in S,$$

kde $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \delta_{x_0})$ je maximální interval existence řešení rovnice s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ a $x : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definice 1.2. *Bud' $x'(t) = f(x(t))$ autonomní diferenciální rovnice. Pak řešící funkci nazveme $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $\varphi(t, x_0) = x(t)$, kde $x(t)$ je řešení dané rovnice s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Množina M je definována $M = \{(t, x_0), t \in I_{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}\}$.*

Často nás zajímá asymptotické chování řešící funkce, například chceme vědět, zda se chování systému, který daná rovnice popisuje, nějakým způsobem ustálí či nikoli.

Definice 1.3. *Nechť $\varphi(t, x_0)$ je řešící funkce $x'(t) = f(x(t))$. Pozitivní orbit*

$\gamma^+(x_0)$, negativní orbit $\gamma^-(x_0)$ a orbit $\gamma(x_0)$ definujeme následovně

$$\begin{aligned}\gamma^+(x_0) &= \bigcup_{t \in [0, \delta_{x_0})} \varphi(t, x_0), \\ \gamma^-(x_0) &= \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, 0]} \varphi(t, x_0), \\ \gamma(x_0) &= \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, \delta_{x_0})} \varphi(t, x_0).\end{aligned}$$

Množiny $\gamma^+(x_0)$, $\gamma^-(x_0)$ a $\gamma(x_0)$ lze numericky aproximovat pomocí řešičů počáteční úlohy pro systémy ODR na dostatečně dlouhých časových intervalech, viz Shampine a Reichelt (1997).

Definice 1.4. Bod y nazveme ω -limitní bod orbitu $\gamma(x_0)$, pokud existuje posloupnost $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \delta_{x_0}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) = y$. Množinu všech ω -limitních bodů orbitu $\gamma(x_0)$ nazveme ω -limitní množinou orbitu $\gamma(x_0)$ a značíme ji $\omega(x_0)$. Ekvivalentně můžeme definovat $\omega(x_0)$ následovně

$$\omega(x_0) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma^+(\varphi(\tau, x_0))}.$$

Jak již bylo řečeno, v příkladech nás mnohdy zajímá asymptotické chování řešící funkce, jinými slovy nás zajímá ω -limitní množina. V praxi ovšem tuto množinu nelze spočítat, místo ní hledáme její numerickou aproximaci

$$\omega(x_0) \sim \{\varphi(\tau, x_0) : 0 < T_0 \leq \tau \leq T_1 < \delta_{x_0}\},$$

kde $T_0 < T_1$ jsou dostatečně velké hodnoty.

Příklad 1.5. Na tomto příkladu si ilustrujeme pojmy pozitivní orbit a ω -limitní množina. Budeme řešit chování Van der Polova oscilátoru v závislosti na parametru λ . Tento oscilátor je popsán diferenciální rovnicí druhého řádu, kterou přepíšeme do soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 + 2\lambda x_2 - x_1^2 x_2.\end{aligned}$$

Na obrázku 1.1 vpravo je aproximace ω -limitní množiny pro volbu $T_0 = 500$, $T_1 = 1000$.

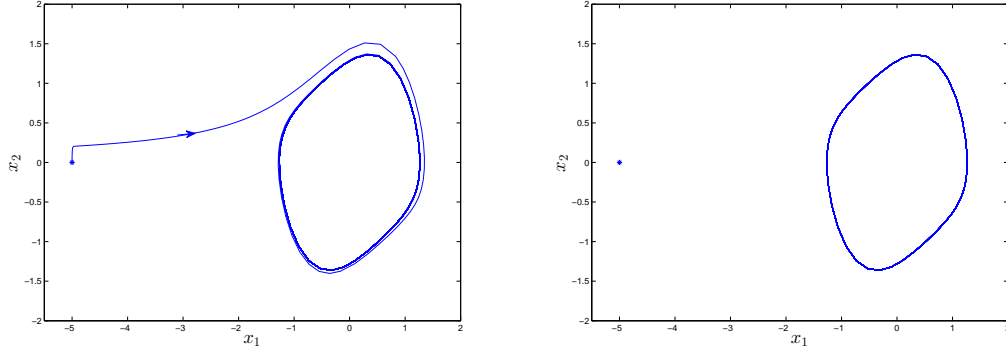
1.2 Po částech hladký dynamický systém

Nyní si definujeme po částech hladké dynamické systémy, dynamické systémy s nespojitou pravou stranou a Filippovovy systémy dle di Bernardo a kol. (2008) a Biák (2015).

Definice 1.6. Uvažujme soustavu dvou autonomních ODR

$$x' = F_i(x), \quad x \in S_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

kde $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou hladká vektorová pole na otevřených množinách $S_i \in \mathbb{R}^n$ pro $i = 1, 2$. Nechť $\Sigma_{12} = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ je neprázdná a $S = S_1 \cup S_2$. Potom soustava (1.1) definuje po částech hladký dynamický systém na S . Řekneme, že systém (1.1) má nespojitou pravou stranu, pokud $F_1(x) - F_2(x) \neq 0$ pro $x \in \Sigma_{12}$.



Obrázek 1.1: Řešení Van der Polova oscilátoru pro hodnotu $\lambda = 0.2$. Vlevo: Pozitivní orbit. Vpravo: Aproximace ω -limitní množiny.

Uvažujme po částech hladký dynamický systém (1.1) s nespojitou pravou stranou, pro který existuje skalární funkce $h_{12} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\Sigma_{12} = \{x \in \mathbb{R}^n; h_{12} = 0\}, \quad (1.2)$$

přičemž

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; h_{12} > 0\}, \quad S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; h_{12} < 0\}. \quad (1.3)$$

Předpokládáme tedy, že existuje hladká nadplocha, která odděluje množiny S_1 a S_2 .

Definice 1.7. Po částech hladký dynamický systém (1.1) s nespojitou pravou stranou, který splňuje (1.2) a (1.3), se nazývá *Filippovův systém*. Zkráceně *Filippovův systém* popisujeme takto

$$x' = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1, \\ F_2(x), & x \in S_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Nechť $x^0 \in \mathbb{R}^n$ je zadaná počáteční podmínka, pak řešíme *počáteční úlohu* pro Filippovův systém. Na hranici Σ_{12} charakterizujeme řešení *Filippovou konvexní metodou*, viz di Bernardo a kol. (2008). Tuto metodu, jejíž jednu variantu představíme v další sekci, definujeme na konci následujícího odstavce. Cílem je nalezení *řešící funkce* Filippova systému

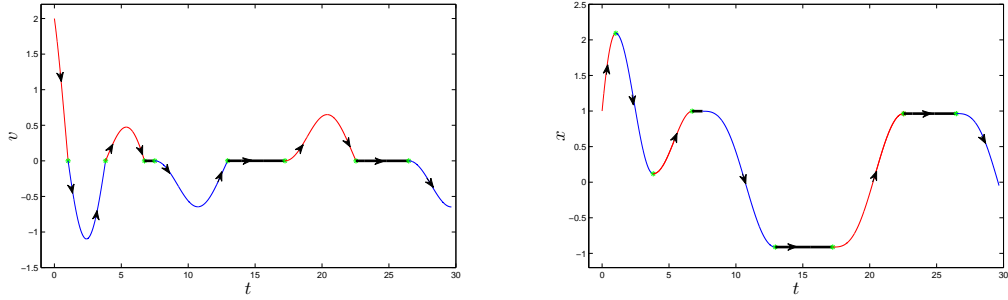
$$x^0 \in \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(t, x^0) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

V případě Filippových systémů je řešící funkce spojitá a po částech hladká, viz příklad na obrázku 1.2.

Poznámka 1.8. Zápis (1.4) Filippova systému je zkratka pro

$$x' \in \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ \overline{\text{co}}(F_1, F_2), & x \in \Sigma_{12} \\ F_2(x), & x \in S_2 \end{cases},$$

kde $\overline{\text{co}} = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = \lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2, \lambda \in [0, 1]\}$ je uzavřený konvexní obal, viz Filippov (1988) a Aubin a Cellina (1984).



Obrázek 1.2: Příklad. Stavové proměnné: $x_1 := x$ je posunutí, $x_2 := v$ je rychlost. Pro tento příklad je $h_{12} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $h_{12}(x) = x_2$, $\Sigma_{12} = \{x \in \mathbb{R}^2; h_{12}(x) = 0\}$. Řešící funkce je po částech hladká; červeně je řešení na S_1 , zeleně je řešení na S_2 a černě řešení na Σ_{12} s počáteční podmínkou $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 2$.

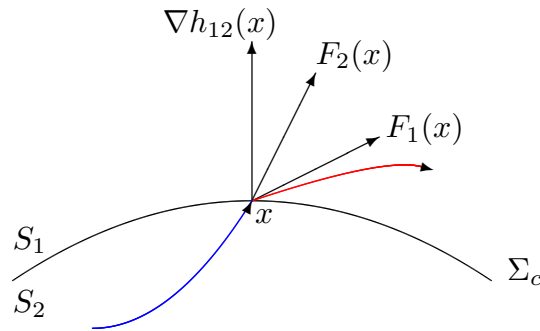
Následující pojmy definujeme podobně jako v Piiroinen a Kuznetsov (2008). Definujeme si *Lie-derivaci* funkce h podle vektorového pole F

$$\mathcal{L}_F(h)(x) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, F \right\rangle,$$

kde $h(x)$ je hladká funkce a $F(x)$ je hladké vektorové pole. Zavedeme si *přechodovou množinu* $\Sigma_c \subset \Sigma_{12}$ takto

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma_{12}; \mathcal{L}_{F_1}(h_{12})(x) \cdot \mathcal{L}_{F_2}(h_{12})(x) > 0\}.$$

Je to množina bodů na hranici, kde řešení pouze projde hranicí z jedné oblasti do druhé. Pro lepší představu je znázorněna na obrázku 1.3. Naopak *klouzavou*



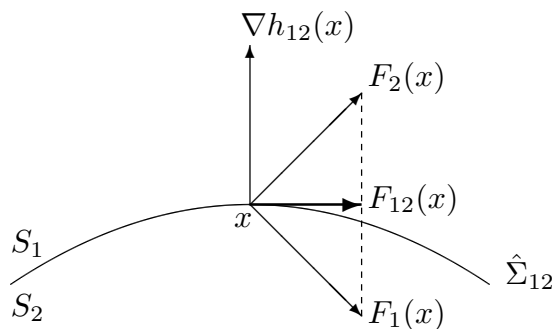
Obrázek 1.3: Pro vyznačený bod platí $x \in \Sigma_c$, kde Σ_c je přechodová množina. Na obrázku je $\nabla h_{12} = \frac{dh_{12}}{dx}$.

množinu $\hat{\Sigma}_{12} \subset \Sigma_{12}$ definujeme takto

$$\hat{\Sigma}_{12} = \{x \in \Sigma_{12}; \mathcal{L}_{F_1}(h_{12})(x) \cdot \mathcal{L}_{F_2}(h_{12})(x) \leq 0\}.$$

Klouzavá množina je množina bodů, kde je řešení vázané na hranici a pohybuje se v nich podél hranice. Tato množina je na obrázku 1.4.

Klouzavou množinu lze též charakterizovat jako body, kde oba vektory F_1 a F_2 směřují k hranici nebo od hranice. Řešení, které je zde vázáno na hranici, se nazývá *klouzavé řešení*. Množiny bodů, které ohraničují klouzavou množinu se označují $\hat{\Sigma}_{12}^+$ a $\hat{\Sigma}_{12}^-$, na obrázku 1.2 jsou vyznačeny zelenou barvou. Takové body $x \in \hat{\Sigma}_{12}$, pro které jsou vektory $F_1(x)$ i $F_2(x)$ tečné k Σ_{12} se nazývají *singulární*



Obrázek 1.4: Pro označený bod platí $x \in \hat{\Sigma}_{12}$, kde $\hat{\Sigma}_{12}$ je klouzavá množina. Dle Filippovovy konvexní metody se trajektorie bodu x se bude dále vyvíjet podle $F_{12}(x)$. Na obrázku je $\nabla h_{12} = \frac{dh_{12}}{dx}$.

klouzavé body.

Jak již bylo řečeno, chování trajektorie v klouzavé množině popisujeme pomocí Filippovovy konvexní metody. Podle této metody řešení na hranici splňuje

$$x' = F_{12}(x), x \in \hat{\Sigma}_{12}, \quad (1.5)$$

kde

$$F_{12}(x) = (1 - \alpha)F_1(x) - \alpha F_2(x),$$

$$\alpha = \frac{\mathcal{L}_{F_1}(h_{12})(x)}{\mathcal{L}_{F_1 - F_2}(h_{12})(x)}.$$

1.3 Numerická simulace

V této části se budeme zabývat jednou z variant Filippovovy konvexní metody, tzv. *Utkinovou metodou*. Tato metoda definuje chování na hranici takto

$$x' = F_{12}(x), x \in \hat{\Sigma}_{12}, \quad (1.6)$$

kde

$$F_{12}(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2} + \frac{F_2(x) - F_1(x)}{2} \mu_{12}(x)$$

$$\mu_{12}(x) = -\frac{\mathcal{L}_{F_1 + F_2}(h_{12})(x)}{\mathcal{L}_{F_2 - F_1}(h_{12})(x)}.$$

Nyní se budeme zabývat metodou pro řešení Filippovových systémů, která je popsána v článku Piiroinen a Kuznetsov (2008). V textu ji budeme nazývat *PK-algoritmus*. Na začátku je nutno zadat vektorová pole F_1 , F_2 a hranici nespojitosti Σ_{12} . Vektorové pole F_{12} na klouzavé množině je poté získáno z Utkinovy metody popisu trajektorie klouzavého řešení (1.6). V samotném algoritmu řešíme problém na jedné ze zadaných oblastí, dokud nenarazíme na hranici mezi F_1 a F_2 . Pokud se tak stane, další vývoj záleží na hodnotě polí v daném čase: buď rovnici řešíme pro druhé vektorové pole nebo hledáme klouzavé řešení. Algoritmus používá funkci, která detekuje nespojitost a místa, kde řešení protíná hranici nespojitosti. Tyto body na hranici se nazývají *události* (anglicky *event*), části hranice, kde leží události, se říká *E-plocha* (anglicky *event surface*) a funkce definující E-plochu

se nazývá *E-funkce* (anglicky *event function*). Výše popsaná metoda je proto nazývána *event-driven* metodou.

Tento algoritmus aplikujeme na mírně změněný systém (1.6), který definujeme takto

$$x' = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1, \\ \hat{F}_{12}(x), & x \in \hat{\Sigma}_{12}, \\ F_2(x), & x \in S_2, \end{cases}$$

kde $\hat{F}_{12}(x)$ je *regularizace* vektorového pole F_{12} daného Utkinovou metodou, která je popsána v již zmíněném článku Piiroinen a Kuznetsov (2008). Tato regularizace se provádí kvůli chybám a nepřesnostem při výpočtu, které mohou způsobit, že se řešení chybně odpojí od hranice $\hat{\Sigma}_{12}$. Pro systém, který má celkem m událostí, definujeme *vektor událostí* $e(x,t)$

$$e(x,t) = (e_1(x,t), \dots, e_m(x,t)),$$

kde každý prvek $e_k(x,t) \in \mathbb{R}$ je funkce událostí s hranicí událostí, které lze dosáhnout buď v daném bodě nebo v daném čase. V našem algoritmu definujeme prvky vektoru událostí takto

$$e_1(x,t) := h_{12}(x), \quad e_2(x,t) := L_{F_1}(h_{12})(x), \quad e_3(x,t) := L_{F_2}(h_{12})(x).$$

1.4 Příklad: Skákající míč

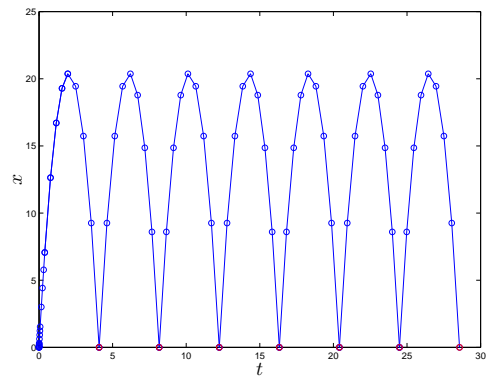
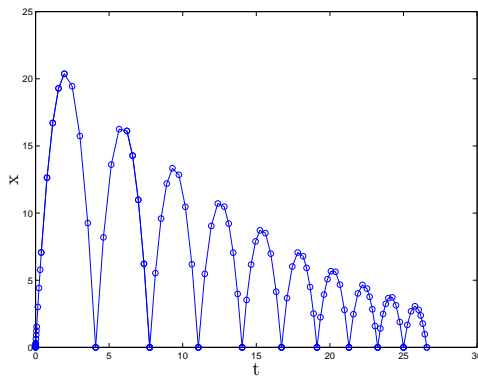
V tomto odstavci se budeme zabývat systémem, který není Filippovův. Je to příklad modelu impaktu, na který navážeme v kapitolách 3 a 4. Jedná se o model skákajícího míče, pro nás je zajímavý z důvodu velkého skoku rychlosti, který nastává při nárazu (impaktu) míče do pevné podložky, po které míč skáče. Pohyb takového míče je dán rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -g, \end{aligned}$$

kde g je gravitační zrychlení. Označme t_0 čas nárazu míče do podložky a položme $v^+ = \lim_{t \rightarrow t_0^+} v$ resp. $v^- = \lim_{t \rightarrow t_0^-} v$. Uvažujeme-li při nárazu elastickou deformaci, můžeme vztah mezi v^+ a v^- zapsat pomocí koeficientu pružnosti míče κ

$$v^+ = -\kappa v^-, \quad x = 0.$$

Pro řešení tohoto problému použijeme program zabudovaný v MATLABu zvaný *ballode*, výsledek je na obrázku 1.5.



Obrázek 1.5: Graf pohybu skákajícího míče znázorňuje závislost výšky na čase. Vlevo: Pro $\kappa = 0.9$. Vpravo: $\kappa = 1$.

Kapitola 2

Model suchého tření

V této kapitole se budeme zabývat modelem suchého zipu. Model popíšeme třemi různými způsoby - jako Filippovův systém, pomocí algebro-diferenciálních rovnic a diferenciální inkluzí. Tyto tři možnosti jsou uvedeny v jednotlivých sekcích, u prvních dvou variant popíšeme jejich numerické řešení a uvedeme několik příkladů. Popis v poslední sekci je čistě teoretický a při aplikaci se nepoužívá.

2.1 Filippovův systém

Chceme formulovat problém (2.5) a (2.6) jako autonomní Filippovův systém. Nejprve si označíme $x_1 = x$, $x_2 = x'$ a $x_3 = t$. Vektorová pole F_1 , F_2 jsou definována takto

$$F_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}f(x_3) - \frac{1}{m}\mathcal{F} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}f(x_3) + \frac{1}{m}\mathcal{F} \\ 1 \end{pmatrix},$$

oblasti S_1 a S_2 s hranicí Σ_{12} jsou definovány funkcí $h_{12} = x_2$.

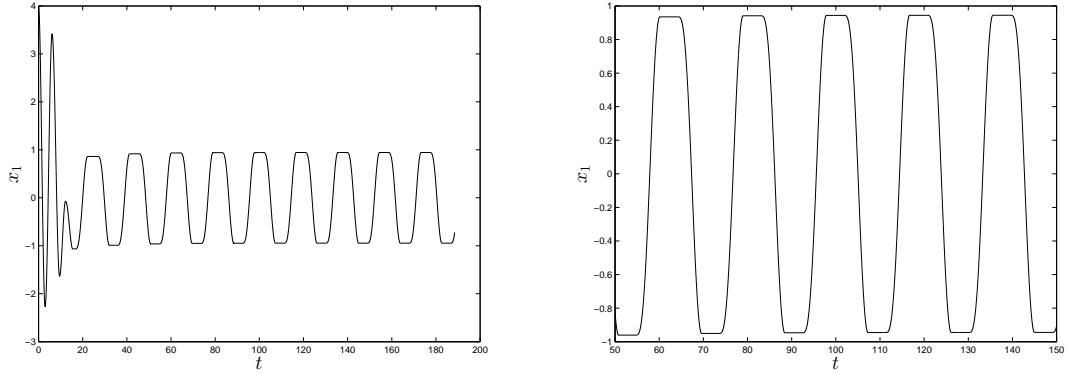
Nyní tento problém vyřešíme pro konkrétní hodnoty ω , síly \mathcal{F} a počáteční podmínky y_0 . Numerické řešení získáme aplikací PK-algoritmu, ve kterém je pro numerickou integraci použito standardních prostředků systému MATLAB. Algoritmus má adaptivní volbu integračního kroku, v naší aplikaci jsme použili standardní volbu parametrů numerické integrace:

AbsTol: 1.0000 e-006, MaxStep: 0.01, RelTol: 1.0000 e-006.

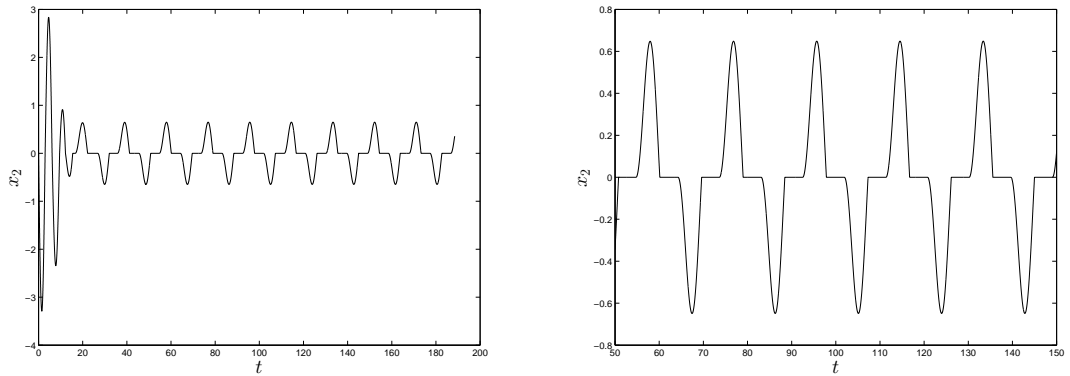
Příklad 2.1. Data: $m = 1$, $k = 1$, $f(t) = \sin(\omega t)$, $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, řešíme na intervalu $[0, 10 * T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Počáteční podmínky: $y_0 = [4, 0, 0]$, $x^{init} = 4$ a $v^{init} = 0$. Výsledky jsou na obrázcích 2.1-2.3.

Příklad 2.2. Data: $m = 1$, $k = 1$, $f(t) = \sin(\omega t)$, $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{7}$, řešíme na intervalu $[0, 10 * T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Počáteční podmínky: $y_0 = [4, 0, 0]$, $x^{init} = 4$ a $v^{init} = 0$. Výsledky jsou na obrázcích 2.4-2.6.

Příklad 2.3. Data: $m = 1$, $k = 1$, $f(t) = \sin(\omega t)$, $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{9}$, řešíme na intervalu $[0, 10 * T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Počáteční podmínky: $y_0 = [4, 0, 0]$, $x^{init} = 4$ a $v^{init} = 0$. Pro porovnání je zde uveden na obrázku 2.7 pouze fázový portrét x_2 a x_1 pro tyto data.



Obrázek 2.1: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti x_1 na t . Vpravo: Výřez z grafu.



Obrázek 2.2: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti x_2 na t . Vpravo: Výřez z grafu.

Poznámka 2.4. Na obrázcích 2.3 vpravo, 2.6 vpravo a 2.7 vpravo jsou znázorněny numerické aproximace ω –limitních množin jednotlivých příkladů. V těchto případech je $T_0 = 200$ a $T_1 = 500$.

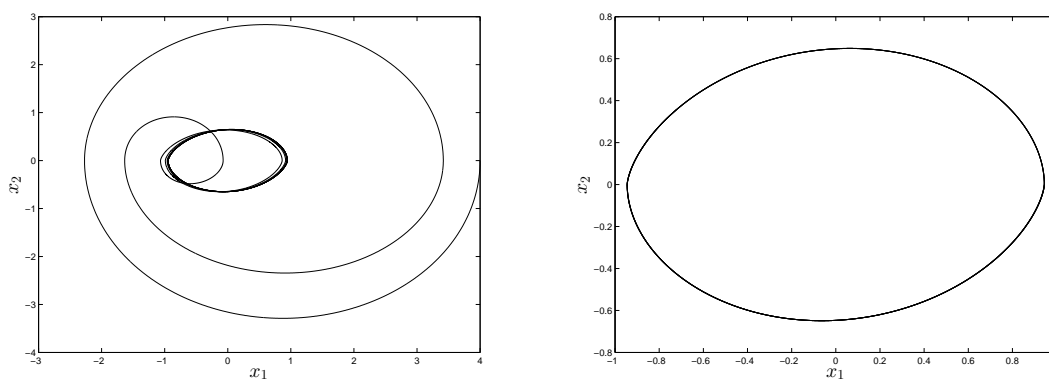
Poznámka 2.5. Jak je vidět z obrázků, pro různá data vyšly tři typy fázového portréту proměnných x_2 a x_1 . V příkladu 2.1 má fázový portrét tvar podobný elipse a nemá žádný bod nespojitosti první derivace. Naopak fázový portrét z příkladu 2.2 má dva takové body a z příkladu 2.3 dokonce čtyři.

2.2 Systém algebro-diferenciálních rovnic

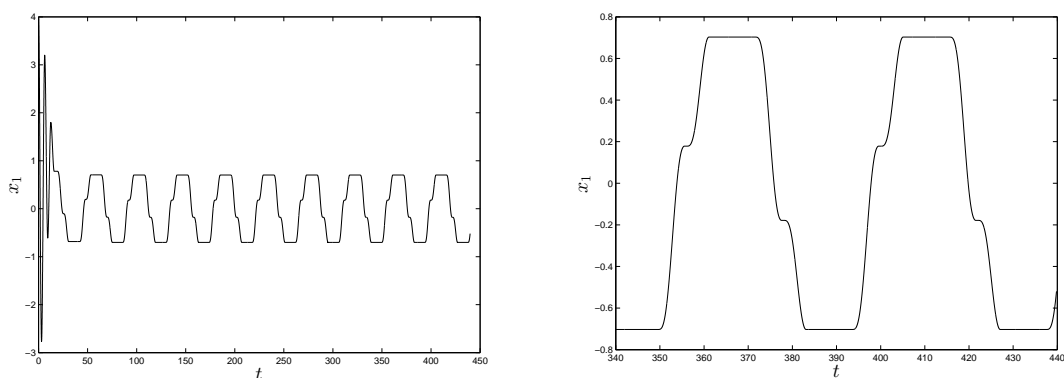
V této kapitole čerpáme z Darbha a kol. (2010), Babovákova (2012) a Rajagopal (2010). Ze zákona zachování hybnosti dostáváme rovnici

$$x''(t) = \frac{1}{m}(f(t) - F_s(t) - F_d(t)), \quad (2.1)$$

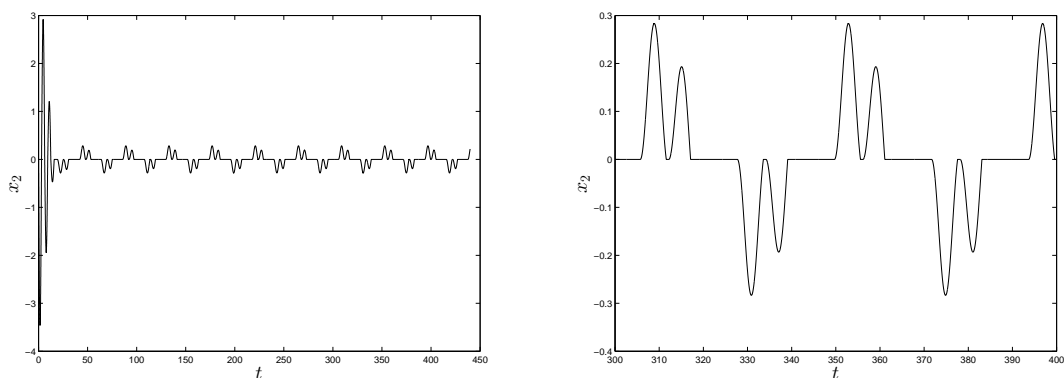
kde m je hmotnost tělesa a $x(t)$ je jeho trajektorie. Funkce F_s jsou síly působící na těleso, F_d jsou disipační síly a $f(t)$ jsou vnější síly. V tomto textu předpokládáme,



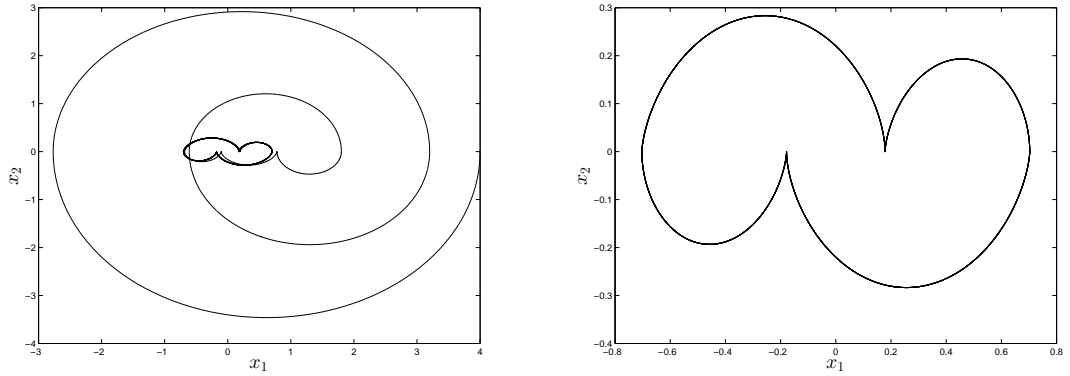
Obrázek 2.3: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Fázový portrét proměnných x_2 a x_1 . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.



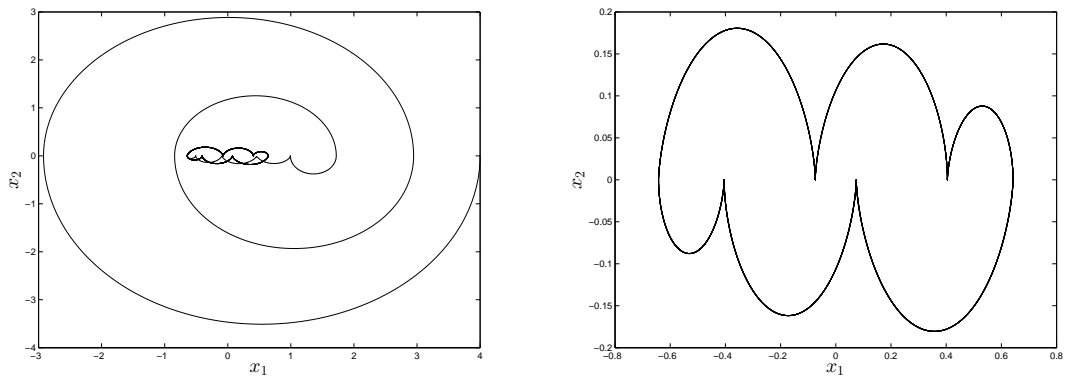
Obrázek 2.4: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{7}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti x_1 na t . Vpravo: Výřez z grafu.



Obrázek 2.5: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{7}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti x_2 na t . Vpravo: Výřez z grafu.



Obrázek 2.6: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{7}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Fázový portrét proměnných x_2 a x_1 . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.



Obrázek 2.7: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{9}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Fázový portrét proměnných x_2 a x_1 . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.

že $F_s(t) = kx(t)$, kde $k > 0$ je konstanta. Označíme-li $v(t) = x'(t)$, můžeme původní problém přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{1}{m}(f(t) - F_s(t) - F_d(t)), \\ F_s'(t) &= kv(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

K této soustavě je nutno přidat další vztah, závislost mezi $v(t)$ a $F_d(t)$ vyjádříme ve tvaru implicitní funkce $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta(v(t), F_d(t)) = 0. \quad (2.3)$$

Soustava rovnic (2.2) a (2.3) se nazývá systém *algebroidních rovnic*. Pro dané $v^{init}, x^{init} \in \mathbb{R}$ řešíme tento systém s počátečními podmínkami $v(0) = x'(0) = v^{init}$, $F_s(0) = kx(0)$ a $x(0) = x^{init}$. Dále předpokládáme, že F_d je Coulombova síla, která se standardně značí F_c (uvažujme tedy $F_d = F_c$). Implicitní vztah δ definujeme takto

$$\begin{cases} F_c(t) = \mathcal{F} \operatorname{sgn} v(t), & v(t) \neq 0, \\ |F_c(t)| \leq \mathcal{F}, & v(t) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

kde \mathcal{F} je kladná konstanta.

Problém (2.2) a (2.4) řešíme diskretizací, jež je podrobněji rozebrána v Janovský (2014), zde si postup popíšeme jen ve zkratce. Zvolíme pevný časový krok τ pro časovou síť $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dále v (2.2) aproximujeme derivace

$$v'(t_{n+1}) \approx \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau}, \quad F_s'(t_{n+1}) \approx \frac{F_s^{n+1} - F_s^n}{\tau}$$

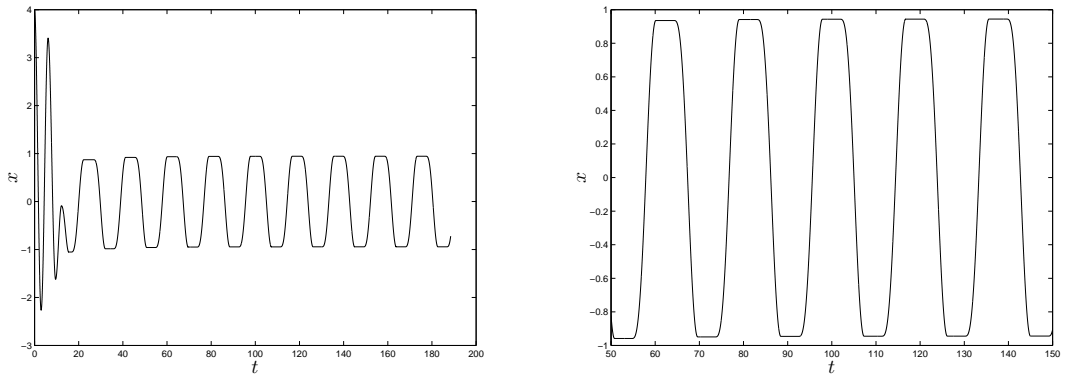
a kombinací obou rovnic v (2.2), použitím implicitního vztahu (2.4) a zavedením totální síly $F_t^{n+1} = \frac{m}{\tau}v^n + f^{n+1} - F_s^n$ získáme algoritmus na řešení zadaného problému.

Algoritmus 1. Nechť máme počáteční podmínky $v^{init} \in \mathbb{R}$, $x^{init} \in \mathbb{R}$ a $v^0 = v^{init}$, $x^0 = x^{init}$, $F_s^0 = kv^0$. Zvolíme časový krok $\tau > 0$ a definujeme vnější sílu $f(t)$ v bodech τn , $n = 0, 1, \dots$, tuto posloupnost označíme $\{f^n\}_{n=0}^{\infty} = \{f(\tau n)\}_{n=0}^{\infty}$. Poté definujeme rekurentně posloupnosti $\{v^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{F_s^n\}_{n=0}^{\infty}$, přičemž je vhodné si ukládat i posloupnosti $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{F_c^n\}_{n=0}^{\infty}$:

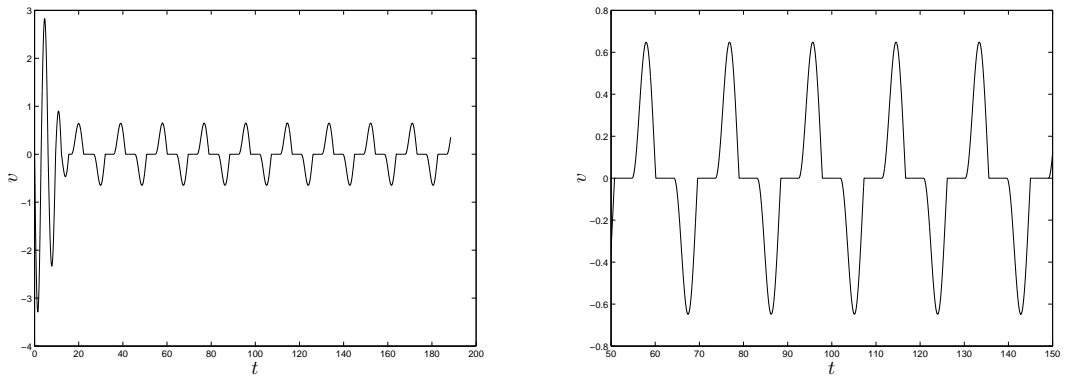
- mějme v^n a F_s^n , definujeme $F_t^{n+1} = \frac{m}{\tau}v^n + f^{n+1} - F_s^n$
pokud $|F_t^{n+1}| \leq \mathcal{F}$, položíme $F_c^{n+1} = F_t^{n+1}$ a $v^{n+1} = 0$,
jinak položíme $F_c^{n+1} = \mathcal{F} \operatorname{sgn} F_t^{n+1}$, $v^{n+1} = (\frac{m}{\tau} + \tau k)^{-1}(F_t^{n+1} - F_c^{n+1})$
- $F_s^{n+1} = \tau k v^{n+1}$ a $x^{n+1} = \frac{1}{k} F_s^{n+1}$.

Příklad 2.6. Data: stejná jako v příkladu 2.1, časový skok: $\tau = 10^{-3}$. Výsledky pro algoritmus 1 naprogramovaný v prostředí MATLAB jsou na obrázcích 2.8-2.11.

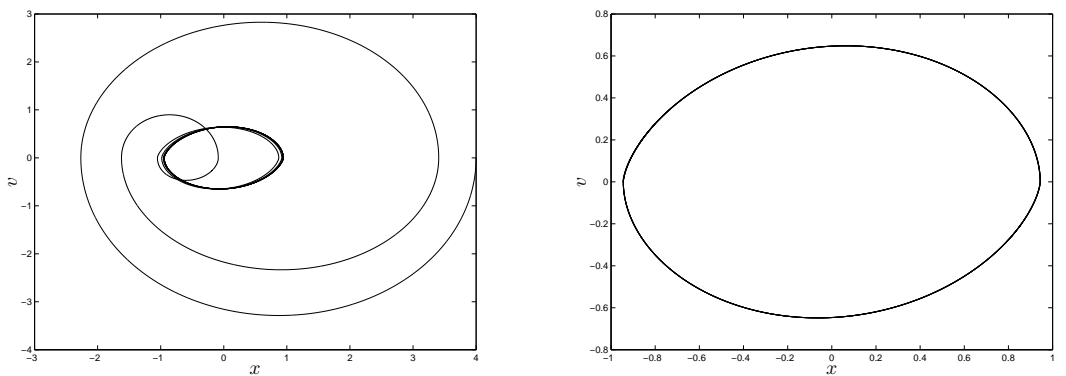
Příklad 2.7. Data: stejná jako v příkladu 2.2, časový skok: $\tau = 10^{-3}$. Výsledky pro algoritmus 1 naprogramovaný v prostředí MATLAB jsou na obrázku 2.12-2.13.



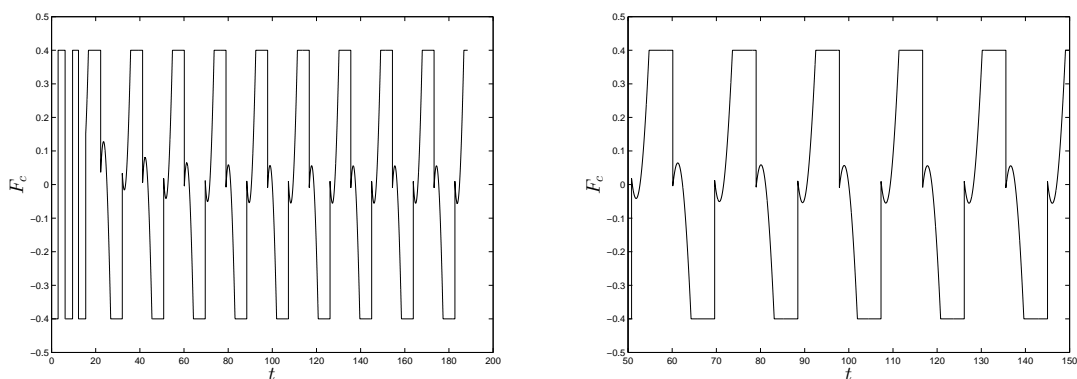
Obrázek 2.8: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti x na t . Vpravo: Výřez z grafu.



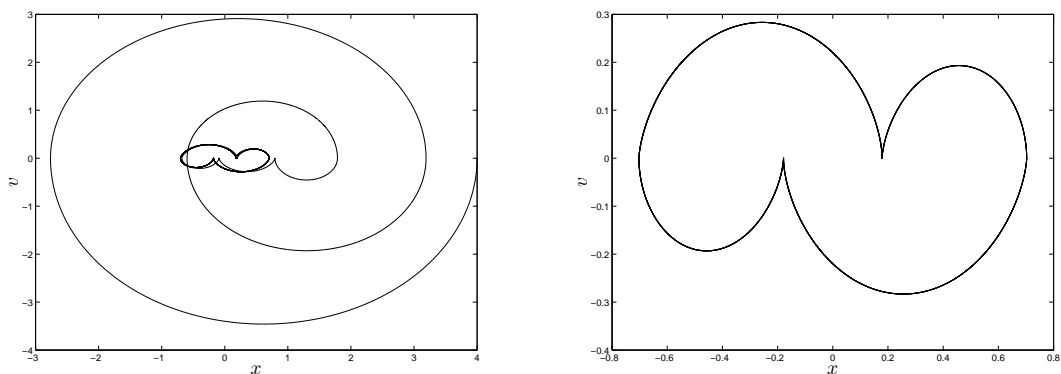
Obrázek 2.9: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti v na t . Vpravo: Výřez z grafu.



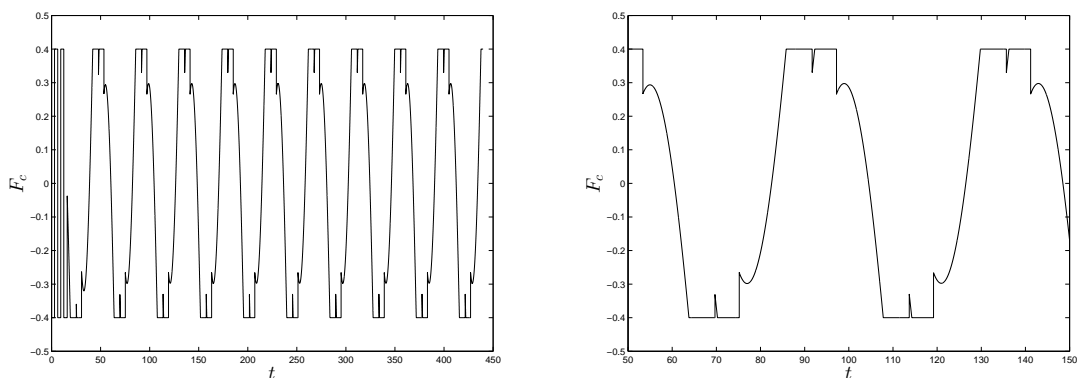
Obrázek 2.10: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Fázový portrét proměnných v a x . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.



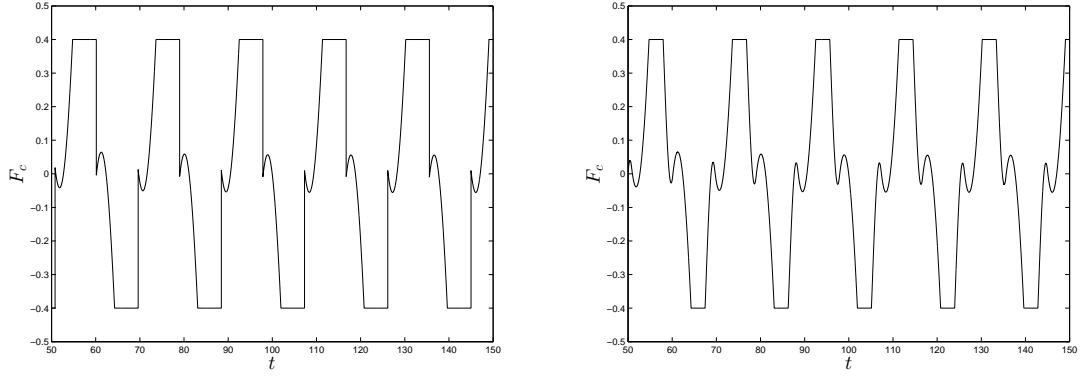
Obrázek 2.11: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{3}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti F_c na t . Vpravo: Výřez z grafu.



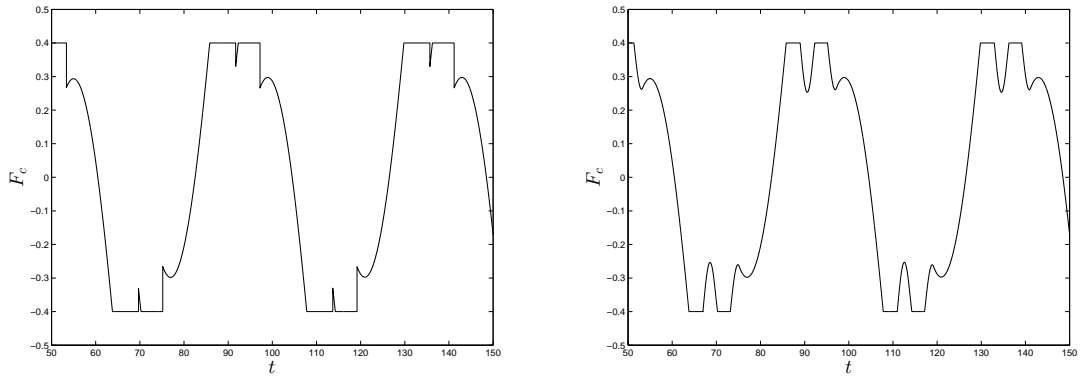
Obrázek 2.12: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{7}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Fázový portrét proměnných v a x . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.



Obrázek 2.13: Řešení pro $\mathcal{F} = 0.4$, $\omega = \frac{1}{7}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ a $m = k = 1$. Vlevo: Graf závislosti F_c na t . Vpravo: Výřez z grafu.



Obrázek 2.14: Vlevo: Výřez z grafu závislosti F_c na t pro algoritmus 1. Vpravo: Výřez z grafu závislosti F_c na t pro PK-algoritmus.



Obrázek 2.15: Vlevo: Výřez z grafu závislosti F_c na t pro algoritmus 1. Vpravo: Výřez z grafu závislosti F_c na t pro PK-algoritmus.

Poznámka 2.8. Vraťme se k PK-algoritmu z minulé sekce. Nově zavedenou funkci F_c lze získat i při použití tohoto algoritmu, musíme k němu ovšem přidat tzv. *konstitutivní vztah*. Ten získáme následující konstrukcí: nejprve pro $x \in \mathbb{R}^3$ položíme $F_c = -kx_1 + f(x_3)$, dále

- pokud $|F_c| \geq \mathcal{F}$, položíme $F_c = \mathcal{F} \operatorname{sgn} F_c$,
- jinak položíme $F_c = -kx_1 + f(x_3)$.

Nyní se podíváme na výsledné grafy F_c získané přidáním konstitutivního vztahu do PK-algoritmu pro data z příkladu 2.1, jež jsou na obrázku 2.14 vpravo, a z příkladu 2.2 na obrázku 2.15 vpravo.

Pozorování 2.9. Je vidět, že grafy funkce F_c získané z algoritmu 1 jsou přesnější než grafy získané PK-algortmem. Rozdíl můžeme vidět na obrázcích 2.14 a 2.15, kde vlevo jsou grafy získané z algoritmu 1 a vpravo grafy získané PK-algortmem.

Porovnání 1. Čas trvání výpočtu PK-algoritmu je 25.88 sekund, čas výpočtu se stejnými daty softwarem na základě algoritmu 1 s časovým krokem 10^{-3} je na stejném počítači 1.89 sekund.

2.3 Diferenciální inkluze

Definujeme funkci $\text{Sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Sign } z = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{pro } z \neq 0 \\ [-1,1] & \text{pro } z = 0 \end{cases}. \quad (2.5)$$

Uvažujme diferenciální rovnici s nespojitou pravou stranou $f(x)$, například funkcí $f(x) = \text{sgn } x$. Nespojitost funkce $f(x)$ odstraníme tím, že z ní vytvoříme mnohoznačnou funkci $F(x)$, například $F(x) = \text{Sign } x$.

Rovnici (2.1) lze přepsat jako diferenciální inkluzi například dle Kunze (2000)

$$m x''(t) \in -k x(t) + f(t) - \mathcal{F} \text{Sign } x'(t), \quad (2.6)$$

kde m , k a \mathcal{F} jsou kladné konstanty, $f = f(t)$ je zadaná funkce. Pro dané $v^{init}, x^{init} \in \mathbb{R}$ jsou $v(0) = x'(0) = v^{init}$ a $x(0) = x^{init}$ počáteční podmínky inkluze (2.6). Skutečnost, že je to Filippovův systém, je lépe vidět z následujícího ekvivalentního zápisu rovnosti (2.6), který koresponduje s tvarem zápisu Filippovova systému z poznámky 1.8

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &\in -\frac{k}{m}x_1 + f - \mathcal{F} \text{Sign } x_2. \end{aligned}$$

Tento způsob zápisu je ovšem čistě formální, problém je řešen jedním z algoritmů popsaných v předešlých sekcích.

Kapitola 3

Modely impaktů

V této kapitole si ukážeme dva modely impaktních oscilátorů, které jsou podrobněji rozebrány v Grubhofferová (2009).

Příklad 3.1. Nejprve se budeme zabývat impaktním oscilátorem s jedním stupněm volnosti. Tomu modelu odpovídá například těleso na pružině v jedné dimenzi. Polohu tělesa (jeho těžiště) označíme $u(t)$ a jeho rychlost $v(t) = \frac{du(t)}{dt}$. Pohyb takového tělesa na pružině s tlumičem lze popsat následovně

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi \frac{du}{dt} + u = w(t), u > 0,$$

kde 2ξ je koeficient viskózního tlumení a $w(t)$ je vnější působící síla. Prostor, kde se těleso pohybuje, může být omezen libovolnou konstantou $\sigma \in \mathbb{R}$, my uvažujeme $\sigma = 0$. Předpokládáme, že pohyb je stálý v oblasti, kde $u \geq 0$, pro $u = 0$ dochází k nárazu do pevné překážky. Nechť náraz nastane v čase t_0 . Označíme u^+ resp. v^+ limitu u resp. v pro t jdoucí k t_0 zprava, analogicky u^- resp. v^- označíme limitu u resp. v pro t jdoucí k t_0 zleva. Pro tyto hodnoty platí vztahy $u^+ = u^-$ a $v^+ = -rv^-$, kde $0 \leq r \leq 1$ je Newtonův návratový koeficient. V našem případě položíme $w(t) = \cos(\omega t)$, což je periodická funkce s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Na obrázku 3.1 je řešení tohoto příkladu pro $\xi = 0$, $\omega = 2$ a $r = 0.75$, řešili jsme jej softwarem převzatým z Grubhofferová (2009).

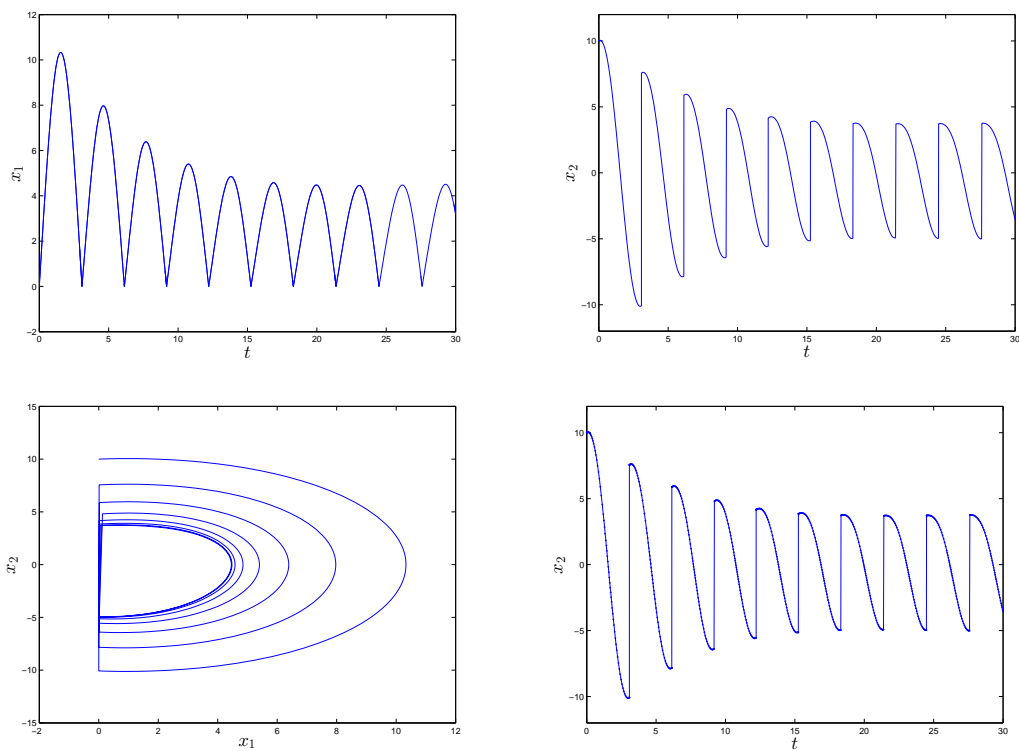
Příklad 3.2. Druhý příklad je model elastického nárazu, který je popsán jako bilineární oscilátor. To znamená, že místo nárazu se uvažuje elastická deformace, která trvá krátký čas. Model popíšeme rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -k_1x_1 - 2\xi x_2 + \cos(\omega t)\end{aligned}$$

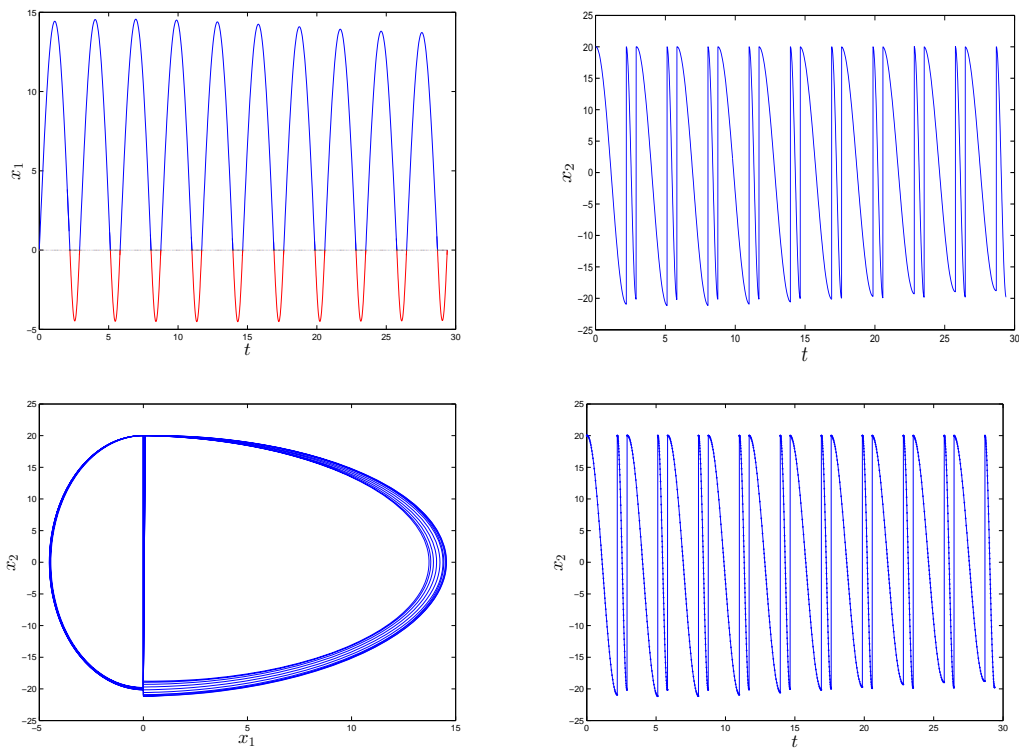
pro $x_1 \geq 0$ nebo

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2 \\x_2' &= k_2x_1 + 2\xi x_2 - \cos(\omega t)\end{aligned}$$

pro $x_1 < 0$. Tento systém není Filippovův, tedy řešíme ho opět softwarem z Grubhofferová (2009), výsledky jsou na obrázku 3.2. V grafu závislosti výšky x_1 na čase t značí červená část křivky elastickou deformaci při impaktu.



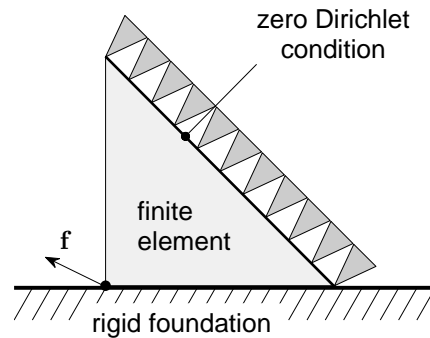
Obrázek 3.1: Grafy závislosti výšky na čase, rychlosti na čase a rychlosti na výšce pro $\omega = 2$, $r = 0,75$ a $\xi = 0$. Na grafu vpravo dole jsou vidět skoky rychlosti při nárazu.



Obrázek 3.2: Grafy závislosti výšky na čase, rychlosti na čase a rychlosti na výšce pro $\omega = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 20$ a $\xi = 0$. Červená část grafu vlevo nahoře je elastická deformace překážky při nárazu. Na graf vpravo dole jsou vidět skoky rychlosti při nárazu.

Kapitola 4

Coulombovo tření



Obrázek 4.1: Jeden lineární element, jeden kontaktní uzel ($m=1$). Interpretace: model hoblíku.

V modelu Coulombova tření převzatém z Ligurský a Renard (2011) hledáme časově závislé funkce $u_\nu, u_\tau, \lambda_\nu, \lambda_\tau : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} u_\nu''(t) \\ u_\tau''(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_\nu(t) \\ u_\tau(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_\nu(t) \\ f_\tau(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_\nu(t) \\ \lambda_\tau(t) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\lambda_\nu(t) \in N u_\nu(t), \quad (4.2)$$

$$\lambda_\tau(t) \in \mathcal{F} u_\nu(t) \text{ Sign } u_\tau'(t), \quad (4.3)$$

kde $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je mnohoznačná funkce (normálový kužel) definovaná takto

$$N z = \begin{cases} 0 & \text{pro } z < 0 \\ (-\infty, 0] & \text{pro } z = 0 \\ \emptyset & \text{pro } z > 0 \end{cases},$$

Pro dané $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{v}^0 \in \mathbb{R}^2$ řešíme soustavu (4.1)–(4.3) s počáteční podmínkou

$$\begin{bmatrix} u_\nu(0) \\ u_\tau(0) \end{bmatrix} = \mathbf{u}^0, \quad \begin{bmatrix} u_\nu'(0) \\ u_\tau'(0) \end{bmatrix} = \mathbf{v}^0. \quad (4.4)$$

Připomeňme, že mnohoznačná funkce Sign je definována výrazem (2.5). Hledané funkce u_ν a u_τ vyjadřují *normálové* a *tečné posunutí*, funkce λ_ν a λ_τ vyjadřují *normálové* a *tečné napětí*. Zadané funkce $f_\nu(t)$ a $f_\tau(t)$ lze interpretovat jako *normálové* a *tečné zatížení*. Parametry uvedeného problému jsou: koeficient tření $\mathcal{F} \geq 0$ a pozitivně definitní matice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b & c \\ c & b \end{bmatrix}.$$

Podmínka (4.2) se nazývá *podmínka komplementarity* neboli *podmínka nepronikání tělesa a tuhé podložky* a lze ji formulovat takto

$$\begin{cases} \lambda_\nu(t) = 0 & \text{pro } u_\nu(t) < 0 \dots \text{mód ztráta kontaktu} \\ \lambda_\nu(t) \leq 0 & \text{pro } u_\nu(t) = 0 \dots \text{mód kontakt} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Rozlišuje tedy situaci, kdy se těleso dotýká pevné podložky (mód kontakt) a kdy ne (mód ztráta kontaktu). Podmínku (4.3) lze zformulovat takto

$$\begin{cases} \lambda_\tau(t) = \mathcal{F} \lambda_\nu(t) & \text{for } u'_\tau(t) > 0 \\ \lambda_\tau(t) = -\mathcal{F} \lambda_\nu(t) & \text{for } u'_\tau(t) < 0 \\ |\lambda_\tau(t)| \leq -\mathcal{F} \lambda_\nu(t) & \text{for } u'_\tau(t) = 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

V případě módu ztráty kontaktu nám podmínka (4.6) dává rovnosti $\lambda_\nu(t) = \lambda_\tau(t) = 0$. Naopak v případě módu kontakt podmínka (4.6) rozlišuje dva možné způsoby kontaktu tělesa s pevnou podložkou

$$\begin{cases} \lambda_\tau = \mathcal{F} \lambda_\nu & \text{pro } u'_\tau > 0 \dots \text{ulpívání} \\ \lambda_\tau = -\mathcal{F} \lambda_\nu & \text{pro } u'_\tau < 0 \dots \text{ulpívání} \\ |\lambda_\tau| \leq -\mathcal{F} \lambda_\nu & \text{pro } u'_\tau = 0 \dots \text{skluz} \end{cases}. \quad (4.7)$$

Způsob kontaktu nazvaný skluz nastane, pokud se těleso po podložce pohybuje rovnoměrně, tedy jeho rychlost se nemění. Ulpívání nastane tehdy, když se těleso zpomaluje nebo zrychluje čili se pohybuje nerovnoměrně.

4.1 Mód: Kontakt

Nechť nastane v čase $t_0 > 0$ kontakt tělesa s podložkou. Kontakt pak také nastává v nějakém neprázdném otevřeném časovém intervalu $I(t_0)$ obsahujícím t_0 . Z podmínky (4.5) musí platit $u_\nu(t) = 0$, $\lambda_\nu(t) \leq 0$ a $u''_\nu(t) = 0$ pro každé $t \in I(t_0)$. Dosazením těchto vztahů do (4.1) získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_\nu(t) &= -cu_\tau(t) - f_\nu(t), \\ au''_\tau(t) &= bu_\tau(t) + f_\tau(t) + \lambda_\tau(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nyní tyto rovnice upravíme v závislosti na typu kontaktu uvedených v (4.7). Pro $u'_\tau > 0$ získáme kombinací obou rovnic z (4.8) a dosazením vztahu $\lambda_\tau = \mathcal{F} \lambda_\nu$ rovnicí

$$u''_\tau(t) = \frac{b - c\mathcal{F}}{a} u_\tau + \frac{1}{a} (f_\tau - \mathcal{F} f_\nu), \quad (4.9)$$

podobně získáme pro $u'_\tau(t) < 0$ vztah

$$u''_\tau(t) = \frac{b + c\mathcal{F}}{a}u_\tau + \frac{1}{a}(f_\tau + \mathcal{F}f_\nu). \quad (4.10)$$

V případě $u'_\tau(t) = 0$ provedeme konvexní kombinaci rovnic (4.9) a (4.10) s koeficientem $\lambda \in [0,1]$ a dostaneme

$$u''_\tau(t) = \frac{b + (1 - 2\lambda)c\mathcal{F}}{a}u_\tau + \frac{1}{a}(f_\tau + (1 - 2\lambda)\mathcal{F}f_\nu). \quad (4.11)$$

Systém rovnic (4.9), (4.10) a (4.11) lze přepsat na Filippovův systém, ovšem v prostoru \mathbb{R}^5 . Pokud si označíme $x_1 = u_\nu$, $x_2 = u'_\nu$, $x_3 = u_\tau$, $x_4 = u'_\tau$ a $x_5 = t$, můžeme definovat vektorová pole Filippovova systému $F_1 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ a $F_2 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ předpisem

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{b - \mathcal{F}c}{a}x_3 + \frac{1}{a}(f_\tau(x_5) - \mathcal{F}f_\nu(x_5)) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{b + \mathcal{F}c}{a}x_3 + \frac{1}{a}(f_\tau(x_5) + \mathcal{F}f_\nu(x_5)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oblasti $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^5$ a hranice $\Sigma_{12} \subset \mathbb{R}^5$ jsou definovány analogicky jako v trojrozměrném případě pomocí funkce $h_{12} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$, která je definována jako $h_{12} = x_4$.

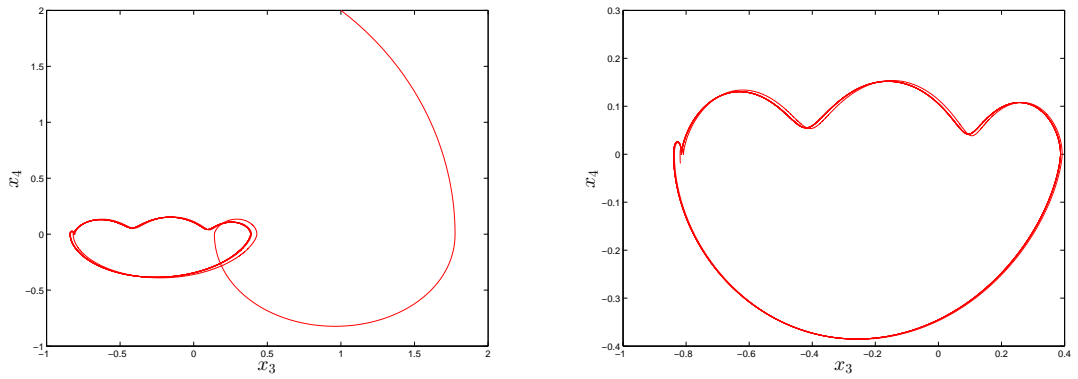
Příklad 4.1. Data: kontakt, $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0,4$, $f_\nu(t) = 1$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{6}$, řešíme na intervalu $[0, 10 * T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Počáteční podmínka: $y_0 = [0, 0, 1, 2, 0]$. Výsledky jsou na obrázcích 4.2-4.3.

Nyní si ukážeme příklad s daty, pro která těleso ztratí kontakt s podložkou a řešení získané výše uvedeným způsobem přestane být fyzikální. V další sekci zjistíme, jak řešit i takovéto případy.

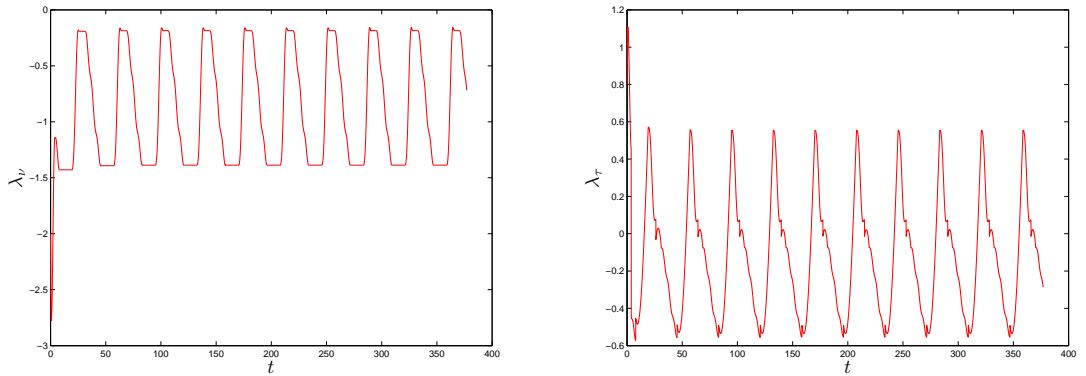
Příklad 4.2. Data: kontakt, $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0,4$, $f_\nu(t) = 0,5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$, řešíme na intervalu $[0, 10 * T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Počáteční podmínka: $y_0 = [0, 0, 0, 0, 1, 0]$. Výsledky jsou na obrázku 4.4. Ztráta kontaktu v tomto případě nastala v čase $t_E = 18.440331645875439$. Mód ztráty kontaktu je indikuje funkce λ_ν změnou znaménka: $\lambda_\nu(t_E - 1) = -0.001139820473223$ (předposlední časový krok), $\lambda_\nu(t_E) = 4.816403987617512e - 05$ (poslední časový krok).

4.2 Mód: Ztráta kontaktu

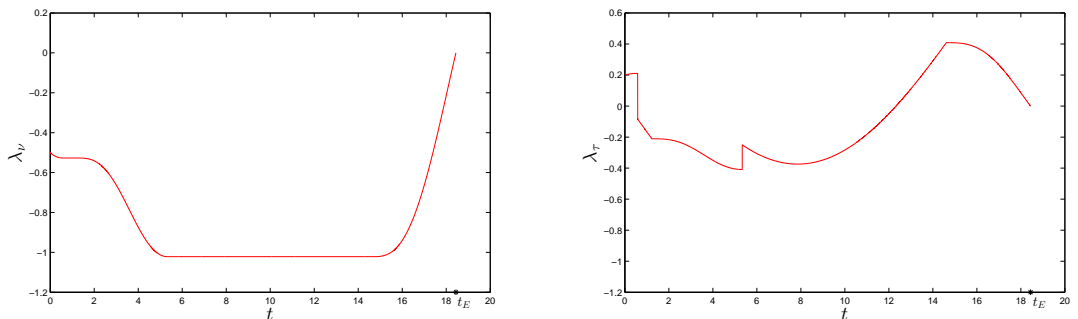
Nechť v čase t_0 naopak nastane varianta bez kontaktu, pak též nastává v nějakém otevřeném intervalu $J(t_0)$ obsahujícím t_0 . Pro tedy $t \in J(t_0)$ musí platit



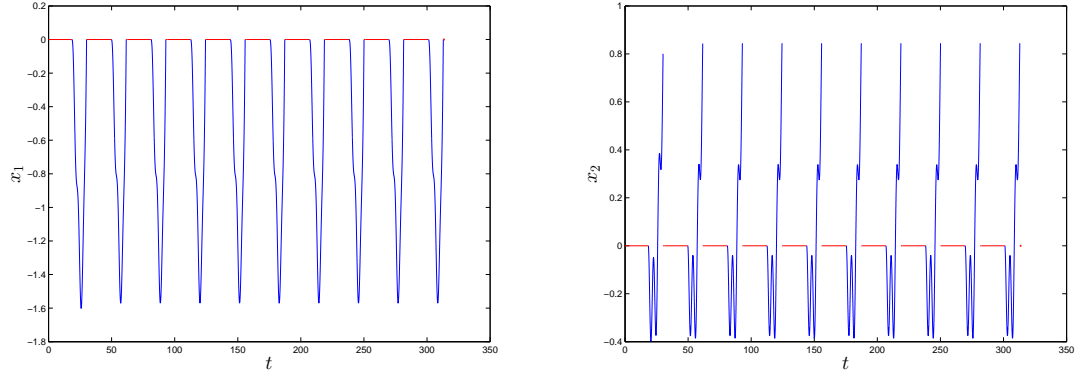
Obrázek 4.2: Řešení módu kontakt pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 1$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{6}$. Vlevo: Fázový portrét proměnných x_4 a x_3 . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.



Obrázek 4.3: Řešení módu kontakt pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 1$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{6}$. Vlevo: Graf závislosti λ_ν na t . Vpravo: Graf závislosti λ_τ na t .



Obrázek 4.4: Řešení módu kontakt se ztrátou kontaktu pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 0.5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$. Ztráta kontaktu nastala v čase $t_E = 18.440331645875439$. Vlevo: Graf závislosti λ_ν na t . Vpravo: Graf závislosti λ_τ na t .



Obrázek 4.5: Řetězení módu kontakt a módu bez kontaktu pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 0,5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$. Vlevo: Graf závislosti x_1 na t . Vpravo: Graf závislosti x_2 na t .

$u_\nu(t) < 0$ a $\lambda_\nu(t) = 0$. Z podmínky (4.3) dostáváme $\lambda_\tau(t) = 0$ pro $t \in J(t_0)$, tedy původní soustavu rovnic (4.1) lze napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} au_\nu''(t) &= bu_\nu(t) + cu_\tau(t) + f_\nu(t), \\ au_\tau''(t) &= cu_\nu(t) + bu_\tau(t) + f_\tau(t), \end{aligned}$$

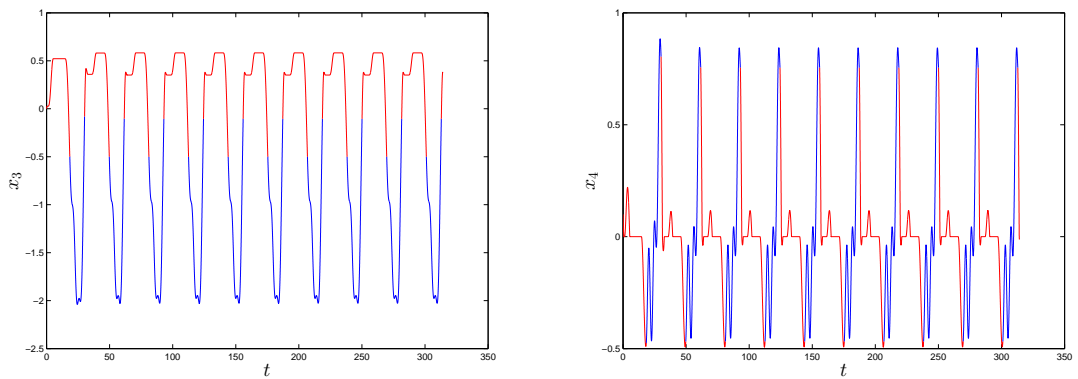
přičemž $u_\nu(t) < 0$. Tuto soustavu rovnic formulujeme jako autonomní systém s $t' = 1$, po přeznačení $x_1 = u_\nu$, $x_2 = u_\nu'$, $x_3 = u_\tau$ a $x_4 = u_\tau'$ definujeme vektorové pole $F_3 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ předpisem

$$F_3 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a}x_3 + f_\nu(x_5) \\ x_4 \\ \frac{c}{a}x_1 + \frac{c}{a}x_3 + f_\tau(x_5) \\ 1 \end{pmatrix},$$

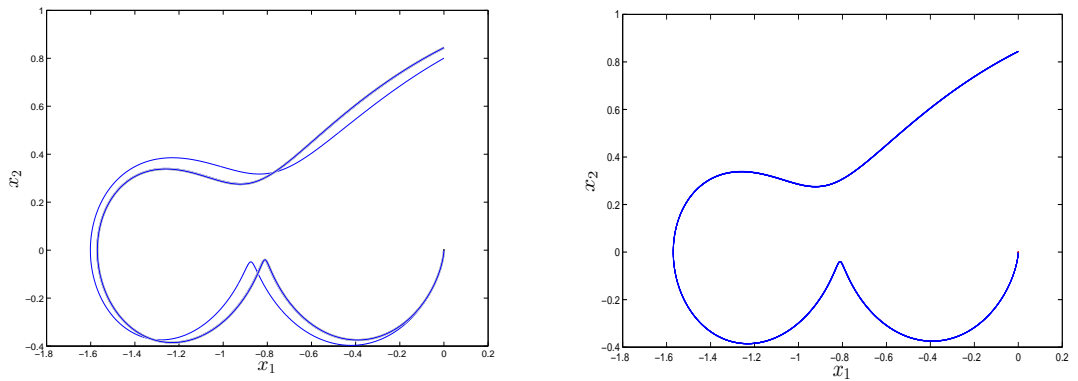
přičemž toto vektorové pole je definováno na oblasti $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^5; x_1 < 0\}$.

Dle předchozí sekce se případ, kdy nastane kontakt, řeší jako Filippovův systém. V okamžiku, kdy je kontakt přerušen, již nelze tento způsob řešení použít - dále řešíme systém jako model impaktního oscilátoru. Na obrázcích v následujícím příkladu 4.2 je kontakt vyznačen modrou barvou, ztráta kontaktu tělesa s podložkou je označena barvou červenou.

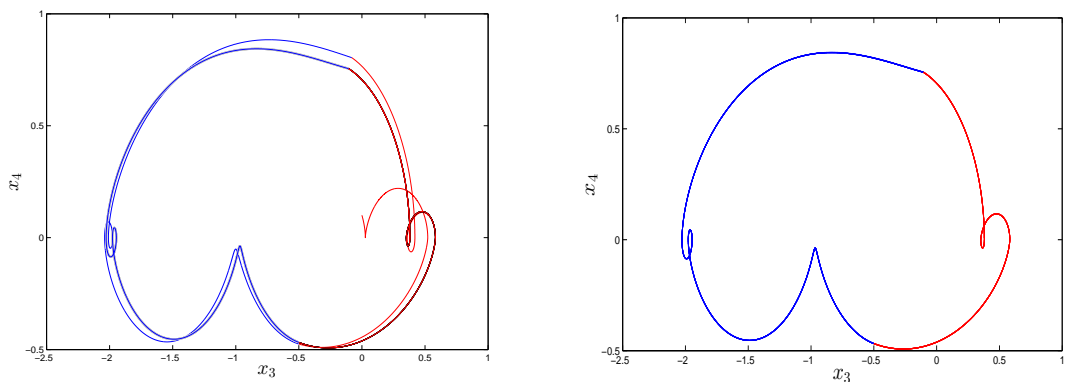
Příklad 4.3. Data: spojení kontaktu a bez kontaktu, $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 0,5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$, řešíme na intervalu $[0, 10 * T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Počáteční podmínka: $y_0 = [0, 0, 0, 0.1, 0]$. Výsledky jsou na obrázcích 4.5-4.9.



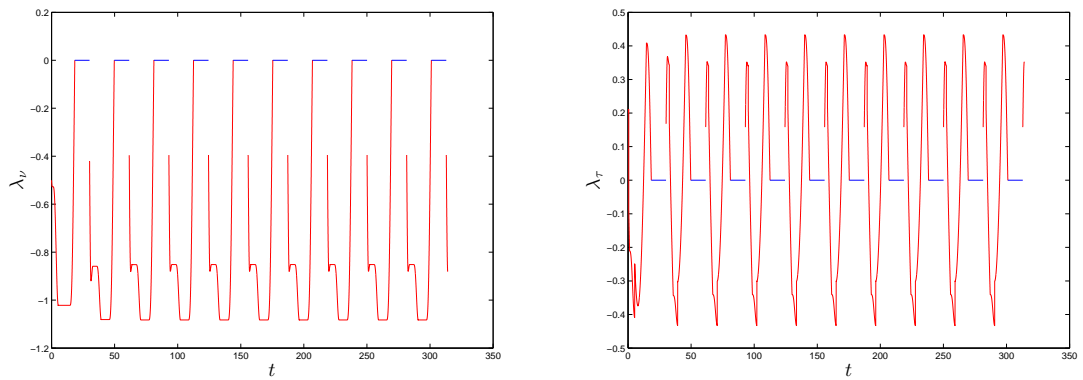
Obrázek 4.6: Řetězení módu kontakt a módu bez kontaktu pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 0,5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$. Vlevo: Graf závislosti x_3 na t . Vpravo: Graf závislosti x_4 na t .



Obrázek 4.7: Řetězení módu kontakt a módu bez kontaktu pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 0,5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$. Vlevo: Fázový portrét proměnných x_1 a x_2 . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.



Obrázek 4.8: Řetězení módu kontakt a módu bez kontaktu pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 0,5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$. Vlevo: Fázový portrét proměnných x_3 a x_4 . Vpravo: Numerická aproximace ω -limitní množiny.



Obrázek 4.9: Řetězení módu kontakt a módu bez kontaktu pro $a = 1$, $b = -1,2$, $c = 1$, $\mathcal{F} = 0.4$, $f_\nu(t) = 0,5$, $f_\tau(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{5}$. Vlevo: Graf závislosti λ_ν na t . Vpravo: Graf závislosti λ_τ na t .

Závěr

Přínosem práce je numerická analýza zjednodušeného modelu Coulombova tření. Model byl převzat z literatury Ligurský a Renard (2011), my jsme ho nazvali hoblík. V citované práci bylo numerické řešení založeno na použití metody konečných diferencí (středové pravidlo) bez adaptivní volby integračního kroku. V této bakalářské práci jsme použili jiných technik dynamické simulace: především se ukázalo, že model hoblíku je hybridní dynamický systém.

Lze jej charakterizovat jako *impaktní oscilátor*. Existují dva módy řešení: mód bez kontaktu (lineární oscilátor) a kontaktní mód (Filippovův systém). Kontaktní mód simulujeme technikou převzatou z Piironen a Kuznetsov (2008). Pro simulaci módu bez kontaktu máme na výběr standardní metody numerického řešení ODR, viz Shampine a Reichelt (1997). Přepínání obou módů indikuje funkce $\lambda_\nu(t)$. Simulační technika odvozená v kapitole 4 má výhodu adaptivní volby integračního kroku.

Původně se práce měla zabývat výhradně Filippovovými dynamickými systémy. Velmi známým příkladem je model suchého zipu, kterým se zabýváme v kapitole 4. Ukazujeme dva přístupy k formulaci problému: lze jej formulovat jako Filippovův systém (odstavec 2.1) nebo jako soustavu algebro-diferenciálních rovnic (odstavec 2.2). Druhý způsob reflektuje fyzikální odvození modelu.

Formulací modelu suchého zipu soustavou algebro-diferenciálních rovnic získáme nový parametr, Coulombovu sílu F_c . Pokud model suchého zipu řešíme jako Filippovův systém, tento parametr vůbec nemáme. Lze jej ovšem získat zpětně, což je popsáno v poznámce 2.8.

Při analyzování modelu Coulombova tření jsme si uvědomili, že software pro řešení Filippových systémů lze použít jen v případě, že nedojde ke ztrátě kontaktu. Kvůli řešení tohoto problému jsme uvedli kapitolu 3.

Literatura

- AUBIN, J.-P. a CELLINA, A. (1984). *Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory*. Springer Verlag.
- BABOVÁKOVÁ, J. (2012). *Oscilace mechanických systémů s implicitními konstitutivními vztahy*. Diplomová práce, MFF UK, Praha.
- BIÁK, M. (2015). *Piecewise Smooth Dynamical Systems*. PhD. Theses, University of Chemistry and Technology, Prague.
- BRANICKY, M. (2005). *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*. Birkhäuser Boston. Chapter: Introduction to Hybrid Systems, pp. 91-116.
- DARBHA, S., NAKSHATRALA, K. a RAJAGOPAL, K. (2010). On the vibrations of lumped parameter systems governed by differential-algebraic equations. *Journal of the Franklin Institute*, **347**, 87–101.
- DI BERNARDO, M., BUDD, C., CHAMPNEYS, A. a KOWALCZYK, P. (2008). *Piecewise-smooth Dynamical Systems, Theory and Applications*. Springer.
- FILIPPOV, A. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishes.
- GRUBHOFFEROVÁ, P. (2009). *Diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou*. bakalářská práce, MFF UK, Praha.
- HASLINGER, J., JANOVSKÝ, V. a LIGURSKÝ, T. (2012). Qualitative analysis of solutions to discrete static contact problems with Coulomb friction. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **205-208**, 149–161.
- HASLINGER, J., JANOVSKÝ, V., KUČERA, R. a MOTYČKOVÁ, K. (2015). Non-smooth continuation of parameter dependent static contact problems with Coulomb friction. *Mathematics and Computers in Simulation*.
- JANOVSKÝ, V. (2014). Lumped parameter friction models. *Proceedings of 4th Scientific Colloquium*, pages 132–149.
- KUNZE, M. (2000). *Non-Smooth Dynamical Systems*. Springer.
- KURZWEIL, J. (1978). *Obyčejné diferenciální rovnice*. Praha.
- LIGURSKÝ, T. a RENARD, Y. (2011). Quarterly journal of mechanics and applied mathematics. **64**, 215–238.

- PIIROINEN, P. a KUZNETSOV, Y. (2008). An event-driven method to simulate flippov systems with accurate computing of sliding motions. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **34**(3), Article 13.
- RAJAGOPAL, K. (2010). A generalized framework for studying vibrations of lumped parameter systems. *Mechanics Research Communications*, **37**, 463–466.
- SHAMPINE, L. a REICHEL, M. (1997). The matlab ode suit. *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, 1–18.